

LES MATHS DE NOËL

PREMIÈRE S

2021

Saïd

Avant-propos

Cet ouvrage propose aux élèves de première S des rappels et des compléments de cours assez complets du programme nationale ainsi que des exercices non corrigés contrairement aux exemples des cours soigneusement corrigés. Il peut également intéresser les élèves de terminal afin qu'il puisse combler certaines lacunes des années précédentes (second et première).

L'ouvrage est orienté sur une relation étroite qui existe entre le cours et les exercices.

Les parties des cours ne sont pas un substitut au cours du professeur, mais plutôt un résumé exhaustif qui l'éclaire d'une façon différente. De ce fait, votre présence en cours est très conseillée. Elle vous permettra de bien comprendre les cours et surtout d'avoir tous les atouts à votre disposition pour corriger les exercices.

À la fin du livre, on trouve une liste d'exercices pour chacun des chapitres étudiés dans la partie cours avec des difficultés progressives classiques ou parfois originaux qui constitue une illustration du cours. Je me suis efforcé à chaque fois de passer en revue tous les problèmes qui tournent autour du chapitre en question. À la fin de certains chapitres on trouve des exercices plus ou moins avancés pour mieux préparer le passage en terminal.

Je tiens enfin à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé, tout d'abord ALI ahmed (*Les alis peinture*) qui m'a fourni l'ordinateur utilisé tout au long du cursus.

Je serai reconnaissant à ceux de mes lecteurs qui me feront parvenir leurs remarques sur cet ouvrage dans l'adresse suivante : *lesmathsdenoel@gmail.com*.

Table des matières

1	Trinôme de seconde degré	4
1.1	Équation et inéquation d'un trinôme de seconde degré	4
1.1.1	Équation	4
1.1.2	Somme et produit des racines	5
1.1.3	Inéquation	5
1.2	Factorisation d'un trinôme de seconde degré	5
1.3	signe du trinôme de second degré	5
1.4	Variation d'un trinôme de second degré	6
1.5	Équation et trinôme bicarrés	7
1.6	Équation paramétrique	7
1.7	Équations et Inéquations irrationnelles	8
1.7.1	Équations irrationnelles	8
1.7.2	Inéquations irrationnelles	9
2	Étude d'une fonction	10
2.1	Limite d'une fonction	10
2.1.1	Limite à l'infini	10
2.1.2	Asymptote	10
2.1.3	Opération sur les limites	11
2.2	Continuité	11
2.2.1	Continuité à gauche	11
2.2.2	Continuité à droite	12
2.2.3	Opération sur les fonction continues	12
2.2.4	Prolongement	12
2.3	Dérivabilité et dérivées	12
2.3.1	Dérivabilité	12
2.3.2	Dérivées	13
2.4	Position relative d'une courbe par rapport à un droite	14
2.5	Théorème des valeurs intermédiaire	14
2.6	Inégalité des accroissement finis	14
2.7	Élément de symétrie	15
2.7.1	Axe de symétrie	15
2.7.2	Centre de symétrie	15
2.8	Parité d'une fonction	15
2.9	Exercice d'application	15
3	Les suites	17
3.1	Suite numérique	17
3.2	Suites arithmétiques	18

3.3	Suite géométrique	19
3.4	Raisonnement par récurrence	21
4	Barycentre	22
4.1	Barycentre de deux points pondéré	22
4.2	Barycentre de trois points pondéré	22
4.3	Fonction vectorielle de Leibniz	23
4.4	Lignes de niveaux	24
4.5	Fonction scalaire de Leibniz	25
5	Trigonométrie	27
5.1	Arcs, angles et cercle trigonométrique	27
5.1.1	Arcs et angle	27
5.1.2	Cercle trigonométrique	27
5.2	Fonction circulaire	27
5.2.1	Fonction sinus, cosinus, tangente et cotangente	27
5.2.2	Angles associés	28
5.2.3	Équation fondamentale	29
5.2.4	Formule d'addition	30
5.2.5	Formule de multiplication	30
5.2.6	Expression de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ et $\tan^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.	30
5.2.7	Transformation trigonométrique	30
5.2.8	Transformation en produit de la somme ou la différence de deux sinus ou deux cosinus	30
5.2.9	transformation en somme ou différence de sinus ou de cosinus	30
6	Exercice	31
6.1	Trinôme de seconde degré	31
6.2	Étude d'une fonction	32
6.3	Suites	35
6.4	Barycentre	36
6.5	Trigonométrie	38

1 Trinôme de seconde degré

Définition : On appelle polynôme de seconde degré toute polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Forme canonique

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \text{ avec } x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2$$

$$\text{On a : } a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})]$$

$$\text{Soit } \alpha = \frac{b}{2a} \text{ et } f(\alpha) = \beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}.$$

Alors la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a[(x - \alpha)^2 + \beta]$

1.1 Équation et inéquation d'un trinôme de seconde degré

1.1.1 Équation

On appelle équation de trinôme de seconde degré toute équation la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

D'après la forme canonique le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})]$

$$\text{Soit } \Delta = b^2 - 4ac \text{ on a : } a[(x - \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})]$$

- i. Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
- ii. Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une racine double

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- iii. Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distincte

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Cas particulier :

Si $b = 0$ l'équation devient $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$: Si a et c on des signes différents $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Si non pas de solution.

Si $c = 0$ l'équation devient $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{-b}{a}$

Si $a + b + c = 0$ $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$

Si $a - b + c = 0$ $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{-c}{a}$

1.1.2 Somme et produit des racines

Théorème : Pour que deux nombres distincts ou confondus x' et x'' soient racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, il faut et il suffit que leur **somme** soit égale à $-\frac{b}{a}$ et leur **produit** à $\frac{c}{a}$.

Preuve :

Pour $\Delta \geq 0$ l'équation admet deux solutions distinctes ou confondues :
 $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, donc $x' + x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a}$
 et $x' \times x'' = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$ donc $x' + x'' = \frac{-b}{a}$ et $x'.x'' = \frac{c}{a}$

Théorème : Si deux nombres x et y ont pour somme S et pour produit P ces deux nombres sont les racines de l'équation en X : $X^2 - SX + P$

1.1.3 Inéquation

Pour résoudre une inéquation de trinôme de seconde degré : on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ associé à l'inéquation, on en déduit le signe du trinôme sur \mathbb{R} . On détermine alors l'ensemble des solutions, en cherchant les valeurs de x vérifiant l'inéquation.

1.2 Factorisation d'un trinôme de seconde degré

Pour factoriser un trinôme de seconde degré, soit on utilise la forme canonique, soit on utilise le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- i. Si $\Delta < 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles.
- ii. Si $\Delta = 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$ donc :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

- iii. Si $\Delta > 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes
 $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

1.3 signe du trinôme de second degré

- i. Si $\Delta < 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles. Donc il est du signe de coefficient de x^2 quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

- ii. Si $\Delta = 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Donc il est du signe de coefficient de x^2 pour toute valeur de $x \neq x_0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- iii. Si $\Delta > 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes, il est du signe de a coefficient de x^2 pour toute valeur de x extérieur des racines et du signe opposé pour toute valeur de x comprise entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de - a	0	signe de a

1.4 Variation d'un trinôme de second degré

La variation d'un trinôme de second degré dépend de a .

Si $a > 0$ le trinôme est décroissant sur $] -\infty, \alpha]$ et croissant sur $[\alpha, +\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$f(\frac{-b}{2a})$	$+\infty$

Si $a < 0$ le trinôme est croissant sur $] -\infty, \alpha]$ et décroissant sur $[\alpha, +\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$f(\frac{-b}{2a})$	$-\infty$

Remarque : la courbe d'une fonction de second degré est une parabole ayant pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ et pour sommet $s(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

Exemple : Soit E une fonction de degré définie sur \mathbb{R} par : $E(x) = 2x^2 - 5x + 2$

1. Résoudre l'équation $E(x) = 0$.
2. Factoriser $E(x)$.
3. Étudier le signe de $E(x)$.
4. Résoudre l'inéquation $E(x) \geq 0$.
5. Étudier la variation de $E(x)$

Solution :

1. $\Delta = 25 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 > 0$, donc l'équation $E(x) = 0$ admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{5-\sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$ donc $S = \{\frac{1}{2}; 2\}$

2. $E(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x - 2)$

3.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$	$+$	0	$-$	$+$

4. D'après le tableau de signe : $S =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$.

5.

