LES MATHS DE NOËL

TERMINAL C

2023 *2^{e} édition* *Saïd*

Avant-propos

Cet ouvrage propose aux élèves de terminale C des rappels et des compléments de cours assez complets du programme national, ainsi que des exercices non corrigés, contrairement aux exemples de cours soigneusement corrigés. Je vous rappelle qu'il existe également une version Premier S pour ceux qui seront intéressés à effectuer quelques révisions.

L'ouvrage est orienté vers une relation étroite entre le cours et les exercices.

Les parties du cours ne sont pas un substitut au cours du professeur, mais plutôt un résumé exhaustif qui l'éclaire d'une manière différente. Ainsi, votre présence en cours est fortement conseillée. Elle vous permettra de bien comprendre les cours et surtout d'avoir tous les atouts à votre disposition pour résoudre les exercices.

À la fin de chaque chapitre étudié dans la partie cours, on trouve une liste d'exercices avec des difficultés progressives, classiques ou parfois originaux, qui constituent une illustration du cours. J'ai veillé à chaque fois à passer en revue tous les problèmes qui tournent autour du chapitre en question. On trouve également des exercices plus ou moins avancés pour mieux préparer les examens à venir.

Je serais reconnaissant envers ceux de mes lecteurs qui voudront bien m'envoyer leurs remarques sur cet ouvrage à l'adresse suivante : *lesmathsdenoel@gmail.com*.

Table des matières

1 FONCTION EXPONENTIELLE

Définition 1.1. On appelle fonction exponentielle l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $h' = h$ et $h(0) = 1$. On note cette fonction exp.

Conséquence : $\exp(0) = 1$.
Notation : On note pour tout x réel $\exp(x) = e^x$. Donc $\exp(1) = e = 2.718281828$.

1.1 Propriété de la fonction exponentielle

1.1.1 Relation fonctionnelle

Théorème 1.1. *Pour tous réels x et y, $exp(x \times y) = \exp(x) \times \exp(y)$.*

1.2 Étude de la fonction exponentielle

1.2.1 Signe

Théorème 1.2. *La fonction exponentielle est positif dans $\mathbb{R}$.*

1.2.2 sens de variation

Théorème 1.3. *La fonction exponentielle est une fonction croissante dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. D'après la définition du fonction exponentielle $(e^x)' = e^x$ comme $e^x > 0$ (d'après le théorème précédent) donc e^x est croissante dans $\mathbb{R}$. □

1.2.3 Propriété algébrique

Théorème 1.4. *Pour tous réels x, y et n nombre entier naturel.*

1) ***Comparaison***
   a. $e^x = e^y$ est équivalent à $x = y$
   b. $e^x < e^y$ est équivalent à $x < y$

   Exemples 1.1. *Résoudrez l'équation et l'inéquation suivant :*
   i. $e^{x^2-3x+2} = 1$
   ii. $(e^x)^3 \leq e^{x+6}$

   Solution 1.1. .

   i. *Comme* $e^0 = 1$ *, on a :* $e^{x^2-3x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x+2} = e^0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ *Or* $1 - 3 + 2 = 0$ *on a :* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = 2$ *donc* $S = \{1, 2\}$
   ii. $(e^x)^3 \leq e^{x+6} \Rightarrow e^{3x} \leq e^{x+6} \Rightarrow 3x \leq x + 6 \Rightarrow 2x \leq 6 \Rightarrow x \leq 3$ *donc* $S =]-\infty, 3]$.

2) ***Règle opératoires***
   a. $e^{x+y} = e^x \times e^y$
   b. $e^x \neq 0$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

c. $e^y \neq 0$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
d. $e^{nx} = (e^x)^n$

1.2.4 Limites

Limite au borne

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Limite de référence et Croissance comparée

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

1.2.5 Dérivé de la fonction e^s

Théorème 1.5. *Soit h un fonction dérivable sur I. Soit s une fonction définie par $s(x) = e^{h(x)}$. La fonction s est dérivable sur I et $\forall x \in \mathbb{R}, s'(x) = h'(x)e^{h(x)}$.*

Exemples 1.2. *Calculer la dérivée $s'(x)$ de la fonction $s(x) = e^{x^3-2x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$*

Solution 1.2. *D'après le théorème précédent $s'(x) = (3x^2-2)e^{x^3-2x+1}$.*

Propriété 1.1. *Soit h une fonction dérivable sur un intervalle I.*

La fonction $x \mapsto h(x)$ et $x \mapsto e^{h(x)}$ ont le même sens de variation.

Démonstration. Soit $s(x) = e^{h(x)} \Rightarrow s'(x) = h'(x)e^{h(x)}$ comme $e^{h(x)} \geq 0$ donc $s'(x)$ et $h'(x)$ on la même signe. Donc $s(x)$ et $h(x)$ ont la même sens de variation. □

Application 1. .

<u>Partie A :</u>

Le plans est munie d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ tel que $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$.

On considère la fonction h définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (x+2)e^{x-3} - 1$$

.

1. *Calculer les limites au borne de D_h.*
2. *Dresser le tableau de variation de $h(x)$ sur D_h*
3. *Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solutions dans $\mathbb{R}$.*
   On note α cette solution. Montrer que $1.68 < \alpha < 1.71$.
4. *En déduire le signe de $h(x)$ suivant la valeur de x.*

Partie B :

On considère la fonction s définie sur $D_s = \mathbb{R}$ par :

$$s(x) = x^2 e^{x-3} - \frac{x^2}{2}$$

.

1. *Calculer les limites de $s(x)$ aux borne de D_s.*
2. *Montrer que $s'(x) = xh(x)$.*
3. *Exprimer $s(\alpha)$ en fonction de α.*
4. *Dresser le tableau de variation de $s(x)$.*
5. *Déterminer les points d'intersections entre (ε_s) est les l'axe ox et l'axe oy.*
6. *Tracer la courbe (ε_s) .(On pendra $\alpha = 1.69$)*

Solution Application 1. .

Partie A :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-3} = +\infty$

   comme $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2)e^{x-3} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$
2. $h'(x) = e^{x-3} + (x+2)e^{x-3} = (x+3)e^{x-3} \geq 0$

   $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)e^{x-3} \geq 0 \Rightarrow x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-6}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. *la fonction h est continu décroissante sur* $]-\infty, -3[$ *à valeur* $]-e^{-6}-1, -1[$ *et continu croissant sur* $]-3, +\infty[$ *à valeur* $]-e^{-6}-1, +\infty[$ *donc d'après le théorème des valeur intermédiaire l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.*
   Comme $h(1.68) = -0.02$ *et* $h(1.70) = 0.01$ *donc* $1.68 \leq \alpha \leq 1.70$.
4. *D'après les deux questions précèdent, on en déduit que*
   $h(x) \leq 0\ \forall x \in]-\infty, \alpha]$ *et* $h(x) \geq 0\ \forall x \in]\alpha, +\infty[$

Partie B :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2(e^{x-3} - \frac{1}{2}) = -\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
   et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{x-3} - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{x-3} - \frac{1}{2}) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

   et $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{x-3} - \frac{1}{2}) = +\infty$.

2. $s'(x) = 2xe^{x-3} + x^2e^{x-3} - \frac{2x}{2} = (2x + x^2)e^{x-3} - x = x((x+2)e^{x-3} - 1) = xh(x)$.
3. $s(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha-3} - \frac{\alpha^2}{2}$ *comme* $h(\alpha) = 0$ *on a :* $h(\alpha) = (\alpha+2)e^{\alpha-3} - 1 = 0 \Rightarrow e^{\alpha-3} = \frac{1}{\alpha+2}$ *donc* $s(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2}$
4. $s'(x) \geq 0 \Leftrightarrow xh(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ *ou* $h(x) \geq 0$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$		$+$	
x		$-$		$+$		$+$	
$s'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$s(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$s(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. $s(0) = 0$ *donc le point d'intersection entre la courbe et l'axe des ordonnées est le point* $A(0,0)$

   $s(x) = 0 \Leftrightarrow x^2e^{x-3} - \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow x^2(e^{x-3} - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0$ *ou* $e^{x-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln(\frac{1}{2}) + 3$. *Donc les ponts d'intersections entre la courbe et l'axe des abscisses sont le point* $A(0,0)$ *et le point* $B(\ln(\frac{1}{2}) + 3, 0)$
6. *Représentation graphique :* voir figure 2 annexe.

1.3 Exercice

Exercice 1.3.1.

1. *Simplifier les expressions suivantes :*

   $(e^x)^3e^{-2x}$ $\quad \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}}$ $\quad \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$ $\quad \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$

   $\frac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}+e^x}$ $\quad (\frac{e}{e^{-x}})$ $\quad \sqrt{\frac{20e^{5x}}{5e^{-4x}}}$ $\quad \sqrt{\frac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}}$
2. *Prouver, que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

   $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ $\quad \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = e^x\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$ $\quad (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$

   $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$ $\quad (e^x + e^{-x})^2 - 2 = \frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}$

Exercice 1.3.2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*

$e^{2-x} = e^x$ $\quad (e^x)^3 = e^{x-1}$ $\quad e^x + e^{1-x} - (e+1) = 0$ $\quad 2e^{2x} - e^x = 1$

$e^{5-x^2} = e$ $\quad \frac{e^{-x}-3}{e^{-x}-5} = \frac{1}{2}$ $\quad 2e^{-x} = \frac{1}{e^x+1}$ $\quad e^{6x} + 2e^{3x} - 3 = 0$

$1 - e^{x-2} \geq 0$ $\quad e^{2x-1} > \sqrt{e}$ $\quad e^x < e^{-x} + 1$ $\quad e^x - \frac{1}{e^x} \leq 0$

$\frac{1}{e^x} - e > 0$ $\quad \frac{2e^x-3}{e^x-3} < \frac{1}{3}$ $\quad 4e^{2x} < 3e^x + 1$ $\quad e^{2x} + 2e^x - 3 \leq 0$

Exercice 1.3.3. *Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, puis calculer les dérivées et tracer les tableaux de variation des fonctions suivants.*

$f_1(x) = \frac{e^x+1}{e^x+2}$ $\quad f_2(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ $\quad f_3(x) = \frac{\sqrt{e^x+2}}{x}$ $\quad f_4(x) = (x+1)e^{x+3}$

$f_5(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x}$ $\quad f_6(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ $\quad f_7(x) = \frac{e^{2x}-1}{5x}$ $\quad f_8(x)x^2e^{-2x}$

$f_9(x) = x + e^x$ $\quad f_{10}(x) = (0,4x-2)e^{-0.1x}$ $\quad f_{11}(x) = e^{x^2} - e^{3x+4}$ $\quad f_{12}(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$

Exercice 1.3.4. .

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)$=$(1-x)e^x - 1$

1. *Dresser le tableau de variation de g.*
2. *Étudier le signe de g*

Partie B :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x-1} + 2 \ si \ x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$

On désigne par (ε) la courbe représentatif de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}$

On admettra que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

1. a) *Déterminer la limite de f en $-\infty$*
   b) *Établie que $\frac{x}{e^x-1} \times \frac{1}{1-e^{-x}}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$.*

   En déduire que (ε) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on donnera une équation.
   c) *Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est un asymptote oblique à la courbe (ε) en $-\infty$.*
2. *Pour x non nul, montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$*
3. *Dresser le tableau de variation de $f(x)$.*
4. *Soit (T) la tangente à (ε) au point d'abscisse nulle. Écrire une équation de (T)*
6. *Tracer (D), (T) et (ε)*

Partie C :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$

1. *Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [2, 2.5[$.*
2. *On pose $I = [2, 2.5]$*

   a) *Démontrer que pour tout x de I, on a : $g(x) \geq -20$ et $e^x - 1 \geq 40$.*
   b) *En déduire que si $x \in I$ $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.*
3. *Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.*
   b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$*
   c) *En déduire que u_n converge vers α*

d) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Exercice 1.3.5. .

Partie A :

Soit g la fonction numérique f définie par : $g(x) = (x-1)e^x + 1$

1. *Dresser le tableau de variation de $g(x)$.*
2. *En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

Partie B :

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = (x-2)e^x + x$.

(ε) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. *a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$*
   b) Montrer que la droite $(\triangle)$ d'équation $y = x$ est une asymptote à (ε) en $-\infty$. Étudie la branche infinie à (ε) en $+\infty$.
   c) Étudie en fonction de x la position de (ε_f) et de $(\triangle)$
2. *a) Montrer que $f'(x) = g(x)$, en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.*
   b) Justifier que la fonction f définie une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.
   c) Dresser les tableaux de variation de f et de f^{-1} bijection réciproque de f.
3. *a) Donner une équation cartésienne de la tangente de (t) à (ε_f) au point d'abscisse 0.*
   b) Construire (ε_f) et $(\varepsilon_{f^{-1}})$ dans une même repère orthonormé.
4. *D est le domaine du plan limité par la courbe (ε_f), la droite d'équation $y = x$ et les droites respectives $x = 0$, $x = 2$. En utilisant un intégration par partie, calcule l'aire A du domaine.*

Exercice 1.3.6. .