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		\searrow	\nearrow
		$E(\frac{5}{4})$	

1.5 Équation et trinôme bicarrés

Définition : On appelle trinôme bicarré tout polynôme de la forme :

$$ax^{2n} + bx^n + c \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre l'équation bicarrée $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, on pose : $x^n = y$ et l'équation devient $ax^2 + bx + c$. $\Delta = b^2 - 4ac$

Supposons que $\Delta = 0$ l'équation $ay^2 + by + c = 0$ admet une solution double y_0 .

Pour trouver les solutions de l'équation $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, on doit remplacer y par sa valeur $y = x^n \Rightarrow x^n = y_0$.

Si n est pair, $y_0 > 0$ $x^n = y_0$ admet comme solutions $\pm \sqrt[n]{y_0}$

Si n est impair, $y_0 < 0$ $x^n = y_0$ n'admet pas de solution.

Si n est impair, $y_0 > 0$ $x^n = y_0$ admet comme solutions $\sqrt[n]{y_0}$

Remarque : Si $\Delta > 0$ les solutions y_1 et y_2 doivent suivre les mêmes étapes.

1.6 Équation paramétrique

Pour résoudre dans \mathbb{R} une équation paramétrique, on peut procéder la manière suivant :

On étudie éventuellement le cas où l'équation n'est pas du second degré ($a = 0$).

Dans le cas où l'équation est du second degré $a \neq 0$, on calcule Δ et on étudie le signe de Δ suivant les valeurs du paramètre.

On détermine dans chaque cas le nombre de solution et on calcule les solutions.

Remarque : Si la valeur de a ne dépend pas du paramètre m , on calcule directement $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple : Étudie suivant la valeur de m l'existence des racine de l'équation

$$(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m-1 = 0$$

Solution :

Si $m-4=0 \Rightarrow m=4$ l'équation est du premier degré car,

$$(4-4)x^2 - 2(4-2)x + 4-1 = 0 \Rightarrow -4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Si $m-4 \neq 0$ donc $m \neq 4$ l'équation est du second degré. Calculons le discriminant

$$\Delta = (-2(m-2))^2 - 4(m-4)(m-1) = 4m^2 - 16m + 16 - 4m^2 + 20m - 16 = 4m.$$

Si $\Delta < 0 \Rightarrow 4m < 0 \Rightarrow m < 0$, donc l'équation n'a pas de solution pour tout $m \in]-\infty, 0[$.

Si $\Delta = 0 \Rightarrow m = 0$, l'équation admet une racine double

$$x_0 = \frac{2(m-2)}{2(m-4)} = \frac{m-2}{m-4} = \frac{0-2}{0-4} = \frac{1}{2} \text{ donc } x_0 = \frac{1}{2}.$$

Si $m > 0$ l'équation admet deux racines distinctes,

$$x_1 = \frac{2(m-2) - \sqrt{4m}}{2(m-4)} = \frac{m-2-\sqrt{m}}{m-4} \text{ et } x_2 = \frac{m-2+\sqrt{m}}{m-4}$$

1.7 Équations et Inéquations irrationnelles

1.7.1 Équations irrationnelles

Définition : Une équation est dite irrationnelle lorsque l'inconnue (x) figure sous un ou plusieurs radicaux.

Forme $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Si $g(x) < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.

Si $g(x) \geq 0$, l'équation existe si et seulement si $\begin{cases} f(x) \geq 0 \rightarrow D' \\ g(x) \geq 0 \rightarrow D'' \end{cases}$

Donc le domaine de définition est $D = D' \cap D''$, après on enlève au carré chaque membre $(\sqrt{f(x)})^2 = (g(x))^2$

$(\sqrt{f(x)})^2 = (g(x))^2$, la solution à conserver c'est la valeur de x qui appartient au domaine de définition.

Forme $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$.

l'équation existe si et seulement si $\begin{cases} f(x) \geq 0 \rightarrow D' \\ g(x) \geq 0 \rightarrow D'' \\ h(x) \geq 0 \rightarrow D''' \end{cases}$

Donc le domaine de définition est $D = D' \cap D'' \cap D'''$, après on enlève au carré à chaque membre $(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)})^2 = (h(x))^2$

Exemple : Résolvez l'équation $\sqrt{2x+11} = \sqrt{2x-13} + \sqrt{2(x+1)}$

Solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x+11} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{2} \Rightarrow D' = [-\frac{11}{2}, +\infty[. \\ \sqrt{2x-13} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{13}{2} \Rightarrow D'' = [\frac{13}{2}, +\infty[. \\ \sqrt{2x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow D''' = [1, +\infty[. \end{array} \right.$$

Donc le domaine de définition est $D = D' \cap D'' \cap D''' = [\frac{13}{2}, +\infty[$.

$$(\sqrt{2x+11})^2 = (\sqrt{2x-13} + \sqrt{2(x+1)})^2 \Rightarrow 2x+11 = 2x-13 + 2x+2 + 2\sqrt{(2x-13)(2x+2)} \Rightarrow -x+11 = \sqrt{(2x-13)(2x+2)} \Rightarrow x^2 - 22x + 121 = 4x^2 - 22x - 26 \Rightarrow 3x^2 - 147 = 0 \Rightarrow x^2 - 49 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-7) = 0.$$

Donc $x = -7$ ou $x = 7$ comme $-7 \notin D$, on a $S = 7$.

1.7.2 Inéquations irrationnelles

Pour les inéquations irrationnelles, il suffit de suivre les mêmes méthodes que les équations et on résout l'inéquation en fonction de l'inégalité.

Exemple : Résoudre l'inéquation $x + 3 > \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$

Solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3 \Rightarrow D' = \mathbb{R}. \\ \sqrt{2x^2 - 5x - 3} \geq 0 \Rightarrow D'' =]-\infty, \frac{-1}{2}] \cup [3, +\infty[. \end{array} \right.$$

Donc le domaine de définition est $D = D' \cap D'' =]-\infty, \frac{-1}{2}] \cup [3, +\infty[$.

$$(x+3)^2 > 2x^2 - 5x - 3 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 > 2x^2 - 5x - 3 \Rightarrow x^2 - 11x - 12 < 0$$

$$\Delta = 121 + 48 = 169 \text{ donc } s' =]-1; 12[\text{ comme } D =]-\infty, \frac{-1}{2}] \cup [3, +\infty[.$$

On a $S =]-1; \frac{-1}{2}] \cup [3; 12[$

2 Étude d'une fonction

2.1 Limite d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur une ensemble de définition D_f . On dit que la fonction f admet une limite l lorsque x tend vers x_0 .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Si $x_0 \in D_f$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Si $x_0 \notin D_f$, on trouve soit une forme indéterminé $\frac{0}{0}$; $\infty \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$, soit une forme impossible $\frac{k}{0}$ dans se cas on calcule les limites à gauche et à droite de $x_0(x_0^-$ et $x_0^+)$ comme $k \in \mathbb{R}$

On a : Si $(k < 0)$ $\frac{k}{0^-} = +\infty$ et $\frac{k}{0^+} = -\infty$ et si $(k > 0)$ $\frac{k}{0^-} = -\infty$ et $\frac{k}{0^+} = +\infty$

Remarque : Dans les forme impossible, pour déterminer le signe de 0, il faut déterminer le signe du dénominateur dans l'intervalle ou x_0 est négative on aura 0^- et si x_0 est positive on aura 0^+ .

N.B : On dit qu'une fonction admet une limite l au point d'abscisse x_0 (avec $x_0 \in D_f$) lorsqu'on a la même limite à gauche et à droite de x_0 ,

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) = l$

2.1.1 Limite à l'infini

- i. **Fonction polynôme :** La limite à l'infini d'une fonction polynôme est *égale* à la limite du monôme du **plus hauts degré**.
- ii. **Fonction rationnelle :** La limite à l'infini d'un fonction rationnelle est égale à la limite du **quotient** des termes **du plus hauts degré au numérateur et au dénominateur**

2.1.2 Asymptote

Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle I

Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, on dit que la fonction f admet une

asymptote horizontale d'équation $y = a$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$ avec $b \in \mathbb{R}$ on dit que la fonction f admet une

asymptote verticale d'équation $x = b$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = c$, on dit que la fonction f admet une **asymptote oblique** d'équation $y = mx + c$.

Remarque : Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ mais $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$ n'existe pas ou égale infinie, f n'admet pas une asymptote oblique.

Propriété : On dit qu'une fonction f admet une asymptote oblique $\Delta : y = mx + c$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y) = 0$.

2.1.3 Opération sur les limites

Soient f et g deux fonctions respectivement définies sur D_f et D_g .

Somme : $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Produit : $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Quotient : $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ (avec $g(x) \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$)

Tableau de résumer sur les opérations des limites

Somme

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit

f	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
g	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	forme indéterminée

Quotient

f	l	$\pm\infty$	$l \neq 0$	l	0	$\pm\infty$
g	$l' \neq 0$	$l' = 0$	0^\pm	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	forme indéterminée	forme indéterminée

2.2 Continuité

une fonction f est définie dans un voisinage de x_0 , est dite continue au point d'abscisse x_0 si $\begin{cases} h(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0) \end{cases}$

2.2.1 Continuité à gauche

On dit qu'une fonction est continue à gauche si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} = h(x_0)$

2.2.2 Continuité à droite

On dit qu'une fonction est continue à droite si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} = h(x_0)$

Remarque : On dit qu'une fonction est continue en x_0 lorsqu'elle est continue à gauche et à droite.

2.2.3 Opération sur les fonction continues

Théorème :

1. Si s et h sont deux fonctions continues au point x_0 , alors $(s+h)$ est continue en ce point.

En effet, $s(x_0)$ et $h(x_0)$ existants $s(x_0) + h(x_0)$ est défini.

De plus, $\lim_{x \rightarrow x_0} (s(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} s(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = s(x_0) + h(x_0)$

2. Si s est continue au point x_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha s(x)$ est continue en x_0 .
3. Si s et h deux fonctions sont continue au point x_0 , alors $s \times h$ est continu en ce point.

De plus, si $h(x) \neq 0$ alors $\frac{s(x)}{h(x)}$ est continue en x_0

Remarque : On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est définie sur I et continue en tous point de I .

2.2.4 Prolongement

Soit s une fonction défini sur son intervalle de définition et $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = m$ avec $m \in \mathbb{R}$, On appelle prolongement par continuité en x_0 la

fonction noté h tels que :
$$\begin{cases} h(x) = s(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ h(x) = m & \end{cases}$$

$h(x)$ est la restriction de $s(x)$ sur l'ensemble de définition.

2.3 Dérivabilité et dérivées

2.3.1 Dérivabilité

Définition : s est dérivable en un point d'abscisse x_0 si et seulement si :

$$\begin{cases} s(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Remarque :

- i. s est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite de x_0 .
- ii. Le nombre dérive note $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0}$ est le coefficient directeur de la tangente.

2.3.2 Dérivées

$s(x)$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . On appelle fonction dérivée de la fonction s la fonction qui a pour tout x associe le nombre dérivée de s . On la note s' ou $\frac{ds}{dx}$.

Fonction de référence

fonction de référence	dérive	intervalle de définition
x	1	\mathbb{R}
x^2	$2x$	\mathbb{R}
x^n	nx^{n-1}	\mathbb{R}
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+^*
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*

Opération sur les fonction

Structure de la fonction	structure de la dériver
$au + bv$	$au' + bv'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Fonction trigonométrique

Structure de la fonction	structure de la dériver
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u))$

Équation de la tangente :

L'équation de la tangente à la courbe représentative de s au point d'abscisse x_0 est donné par :

$$T : y = s'(x_0)(x - x_0) + s(x_0)$$

Sens de variation :

Une fonction $s(x)$ est **constante** sur tout l'intervalle où sa dérivée $s'(x)$ est **nulle**. Elle est **croissante** sur tout intervalle où sa dérivée est **positive**. Elle est **décroissante** sur tout intervalle où sa dérivée est **négative**.

Extrémum d'une fonction :

On dit que la fonction s admet un extremum (*maximum ou minimum*) en x_0 si et seulement si $s'(x_0) = 0$ et elle change de signe autour de x_0 . si elle change de signe positive au négative autour de x_0 alors on a un **maximum**. Si elle change de négative au positive autour de x_0 alors on a un **minimum**.

Point d'inflexion :

Si une fonction s est deux fois dérivable sur un intervalle de centre x_0 et si sa dérivée seconde s'annule ($y'' = 0$) et change de signe en x_0 , la représentation graphique admet un point d'inflexion d'abscisse x_0 .

Remarque : Lorsque y'' s'annule sans changer de signe, on dit qu'on a affaire à une *inflexion non apparente* ou que la courbe $y = s(x)$ présente un *point méplat*.

2.4 Position relative d'une courbe par rapport à une droite

Pour étudier la position relative d'une courbe par rapport à une droite, on étudie le signe de $s(x) - y$ avec $s(x)$ l'équation de la courbe et y l'équation du droite.

- i. Si $s(x) - y < 0$ donc la courbe est au dessous de la droite (D/ε).
- ii. Si $s(x) - y > 0$ donc la courbe est au dessus de la droite (ε/D)
- iii. Si $s(x) - y = 0$ en un point A , on dit que A est point d'intersection de la droite D et la courbe ε .

2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $a < b$ deux réels et s une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$. Si $s(a)$ et $s(b)$ sont de signe contraires alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tels que $s(\alpha) = 0$

Remarque : Si $s(a) \times s(b) < 0$ alors l'équation $s(x) = 0$ admet une et unique solution $\alpha \in [a, b]$.

2.6 Inégalité des accroissement finis

Théorème : Soit s une fonction définie sur un intervalle I , a et b deux éléments de I tel que $a \leq b$.

- i. il existe deux réel m et M tel que pour tous $x \in [a, b]$, $m \leq s'(x) \leq M$ alors $m(b - a) \leq s(b) - s(a) \leq M(b - a)$
- ii. il existe un nombre réel M tel que pour tous $x \in [a, b]$, $|s'(x)| \leq M$ alors $|s(b) - s(a)| \leq M|b - a|$

2.7 Élément de symétrie

2.7.1 Axe de symétrie

Définition : On dit que la courbe (ε) admet un axe de symétrie d'équation $x = a$ si et seulement si :
$$\begin{cases} \forall x \in D_s : 2a - x \in D_s \\ s(2a - x) = s(x) \end{cases}$$

2.7.2 Centre de symétrie

Définition : On dit que la courbe (ε) admet un centre de symétrie le point $I(a, b)$ si et seulement si :
$$\begin{cases} \forall x \in D_s : 2a - x \in D_s \\ s(2a - x) + s(x) = 2b \end{cases}$$

2.8 Parité d'une fonction

Soit s une fonction définie sur son ensemble de définition D_s .

On qu'une fonction est **paire** si et seulement si :
$$\begin{cases} \forall x \in D_s \\ s(-x) = s(x) \end{cases}$$

On qu'une fonction est **impaire** si et seulement si :
$$\begin{cases} \forall x \in D_s \\ s(-x) = -s(x) \end{cases}$$

Étape pour la courbe d'une fonction

1^{ère} étape : On trace le repère donné par l'énoncé.

2^{ème} étape : On trace les asymptotes ainsi que les tangentes si la fonction en possède.

3^{ème} étape : On trouve les éléments de symétrie et de translation que la courbe peut présenter.

4^{ème} étape : On place les points particuliers appartenant à la courbe (les extremum et les points d'intersections entre la courbe et les axes s'il en existe).

5^{ème} étape : On place les points quelconque appartenant à la courbe, on trace la courbe passant par tous les points mentionné en respectant les variations du tableau de variation.

2.9 Exercice d'application

Soit $s(x)$ la fonction définie sur \mathbb{R} par $s(x) = \frac{(x-1)^2}{2x-4}$ définie sur $D_s = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1. Calculer les limites aux bornes de D_s .

En déduit les asymptotes.

2. Montrer que $s'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{2(x-2)^2}$ et Tracer le tableau de variation de $S(x)$.

3. Montrer que la fonction $s(x)$ admet une asymptote oblique que l'on déterminera son équation. Et Déterminer leur position relative.
4. Tracer la courbe représentative (C) de la fonction $s(x)$.
5. Étudie graphiquement suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation : $x^2 - 2(m+1)x + 4m + 1 = 0$.