Partie A :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2 - xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. *Dresser le tableau de variation de g. En précisant les limites de de g en $-\infty$ et en $+\infty$.*
2. *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0.8 \leq \alpha \leq 0.9$.*
3. *Déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.*

Partie B :

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2}$ et (ε_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé unité 2cm.

1. *a) Calculer la limite de f en $-\infty$.*
   b) Calculer la limite de f en $+\infty$, déduit que la droite $(\triangle')$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote de (ε_f).
2. *Étudie la position relative de (ε_f), $(\triangle)$ et $(\triangle')$ avec $(\triangle)$: $y = x$.*

3. a) *Montre que* $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$.
   b) *Montre que* $f(\alpha) = \alpha$.
4. *Tracer dans un repère orthonormé la droite* $(\triangle)$, $(\triangle')$ *et la courbe* (ε).

Partie C :

1. *Soit la fonction* $h(x) = 0$ *admet une solution unique* α *tel que* $\alpha \in [0.8, .09]$.
2. *On pose* $I = [0.8, 0.9]$. *Montre que* $|f'(x)| \leq \frac{1}{50}$.
3. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a) *Montrer par récurrence que* $\forall n \; u_n \in I$.
   b) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N} \; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{50}|u_n - \alpha|$ *et* $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{50})^n$.
   c) *En déduire que* u_n *converge vers* α.
   d) *Déterminer le plus petit entier* n_0 *telle que* $\forall n \geq n_0 \; |u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Exercice 1.3.7. .

Partie A :

Soit g *la fonction dérivable et définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

1. *Calculer les limites de* g *en et* $-\infty$ *en* $+\infty$.
2. a) *Soit* g' *la fonction dérivée de* g. *Justifier que :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)(4x - 6)e^{-2x+3}$.
   b) *) Étudier le signe de* $g'(x)$ *suivant les valeurs de* x.
   c) *Justifier que :* $g(\frac{3}{2}) = -2$.
   d) *Dresser le tableau de variations de* g.
3. a) *Démontrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet dans* $\mathbb{R}$ *une solution unique notée* α.
   b) *Vérifier que :* $0.86 < \alpha < 0.87$.
   c) *Justifier que :* $\forall x \in]-\infty; \alpha$, $g(x) > 0$ *et* $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *(unité graphique : 2 cm).*

On considère la fonction f *dérivable et définie sur par :* $f(x) = -x + (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}$.

On note (C) la courbe représentative de f.

1. a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b) *En déduire que (C) admet une branche parabolique de direction celle de* (OJ) *en* $-\infty$.
2. a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b) *Démontrer que la droite (D) d'équation* $y = -x$ *est asymptote à (C) en* $+\infty$.
   c) *Étudier la position de (C) par rapport à (D).*
3. a) *Soit* f' *la fonction dérivée de* f. *Démontrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
   b) *En déduire les variations de* f.
   c) *Dresser le tableau de variations de* f. *On ne calculera pas* $f(\alpha)$.

4. *Construire (D) et (C) sur le même graphique. On précisera les points de (C) d'abscisses* $0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 4$.

   on prendra : $\alpha = 0.865$ et $f(\alpha) = 0.4$.
5. *Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathbb{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.*

   On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}dx$.
   a) *À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :* $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$.
   b) *En déduire* $\mathbb{A}(t)$.
   c) *Calculer* $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{A}(t)$.

Exercice 1.3.8. *Soit f la fonction définie sue $\mathbb{R}$ par* $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique 2cm).

<u>Partie 1 :</u>

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1. *Étudie les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.*
2. *Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.*
3. *En déduire le tableau de variation de g.*
4. *Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que* $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$.
5. *En déduire le signe de g.*

<u>Partie B :</u>

1. *Étudie les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.*
2. *Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.*
3. *En déduire, à l'aide de la partie A, les variation de f et donner son tableau de variation.*
4. a) *Démontre que :* $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.
   b) *A l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude* 4×10^{-2}.
5. *Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à C en $+\infty$.*

   Préciser la position de $\mathbb{C}$ par rapport à Δ.
6. *Donner une équation de la tangente T à C au point point d'abscisse* 0.
7. *Tracer Δ, T puis C.*
8. a) *Déterminer mes réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par* $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

      Soit une primitive de $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to (x^2 + 2)e^{-x}$.
   b) *Calculer en fonction de α l'aire $\mathbb{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équation $x = -\alpha$ et $x = 0$.*
   c) *Justifie que* $\mathbb{A} = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$.

<u>Partie C :</u>

1. *Démontrer que pour tout* x *de* $[1;2]$ *:* $1 \leq f(x) \leq 2$.
2. *Démontrer que pour tout* x *de* $[1;2]$ *:* $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$.
3. *En utilisant le sens de variation de la fonction* h *définie sur* $[1;2]$ *par :* $h(x) = f(x) - x$.

   Démontrer que l'équation $f(x) = x$ *admet une solution unique* β *dans* $[1;2]$.
4. *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout entier naturel* n $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $1 \leq u_n \leq 2$.
   b) *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|u_n - \beta|$.
   c) *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $|u_n - \beta| \leq (\frac{3}{4})^n$.
   d) *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et donner sa limite.*
   e) *Trouver un entier* n_0 *tel que pour tout entier naturel* n *supérieur ou égal à* n_0*, on ait :* $|u_n - \beta| \leq 10^{-2}$.

Exercice 1.3.9. .

<u>Partie A :</u>

Soit la fonction g*, définie sur* $\mathbb{R}$*, qui à tout* x*, associe :* $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.

1. a) *Montrer que la dérivée de la fonction* g *sur* $\mathbb{R}$ *est :* $g'(x) = x(e^x + 2)$.
   b) *Déterminer les limites de* g *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.
   c) *Étudier le signe de* $g'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$*, et dresser le tableau de variation de* g *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une solution* α *et une seule sur l'intervalle* $[0;+\infty[$. *Montrer que* α *est dans l'intervalle* $I = [\frac{1}{2};1]$.

<u>Partie B :</u>

Soit la fonction f *définie sur* $[0;+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$.

1. *Montrer que les équation* $f(x) = x$ *et* $g(x) = 0$ *sont équivalentes sur* $[0;+\infty[$*, et que par la suite, l'équation* $f(x) = x$ *admet* α *pour solution unique sur* I.
2. a) *Calculer la dérivée de* f *et en déduire le sens de variation de* f *sur* $[0;+\infty[$.
   b) *Déterminer la limite de* f *en* $+\infty$.
   c) *Dresser le tableau de variation de* f.
   d) *Construire la courbe représentative* C *de* f *sur* $[0;+\infty[$ *dans un repère orthonormal (unité* 2cm*). On indiquera en particulier les tangentes à* C *aux point d'abscisses* 0 *et* 1.

<u>Partie C :</u>

1. *Montrer que, pour tout* x *appartenant à* I*,* $f(x)$ *appartient à* I.
2. *Soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $u_1 = \frac{1}{2}$ *et* $u_n = f(u_{n+1})$ *pour tout* $n > 1$.
   a) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in I$.
   b) *Montrer que, pour tout* $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
   c) *En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissement finis, démontrer que :* $\forall n > 1$ $,|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$.
   d) *En déduire, par un raisonnement par récurrence, que :* $\forall \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$.
   e) *En déduire que* (u_n) *converge vers* α.

   f) *À priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?*

3. *En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}.*

Exercice 1.3.10. *Dans ce problème , k est un nombre réel et on considère le famille de fonction $f_k$définie sur $[-1, +\infty[$ par $f_k(x) = (x+1)(e^{-1-x} + k)$.*
Pour les représentation graphique, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4cm) et on désigne par C_k la courbe représentative de la
fonction f_k.

<u>Partie A</u>

1. *Étudier suivant les valeurs de k, la limite de f_k en $+\infty$.*
2. a) *Monter que la droite (D_k) d'équation $y = kx + k$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$.*
   b) *Étudie la position relative de (C_k) et (D_k).*
3. a) *Calculer la dérivée première f'_k et la dérivée seconde f''_k de f_k.*
   b) *Étudier le sens de variation de f'_k.*
4. a) *Dresser le tableau de variation de f_0 puis de f_1.*
   b) *Déterminer les tangentes (T_0) et (T_1) respectives aux courbes (C_0) et (C_1) au points d'abscisse -1.*
   c) *Tracer (D_0),(D_1),(T_0),(T_1),(C_0) et (C_1).*

<u>Partie B</u>

1. *Montrer que l'équation $f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$ admet une unique solution α et que $-1 \leq \alpha \leq -0.5$*
2. *Soit h l'application de $I = [-1, -\frac{1}{2}]$ sur $\mathbb{R}$, définie par : $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$.*
   Déterminer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.
3. *Étudier les variations de h et montrer que pour tout que x de I. $h(x)$ appartient à I.*
4. *On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$,*
   $u_{n+1} = h(u_n)$.
   a) *Démonter que tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à I.*
   On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.83|u_n - \alpha|$.
   b) *Démonter que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq (0.83)^n.\frac{1}{2}$*
   En déduire que la suite (u_n) est convergence et donner sa limite.
   c) *Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|u_p - \alpha| < 10^{-2}$*
5. a) *Dresser le tableau de variation de $f_{-\frac{1}{2}}$.*
   Démonter que $f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$.
   b) *On donne $u_{18} \simeq -0.6854$. Donner la valeur approchée de α à 10^{-2} près et tracer ($C_{-\frac{1}{2}}$).*

2 Fonction logarithme népérienne

Définition 2.1. La fonction logarithme népérien notée $\ln(x)$ est une fonction définie sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

2.1 Propriété de fonction logarithme népérienne

2.1.1 Relation fondamentale

Théorème 2.1. *Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :*

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Préposition 2.1. *Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :*

a) $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
b) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
c) $\ln(a)^n = n\ln(a)$ *avec n entier naturel.*
d) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Démonstration. .

a. D'après la définition $\ln(1) = 0$ comme $\frac{1}{a} \times a = 1$ donc $\ln(\frac{1}{a} \times a) = 0$
$\Rightarrow \ln(\frac{1}{a}) + \ln(a) = 0 \Rightarrow \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
b. Comme $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ alors $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
car $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$.
c. $\ln(a^n) = \ln(a \times a..... \times a)(nfois) = \ln(a) + \ln(a) + ... + ln(a)(nfois) = n \times \ln(a)$
d. Évidant car $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

□

2.2 Étude de la fonction logarithme népérienne

2.2.1 Ensemble de définition

a. $s(x) = ln(x) \Rightarrow D_s =]0, +\infty[$
b. soit h une fonction définie sur D_h et $s(x) = \ln(h(x))$,
$s(x) = \ln(h(x)) \Rightarrow D_s = \{x \in D_u / h(x) > 0\}$

Exemple :

Exemples 2.1. *Déterminer le domaine définition de :*$f(x) = \ln(x^2 - 10x + 16)$

Solution 2.1. *$f(x)$ est définie pour tout x tel que* $x^2 - 10x + 16 > 0$

x	$-\infty$		2		8		$+\infty$
$x^2 - 10x + 16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc f est définie pour tout $x \in]-\infty; 2[\cup]8; +\infty[$

2.2.2 Continuité, dérivation et sens de variation

Propriété 2.1. *i. La fonction logarithme népérien est continue sur* $]0,+\infty[$

ii. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,+\infty[$ *et* $(ln(x))' = \frac{1}{x}$

iii. La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Propriété 2.2. *Pour tous a et b nombres strictement positifs on a :*

i) $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

ii) $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

Exemples 2.2. *Résoudrez l'équation et inéquation suivant.*

1. $\ln(x) - 2\ln(x-4) = -\ln(2)$
2. $\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln(3)$

Solution 2.2. *1.* $E : \ln(x) - 2\ln(x-4) = -\ln(2)$

Domaine de définition : $\ln(x)$ *est définie pour tout* $x \in]0,+\infty[$ *et*

$\ln(x-4)$ *est définie pour tout* $x \in]4,+\infty[$ *donc* E *est définie pour tout* $x \in]4,+\infty[$

$\ln(x) - 2\ln(x-4) = -\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x) - \ln(x-4)^2 = -\ln(2)$

$\Leftrightarrow \ln(\frac{x}{(x-4)^2}) = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \frac{x}{(x-4)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 = 36 x_1 = \frac{4}{2} = 2$ *impossible et* $x_2 = \frac{16}{2} = 8$ *donc* $S = \{8\}$

2. $E' : \ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln(3)$

Domaine de définition : $\ln(x-1)$ *est définie pour tout* $x \in]1,+\infty[$ *et* $\ln(x-3)$ *est définie pour tout* $x \in]3,+\infty[$ *donc* E' *est définie pour tout* $x \in]3,+\infty[$.