Solution :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)^2}{2x-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} s(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)^2}{2x-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

La fonction $s(x)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

$$2. s'(x) = \frac{2(x-1)(2x-4) - 2(x-1)^2}{(2x-4)^2} = \frac{(x-1)(4(x-2) - 2(x-1))}{(2x-4)^2} = \frac{(x-1)(2x-6)}{4(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{2(x-2)^2}$$

3. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) - \frac{x}{2} = 0$ on en déduit que la fonction $s(x)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{2}$.

Position relative : $s(x) - \frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2(x-2)} \geq 0$. Or $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

On en déduit que pour tout $x \in]-\infty; 2[$ $s(x)$ est au dessous de y et pour tout $x \in]2; +\infty[$ $s(x)$ est au dessus de y

4. représentation graphique.

5. $x^2 - 2(m+1)x + 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x-4} = m$. Pour résoudre cet équation, il suffit de trouver les nombres de points commun entre la courbe de $s(x)$ et la droite d'équation $y = m$.

Si $m < 0$ ou $m > 2$, deux racines réelles

Si $m = 0$ ou $m = 2$, une racine double

Si $0 < m < 2$ pas des racines réelles.

3 Les suites

3.1 Suite numérique

Définition : On appelle suite numérique toute fonction numérique définie sur \mathbb{N} ou sur l'ensemble des entiers supérieurs à un certain entier naturel n_0 .

La suite est notée : $\begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \rightarrow u_n = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$

Théorème :

Soit (u_n) une suite définie sur l'ensemble des entiers supérieurs à un certain entier naturel n_0 . On dit que :

1. la suite (u_n) est **croissante** (resp **strictement croissante**) si et seulement si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$ (resp $u_{n+1} \geq u_n$) ;
2. la suite (u_n) est **décroissante** (resp **strictement décroissante**) si et seulement si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$ (resp $u_{n+1} \leq u_n$) ;
3. La suite u_n est **constante** si et seulement si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$;
4. Si une suite est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est **monotone**.

Théorème :

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$. On dit que :

- a. la suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$;
- b. la suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq m$;
- c. la suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème : Convergence monotone

- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

Propriétés

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.

- i. Si (u_n) est croissante sur $[n_0, +\infty[$ alors pour tout $n \geq p \geq n_0$ on a $u_n \geq u_p$.
- ii. Si (u_n) est décroissante alors pour tout $n \geq p \geq n_0$ on a $u_n \leq u_p$.

Théorème de comparaison

Les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

— si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \alpha$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$ (*théorème de gendarme*)

3.2 Suites arithmétiques

Définition : La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dit **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

. Le réel r ainsi définie est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) .

Expression explicite d'une suite arithmétique

Connaissant la valeur du première terme u_0 et la raison r d'une suite arithmétique, on peut le définir par :

$$u_n = nr + u_0$$

théorème général

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique de raison r alors pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq n_0$ on a :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Remarque : La différence entre deux termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à la raison r .

Variation d'une suite arithmétique

Une suite arithmétique de raison r est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

Limite d'une suite arithmétique

La limite d'une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq n_0}$ dépend de la raison r .
Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Propriété : Somme des termes

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est le *produit du nombre de terme et la moyenne des termes extrêmes*.

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique alors pour tout $p \geq n_0$ et pour tout $n \geq p$,

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{dernier} + \text{premier terme}}{2}$$

En particulier : $\sum_{k=p}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ définie par : $u_2 = 8$ et $u_5 = -7$

1. Calculer la raison r de cette suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n , en déduire u_0 .
3. Déterminer la limite et le sens de variation de u_n .
4. Calculer les sommes suivantes : $s_{200} = u_0 + u_1 + \dots + u_{200}$
et $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Solution :

- | | |
|--|--|
| | <ol style="list-style-type: none"> 1. On sait que $u_5 = u_2 + (5 - 2) \times r \Rightarrow r = \frac{u_5 - u_2}{5 - 2} = \frac{-7 - 8}{5 - 2} = -5$. 2. $u_n = -5n + u_0$ Pour $n = 2$ on a $8 = -5 \times 2 + u_0 \Rightarrow u_0 = 18$. 3. Comme $r < 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et u_n est strictement décroissante. 4. $S_{200} = 201 \times \frac{u_{200} + u_0}{2}$ et $S_n = (n + 1) \times \frac{u_n + u_0}{2}$. |
|--|--|

3.3 Suite géométrique

Définition : La suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est dit **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

Le réel q ainsi définie est appelé **raison** de la suite géométrique (v_n) .

Expression explicite d'une suite géométrique

Connaissant la valeur du premier terme v_0 et la raison q d'une suite géométrique, on peut le définir par :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

théorème général

Si $(v_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique de raison $q \neq 0$ alors pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq n_0$ on a :

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Remarque : Le quotient de deux suites géométriques successives est égale à la raison q .

Variation d'une suite géométrique

v_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul v_0 .

Pour $v_0 > 0$:

— Si $q > 1$ alors la suite v_n est **croissante**.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite v_n est **décroissante**.

Pour $v_0 < 0$:

— Si $q > 1$ alors la suite v_n est **décroissante**.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite v_n est **croissante**.

Limite d'une suite arithmétique

La limite d'une suite géométrique $(v_n)_{n \geq n_0}$ dépend de la raison q .

— Si $-1 < q < 1$; alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

— Si $q > 0$; $v_0 > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.

— Si $q > 0$; $v_0 < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$.

Propriété : Somme de termes

Si $(v_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors pour tout $p \geq n_0$ et pour tout $n \geq p$,

$$\sum_{k=p}^n v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

En particulier, pour tout réel, $q \neq 0$: $\sum_{k=1}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exemple : On considère la suite u_n et définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

1. Calculer u_1 .

2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a. Établir que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite v_n est une suite géométrique qu'on déterminera la raison et le premier terme.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

c. calculer $S_{200} = v_0 + v_1 + \dots + v_{200}$ et $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

d. Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n .

Déterminer la limite de v_n et de u_n .

Solution :

1. $u_1 = \frac{2+2}{2(2)+1} = \frac{4}{5}$
2. a. $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1}+1} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3}$
b. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{-u_n+1}{3u_n+3}}{\frac{-u_{n-1}+1}{3u_{n-1}+3}} = \frac{-(u_n-1)}{3(u_n+1)} \times \frac{u_{n-1}+1}{u_{n-1}-1} = \frac{-1}{3}$. Donc v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{-1}{3}$ et de première terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$. Donc $v_n = (\frac{1}{3})(\frac{-1}{3})^n$.
c. $S_{200} = \frac{(\frac{-1}{3})^{201}-1}{\frac{-1}{3}+1}$ et $S_n = \frac{(\frac{-1}{3})^{n+1}-1}{\frac{-1}{3}+1}$
d. $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1} \Rightarrow v_n(u_n+1) = u_n-1 \Rightarrow u_n = \frac{v_n+1}{1-v_n}$ donc $u_n = \frac{(\frac{1}{3})(\frac{-1}{3})^n+1}{1-(\frac{1}{3})(\frac{-1}{3})^n}$.
comme $1 < \frac{-1}{3} < 1 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3.4 Raisonnement par récurrence

pour démontrer par récurrence qu'une proposition liée à un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$, on procède en trois étapes.

Initialisation : On vérifie la proposition au rang initial n_0 .

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un rang quelconque $k (k \geq n_0)$ et on démontre que, sous cette hypothèse, elle est vraie au rang suivant $k+1$. On dit alors que la proposition est héréditaire.

L'hypothèse $\ll \mathbb{P}_k$ est vraie \gg est appelée hypothèse de récurrence.

Conclusion : L'axiome ci-dessus permet de conclure que la proposition est alors vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple : Démontrer que pour tout entier $n \geq 1 : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Solution :

On commence par écrire la propriété que l'on veut démontrer : Soit $P(n) : 1 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Initialisation : Vérifions que $P(1)$ est vraie $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que ça entraîne que $P(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, $1 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On déduit que : $1 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

On déduit que : $1 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{n^2}{4} + n + 1)$.

On déduit que : $1 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{n^2+4n+4}{4})$

On déduit que : $1 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang 1 et est héréditaire à partir du rang 1, Donc par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

4 Barycentre

4.1 Barycentre de deux points pondéré

Définition : Un point pondéré est un couple $(A; \alpha)$ formé d'un point A et d'un coefficient réel α .

Définition : Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et A et B deux points du plan.

On appelle **barycentre** de deux points pondérés $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ l'ensemble des points G tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Notation : $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

Préposition :

- i. Soit M un point du plan et $M \neq G$ on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{MB}$
- ii. Si on pose $M = A$ on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB}$

Preuve :

- i. Soit M un point du plan et $M \neq G$ $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ en appliquant la relation de Chasles on a : $\alpha(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + \beta(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB})$
 $= (\alpha + \beta) \overrightarrow{GM} + \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{MB}$
- ii. Si on pose $M = A$ on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB}$

Définition : Isobarycentre

On parle d'un **isobarycentre** de deux points pondérés lorsque les coefficients α et β sont égaux ($\alpha = \beta$). Dans ce cas G est le milieu du segment $[AB]$.

Coordonner du barycentre de deux points pondérés

Soient A et B deux points du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et $G = \text{bar}(A, \alpha), (B, \beta)$, on a :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

4.2 Barycentre de trois points pondéré

Définition : Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et A, B et C trois points du plan.

On appelle **barycentre** des trois points pondérés $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ l'ensemble des points G tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Notation : $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

Remarque : Si $\alpha = \beta = \gamma$ on dit que G est ***l'isobarycentre*** de trois points pondérés $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$. Dans ce cas G est le centre de gravité du triangle ABC.

Préposition :

- i. Soit M un point du plan et $M \neq G$ on a :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{MC}$$
- ii. Si on pose $M = A$ on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{AC}$

Preuve : Même méthode qu'avec deux points.

Coordonner du barycentre de trois points pondérés

Soient A et B deux points du repère (o, \vec{i}, \vec{j}) si $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ et $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ on a :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

4.3 Fonction vectorielle de Leibniz

Soit $(A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ un système de n points pondérés.

On appelle fonction vectorielle de Leibniz associé à la famille $(A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$,

l'application :
$$\begin{cases} f : X \rightarrow V \\ M \rightarrow f(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k} \end{cases}$$

Théorème :

- Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$ f est bijective et il existe une et unique point G tel que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}, G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}.$$
- Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$ f constant.

Homogénéité du barycentre :

Soit $S = \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ avec $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$ et $\lambda \neq 0$.

Si $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ alors $G = \text{bar}\{(A_1, \lambda\alpha_1), (A_2, \lambda\alpha_2), \dots, (A_n, \lambda\alpha_n)\}$.

Cas particulier n = 3 : Si $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, on a : $G = \text{bar}\{(A, \lambda\alpha), (B, \lambda\beta), (C, \lambda\gamma)\}$

Théorème du barycentre partielle :

Soit $S = \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_i, \alpha_i), (A_{i+1}, \alpha_{i+1}), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$
 Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$, il existe G tel que $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_i, \alpha_i), (A_{i+1}, \alpha_{i+1}), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$
 Si $\sum_{k=1}^i \alpha_k \neq 0$, il existe G_1 tel que $G_1 = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_i, \alpha_i)\}$
 Si $\sum_{k=i+1}^n \alpha_k \neq 0$, il existe G_2 tel que $G_2 = \{(A_{i+1}, \alpha_{i+1}), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$
 Donc $G = \text{bar}\{(G_1, \sum_{k=1}^i \alpha_k), (G_2, \sum_{k=i+1}^n \alpha_k)\}$

Cas particulier $n = 3$:

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ on a : $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$.
 si $\alpha + \beta \neq 0$ on a : $G_1 = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ donc $G = \text{bar}\{(G_1, \alpha + \beta), (C, \gamma)\}$.

4.4 Lignes de niveaux

Soit f une application tel que : $\begin{cases} f : P \longrightarrow \mathbb{R} \\ m \longrightarrow f(m) \end{cases}$

On appelle **lignes de niveaux** $k \in \mathbb{R}$ l'ensemble des M du plan qui vérifie :

$$f(m) = k$$

Ensemble des point M tels que $MA = K$

$$f(m) = MA \Leftrightarrow MA = k$$

- Si $k < 0$ l'ensemble des points M cherchés est vide.
- Si $k = 0$ l'ensemble des points M cherchés est réduit en A ; $\{A\}$.
- Si $k > 0$ l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre A et de rayon k .

Ensemble des point M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{U} = K, U \neq 0$

- Si $k = 0$, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{U} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \vec{U}$ donc l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par A perpendiculaire à \vec{U} .

- Si $k \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \vec{U} = K \neq 0$.

Soit H le projeté orthogonal de M sur $D(A, \vec{U})$, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{U} = k \Rightarrow (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot \vec{U} = k \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{U} + \overrightarrow{HA} \cdot \vec{U} = k$, comme $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{U} = 0$.

On a : $\overrightarrow{HA} \cdot \vec{U} = k$.

Donc, M décrit la droite passant par H est perpendiculaire à \vec{U} .

Déterminons H : $H \in D(A, \vec{U})$ donc \overrightarrow{AH} et \vec{U} sont colinéaire.

Donc, $\overrightarrow{HA} = \alpha \vec{U}$ avec $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Alors, $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{U} = k \Rightarrow \alpha \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} = k \Rightarrow \alpha \overrightarrow{U}^2 = k \Rightarrow \alpha = \frac{k}{\|\overrightarrow{U}\|^2}$.

Ensemble des point M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = K$

- Si $k = 0$ on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. donc l'ensemble des points M cherchés est le cercle de diamètre $[AB]$.
- Si $k \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = K \neq 0$. Soit I milieu du $[AB]$, on a : $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k \Rightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = k \Rightarrow MI^2 - IA^2 = k \Rightarrow MI^2 = k + IA^2$.
 - Si $k + IA^2 < 0$ l'ensemble des points M cherchés est l'ensemble vide.
 - si $k + IA^2 = 0$ l'ensemble des points M cherchés est le singleton $\{I\}$.
 - Si $k + IA^2 > 0$ l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + IA^2}$.

4.5 Fonction scalaire de Leibniz

Soit $(A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ un système de n points pondérés.

On appelle fonction scalaire de Leibniz associé à la famille $(A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$,

$$\text{l'application : } \begin{cases} \varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \rightarrow \varphi(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k}^2 \end{cases}$$

Théorème :

- i. Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$, alors $\varphi(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k MG^2 + \varphi(G)$ avec $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$
- ii. Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$, alors , $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MI} \cdot g(I) + \varphi(I)$

Preuve :

Soit I un point du plan. $MA_k^2 = \overrightarrow{MA_k}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_k})^2 = MI^2 + IA_k^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_k}$
 $\varphi(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 = \alpha_1 (MI^2 + IA_1^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (MI^2 + IA_2^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (MI^2 + IA_n^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_n}) =$
 $\sum_{k=1}^n \alpha_k MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{IA_k} \right) + \varphi(I)$. Posons $\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{IA_k} = g(I)$ on a :
 $\varphi(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k MI^2 + 2\overrightarrow{MI} g(I) + \varphi(I)$
 - Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$, $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$. Posons, $I = G$
 on a : $\varphi(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k MG^2 + 2\overrightarrow{MG} g(G) + \varphi(G)$ comme $g(G) = 0$,
 Donc $\varphi(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k MG^2 + \varphi(G)$
 - Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0 \Rightarrow \varphi(M) = 2\overrightarrow{MI} g(I) + \varphi(I)$.

Ensemble des points M tels que $\varphi(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k}^2 = k$

- i. Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0 \Rightarrow \varphi(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k MG^2 + \varphi(G)$
 $\varphi(M) = k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k MG^2 + \varphi(G) = k \Rightarrow MG^2 = \frac{k - \varphi(G)}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} = \lambda$
 - a. Si $\lambda < 0$ l'ensemble des points M cherchés est l'ensemble vide.
 2. Si $\lambda = 0$ l'ensemble des points M cherchés est le singleton $\{G\}$.
 3. Si $\lambda > 0$ l'ensemble des points M cherchés est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$.
- ii. Si $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0 \Rightarrow \varphi(M) = 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I)$
 $\varphi(M) = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I) = k \Rightarrow 2\overrightarrow{MI}g(I) = k - \varphi(I)$
 Posons $2g(I) = \overrightarrow{v}$ et $k - \varphi(I) = \beta$, on a donc : $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{v} = \beta$,
 - a. Si $\beta = 0$ l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par I est perpendiculaire à \overrightarrow{v} .
 - b. Si $\beta \neq 0$ l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par son projeté orthogonale sur $D(I, \overrightarrow{v})$ perpendiculaire à \overrightarrow{v} .

Ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$

Soit A et B deux points distincts du plan, K un réel strictement positif.

$$\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 = k^2 MB^2 \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$$

1. Si $k = 1$ alors $MA = MB$, l'ensemble des points M cherchés est la médiatrice du segment $[AB]$
2. Si $k \neq 0$ alors $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$, il existe un point unique G barycentre des points pondérés : $(A, 1); (B, -k^2)$.

$$MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \quad G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, k)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{G_1B} = \overrightarrow{0}$$

$$G_2 = \text{bar}\{(A, 1); (B, -k)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{G_2B} = \overrightarrow{0}$$

$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{MG_1} + k\overrightarrow{G_1B})(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{MG_2} - k\overrightarrow{G_2B}) = 0 \Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{MG_1} \cdot (1-k)\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow (1+k)(1-k)\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0.$$

Donc l'ensemble des points M cherchés est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

5 Trigonométrie

5.1 Arcs, angles et cercle trigonométrique

5.1.1 Arcs et angle

Définition : Un arc de cercle et l'angle au centre correspondant sont mesuré par la même nombre, à condition d'adopter pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte l'unité d'arc.

Unité d'arc et d'angle : L'unité d'arc est le **quadrant** (le quart du cercle) ; l'unité de l'angle correspondant est **l'angle droit**. On emploie plutôt :

- Le degré**($^{\circ}$) : $\frac{1}{90}$ du quadrant pour les arcs ; $\frac{1}{90}$ de l'angle droit pour les angles.
- Le grade**(gr) : $\frac{1}{100}$ partie du quadrant pour les arcs ; $\frac{1}{100}$ partie de l'angle droit pour les angles.
- Le radian**(rd) : Arc de cercle dont la longueur est égale au rayon de cercle. L'angle au centre correspondent se nomme aussi *radian* (rd).

Le périmètre d'un cercle de rayon r valant $2\pi r$, il en résulte que le cercle entier vaut 2π radians : $360^{\circ} = 400gr = 2\pi rd \Leftrightarrow 180^{\circ} = 200gr = \pi rd$

Les mesures d, g, α d'un même arc en degré, grade, et radians vérifient donc :

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$$

5.1.2 Cercle trigonométrique

Définition : On appelle cercle trigonométrique un cercle orienté dont le rayon est égal à l'unité (rayon = 1). **Sens direct et indirect d'un cercle trigonométrique :**

- Le **sens direct** ou **sens positif** , est le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- Le **sens indirect** ou **sens négatif** , est le sens des aiguilles d'une montre.

5.2 Fonction circulaire

5.2.1 Fonction sinus, cosinus, tangente et cotangente

Définition :

La fonction, définie sur \mathbb{R} qui à tout réel x associe son cosinus : $x \mapsto \cos(x)$ est appelée **fonction cosinus**.

La fonction, définie sur \mathbb{R} qui à tout réel x associe son sinus : $x \mapsto \sin(x)$ est appelée **fonction sinus**.

Remarque : Comme $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$, on dit que le fonction *cosinus* et le fonction *sinus* sont des fonctions **périodiques** dont la période est 2π .

Définition :

La fonction, définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}\}$ qui à tout réel x associe son tangente : $x \mapsto \tan(x)$ est appelée **fonction tangente**.

La fonction, définie sur \mathbb{R} qui à tout réel x associe son cotangente : $x \mapsto \cot(x)$ est appelée **fonction cotangente**.

Remarque : Comme $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ et $\cot(x + \pi) = \cot(x)$, on dit que le fonction *tangente* et le fonction *cotangente* sont des fonction **périodique** dont la période est π .

5.2.2 Angles associes

Angle opposés :

Définition : Deux angle sont opposés quand la somme de leurs mesures est nulle.

Théorème : Deux angles opposés ont leurs extrémités symétriques par rapport à l'axe des cosinus.

Propriété : Deux angles opposé ont même cosinus ; ils ont des sinus, des tangente et des cotangente opposés.

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$	$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$
--------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

Angle supplémentaire

Définition : Deux angles sont supplémentaires quand la somme de leurs mesures en radians est π .

théorème : Deux angles supplémentaire ont leurs extrémités symétrique par rapport à l'axes des sinus.

Propriété : Deux angles supplémentaires ont même sinus ; ils ont des cosinus, des tangente et des cotangente opposés.

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$
--------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

Angle complémentaire

Définition : Deux angles sont complémentaires quand la somme de leurs mesures en radians est $\frac{\pi}{2}$.

théorème : Deux angles complémentaires ont leurs extrémités symétriques par rapport à la première bissectrice.

Propriété : Si deux angles sont complémentaires sinus de l'un est égale à cosinus de l'autre et tangente de l'un est égale à cotangente de l'autre.

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot(\alpha)$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan(\alpha)$
---	---	---	---

Angle dont la différence est π

Propriété : Deux angles qui diffèrent de π radians ont même tangente et même cotangente, ils ont des sinus et des cosinus opposés.

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$
--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

Angle dont la différence est $\frac{\pi}{2}$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot(\alpha)$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan(\alpha)$
--	---	--	--

5.2.3 Équation fondamentale

Équation $\cos(x) = a$: Pour que deux angles aient même cosinus il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit un multiple pair de π .

Résoudre l'équation $\cos(x) = \cos(\alpha)$

La condition précédente donne : $x \pm \alpha = 2k\pi$ donc

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi$$

Équation $\sin(x) = b$: Pour que deux angles aient même sinus il faut et il suffit que leur différence soit un multiple pair de π ou leur somme soit un multiple impair de π .

Résoudre l'équation $\sin(x) = \sin(\alpha)$

La condition précédente donne :

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

Équation $\tan(x) = t$: Pour que deux angles aient même tangente il faut et il suffit que leur différence soit un multiple de π : $\beta - \alpha = k\pi$.

Résoudre l'équation $\tan(x) = \tan(\alpha)$

La condition précédent donne :

$$x = \alpha + k\pi$$

5.2.4 Formule d'addition

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$	$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

5.2.5 Formule de multiplication

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

5.2.6 Expression de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ et $\tan^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$	$\tan^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$
-----------------------------------	-----------------------------------	--

5.2.7 Transformation trigonométrique

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$	$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(b)\cos(a)$
$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$	$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$

5.2.8 Transformation en produit de la somme ou la différence de deux sinus ou deux cosinus

$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\cos(p) - \cos(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$

5.2.9 transformation en somme ou différence de sinus ou de cosinus

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

6 Exercice

6.1 Trinôme de seconde degré

Exercice 1 :

$$\begin{aligned} E_1(x) &= x^2 - 3x + 2; E_2(x) = x^2 - 5x + 6; E_3(x) = 7x^2 - 12x + 5; \\ E_4(x) &= -x^2 + 2x - 1; E_5(x) = -x^2 + 6x - 9; E_6(x) = 3x^2 + 8x - 11; \\ E_7(x) &= x^2 - 11x + 28; E_8(x) = \frac{x+2}{x+4} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{11}{16} \text{ et } E_9(x) = \frac{2x+1}{x-2} - \frac{2x-4}{x+3} - 2. \end{aligned}$$

1. Résoudre l'équation $E_i(x) = 0$.
2. Factoriser $E_i(x)$.
3. Étudier le signe de $E_i(x)$.
4. Étudier la variation de $E_i(x)$.
5. Pour $1 \leq i \leq 5$, si i est paire résoudre l'inéquation $E_i < 0$ sinon résoudre l'inéquation $E_i \geq 0$.
6. Pour $5 < i \leq 9$, si i est paire résoudre l'inéquation $E_i > 0$ sinon résoudre l'inéquation $E_i \leq 0$.