$\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln(3) \Leftrightarrow \ln((x-1)(x-3)) < \ln(3)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x(x-4) < 0$ *donc* $S =]3;4[$.

Propriété 2.3. *Soit h une fonction dérivable est strictement positive sur un intervalle I. La fonction* $x \mapsto \ln(h(x))$ *est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction* $x \mapsto \frac{h'(x)}{h(x)}$

Exemples 2.3. *Déterminer la fonction* $g'(x)$ *dérivée d'une fonction* $g(x)$

définie sur $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ *par* $g(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

Solution 2.3. *D'après le propriété précédent* $g'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+1}$.

Remarque 2.1. On a : $(\ln(h(x)))' = \frac{h'(x)}{h(x)}$, comme $h > 0$ donc h' et $(\ln(h))'$ sont de même signe donc les fonction $h(x)$ et $\ln(h(x))$ ont le même sens de variation.

2.2.3 Limites

a) ***Limite au borne***

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

b) ***Conséquence de la dérivée***

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

c) ***Limites et croissance comparées***

$\lim\limits_{x\to+\infty}=\frac{\ln(x)}{x}=0$ et pour tout entier non nul n ; $\lim\limits_{x\to+\infty}=\frac{\ln(x)}{x^n}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}=x\ln(x)=0$ et pour tout entier n ; $\lim\limits_{x\to 0}=x^n\ln(x)=0$

2.3 Fonction logarithme de base a avec $a>0$ et $a\neq 1$

Définition 2.2. La fonction $\log_a$, appelée ***logarithme de base*** a, où $a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$, est défini par $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Cas particuliers :

i. Si $a=10$ alors log_{10} est appelé ***logarithme décimal*** et noté log.
ii. Si $a=e$ (nombre d'Euler) , alors log_e est appelé ***logarithme népérien*** et noté ln.

Dérivée : $h(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ sa fonction dérivée est $h'(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$

Propriété 2.4. $\forall x$ *et* $y\in\mathbb{R}_+^*$

a) $\log_a(xy)=log_a x+log_a y$
b) $\log_a(\frac{1}{x})=-\log_a x$
c) $\log_a(\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y$
d) $\log_a x^r=rlog_a x$, *avec* $r\in\mathbb{R}$

Application 2. *Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0;+\infty[$ par :*

$$f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, (unités graphiques : 5cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln\left(1+x\right)-x.$$

1. *Étudier le sens de variation de g.*
2. *En déduire que pour tout réel a positif ou nul* $\ln(1+a)\leq a$.

Partie A : *Étude de la fonction f_1 définie sur $[0;+\infty[$ par :*

$$f_1(x)=\ln\left(e^x+x\right)-x.$$

1. *calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.*

2. *Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.*
3. *Dresser le tableau de variation de f_1.*

Partie B :

1. *Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.*
2. *Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f_x(x) = \ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.*
3. *(a) Dresser le tableau de variation de f_x.*
   (b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $f_x(x) \leq \frac{k}{e}$.
4. *Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point O.*
5. *Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$.*
   Étudier la position relative de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_m$.
6. *Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.*

Solution Application 2. .

$$f_k(x) = \ln\left(e^s + kx\right) - x;\ x \geq 0.$$

Étude préliminaire : $g(x) = \ln(1+x) - x,\ x \geq 0.$

1. *La fonction g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0$. La fonction g est donc décroissante sur $0;+\infty[$.*
2.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Pour tout $\alpha \geq 0$, $g(\alpha) \leq 0$ ou $\ln(1+\alpha) \leq \alpha$.

Partie A.

1. *La fonction f_1' est dérivable sur $[0;+\infty[$ et : $f_1'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{1-x}{e^x+x}$ du signe de $1-x$ sur $[0;+\infty[$. Donc la fonction est croissante sur $[0;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$.*
2. *Pour tout $x \geq 0$. $f_1(x) = \ln\left[e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right] - x = \ln(e^x) + \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right) - x = x + \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right) - x$. Donc $f_1(x) = \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.*
3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e+1)-1$	$\searrow$	0

1. *La fonction f_k est dérivable sur $[0; +\infty[$ et : $f'_k(x) = \frac{e^x+k}{e^x+kx} - 1 = k\frac{1-x}{e^x+kx}$ du signe de $1-x$ sur $[0; +\infty[$ car $k > 0$. Donc la fonction f_k est donc croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.*
2. *Même calcul que pour f_1, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$ et donc $\lim\limits_{+\to+\infty} f_k(x) = 0$.*
3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$			$\ln(e+k) - 1$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Pour $x \geq 0$, soit $d_k(x) = f_k(x) - \frac{k}{e}$. $d'_k(x) = f'_x(x) : d_k$. varie comme f_k.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$d'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$d_k(x)$			$d_k(1)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\frac{k}{e}$				$-\frac{k}{e}$

On a $d_k(1) = \ln(e+k) - k - \frac{k}{e} = \ln e + \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right) - 1 - \frac{k}{e} = \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right) - ke$. Comme, $\ln(1+a) \leq a$ pour tout $a \geq 0$, on aura $\ln\left(1 + \frac{k}{e}\right) - \frac{k}{e} \leq 0$. Donc, pour tout $x \geq 0, d_k(x) \leq 0 : f_k(x) \leq \frac{k}{e}$.
4. *T_k pour équation : $y - f_k(0) = f'_k(0)(x-0)$ ou $y = kx$.*
5. *$p < m$, $f_m(x) - f_p(x) = \ln(e^x + mx) - \ln(e^x + px) = \ln\frac{e^x+mx}{e^x+px}$. On a, $f_m(x) - f_p(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x+mx}{e^x+px} \geq 1 \Leftrightarrow e^x + mx \geq e^x + px \Leftrightarrow (m-p)x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Donc, pour $m > p$, C_m est au-dessus de C_p.*
6.

2.4 Exercice

Exercice 2.4.1. *Simplifier l'écriture des expressions suivantes :*

$\ln(\frac{1}{3}) + \ln(\frac{3}{5}) + \ln(\frac{5}{7}) + \ln(\frac{7}{9})$ $\quad 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$

$\ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$ $\quad \ln(2+\sqrt{3})^{20} + \ln(2-\sqrt{3})^{20}$.

Exercice 2.4.2. *Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminer l'ensemble de définition :*

$\ln(\frac{x-1}{2x-3}) = 0$ $\quad \ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(x-3)$ $\quad \frac{1}{2}\ln(x+3) = \ln(x+1)$

$\ln(x^2 - 3x + 2) = \ln(9)$ $\quad \ln(2x+1) + \ln(-x+1) = 0$ $\quad \ln(x-1)^2 - \ln(x+1) = 0.$

$\ln(x^2 - 4) \leq \ln(2) + \ln(x)$ $\quad 2\ln^2(x) - \ln(x) - 3 < 0$ $\quad \ln(5-x) - \ln(3) + \ln(x-1) \geq 0$

$\ln(3x^2 - x - 2) \geq \ln(6x+4)$ $\quad 3\ln(2x) \leq -\ln(2)$ $\quad \ln^2(x) - 7\ln(x) + \ln(12) \leq 0$

Exercice 2.4.3. *Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition et calculer les dérivées puis tracer les tableaux de variation des fonctions suivants :*

$f_1(x) = \ln(\frac{3x+5}{x-1})$ $\quad f_2(x) = x\ln(x+\frac{2}{x})$ $\quad f_3(x) = x + \frac{\ln(x)}{2x+1}$ $\quad f_4(x) = x^2\ln(\frac{x}{x+1})$

$f_5(x) = \frac{\ln(x^2-3x+1)}{x}$ $\quad f_6(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ $\quad f_7(x) = \ln(\sin x) - \ln x$ $\quad f_8(x) = \frac{\ln(1+x)}{\tan x}$

$f_9(x) = \frac{2\ln x+7}{x+\ln x}$ $\quad f_{10}(x) = \frac{\ln(1-4x)}{x}$ $\quad f_{11}(x) = 2x\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ $\quad f_{12}(x) = \ln(\frac{x+2}{-x^2+6x-5})$.

Exercice 2.4.4. .

<u>Partie A :</u>

On considère la fonction g définie par $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2x^3 + 4ln(x) - 2$

1. *Calculer $g(1)$*
2. *En déduire les variation de g, en déduire le signe de g sur $]0, +\infty[$*

<u>Partie B :</u>

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 2 - 2\frac{ln(x)}{x^2}$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité $1cm$.

1. *Donner le tableau de variation de la fonction f. En précisant ces limites aux bornes de D_f.*
2. *Montrer que la droite (D) : $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à C_f . Étudier la position de C_f par rapport à (D).*
3. *Déterminer les coordonnées du points A de C_f ou la tangente t_A à C_f est parallèle à (D).*
4. *Montre que la restriction de f sur $I =]1, +\infty[$ permet de définir une bijection de I vers un intervalle J à préciser.*
5. *Déterminer une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 2.*
6. *Tracer la droite courbe C_f et ces asymptote.*
7. *calculer l'aire du domaine limité (C_f), l'asymptote oblique (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.*

Exercice 2.4.5. .

<u>Partie A :</u>

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x}{x-1} - ln(x-1)$

1. *Déterminer l'ensemble de définition I de de g.*
2. *Dresser le tableau de variation de g, En précisent les limites de g aux borne de I (Au voisinage de 1 on pourra poser $h = x - 1$)*
3. *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $4 < \alpha < 5$. Déduit la valeur de α à 10^{-1} près.*
4. *Déduire le signe de g sur I.*

<u>Partie B :</u>

On considère la fonction f définie dans I Par : $f(x) = \frac{ln(x-1)}{x}$ et (ε_f) la courbe représentatif de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité $= 2cm$.

1. *Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition. Préciser s'il existe les droites asymptotique à* (ε_f).
2. a) *Montre que* $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$.
   b) *Montrer que* $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   c) *Dresser le tableau de variation de* f.
   d) *Calculer l'image de* f *par rapport à* 2 *et* 5.
   e) *Construire* (ε_f) *dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2.4.6. .

<u>Partie A :</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ *tel que* $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$.
On considère la fonction dérivable sur $]0, +\infty]$ *est définie par :*

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}ln(x)$$

1. *Dresser le tableau de variation de* f. *Préciser les limites aux bornes des* D_f.
2. *Démontrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution* α *telle que* $3 < \alpha < 4$
3. *Étudier le signe de* $f(x)$ *sur* $]0, +\infty[$.

<u>Partie B :</u>

On considère la fonction dérivable sur $]0, +\infty]$ *est définie par :*

$$h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 ln(x)$$

1. a) *Montrer que* $h'(x) = xh(\frac{1}{x})$
   b) *Dresser le tableau de variation de* $h(x)$
2. λ *est un nombre réel appartenant à l'intervalle* $]0, 1[$

   a) *montrer que* $\int_\lambda^1 x^2 lx(x) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 ln(\lambda)$
   b) *On note* $A(\lambda)$ *l'aire en centimètre carré de partie limiter par la courbe* (Γ), *la droite repère* $(o, \vec{i})$ *et les droites d'équations* $x = \lambda$ *et* $x = 1$. *Calculer* $A(\lambda)$
   c) *Déduire que* $\lim_{\lambda \to 0^+} A(x) = \frac{125}{36}$

<u>Partie C :</u>

1. *Soit* g *la fonction dérivable sur l'intervalle* $]0, +\infty[$ *et* $g(x) = 4 - \frac{1}{4}ln(x)$.

   a) *Étudier les variable de* g.
   b) *Démontrer que l'image de l'intervalle* $[3, 4]$ *est contenue dans l'intervalle* $[3, 4]$
   c) *Démontrer que* α *est l'unique solution de l'équation* $g(x) = x$

2. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

   a) *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel* n*,* $3 \leq u_n \leq 4$.
   b) *Démontrer que pour tout entier nature* n*,* $(u_n - \alpha)$ *et* $(u_{n+1} - \alpha)$ *sont des signes contraires.*
   c) *Démontrer que pour tout* x *élément de* $[3,4]$*, on a :* $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n*,* $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{u+1} - u_n|$*, puis que* $|u_{u+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$
   d) *Démontrer que pour tout entier nature* n*,* $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$*. En déduire une valeur approchée de* α *à* 0.01 *près.*

Exercice 2.4.7. .

Partie A :

Soit, pour toute entier naturel k *non nul* f_k *définie sur* $]0, +\infty[$ *par :*

$$f_k = x - k - \frac{kln(x)}{x}$$

la représentation graphique de f_k *dans un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *orthonormal est notée* (ε_f) *(unité graphique* $2cm$*)*

1. *soit, pour tout entier naturel* k *, la fonction* g_k *définie sur* $]0, +\infty[$ *par :*

$$g(x) = x^2 - k + kln(x)$$

   a) *Étudier le sens de variation de* g_k *; préciser ses limites en* 0 *et en* $+\infty$.
   b) *Montrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une unique solution notée* α_h *et que cette solution appartient à l'intervalle* $[1, 3]$.

2. *Établie que, pour* x *élément de l'intervalle* $]0, +\infty[$*,* $f'_k(x) = \frac{g'_k(x)}{x^2}$.
   Étudie le signe de $g_k(x)$ *et en déduire le sens de variation de* f_k.
3. a) *Étudie les de* f_k *en* 0 *et en* $+\infty$.
   b) *Montrer que la droite* D_k *d'équation* $y = x - k$ *est an asymptote à la courbe* (ε_k).
   c) *Étudie la positon relative de* (ε_k) *et* D_k

Partie B :

Étudie des cas particuliers $k = 1$ *et* $k = 2$

1. α_k *étant le nombre définie en* $(A : 1.b)$*,*
   montrer que $\alpha_1 = 1$ *et* $1.2 \leq \alpha_2 \leq 1,3$.
2. a) *Montrer que* $f_2(\alpha_2) = 2\alpha_2 - 2 - \frac{2}{\alpha_2}$
   b) *Donner un encadrement de* $f(\alpha_2)$.
3. *Donner les table au de variation de* f_1 *et* f_2.
4. *Représentation dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *les droites* (D_1) *et* D_2*,*
   puis les courbes (C_1) *et* C_2.

5. *Calculer en cm^2, la valeurs exacte de l'aire, de la partie comprise entre (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = 2$ et $y = x - 1$.*

Partie C :

1. *Pour tout entier k non nul, et pour $x \in]0, +\infty[$, calculer, $f_{k+1}(x) - f_k(x)$.*
   Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.
2. *Soit h la fonction définit sur $]0, +\infty[$ pour $h(x) = 1 - \frac{ln(x)}{x}$.*
   a) *Étudier le sens de variation de h ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.*
   b) *Déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β et que $\beta \in]0, 1[$.*
   c) *Montrer que, pour tout entier k non nul, $f_k(\beta) = \beta$.*
3. a) *Montre que toutes les courbes (C_f) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.*
   b) *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, préciser la position relatives de (C_{k+1}) et (C_k).*

Exercice 2.4.8. .

Partie A : *A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $] - \frac{1}{2}; +\infty$ par $f_n(x) = (x - \frac{1}{2}^n \ln(x + \frac{1}{2})$.*
On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans la repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2cm ; on notera f'_n la dérivée de f_n.

1. *Soit g_n la fonction définie sur $] - \frac{1}{2}, +\infty[$ par $g_n(x) = n \ln(x + \frac{1}{2}) + \frac{2x-1}{2x+1}$.*
   a) *Étudier les variations de la fonction gn_n.*
   b) *Calculer $g_n(\frac{1}{2})$ et déterminer le signe de g_n sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.*
2. a) *Pour tout $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$, montrer que :*
      - $f'_1(x) = g_1(x)$.
      - $f'_n = (x - \frac{1}{2})^{n-1} g_n(x)$.

   b) *On suppose que n est impair. Étudier les variation de f_n et dresser son tableau de variation.*
   c) *On suppose que n est pair. Étudier les variation de f_n et dresser son tableau de variation.*

3 . *On suppose que la translation du plan de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{i}$. On note (E_n) l'image de (C_n) par la translation T. Déterminer une équation cartésienne de (E_n).*

4. a) *Étudier les positions relatives de (C_1) et (C_2).*
   b) *Tracer les courbes (C_1) et (C_2).*

Partie B : *On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (x - \frac{1}{2})^n \ln(x + \frac{1}{2}) dx$.*

1. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq v_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$*
   En déduire la limite de la suite v_n.

2. *À l'aide de l'intégration par partie, montrer que* $v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2^{-n}}{n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}dx$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
3. *On pose pour* $n \geq 1$ *et* $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$,

   $s_n(x) = 1 - (x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})^2 + ... + (-1)^n(x - \frac{1}{2})$.

   a) *Montrer que :* $s_n(x) = \frac{2}{2x+1} + (-\frac{1}{2})^n \frac{(2x-1)^n}{2x+1}$.

   b) *Déduit que :* $v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}[ln2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}]$

On donne $\ln 2 \simeq 0.69, ln3 \simeq 1, ln5 \simeq 1.61$.

Exercice 2.4.9. .

Partie A :

Soit f *la fonction définie sur l'intervalle* $]-1, +\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$

1. *Calculer* $f'(x)$, *étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction* f.
2. *Calculer* $f(0)$. *Montre que l'équation* $f(x) = 0$ *admet exactement deux solution dont l'une, que l,on désigne par* α, *appartient à* $[-0.72; -0.71]$.
3. *Donner le signe de* $f(x)$, *pour* x *appartenant à* $]-1, +\infty[$.

Partie B :

Soit g *la fonction définie sur l'ensemble* $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ *par* $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1. *Calculer les limites de* $g(x)$ *quand* x *tend vers* 0^-, 0^+, -1 *et* $+\infty$.
2. a) *Calculer* $g'(x)$ *et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.*

   b) *Montrer que* $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

   En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ *en prenant* $\alpha = -0.715$.
3. a) *Dresser le tableau de variation de la fonction* g.

   b) *Représenter graphiquement la fonction* g *dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2cm).*
4. *Soit* α *une réel strictement supérieur à* 0. *On pose :* $I(\alpha) = \int_1^\alpha g(x)dx$.

   a) *Donner, suivant les valeurs de* α, *une interprétation géométrique du réel* $I(\alpha)$.

   b) *En remarquant que, pour* $x \in]0, +\infty[$ *:* $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

   Calculer $I(\alpha)$. *à l'aide d'une intégration par parties.*

   c) *Calculer* $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$ *et* $\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

Exercice 2.4.10. .

Partie A :

Soit g *la fonction définie sue l'intervalle* $[0; +\infty[$ *par :* $g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$.

1. *Montrer que* g *est dérivable sur l'intervalle* $[0; +\infty[$ *et, en détaillant les calculs effectués, montrer que*$g'(x) = 2x - 2x\ln(x^2+1)$.
2. *Étudier le sens de variation de* g *sur l'intervalle* $[0; +\infty[$.
3. *Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera* α, *dans l'intervalle* $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^2-1}]$, *tel que* $g(\alpha) = 0$ *; donner l'approximation décimale à* 10^{-1} *près par défaut de* α.

4. *En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartient à l'intervalle $]0;+\infty[$.*

Partie B :

La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(0)$ et $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ si $x \neq 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

1. *a) Vérifier que, pour x strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$.*

   b) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. *a) Montrer que, pour $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq \frac{|2x^2|}{x}$.*

   b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie C

On note F la primitive de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$.

On rappelle que $F(x) = \int_1^x f(t)dt$: (On cherchera pas à calculer $F(x)$).

1. *a) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geq \frac{2\ln|x|}{x}$.*

   b) Calculer$\int_1^x \frac{2\ln|x|}{x}dt$ pour $x \geq 1$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

2. *Dresser le tableau de variation de F.*
3. *Montrer que $f(1) < F(2) < f(\alpha)$ et en déduire un encadrement de $F(2)$.*
   (On prendra $f(\alpha) \approx 0.8$).
4. *On note I le point de coordonner $(1;0)$, A le point de (C) de coordonnées $(1;\ln 2)$ et B le point de coordonnées $(\ln 2;\ln 2)$.*

   a) Vérifier que B appartient à la tangente à (C) en O.

   b) Placer les points I, A et B sur une figure et tracer les segments $[OA]$, $[OB]$, $[BA]$ et $[AI]$.

   c) On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[0;1]$, la courbe (C) est située au-dessus de $[OA]$ et au dessous de $[OB]$ et de $[BA]$.
   Déterminer un encadrement de $F(0)$, d'amplitude inférieure à 2×10^{-1}

5. *Tracer la représentation graphique Γ de F en exploitant au maximum les résultats précédents ; on précisera notamment la tangente à Γ au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur.*

   (Unité graphique : 2cm).

3 Nombre complexe

3.1 Définition et règles de calcule

Définition 3.1. On appelle nombre complexe qu'on note z, tout nombre de la forme $ai + b$ Où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

Le nombre réel a est dit partie *réelle* de z et se note $R_e(z)$.

Le nombre réel b est dit partie *imaginaire* de z et se note $I_m(z)$.

L'ensemble des nombres complexe se note $\mathbb{C}$, il contient $\mathbb{R}$.

Deux nombres complexe z et z' sont égaux si est seulement si $R_e(z) = R_e(z')$ et $I_m(z) = I_m(z')$.

Si $a = 0$, $z = ib$, on dit que z est un nombre imaginaire pur.

Si $b = 0$, $z = a$, on dit que z est un nombre réel.

3.1.1 Représentation graphique

(Graphique)

Tout nombre $z \in \mathbb{C}$, $z = ai + b$ on peut associe, le point M du plan de coordonnées (a, b). cette correspondance est bijective.

On dit que z est l'affixe du point M.Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le plans est munie d'un repère orthonormé.L'axe des abscisses des points M dans cette correspondance est l'axe des réels et des ordonnées, l'axe des imaginaires.

3.1.2 règles de calcul

Addition

soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors :
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ • $z + z' = z' + z$ • $z + (z' + z") = (z + z') + z"$

Multiplication

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors :
- $z \times z' = z' \times z$ • $z \times (z' \times z'') = (z \times z') \times z''$ • $z \times 1 = 1 \times z$

Tout nombre complexe z admet un opposé z' au sens que $z + z' = 0$, avec $z' = -a - ib$

De même, tout nombre complexe non nul z admet un inverse z' au sens $z \times z' = 1$.
On a aussi, $z \times z' = 0$ si est seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

Définition 3.2. L'ensemble des nombres complexe ($\mathbb{C}$) est un corps commutatif. Soit $z = a + ib$, on a $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, on note $\overline{z}$ le nombre $a - ib$ qu'on appelle nombre complexe conjugue de z.

Si $z = a + ib$ alors on a les propriété suivants : • $\overline{\overline{z}} = z$ • $z + \overline{z} = 2a = 2\mathbb{R}$ • $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ • $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
Définition : Le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ est le *module* du nombre complexe $z = a + ib$, on note $|z|$.
• $|z|^2 = z\overline{z}$ • $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ • $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$

3.1.3 Forme trigonométrique

On dit que $z = a + ib$ est donnée sous forme algébrique. Soit M un point du plan.

Dans un repère orthonormé M est repéré par ces coordonnées (a, b). On peut aussi repérer M par ses coordonnées polaires. $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$

Théorème 3.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ de forme algébrique $z = a + ib$.*
Soit M le point du plan d'affixe z dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ orienté. θ est la mesure en radian de $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ alors : $\begin{cases} a &= |z|\cos\theta \\ b &= |z|\sin\theta \end{cases}$

Donc on appelle forme trigonométrique l'expression

$$z = |z|(cos\theta + isin\theta)$$

Exemples 3.1. *Donner la forme trigonométrique de $Z = 2 + 2i$.*

Solution 3.1. $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *donc* $\theta = \frac{\pi}{4}$

Donc $Z = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

Définition 3.3. Soit θ l'argument de z on le note $arg(z)$ de la forme trigonométrique (ou polaire) de z.

On pose : $e^{i\theta} = (cos\theta + isin\theta)$, alors : $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ. De même, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, z s'écrit $z = |z|e^{i\theta}$.