Exercice 2

Résoudre les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 &= 0; x^2 - (m+2)x + 2m = 0; \\ (m+1)x^2 - (5m+6)x + 3(2m+3) &= 0; (2m-1)x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0 \\ (m-1)x^2 - (m-3)x - (m+3) &= 0; (m-2)x^2 - 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P .

$$\begin{aligned} S = 29 \text{ et } P = 198; S = -33 \text{ et } P = 266; S = 13 \text{ et } P = 42; S = 30 \text{ et } P = 255; \\ S = -17 \text{ et } P = 72; S = -2 \text{ et } P = -63. \end{aligned}$$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x^4 - 25x^2 + 144 &= 0; x^4 - 5x^2 + 4 = 0; 9x^4 + 5x^2 - 4 = 0; x^4 + 2x^2 - 3 = 0; \\ 4x^4 - 29x^2 + 25 &= 0; x^4 - (m^2 + 1)x^2 + m^2 = 0; 9x^4 - 4(9m^2 + 4)x^2 + 64m^2 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 5

1. Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} &= x + 3; x + 2\sqrt{x^2 - 11} = 16; \sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2; \\ \sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 4} &= 3; \sqrt{2x - 1} = \sqrt{5 - x} - \sqrt{3 - 2x}; \\ \sqrt{2x + 3} + \sqrt{5 - 8x} &= \sqrt{4x + 7}; \sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x} = \sqrt{x + 1}; \\ \frac{1-x}{1-\sqrt{1+x}} + \frac{1+x}{1+\sqrt{1-x}} &= 1; \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-m}. \end{aligned}$$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} < 2x+1; \sqrt{3x+2} < \sqrt{x+2}; \sqrt{(4x-3)(x+2)}-2 > 2x; \\ \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{x^2-1}{x-2}; \sqrt{(x+1)^2+3}-3x > 2; \sqrt{x+2}+\sqrt{x-2} < \sqrt{2x+3}; \\ \sqrt{x}+\sqrt{x-5} < \sqrt{x+7}+\sqrt{x-8}; \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}+3 > x. \end{aligned}$$

6.2 Étude d'une fonction

Exercice 1 : Soit $s(x)$ la fonction définie sur \mathbb{R} par $s(x) = x^3 - 6x + 5$.

1. Calculer les limites de s en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Tracer le tableau de variation de $S(x)$.
3. Soit I le point où la courbe (C) rencontre l'axe Oy .
Montrer que ce point est un centre de symétrie de cette courbe.
4. Tracer la courbe représentatif (C) de la fonction $s(x)$.
5. Étudie graphiquement suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation : $x^3 - 6x + 5 - m = 0$.

Exercice 2 : On donne la fonction h définie par $h(x) = -\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ sur \mathbb{R} .

1. Calculer les limites aux bornes de D_h .
2. Étudier la parité de $h(x)$.
3. Tracer le tableau de variation de $h(x)$.
4. Déterminer les équations des droites T et T' tangente au points d'inflexions de la courbe (ε_h) .
5. Déterminer les points d'intersections de la courbe ε_h et l'axe des abscisses.
6. Tracer la courbe ε_h .

Exercice 3 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$.
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
En déduire les asymptotes.
3. Montrer que la courbe (ε_f) admet un asymptote oblique $\Delta : y = ax + b$ qu'on déterminera son équation.
4. Étudier la position relative de la courbe ε_f et la droite Δ .
5. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2-2x+3}{2(x-1)^2}$ et tracer le tableau de variation de la fonction $f(x)$.
6. Tracer la courbe ε_f .

Exercice 4 : On considère la fonction $M(x) = \frac{4x^2+4x-9}{4(x^2-1)}$ définie sur $\mathbb{R}_- \setminus \{-1, 1\}$.

1. Écrire M sous la forme $M(x) = A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

En déduire les asymptotes.

3. Montrer que $M'(x) = -\frac{(2x-1)(x-2)}{2(x^2-1)^2}$ et tracer le tableau de variation de la fonction $M(x)$.
4. Montrer que l'équation $M(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} .
5. Tracer la courbe ε_M .
6. Étudie graphiquement suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation : $(4 - 4m)x^2 + 4x + 4m - 9 = 0$.

Exercice 5 : On donne la fonction s définie sur D_s par $s(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{2x^2+x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $s(x)$.
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
En déduire les asymptotes.
3. Montrer que $s'(x) = \frac{14x-1}{(4x^2+2x-2)\sqrt{2x^2+x-1}}$ et étudier la variation de la fonction $s(x)$.
4. Montrer que l'équation $s(x) = 0$ admet une unique solution α dans D_s .
5. Tracer la courbe ε_s .

Exercice 6 : On désigne par C_m la courbe représentative de la fonction :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - 2}$$

(m étant une constante donnée).

1. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
En déduire les asymptotes.
2. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ et étudier la variation de la fonction $f(x)$ pour $m = 0$.
3. Montrer que la droite $\Delta : y = 2x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe C_0 .
4. Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est centre de symétrie pour C_0 .
5. Tracer la courbe C_0 .
6. Pour quelles valeur de m la fonction $f(x)$ est-elle constamment croissante?
7. Pour quelle valeur de m cette fonction admet-elle un maximum et un minimum? Exprimer en fonction de m les coordonnées correspondants de C_m et trouver leur lieu géométrique quand m varie.
8. Soit K le point où la courbe coupe l'axe Oy . Écrire l'équation de la tangente en K à la courbe (C_m) et montrer que cette tangente coupe l'asymptote oblique de C_m en un point fixe, T , dont on donnera les coordonnées.

Exercice 7 : Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$ où x désigne un réel. On note ε sa représentation graphique où $3cm$ représente π sur l'axe des abscisses et $2cm$ une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} .
2. a. Démontrer que f est périodique de période 2π .
b. Démontrer que f est impaire que peut-on déduire de la la courbe ε ?
c. A l'aide des deux questions précédentes démontre qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.
3. a. Démontrer que, pour tout réel x $f'(x) = \frac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}$.
b. Étudier le signe de f' sur $[0; \pi]$.
c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
4. Dans le repère décrit ci-dessus représenter ε restreinte à l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice 8 : Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (1 + \cos(x)) \cos(x)$ et ε sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Rappeler les propriétés de parité et de périodicité de la fonction *cosinus* et traduit ce propriété par les égalités.
2. En déduire que la fonction h est périodique de période 2π .
3. Démontrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 2(1 + \cos(x)) \sin(x)$.
4. Résoudre $1 + 2 \cos(x) = 0$ puis $1 + 2 \cos(x) > 0$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.
5. Dresser le tableau de signe de $h'(x)$ pour $x \in [0; \pi]$, en déduire le tableau de variation de h sur cet intervalle.
6. Explique comment on peut déduire de la question 2. la courbe de ε sur \mathbb{R} à partir de la courbe ε sur $[0; \pi]$.
7. Représenter soigneusement la courbe ε sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$ dans un repère où $1cm$ représente $\frac{\pi}{3}$ en abscisse et 0.25 en ordonnée.

Exercice 9 : Soit s la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$s(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$$

1. On appelle h la fonction définie sur I par $h(x) = \tan x - x$.
a) Déterminer les limites de h aux bornes de I .
b) Étudier les variations de h .
c) Calculer $h(0)$ et déterminer le signe de $h(x)$ sur I .
2. a) Justifier que s est dérivable sur I et Montrer que $s' = h(x)(x + \tan x)$.
b) Déterminer le signe de $s'(x)$ sur I .
c) Déterminer les variations de s sur I . En déduire le signe de s sur I .
d) Tracer la courbe représentative de s sur I dans un repère orthonormé.

6.3 Suites

Exercice 1 : On considère la suite arithmétique u_n de premier terme $u_0 = 4$ et la raison $r = 3$. Calculer u_1 ; u_2 u_{10} et u_{30} .

Exercice 2 : On considère la suite géométrique v_n de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$ et la raison $q = \frac{3}{2}$. Exprimer (v_n) en fonction de n , en déduire v_3 et v_5 .

Exercice 3 : On considère la suite arithmétique u_n telle le quatrième vaut 63 et la raison $r = -2$. Calculer u_1 ; u_{10} et u_{100} .

Exercice 4 : On considère une suite géométrique (v_n) telle que $v_5 = \frac{5}{32}$ et $u_2 = \frac{5}{4}$.

1. Montrer que la raison $q = \frac{1}{2}$ et le premier terme $v_0 = 1$
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. Donner la limite et le variation de v_n . v_n converge t-elle ? si oui, vers quoi ?
4. Exprimer la somme s_n des n premier terme v_n en fonction de n .
Calculer s_5 .

Exercice 5 : On considère la suite arithmétique (u_n) de raison négative.

On sait que la somme des trois premiers vaut 81

et que la somme de leur carré vaut 1218.

1. Montrer que la raison $r = -3$ et le premier terme $u_0 = 23$
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Donner la limite et le variation de u_n .
4. Exprimer la somme s_n des n premier terme u_n en fonction de n .
Calculer s_{200} .