Propriété 3.1. .

a) $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

b) $e^{i\theta}$ *et* $e^{i\theta'}$ *sont inverses si est seulement si* $\theta = -\theta' + 2k\pi$.

c) $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ *si est seulement si* $\theta = \theta' + 2k\pi$

Formule d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

3.2 Résolution d'une équation de seconde degré

a) On veut résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 = -3$ $(= 3i^2)$.
C'est à dire $z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z^2 - 3i^2 = (z + i\sqrt{3})(z - i\sqrt{3}) \Rightarrow z = \pm i\sqrt{3}$

b) **résolution de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ **avec** $a, b, c \in \mathbb{R}$ **et** $a \neq 0$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réels distinctes $z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, il y a une solution réels double $z_0 = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexe distinctes $z_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples 3.2. $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Solution 3.2. $\Delta = 4 - 12 = -8$, *donc* $x_1 = \frac{2-i\sqrt{8}}{2} = \frac{2-2i\sqrt{2}}{2} = 1 - i\sqrt{2}$ *et* $x_2 = 1 + i\sqrt{2}$

c) **Cas où** $a, b, c \in \mathbb{C}$

Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, on cherche $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
On trouve une tel δ alors la formule est valable avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, et on a : $z_{1,2} = \frac{-b\pm\delta}{2a}$

d) ***Équation de type*** $z^2 = a + ib$
Pour résoudrez une équation de type $z^2 = a + ib$,
on pose $z = \alpha + i\beta$ et on calcule $z^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$ et
$|z^2| = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2 = \alpha^2 + \beta^2$ et par identification on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha^2 - \beta^2 & = & a \\ 2\alpha\beta & = & b \\ \alpha^2 + \beta^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}\right.$$

Pour finir, on résous le système pour trouver α et β.

Exemples 3.3. *Résoudrez l'équation* $z^2 = 8 - 6i$.

Solution 3.3. *Soit* $z = \alpha + i\beta$*, on a :*
$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha^2 - \beta^2 & = & 8(1) \\ 2\alpha\beta & = & -6(2) \\ \alpha^2 + \beta^2 & = & 10(3) \end{array}\right.$$
$(1) + (3) \Rightarrow 2\alpha^2 = 18 \Rightarrow \alpha = \pm 3$ *d'après* (2) $\beta = \pm 1$ *donc* $S = \{-3 + i; 3 - i\}$.

e) ***Équation de type*** $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ***avec*** $a \neq 0$

Pour résoudre une équation de type $(E) : az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, il y a trois possibilités :
- (E) admet une solution **réel** (β)
- (E) admet une solution **imaginaire pure** $(i\alpha)$
- (E) admet une solution complexe que l'on vous demande à vérifie $(\beta + i\alpha)$.

Exemples 3.4. ***Exemple :****On pose :* $\forall z \in \mathbb{C}, (E) : z^3 + (1 - i)z^2 + (2 + 2i)z - 8i = 0$.

1. *Montre que* (E) *admet une et unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.*
2. *Déterminer les nombres complexes* a *et* b *tels que :* $\forall z \in \mathbb{C}, (E) : (z + 2i)(z^2 + az + b) = 0$

3. Résoudrez l'équation (E).

Solution 3.4. *1. (E) admet une solution imaginaire pure si et seulement si il existe un αi tels que $(\alpha i)^3 + (1-i)(\alpha i)^2 + (2+2i)\alpha i - 8i = 0 \Rightarrow -i\alpha^3 - \alpha^2 + i\alpha^2 + 2i\alpha - 2\alpha - 8i = 0 \Rightarrow$ $(-\alpha^2 - 2\alpha) + i(-\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha^2 - 2\alpha & = & 0(1) \\ (-\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 8 & = & 0(2) \end{cases}$*
D'après (1) $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$
Pour $\alpha = 0$ dans (2) on trouve $-0^3 + 0^2 + 2 \times 0 - 8 = -8 \neq 0$
Pour $\alpha = -2$ dans (2) on trouve $-(-2)^3 + (-2)^2 + 2(-2) - 8 = 8 + 4 - 4 - 8 = 0$ Donc $\alpha = -2$

2. .

	1	$1-i$	$2+2i$	$-8i$
$-2i$	$\downarrow$	$-2i$	$-6-2i$	$8i$
	1	$1-3i$	-4	0

Donc $a = 1 - 3i$ et $b = -4$ et $(E) : (z + 2i)(z^2 + (1 - 3i)z - 4) = 0$

3. $(z + 2i)(z^2 + (1 - 3i)z - 4) = 0$, Pour $z^2 + (1 - 3i)z - 4$
On a $\Delta = (1 - 3i)^2 - 4(-4) = 1 - 6i - 9 + 16 = 8 - 6i$
$z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = 1 + i$ (z_1 et z_2 à calculer, utiliser l'exemple précédent).
$S = \{-2i; 1 + i; -2 + 2i\}$

Racine n-ième d'un nombre complexe

On veut résoudre l'équation $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}$

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ (forme algébrique) et $z = re^{i\theta}$ (forme trigonométrique).

Si on cherche z tel que $z^n = a$, $n > 0$, alors on pose $a = r'e^{i\theta'}$ avec $(re^{i\theta})^n = r'ei\theta' \Rightarrow r^n ein\theta = r'e^{i\theta'} \Rightarrow \begin{cases} r^n & = & r'(r, r' > 0) \\ n\theta & = & \theta' + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r & = & (r')^{\frac{1}{n}}(r, r' > 0) \\ \theta & = & \frac{\theta' + 2k\pi}{n}(k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Théorème 3.2. *Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, admet n racine n-émes tel que $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$ alors ces racines :*

$$z_k = (r)^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta' + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta' + 2k\pi}{n})) = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta' + 2k\pi}{n}} (0 \leq k \leq n - 1)$$

3.3 Similitude plan directe

3.3.1 Translation

Définition 3.4. Soient M et M' deux points du plan d'affixe respectives z et z' et $\vec{w}(b)$ un vecteur quelconque du plan. La translation de vecteur $\vec{w}$ qu'on note $t_{\vec{w}}$ est une application définie par :

$$t_{\vec{w}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w}$$

Écriture complexe : $t_{\vec{w}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w} \Leftrightarrow z'_m - z_m = b \Rightarrow$ **z' = z+b**
Expression analytique :

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ et $b = x_0 + iy_0$, d'après l'écriture complexe précédent, on a : $x' + iy' = x + iy + x_0 + iy_0 \Rightarrow x' + iy' = x + x_0 + i(y + y_0)$ donc :

$$\begin{cases} x' &= x + x_0 \\ y' &= y + y_0 \end{cases}$$

3.3.2 Homothétie

Définition 3.5. Soient M,M' et Ω trois points du plan d'affixe respectives z, z' et ω.

L'homothétie de centre Ω et de rapport k qu'on note $h(\Omega; k)$ est une application définie par :

$$h(\Omega, k)(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Écriture complexe :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Rightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \Rightarrow z' = \omega + kz - k\omega = kz + \omega(1 - k)$ donc :

$$z' = kz + \omega(1 - k)$$

Expression analytique :

Soit $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ et $\omega = x_0+iy_0$, d'après l'écriture complexe précédent,on a : $x'+iy = k(x+iy)+(x_0+iy_0)(1-k) \Rightarrow x'+iy' = kx+iky+x_0-kx_0+iy_0-iky_0 = k(x-x_0)+x_0+i(k(y-y_0)+y_0)$ donc :

$$\begin{cases} x' &= k(x - x_0) + x_0 \\ y' &= k(y - y_0) + y_0 \end{cases}$$

Remarque 3.1.

1. Si $k = 1$ on a : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ donc $M = M'$
2. Si $k = -1$ on a : $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ on obtient la symétrie centrale de centre Ω

3.3.3 Rotation

Définition 3.6. Soient M,M' et Ω trois points du plan d'affixe respectives z, z' et ω.

La rotation de centre Ω et d'angle θ qu'on note $r(\Omega; \theta)$ est une application définie par :

$$\begin{cases} \Omega M &= \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) &= \theta \end{cases}$$

Écriture complexe :

$\Omega M = \Omega M' \Leftrightarrow |z_m - z_\Omega| = |z_{m'} - z_\Omega| \Leftrightarrow |z - \omega| = |z' - \omega| \Rightarrow \frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \frac{|z-\omega|}{|z-\omega|} = 1$

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = arg(\frac{z'-\omega}{z-\omega}) = \theta$ donc $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = 1 \times e^{i\theta} \Rightarrow z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta} = ze^{i\theta} - \omega e^{i\theta}$ donc :

$$z' = ze^{i\theta} + (1 - e^{i\theta})\omega$$

3.3.4 Similitude directe

Isométrie : Une isométrie du plan est une transformation ponctuelle laissant invariantes les distances.

Déplacement : Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientées (Homothétie ou Rotation).
Écriture complexe :

$z' = z + z_0$ (translation) et $z' = e^{i\alpha} + b$ (Rotation).
L'écriture complexe d'un déplacement est de : $z' = ze^{i\alpha} + z_0$. Si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, celui-ci devient une translation $z' = ze^{i0} + z_0 = z' = z + z_0$.

Définition 3.7. Une similitude directe de rapport k(réel positive) est une transformation du plan qui multiplie les distances par k, et qui conserve les angles orientés.

Propriété 3.2. *Pour une transformation f du plan les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. *f est une similitude directe de rapport $k > 0$.*

ii. *$f = d \circ h$ (ou $f = h \circ d$) où **d** est une déplacement et **h** une homothétie de rapport k.*

Écriture complexe :

Soit f est une similitude directe de rapport $k > 0$ $f = d \circ h$. $M(z) \xmapsto{h} M_1(z_1) \xmapsto{d} M'(z')$ $h(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M_1} = h\overrightarrow{\Omega M'} \Leftrightarrow z_1 - \omega = k(z' - \omega) \Leftrightarrow z_1 = k(z' - \omega) + \omega$ $d(M_1) = M' \Rightarrow z' = e^{i\alpha} + z_0 = e^{i\alpha}(kz - k\omega + \omega) + z = kze^{i\alpha} + (1-k)e^{i\alpha}\omega + z_0$

Posons $m = ke^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$ et $n = e^{i'\alpha}(1-k)w + z_0 \in \mathbb{R}$ d'où :

$$z' = mz + n$$

Réciproquement

Soit f une transformation plane de l'équation complexe
$z' = az + b$ $(a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C})$

1. Si $a = 1$, on a : $z' = z + b$ donc f est une **translation**.
2. Si $a \neq 1$ on dit que f admet un point **unique invariant** Ω d'affixe ω qui vérifie : $\omega = a\omega + b \Rightarrow \omega(1-a) = b \Rightarrow \omega = \frac{b}{1-a}$.
   $z' = az + b$ et $\omega = a\omega + b$ On a : $z' - \omega = az - a\omega \Rightarrow z' = az + (1-a)\omega$ $a \in \mathbb{C}$ $\alpha = arg(a)$ donc $a = |a|e^{i\alpha}$ et $z' = |a|e^{i\alpha}z + (1 - |a|e^{i\alpha})\omega$.
   Soit $k = |a|$ On a :
   $$z' = ke^{i\alpha}z + (1 - ke^{i\alpha})\omega$$

Remarque 3.2. Si f est une similitude de rapport k, d'angle α et de centre Ω alors sa réciproque f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$ d'angle $-\alpha$ et centre Ω.

La compose de deux similitude de rapport k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \times k_2$.

Résumé : L'écriture complexe $z' = az + b(a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C})$ est :

1. Une ***translation*** de vecteur $\vec{u}$ si $a = 1$
2. Une ***homothétie*** de rapport a et de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ si $a \in \mathbb{R}\_\{0, 1\}$.

3. Une ***rotation*** d'angle α et de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| = 1$
4. Une ***similitude*** de rapport k avec $k = |a|$ et d'angle $\alpha = arg(a)$ et de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| \neq 1$

Exemples 3.5. *Déterminer la nature de s une transformation d'écriture complexe $z' = (1+i)z+4$.*

Solution 3.5. $|a| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1$ *donc s est une similitude de rapport* $k = \sqrt{2}$ *et d'angle* α *tels que :* $\begin{cases} \cos\alpha & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ *donc* $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *et de centre* $\Omega(\frac{4}{1-1-i})$ *donc* $\Omega(4i)$

Application 3. *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$(unité graphique : 4cm). Soit A le point d'affixe $z_a = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.*

1. *Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.*
   a) *Déterminer une écriture complexe de r.*
   b) *Montrer que l'affixe C est $Z_c = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.*
   c) *Écrire z_b et z_c sous forme algébrique.*
   d) *Placer des points A,B et C.*
2. *Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2,−1 et 2.*
   a) *Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer le point D.*
   b) *Montrer que A,B,C et D sont sur un même cercle.*
3. *Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.*
   a) *Déterminer une écriture complexe de h.*
   b) *Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.*
4. a) *Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.*
   b) *En déduire la nature du triangle CDE.*

Solution Application 3. .

1. a) *L'écriture complexe de r est de la forme $z' - z_o = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z - z_o)$, c'est-à-dire $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.*
   b) *Comme C est l'image de B par r, alors $z_c = z_B e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Donc l'affixe de C est $e^{-i\frac{\pi}{6}}$.*
   c) $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
   $z_c = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
   d) *Voir figure.*
2. a) *Comme D est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2,−1 et 2, alors on peut écrire : $\frac{2z_A - z_B + 2z_C}{2-1+2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{3}$, donc $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.*
   b) $OA = |z_A - z_O| = |i| = 1$; $OB = |z_B - O| = |e^{-i\frac{5\pi}{6}}| = 1$; $OC = |z_C - O| = |e^{-i\frac{\pi}{6}}| = 1$ *et* $OD = |z_D - z_O| = |\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i| = 1$.
   On en déduit que les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.
3. a) *L'écriture complexe de h est de la forme $z' - z_A = 2(z - z_A)$, c'est-à-dire $z' = 2z - i$*
   b) *Comme E est l'image de D par h, alors $z_E = 5z_D - i = \sqrt{3} + i - i = \sqrt{3}$, donc l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$.*

4. a) $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}{\sqrt{3}-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Donc,* $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

   b) $\frac{CD}{CE}=\frac{|z_D-z_C|}{|z_E-z_C|}=|\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}|$. *Or,* $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ *d'après la question précédente. Alors* $\frac{DC}{CE}=|e^{i\frac{\pi}{3}}|=1$, *et par suite* $CD=CE$. *On en déduit que* CDE *est isocèle en* C. *De plus,* $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD})=\arg(\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C})=\arg(e^{i\frac{\pi}{3}})=\frac{\pi}{3}$. *On en déduit donc que le triangle* CDE *est équilatéral.*

Application 4. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct*$(O,\vec{u},\vec{v})$ *(unité graphique 4cm).*
Soit Ω *le point d'affixe* 2. *On appelle* r *la rotation de centre* Ω *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *et* h *l'homothétie de centre* Ω *et de rapport* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. *On pose* $\sigma=h\circ r$.
   a) *Quelle est la nature de la transformation* σ *? Préciser ses éléments caractéristiques.*
   b) *Montrer que l'écriture complexe de* σ *est :* $z\longrightarrow\frac{1+i}{2}z+1-i$.
   c) *Soit* M *un point quelconque du plan d'affixe* z. *On désigne par* M' *son image par* σ *et on note* z' *l'affixe de* M'. *Montrer que* $z-z'=i(2-z')$.
2. a) ***Question de cours*** • *Pré requis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

   Démontrer que : si A *est un point donné d'affixe* a, *alors l'image du point* p *d'affixe* p *par la rotation de centre* A *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *est le point* Q *d'affixe* q *telle que* $q-a=i(p-a)$.
   b) *Déduire des questions précédentes la nature du triangle* $\Omega MM'$, *pour* M *distinct de* Ω.
3. *Soit* A_0 *le point d'affixe* $2+i$. *On considère la suie* (A_n) *de points du plan définis par : pour tout entier naturel* n, $A_{n+1}=\sigma(A_n)$.
   a) *Montrer que, pour tout entier naturel* n, *l'affixe* a_n *de* A_n *est donnée par :* $a_n=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}}+2$.
   b) *Déterminer le plus petit entier* n_0 *tel que l'on ait : pour* $n\geq n_o$, *le point* A_n *est dans le disque de centre* Ω *et de rayon* 0.01.

Solution Application 4. .

1. a) *La composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre est une similitude de rapport* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$.
   b) *Si* M_1 *est l'image de* M *par* r, *son affixe est* z_1, *telle que* $z_1-2=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-2)$. *L'image de* M_1 *par* h *est* M' *d'affixe* z' *telle que :* $z'-2=3(z_1-2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{i\frac{\pi}{4}}(z-2))=(z-2)(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}(1+i)(z-2)$. *D'où* $z'=2+\frac{(1+i)}{2}z-1-i=\frac{1+i}{2}z+1-i$.
   c) *L'égalité précédente peut s'écrire :* $2z+2(-2i)\Leftrightarrow(1-i)z'=z-2i=z-z'\Leftrightarrow-iz'+2i=z-z'\Leftrightarrow i(2-z')=z-z'$.
2. a) **Question de cours**
   D'après les propriétés de la rotation : Si $P\neq A$, $AQ=AP\Leftrightarrow\frac{AQ}{AP}=1\Leftrightarrow\frac{|q-a|}{|p-a|}=1\Leftrightarrow|\frac{q-a}{p-a}|=1$. *D'autre part :* $(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}=\frac{\pi}{2})\Leftrightarrow\arg\frac{q-a}{p-a}=\frac{\pi}{2}$. *Conclusion :* $\frac{q-a}{p-a}=i\Leftrightarrow q-a=i(p-a)$.

b) D'après la question 1.c. $z - z' = i(2 - z') \Leftrightarrow M$ d'affixe z est l'image de A dans le quart de tour direct de centre M', autrement dit le triangle $\Omega M'M$ est un triangle rectangle isocèle en M', $M' \neq \Omega$.

3. Démontrons la relation par récurrence :
Initialisation : Pour $n = 0$, $A_0(2+i)$ et en appliquant la relation au rang 0 :
$a_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} + 2 = i + 2$. La relation est vraie au rang 0.
Hérédité soit $n \neq \mathbb{N}$ et supposons la relation vraie au rang n : $a_n = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$. D'après la question 1.b, on a $a_{n+1} = \frac{1+i}{2}a_n + 1 - i = \frac{1+i}{2} + [(\frac{\sqrt{2}}{2})^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2] + 1 - i$. Or $\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\sqrt{2}}{4}}$. Donc en reportant : $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}[(\frac{\sqrt{2}}{2})^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2] + 1 - i = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}} + 2(\frac{1+i}{2}) + 1 - i = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} + 2$. La relation est donc vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$. On a donc démontré par le principe de récurrence que la relation est vraie pour tout naturel n.

4. On a donc $a_5 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^5 e^{i\frac{(5+2)\pi}{4}} + 2 = \frac{17}{8} - i\frac{1}{8}$.

5. $A_n\Omega < 0.01 \Leftrightarrow |(\frac{\sqrt{2}}{2})^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2 - 2| < 0.01 \Leftrightarrow |(\frac{\sqrt{2}}{2})^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}}| < 0.01 \Leftrightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^n < 0.01 \Leftrightarrow n\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) > \ln(0.01) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0.01)}{\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})} \approx 13.2$.
On a donc $n_0 = 13$.

3.4 Exercice

Exercice 3.4.1. .

1. Donner la forme algébrique z_i ainsi que le conjugue $\overline{z_i}$ des nombres complexes suivantes :
$z_1 = (1+i)^3$ $\quad z_2 = (2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$ $\quad z_3 = (1+i)(4-3i)(1-i)$
$z_4 = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$ $\quad z_5 = \frac{1}{3-i\sqrt{2}}$ $\quad z_6 = \frac{2-5i}{3+2i}$
$z_7 = (\frac{1+i}{2-i})^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$ $\quad z_8 = \frac{2}{1-2i} + \frac{3}{2+i}$ $\quad z_9 = (1-i)\overline{1+i}$.
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :
$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad z_2 = 2e^{i\pi}$ $\quad z_3 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})(3e^{i\frac{5\pi}{6}})$
$z_4 = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$ $\quad z_5 = (2e^{i\frac{\pi}{4}})(e^{-i\frac{3\pi}{4}})$ $\quad z_6 = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$
z_7, le nombre de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{8}$.
z_8, le nombre de module 3 et d'argument $\frac{-\pi}{8}$.

Exercice 3.4.2. .

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :
$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ $\quad z_2 = -5$ $\quad z_3 = (1-i\sqrt{3})(1+i)$
$z_4 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$ $\quad z_5 = \cos(\frac{\pi}{6}) - i\sin(\frac{\pi}{6})$
$z_6 = \sin(\frac{\pi}{9}) + i\cos(\frac{\pi}{9})$ $\quad z_7 = 1 + i(1+\sqrt{2})$.
2. Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle :
$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$ $\quad z_2 = (\frac{1+i}{1-i})^{2020}$ $\quad z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$
$z_4 = (-1+i\sqrt{3})^5$ $\quad z_5 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{-3+4i}$ $\quad z_6 = (1+i\sqrt{3})^{2020}$

Exercice 3.4.3. *Calculer les racines carrées des nombres suivants :*
$z_1 = -1$ $\quad z_2 = 3 + 4i$ $\quad z_3 = 8 - 6i$

$z_4 = \sqrt{3} + i \qquad z_5 = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_6 = 7 + 24i.$

Exercice 3.4.4. *.*

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*
   $E_1 : 2z + \overline{z} = 2 + 3i \qquad E_2 : (2i\overline{z} + i - 2) = \frac{1}{iz-2+i} \qquad E_3 : z^2 - (1+\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$
   $E_4 : z^2 - 5z + 9 = 0 \qquad E_5 : z^2 - \sqrt{3} - i = 0 \qquad E_6 : z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$
   $E_7 : 4z^2 - 2z + 1 = 0 \qquad E_8 : 4\overline{z} = -2i + 4 \qquad E_9 : (1+i)z^2 - (3+i)z - 6 + 4i = 0$
2. *On pose :* $\forall z \in \mathbb{C}, (E) : (1-i)z^3 - (5+i)z^2 + (4+6i)z - 4i = 0.$
   a) *Montre que* (E) *une racine réelle* α *que l'on déterminera.*
   b) *Déterminer les nombres complexes* a *et* b *tels que :*
      $\forall z \in \mathbb{C}, (E) : (z-1)(z^2 + az + b) = 0$
   c) *Résoudre l'équation* (E)*.*
3. *On pose :* $\forall z \in \mathbb{C}, (E) : z^3 - (3-2i)z^2 + [4 + i(6+\sqrt{2})]z - 8i + 2\sqrt{2} = 0.$
   a) *Montre que* (E) *admet admet une et unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.*
   b) *Déterminer les nombres complexes* a *et* b *tels que :*
      $\forall z \in \mathbb{C}, (E) : (z-2i)(z^2 + az + b) = 0$
   c) *Résoudre l'équation* (E)*.*

Exercice 3.4.5. *On donne les nombres complexes :* $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ *et* $z_2 = 1 - i.$

1. *Donner une forme trigonométrique de :* z_1*,* z_2 *et* $\frac{z_1}{z_2}$
2. *Donner une forme algébrique de* $\frac{z_1}{z_2}$*.*
3. *Déduisez-que :* $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{s\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$*.*

Exercice 3.4.6. *On considère le nombre complexe :*$z = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i.$

1. *Écrivez* z^2 *sous forme algébrique.*
2. *Déterminer le module et un argument de* z^2*.*
3. *À l'aide des propriétés du module et*
   d'argument, donner le module et l'argument de z*.*
4. *Déduisez-en la va leur exacte de :* $\cos(\frac{\pi}{12})$ *et* $\sin(\frac{\pi}{12})$*.*

Exercice 3.4.7. *On appelle* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$*, l'équation* $X^3 = 1$ *(Donner les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique).*
2. *Montrer que* $\overline{j} = j^2$*.*
3. *Montrer que* $j^{-1} = j^2$*.*
4. *Montrer que* $1 + j + j^2 = 0$*.*
5. *Calculer* $\frac{1}{1+j}$*.*
6. *Calculer* j^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exercice 3.4.8. 1. *On considère l'équation (E) :* $z^3 + (-6-4i)z^2 + (12+21i)z - 45i = 0$

   a) *Montre que E admet une solution z_0 imaginaire pure.*
   b) *Résoudre l'équation E (on appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 le troisième solution.)*
2. *le plan complexe P rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les A,B et C d'affixe respective $3i$, $3+3i$, $3-2i$*
   a) *Placer les points A,B et C dans le repère.*
   b) *Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$, En déduire la nature du triangle ABC.*
3. *Soit f la similitude direct qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.*
   a) *Donner un écriture complexe de f.*
   b) *Donner les éléments géométrique caractéristiques de f.*

Exercice 3.4.9. *Le plan est munie d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.$S$ est la similitude plane direct de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Soit M le pont d'affixe z et M' le point d'affixe z' avec $M' = S(M)$

1. *Exprimer z' en fonction de z.*
2. *On définit la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :*

$$\begin{cases} M_0 & d'affixe\ z_0 = 1+i \\ M_n & S(M_{n-1})\ pour\ n \geq 1 \end{cases}$$

   z_n est l'affixe de M_0, pour tout entier naturel n.

   a) *Déterminer les affixes des points M_1, M_2 et M_3.*
   b) *Exprimer z_n en fonction de z_{n-1} pour $n \geq 1$.*
   c) *En déduire que $z_n = (i\frac{\sqrt{2}}{2})^n\ z_0$.*
   d) *Soit $a_n = |z_n|$, montrer que a_n est le terme générale d'une suite géométrique dont on précisera la raison et la première terme.*
   e) *Étudier la convergence de la suite (a_n), $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 3.4.10. *Soit P un plan affine muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout nombre complexe $Z \neq -i$, on associe $f(z) = \frac{iz}{z+i}$. On note M le point d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.*