Exercice 6 : On considère la suite géométrique v_n telle le quatrième vaut $\frac{1}{27}$ et la raison $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_1 ; u_5 et u_{10} .

Exercice 7 : On considère une suite arithmétique (u_n) telle que $u_3 = 7$ et $u_7 = 19$.

1. Montrer que la raison $r = 3$ et le premier terme $u_0 = -2$
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Donner la limite et le variation de u_n .
4. Exprimer la somme s_n des n premier terme u_n en fonction de n .
Calculer s_{300} .

Exercice 8 : Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = \frac{4v_n - 6}{v_n - 1}$.

1. Calculer v_1 , v_2 et v_3 . S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2. Montrer que si $v_{n+1} = 2$ alors $u_n = 2$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 2$
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{v_n - 3}{v_n - 2}$. Montrer que la suite u_n est une suite

géométrique.

4. Exprimer u_n en fonction de n , en déduire une expression de v_n , en fonction de n .
5. La suite (v_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 9 : Soit (u_n) la suite définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+7u_n}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2. Montrer que si $u_{n+1} = 0$ alors $u_n = 0$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 0$
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2-u_n}{u_n}$. Montrer que la suite v_n est une suite arithmétique.
4. Exprimer v_n en fonction de n , en déduire une expression de u_n , en fonction de n .
5. La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 10 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. a) Calculer u_1 et u_2 .
b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
2. On admet que $u_n < 1$ pour tout entier naturel n . Montrer que la suite u_n est croissante.
3. Soit v_n la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
a) Montrer que la suite v_n est une suite géométrique de raison 3.
b) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n-1}$.
d) Déterminer la limite de la suite u_n .

6.4 Barycentre

Exercice 1 : PQR est triangle. A, B, C sont trois points tels que, $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QC} = \frac{6}{7}\overrightarrow{QR}$. Le point K est le barycentre de $\{P, 2\}; (Q, 1); (R, 6)\}$. Placer le point K et démontrer que les droites (PC) , (QB) et (AR) sont concourant en K .

Exercice 2 : Dans le plan P , soit un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que : $AB = AC = a$; $(a \in \mathbb{R}^{*+})$. Soit m un paramètre réel.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que le système de points pondérés $\{(A, 2); (B, -1); (C, m)\}$ admette un barycentre G_m .
2. Pour $m = 3$ déterminer le barycentre G_3 .

Exercice 3 : ABC est un triangle, E est le milieu de $[AB]$, F le symétrique de A par rapport à C et G le point vérifiant $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Exprimer E et F comme barycentre de deux points.
2. Vérifier que G est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 1); (A, -1); (C, 2)\}$.
3. En déduire que E , F et G sont alignés.

Exercice 4 : Le plan est muni d'un repère (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Placer les points $A(1, 3)$ et $B(2, 1)$
2. Calculer les coordonnées des points M , barycentre de $(A, -1); (B, 3)$ et N barycentre de $(A, 2); (B, -1)$
3. Calculer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.
4. Calculer deux réels α et β tels que I soit le barycentre de $(M, \alpha); (N, \beta)$.

Exercice 5 : ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 4cm$. On se propose de trouver l'ensemble Γ des points M tels que $\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4$.

1. On pose G le barycentre de $(A, -1); (B, 1); (C, 2)$. Écrire la somme $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ en fonction de G .
2. En déduire la nature de Γ .
3. Montrer que Γ passe par le point C . Construire G puis Γ .

Exercice 6 : ABC est un triangle équilatéral de côté $5cm$.

1. Construire G , barycentre de $(A, 1); (B, -1); (C, 1)$ et prouver que $ABCG$ est un losange.
2. Quel est l'ensemble Γ des points tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
3. Vérifier que le milieu de $[AC]$ appartient à Γ . Tracer Γ .

Exercice 7 : ABC est un triangle rectangle en A , I est le milieu de $[BC]$, Γ est le cercle de centre A passant par I . G est le point diamétralement opposé à I .

1. Prouver que le point G est le barycentre de $(A, 4); (B, -1); (C, -1)$.
2. Trouver deux réels b et c tels que A est le barycentre de $(G, 2); (B, b); (C, c)$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2|\overrightarrow{BC}|$$

Exercice 8 : Soient A, B, C trois points non alignés du plan tels que $AB = 4cm$ et $AC = 3cm$.

1. Construire le triangle ABC .
2. Déterminer puis construire le barycentre des points pondérés : $(A, 2); (B, -3); (C, 3)$.
3. Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 16$.
4. Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 = -2.$$

Exercice 9 : Soit un carré $ABCD$ de côté de mesure $2cm$.

Soit l'application : $\begin{cases} f : P \longrightarrow P \\ m \longrightarrow f(m) = MA^2 - MB^2 \end{cases}$

1. Déterminer k pour que la ligne de niveau k par le barycentre I de points pondérés $(A, 1); (B, -3)$.
2. Soit G le centre de Gravité du triangle ABC Construire la ligne de niveau de GB^2 de f .

Exercice 10 : Soit un triangle ABC rectangle en A tels que $AB = 3cm$ et $AC = 4cm$.

Déterminer l'ensemble des points M dans chacun des cas suivant :

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} = -5 \text{ et } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2$$

Exercice 11 : Dans chacun des cas ci-dessous déterminer l'ensemble (F) des points M vérifiant des conditions : $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 14$; $AB = 4$ et $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2$ et $AB = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 25$.

Exercice 12 : Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , placer les points $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 4)$ et $D(0; 4)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un trapèze isocèle.
2. Déterminer les réels α et β tels que O soit le barycentre de $(A; \alpha)(B; 1)(C; 1)(D; \beta)$.
3. Soit I le milieu de $[BC]$ et G le point tel que $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
 - a) Déterminer les réels a et d tels que G soit le barycentre de $(A; a)(D; d)$.
 - b) Démontrer que G, O et I sont alignés. Préciser la position de O sur $[GI]$.
4. a) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}|$.
 - b) Justifier que O appartient à E_1 .
5. a) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $|\overrightarrow{3MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}| = 16$.
 - b) Justifier que B et D appartient à E_2 .

6.5 Trigonométrie

Exercice 1 :

- a. Évalue en grades et en radians les angles de : 15° ; 18° ; 25° .
- b. Évalue en degrés et en radians les angles dont les mesures grades sont : 40 ; 112 ; 17 .

- c. Évalue en degrés et en grades les angles dont les mesures radians sont :
 $\frac{\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{15}$.

Exercice 2 :

- Démontrer les relation suivants : $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$;
 $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} - \frac{1}{1+\tan^2 y}$; $\tan^2 x = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x$.
- Calculer $\sin x$ et $\cos x$ en connaissant $\tan x = 2$ et en sachant que l'extrémité de l'arc x appartient au premier quadrant.

Exercice 3 : Résoudre les équation suivant :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos \frac{\pi}{4} ; \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) ; \sin 3x = \sin 5x ; \\ \sin(7x - \frac{\pi}{5}) &= \sin(3x + \frac{\pi}{4}) ; \tan x = \tan \frac{\pi}{6} ; \tan(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}) ; \sin(3x - \frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{2} ; \\ \cos(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}) &= \frac{\sqrt{3}}{2} ; \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

- Vérifier les identités suivant :
 $\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$; $\sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x$; $\sin(x+y) \cos(x-y) = \sin x \cos x + \sin y \cos y$;
 $\sin(x-y) \cos(x+y) = \sin x \cos x - \sin y \cos y$; $\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$; $\tan^2 x \tan^2 y = \frac{\sin(x+y) \sin(x-y)}{\cos^2 x \cos^2 y}$; $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}$.
- Transformer en produits les expressions suivantes : $\sin(3x) + \sin(5x)$; $\cos 2x - \cos x$; $1 + \cos 2x$; $1 - \sin 4x$; $\sin^2 5x - \sin^2 x$; $\cos^2 3x - \cos^2 x$; $\sin x + \sin 2x + \sin 4x - \sin 7x$; $1 - \cos 2x \cos 3x - \cos 5x$; $1 + \cos 2nx$; $1 - \sin 2nx$.
- Transformer en somme les expressions suivants : $\sin 3x \sin 5x$; $\cos 2x \cos 3x$; $\sin 4x \cos 3x$; $2 \sin x \sin 2x + \cos 3x$; $4 \cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$.