1. *Déterminer l'affixe z_0 du point B tel que $f(a_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$*
2. *On note r le module de $z+i$ et α son argument principale. Écrire en fonction de r et α la forme trigonométrique de $f(z) - i$.*
3. *Soit A le point d'affixe $-i$*
   a) *Déterminer l'ensemble l'ensemble (C) des points M d'affixe Z vérifiant l'égalité $|f(z) - i| = 1$.*
   b) *Montrer la droite (T) d'équation $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ est tangente à C en B.*
4. *Construire A,B,(T) et (C).*

Exercice 3.4.11. *Le plan P est muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

1. a) *Résoudre $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$*
   b) *Écrire les solution sous forme trigonométrique.*
2. a) *Soient A,B et C les points du plan d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 4$. Placer les ponts A,B et C dans le plan.*
   b) *Calculer le rapport $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_C}$, en déduire la nature du triangle CAB, puis celle du quadrilatère $AOBC$*
3. *Soit f la similitude direct du plan complexe qui laisse le point C invariant et qui transforma le point A en O.*
   a) *Donner l'écriture complexe de f.*
   b) *Donner les éléments caractéristique de f. Soit g la transformation du P en lui même qui a tout point M d'affixe z associer au point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 - i)z + 4i$*
   c) *Écrire sous forme algébrique , l'affixe de G', du barycentre G des points pondérés $(A, 3)$,$(B, 2)$ et $(C, -3)$ par g.*

Exercice 3.4.12. *Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D du plans complexe d'affixe respectives $a = 5 + 4i$,*
$b = 3 + i$, $c = 3 + 3i$ et $d = 6 + 2i$

1. *Placer les points A, B, C et D sur le graphique.*
2. *Calculer $\frac{d-b}{d-a}$, en déduire la nature du triangle DAB.*
3. *On considère l'application f qui a tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associer le pont M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-a}{z-b}$*
   a) *Calculer l'affixe C' du point C', image de C par f et place C' sur la figure.*
   b) *Déterminer l'ensemble (ε) contient les points M d'affixe z avec $z \neq b$ tel que $|z'| = 1$.*
   c) *Justifier que (ε) contient les points D et C. Tracer (ε).*
4. *On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de J.*

Exercice 3.4.13. *Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f du plan (P) dans lui-même, qui au point M d'affixe z, distincte de A, associe le point M' . $f(M)$ d'affixe : $z' = \frac{iz}{z+1}$.*

1. *Déterminer l'affixe du point M tel que $M' = M$.*
2. *Déterminer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :*
   $OM' = \frac{OM}{AM}$ et $(\vec{u}, \vec{OM}) = (\vec{MA}, \vec{MO}) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près.
3. a) *soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$.*
   Placer dans le repère le point B et la médiatrice $(\triangle)$ du segment $[OA]$.
   b) *Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f. Établie que B' appartient au cercle (ε) de centre O et rayon 1. Placer le point B' et tracer le cercle (ε) dans le repère.*
   c) *En utilisant la fonction z montrer que, si un point M appartient à la médiatrice $(\triangle)$, son image M' par f appartient au cercle (ε) .*

d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct. En s'aidant des résultats de la question 2, construire à la règle et au compas, l'image de point C par f.(on laissera apparent les traits de constructions).

4. *Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différents, l'ensemble (Γ) des points M distincte de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.*

   a) On pose $z = x + iy$ avec x et y réel tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$. Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :

   $$Im(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$$

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

   b) Retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

Exercice 3.4.14. *Le plan est munie d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note B et C les points du plans d'affixe respectives $3 - 2i$, $5 + i$. On désigne pas S la similitude directe de centre O et qui transforme C en B.*

1. *a) Démontrer que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z$.*
   b) Déterminer les éléments caractéristique de S.
   c) Déterminer l'affixe du point D qui a pour image le point C par S.
2. *a) Justifier qui l'affixe z_1, du point B_1, image de B par S est $\frac{1}{2}(1 - 5Z)$.*
   b) Donner la nature du triangle OBB_1
3. *On définie les points suivants : $B_0 = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} = S(B)$.*
   On note z_n l'affixe de points B_n.
   a) Démontres par récurrence que, $z_n = (\frac{1}{2})^n(1 - i)^n z_0$.
   b) Calcule la distance OB_n en fonction de n.
   c) Calcule la distance $\lim\limits_{n \to +\infty} OB_n$.

Exercice 3.4.15. *Dans le plans complexe muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les A d'affixe $3i$ et B d'affixe 6 ; unité graphique : $1cm$*

Partie A

1. *Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.*
2. *Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.*

Partie B

1. *Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, a pour tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = -2i\overline{z} + 6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.*
   Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.
2. *Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$.*
   On pose $g = f \circ h$.

a. *Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.*
b. *On désigne par $M"$ l'image du point M d'affixe z par la transformation g. Montrer que l'écriture complexe de g est $z" = -i\overline{z} + 2 + 2i$ où $z"$ est d'affixe de $M"$*
c. *Montrer qu'il existe sur l'axe $(o, \vec{v})$ un unique point invariant par g ; on le note L. Reconnaitre alors la transformation g.*
d. *En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL) . Préciser les éléments caractéristiques de h'.*

3. *Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient parallèles.*

Exercice 3.4.16. .

Partie A

1. *On pose : $\forall z \in \mathbb{C}, (E) : z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$.*
   a) *Montre que 2 est une racine de E.*
   b) *Déterminer les nombres complexes a et b tels que :*
   $\forall z \in \mathbb{C}, (E) : (z - \alpha)(z^2 + az + b) = 0$
   c) *Résoudrez l'équation (E).*
2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$(unité graphique 2cm), on considère les points A,B et C d'affixes respective*
   $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.
   a) *Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.*
   b) *Placer les points A, B et C.*
3. *Déterminer la nature du quadrilatère $OABC$.*
4. *Déterminer et construire l'ensemble $\hbar$ des points M du plan tels que*
   $|z| = |z - 2|$.

Partie B :

À tout point Md'affixe z tel que $z \neq z_A$,On associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$.

1. a) *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.*
   b) *En déduire les points associés aux points B et C.*
   c) *Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.*
2. a) ***Question de cours :***
   Pré-requis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où z est le conjugué de z.

   Démontrer que :

   - *pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.*
   - *pour tout nombre complexe z non nul, $|\frac{1}{z}| = | = \frac{1}{|z|}$.*

   b) *Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2. $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.*
   c) *On suppose dans cette question que M est un point quelconque de $\hbar$, où $\hbar$ est l'ensemble défini à la question 4. de la partie A. Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Tracer C.*

4 Primitive et Calcul d'intégrale

4.1 Primitive

Définition 4.1. f est une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet une primitive sur un intervalle I si est seulement si, il existe une fonction F dérivable sur I tel que :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Théorème 4.1. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, qui admet une primitive F sur I, alors toute primitive G de f est sous la forme :*

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Démonstration. Soit la fonction G est une fonction définie sur I par $G(x) = F(x)+k$ $(K \in \mathbb{R})$ G est manifestement dérivable sur I car somme de fonction dérivable sur I. On a : $G(x) = F'(x) = f(x)$, G est donc une primitive de f sur I. Réciproquement si G est une primitive de f sur I, alors on a : $\forall x \in I$ $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ Si la dérivée de $(F - G)$ est nulle alors $(F - G)$ est une fonction constate. Donc $\forall x \in G(x) = F(x) + k$ $(k \in \mathbb{R})$ □

Préposition 4.1. .

1. *Si F et G sont des primitive respectivement des fonction f et g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I*
2. *Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle et λ un nombre, alors λF est le primitive de λf sur I.*

4.1.1 Primitive vérifiant les condition initial

Théorème 4.2. *Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une unique primitive F sur I tel que*

$$F(x_0) = y_0.$$

Démonstration. Soit F et G deux primitives de f sur I. On a don : $F(x) = G(x) + k$
Si on impose $F(x_0) = y_0$ alors il existe un unique k tel que $k = y_0 - G(x_0)$. □

Exemples 4.1. *Déterminer la primitive F de $f(x) = e^x$ tel que $F(0) = 1$.*

Solution 4.1. *F est une primitive de f donc : $F(x) = e^x + k$*
$F(0) = e + k$ alors $k = F(0) - e = 1 - e$ donc $F(x) = e^x + 1 - e$.

4.1.2 Primitive des fonction usuelles

Fonction	Primitive	Intervalle
a	ax	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$

4.1.3 Règles d'intégrations

Fonction du type ...	une primitive du type ...
$s's^n$,$n \in \mathbb{N}$	$\frac{s^{n+1}}{n+1}$
$\frac{s'}{s}$	$\ln(\|s\|)$
$\frac{s'}{s^n}$ $n \neq 1$	$-\frac{1}{(n-1)s^{n-1}}$
$\frac{s'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{s}$
$s'e^s$	e^s
$s(ax+b)$ $a \neq 0$	$\frac{1}{a}s(ax+b)$

4.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition 4.2. f est une fonction continue sur un intervalle I. F est une primitive quelconque de f sur I, alors pour tous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F]_a^b$$

Démonstration. si la fonction f est continue sur I alors elle admet une primitive G sur I qui s'annule en a. On a alors pour tous réels a et b de I : $G(x) = \int_a^b f(x)dt$, on a alors : $\int_a^b f(x)dx = G(b)$.

Soit F une primitive quelconque de f sur I, alors il existe un réel k tel que : $F(x) = G(x) + k$. On obtient alors : $F(a) = k$ et $G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$. □

Conclusion : $\int_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples 4.2. *Calculer l'intégrale suivante :* $\int_1^4 (\frac{1}{x} + e^{2x} - x)dx$

Solution 4.2. $\int_1^4 (\frac{1}{x} + e^{2x} - x)dx = [\ln(x) + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2]_1^4 = \ln(4) + \frac{1}{2}e^{2\times 4} - \frac{1}{2}4^2 - \ln(1) - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3} = \ln(4) + \frac{e^8 - e^2}{2} + \frac{17}{3}$.

Propriété algébrique de l'intégrale. Soit une fonction continue sur une intervalle I alors, $\forall a, b \in I$ on a :

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ et } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Relation de chasle. $\forall a, b, c \in I$, on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Remarque 4.1. .

i) Si une fonction est « paire » alors d'après la relation de chasle :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

ii) Si une fonction est « impaire » alors d'après la relation de chasle :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Linéarité des intégrales Soient s et h deux fonction continue sur un intervalle I contenant a et b, alors pour tout réels α et β, on a :

$$\int_a^b \alpha s(x) + \beta h(x)dx = \alpha\int_a^b s(x)dx + \beta\int_a^b h(x)dx$$

Intégrale et Inégalités Soient s et h deux fonctions continue sur un intervalle $[a, b]$.

i) ***Positivité***

Si $s \geq 0$ sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b s(x)dx \geq 0$$

ii) ***Intégration d'une inégalité***

Si $s \geq h$ sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b s(x)dx \geq \int_a^b h(x)dx$$

iii) ***Inégalité de moyenne***

Si $\forall x \in [a, b], m \leq s(x) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b s(x)dx \leq M(b-a)$$

iv) ***Inégalité de cauchy-schwart***

Soient s et h deux fonction continue sur $[a, b]$ à valeur réelles alors :

$$(\int_a^b [s(x)h(x)]dx)^2 \leq (\int_a^b (s(x))^2dx)(\int_a^b (h(x))^2dx.$$

Valeur moyenne. Soit une fonction s continue sur un intervalle $[a, b]$, la valeur moyenne de la fonction sur $[a, b]$ est le réel μ définie par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b s(x)dx.$$

4.2.1 Calculs d'intégrale

Théorème 4.3 (Intégration par parties)**.** *Soient u et v deux fonction dérivable sur I , a et $b \in I$ alors :*

$$\int_a^b (u'v)(t)dt = [(uv)]_a^b - \int_a^b (v'u)(t)dt.$$

Exemples 4.3. *Calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.*

Solution 4.3. *Soit $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$ et $v' = e^x \Rightarrow v = e^x$*
On a : $\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2[xe^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x = -e + 2(e-1) = e - 1$.

Théorème 4.4 (Changement de variables)**.** *Soient α, β deux réels, $\alpha \leq \beta, \delta \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ s continue sur l'intervalle I contenant $\delta([\alpha, \beta])$ alors en posant $u = \delta(x)$ on a :*

$$\int_\alpha^\beta s[\delta(x)]\delta'(x)dx = \int_{\delta(\alpha)}^{\delta(\beta)} s(u)du.$$

Exemples 4.4. *Calculer $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.*

Solution 4.4. *Posons le changement de variable $x = tan(t)$, alors on a $dx = (a + tan^2(t))dt, t = arctan(x)$ et on sait aussi que $1 + tan^2(t) = \frac{1}{cos(t)}$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = 1$ donc t varie de $arctan(0) = 0$ à $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.*
$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+tan^2 t)^2}(1 + tan^2 t)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+tan^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos(2t) + 1)dt = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin(2t)t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

4.3 Exercice

Exercice 4.3.1. *Déterminer les primitives suivants, en précisant pour chacune, un intervalle de validité.* $\int (8\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - 5x\sqrt{x})\, dx$; $\int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$; $\int \left(3(2x+1)^2 + \frac{1}{2x-1}\right) dx$;$\int \left(15\sqrt{5x-2} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right) dx$
$\int \left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}\right) dx$; $\int \left(\frac{1+cos(\ln(x))}{x}\right) dx$; $\int \left(\frac{\cos(x)}{3+\sin(x)}\right) dx$; $\int \left(\frac{1+\tan(x)}{\cos^2(x)}\right) dx$.

Exercice 4.3.2. *Calculez les valeurs exactes des intégrales suivantes :*

$A = \int_{-1}^4 (2x-3)^2 dx$; $B = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x)dx$; $C = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$; $D = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}dx$; $E = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$; $F = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$; $G = \int_0^1 xe^{x^2-1}dx$; $H = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x - \frac{\pi}{3})dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(x) - xsin(x))dx$; $K = \int_1^2 \sin(\pi x + \frac{\pi}{4})dx$.

Exercice 4.3.3. *A l'aide d'une changement de variable ou d'intégration par partie, calculer les intégrale suivantes :*

$A=\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}dt$; $B=\int_0^1 t(1-t)^{2018}dt$; $C=\int_e^{e^2}\frac{dt}{x(\ln(x))^2}dt$; $D=\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{e^t}{e^t-1}dt$; $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(t)\cos(t)dt$; $F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(t)\cos^3(t)dt$; $G=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin(t)dt$; $H=\int_0^1(1-t)e^t dt$; $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2t)}{1+2\sin(2t)}dt$; $J=\int_0^{\pi}e^t\sin^2(t)dt$.

Exercice 4.3.4. *Comparez, sans les calculer, les nombre I et J. $I=\int_1^2(xe^x)dx$ et $J=\int_1^2(x^2e^x)dx$ et $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$ et $J=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt$.*

Exercice 4.3.5. *Calculez la valeur des moyenne de la fonction f sur l'intervalle I indiqué . $f(x)=5\sin(2x)$ et $I=[0;\pi]$; $f(x)=5\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ et $I=[0;\frac{\pi}{2}]$; $f(x)=\cos(x)e^{\sin(x)}$ et $I=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.*

Exercice 4.3.6. *Soit a et b deux réel non nul avec $a>0$. On considère l'intégrale complexe $\int_0^{\pi}\frac{dt}{a+ib\cos(t)}$.*

1. *Montrer que l'intégrale précédent est définie. Soit I sa valeur. Calculer $\overline{I}$ en fonction de I. Que peut on en conclure ?*
2. *Calculer $\Re(I)$, partie réelle de I en fonction de a et b (On pourra faire changement de variable $u=\tan(t)$). En déduire la valeur de I.*

Exercice 4.3.7. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que si f est impaire alors toute primitive de f est paire. En déduire alors que $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.*
2. *Montrer que si f est paire alors la primitive s'annulant en 0 de f est impaire. En déduire alors que $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.*

Exercice 4.3.8. *On propose de calculer les intégrales suivantes : $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $J=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $K=\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx$.*

1. *f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.*
   a. *Calculer l'expression de sa dérivée de f'.*
   b. *Déduisez-en la valeur exacte de I.*
2. a. *Justifier que $I+J=K$.*
   b. *À l'aide de l'intégration par parties portants sur K, prouvez que $K=\sqrt{2}-J$.*
   c. *Déduisez-en la valeur exacte de J et celle de K.*

Exercice 4.3.9. *Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre J définie par :*

$$J=\int_0^1\frac{x^2e^x}{1+x}dx.$$

f est la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f=\frac{e^x}{1+x}$.

1. *Étudie les variation de f sur $[0;1]$.*
2. *On pose pour tout entier naturel n, $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})$.*
   a. *Justifier que pour tout entier naturel k entre 0 et 4, on a :*

$$\frac{1}{5}f(\frac{k}{5})\leq\int_{\frac{k}{k}}^{\frac{k+1}{5}}\frac{e^x}{1+x}dx\leq\frac{1}{5}f(\frac{k+1}{5}).$$

b. *Déduisez-en l'encadrement suivant :* $\frac{1}{5}s_4 \leq \int_{\frac{k}{k}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}dx \leq \frac{1}{5}(s_5 - 1)$.

c. *Donner une valeur approchée à* 10^{-4} *près de* s_4 *et de* s_5*, puis déduisez-en l'encadrement :* $1,091 \leq \int_{\frac{k}{k}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}dx \leq 1.164$.

3. a. *Démontez que pour tout* x *de* $[0;1]$ *:* $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.

   b. *Justifiez l'égalité :* $\int_0^1 (1-x)e^x dx + J$.

   c. *Calculer* $\int_0^1 (1-x)e^x dx$.

   d. *Déduisez-en encadrement de* J *d'amplitude inférieur à* 10^{-1}.

Exercice 4.3.10 (La constante d'Euler)**.** .

1. *Prouver que pour* n *de* $\mathbb{N}^*$ *et tout* x *de* $[0,1]$ *:* $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$.
2. a. *calculer* $\int_0^1 \frac{1}{x+n}dx$.

   b. *Déduisez-en que pour tout entier* $n \geq 1$ *:* $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln(\frac{n+1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.
3. *On n'appelle* U *la suite définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   Démontrer que la suite U_n *est décroissante.*
4. *On désigne par* V_n *la suite définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

   Démontrer que la suite V_n *est croissante.*
5. a. *Prouver que* U *converge. On note* γ *sa limite.*

   b. *Démontrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n - V_n) = 0$.

   Déduisez-en que la suit V *converge aussi vers* γ.

   c. *Déterminer la valeur approche de* γ *à* 10^{-2} *près par une méthode de votre choix.*

Remarque : *le nombre* γ *est appelé* ***constante d'Euler****.*

Exercice 4.3.11 (Intégration de Wallis)**.** .

On pose l'intégrale suivante pour :

$$n \in \mathbb{N} : W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt.$$

1. *Calculer* W_0 *et* W_1.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

   On pourra utiliser une changement de variable.
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $0 < W_{n+1} < W_n$.

   En déduire que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
4. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

   On Pourra utiliser une intégration par parties.

5. *Montrer que la suite* $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante.*

   En déduire que la limite de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

   En déduire une équivalence de W_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

5 Équation différentielle

5.1 Équation différentielle de premier ordre

Dans la suite, la variable t (*le temps en Physique*) varie dans un intervalle I et y (ou x ou z) est un fonction de t.
Une équation linéaire du 1^{er} ordre est la forme :

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = f(t)$$

où α, β, et $f : I \to \mathbb{R}$ Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les fonction $y(t)$ la vérifiant.

Si $f = 0$, on dit que l'équation est *homogène*

Si $f \neq 0$, on dit que l'équation est avec *second membre*

Si $\alpha(t)$ n'est s'annule pas sur I on se ramène à la forme normal : **y' = a(t)y+b(t)**.

5.1.1 Résolution de l'équation homogène y'= a(t)y

$y' = a(t)y \Rightarrow \frac{y'}{y} = a(t) \Rightarrow \int \frac{y'}{y}d(t) = \int a(t)d(t) \Rightarrow |ln(y)| = \int a(t)d(t)$
$\Rightarrow e^{|ln(y)|} = e^{\int a(t)d(t)}$ donc :

$$y = ke^{\int a(t)d(t)} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Préposition 5.1. *Les solution de l'équation homogène $y' = a(t)y$ sont $y = ke^{\int a(t)d(t)}$ avec $k \in \mathbb{R}$ où $\int a(t)d(t)$ est un primitive de $a(t)$ sur I.*

Propriété 5.1. *Pour touts couple $(x_0, y_0) \in I$ telle que $y(x_0) = y_0$ fixe comme condition initiale détermine k unique.Donc l'équation homogène $y' = a(t)y$ admet une et une unique solution vérifiant cette condition initiale.*

Exemple : $y' = -y$, on peut voir immédiatement que $y(t) = ke^{-t}$.

5.1.2 Résolution de l'équation avec second membre

Solution général = solution homogène + solution particulier.

Pour trouver les solutions particuliers, on utilise *la méthode de la variation de la constante.*

$$y' = a(t)y + b(t)$$

Équation homogène : $y' = a(t)y \Rightarrow y = ke^{\int a(t)d(t)}$

Solution particulier : On prend, $y_0 = k(t)e^{\int a(t)} \Rightarrow y_0' = k'(t)e^{\int a(t)} + k(t)a(t)e^{a(t)}$ donc $y' = a(t)y + b(t) \Rightarrow k'(t)e^{\int a(t)} + k(t)a(t)e^{a(t)} = a(t)k(t)e^{\int a(t)} + b(t) \Rightarrow k'(t)e^{\int a(t)} = b(t) \Rightarrow k'(t) = b(t)e^{-\int a(t)} \Rightarrow k(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)}$.

Solution :

$$y(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)} + ke^{\int a(t)d(t)}$$

Exemples 5.1. *Résoudre l'équation différentielle suivant :* $y' + y = xe^{-x}$

Solution 5.1. *On résout d'abord l'équation sans second homogène* $y'+y = 0$ *qui donne* $y(x) = ke^{-x}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$. *On cherche ensuite une solution particulière sous la forme* $y(x) = p(x)e^{-x}$, *avec* p *un polynôme.* y *est solution de l'équation si et seulement si* $p'(x) = x$. *Une solution particulière est donc* $\frac{x^2}{2}e^{-x}$, *l'ensemble des solutions de l'équation est :*

$$y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + k)e^{-x},$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

5.2 Équation différentielle d'ordre 2 à coefficient constants

5.2.1 Résolution de l'équation homogène $ay" + by' + cy = 0$

On résous l'équation $ar^2 + br + c = 0$. On cherche des solutions de la forme e^{rt} ($où r \in \mathbb{R}$) $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$	E admet deux racines r_1 et r_2 distincts	$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$ $(\lambda, \beta \in \mathbb{R})$
Si $\Delta = 0$	E admet une solution double r_0	y(t) = $(\lambda t + \beta)e^{r_0 t}$ $(\lambda, \beta \in \mathbb{R})$
Si $\Delta < 0$	E admet deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\mu$ et $\alpha - \mu$ $(\alpha, \mu \in \mathbb{R})$	$y(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t))$ $(\lambda, \beta \in \mathbb{R})$

Propriété 5.2. *Pour touts couple* (x_0, y_0) *et* (x_0, y_1) *telle que* $y(x_0) = y_0$ *et* $y'(x_0) = y_1$ *fixe comme condition initiale. L'équation homogène* $ay"+by'+cy = 0$ *admet une et une unique solution vérifiant cette condition initiale.*

Exemples 5.2. *Résoudre l'équation homogène* $y" - 4y' + 4 = 0$

Solution 5.2. *L'équation caractéristique* $r^2 - 4r + 4 = 0$ $\Delta = 16 - 16 = 0$, *donc l'équation caractéristique à une racine double* $r_0 = \frac{4}{2} = 2$ *donc* $y(x) = (ax + y)e^{2x}$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$.

5.2.2 Équation avec second membres $ay" + by' + cy = f(t)$

Pour résoudre une équation différentielle avec seconde membre, on utilise le procédure suivant :

- Déterminer les solutions de l'équation homogène.
- Déterminer une solution particulier h de cette équation.
- Démonter que les solutions de l'équation avec seconde membre sont les fonctions du type $f - h$ où f est une solution de l'équation homogène.
- résoudre l'équation homogène et en déduire l'équation avec seconde membre.

Exemples 5.3. *On considère l'équation :* $y" + 2y' + 4y = xe^x$ (E).

1. *Résoudre l'équation différentielle homogène associée à* (E).

2. *Déterminer les réels a et b tel que $h(x) = (ax + b)e^x$ est solution de (E).*
3. *Démonter qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0). En déduire l'ensemble des solutions de (E).*
4. *Déterminer l'unique solution s de (E) vérifiant $s(0) = 1$ et $s(1) = 0$.*

Solution 5.3. .

1. *Le polynôme caractéristique associé à E est : $r^2 + 2r + 4$; son discriminant est $\Delta = 4 - 16 = -12$, donc il a deux racine complexe $r_1 = -1 - i\sqrt{3}$ et $r_2 = -1 + i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions : $y(x) = e^{-x}(a\cos(\sqrt{3}x) + b\sin(\sqrt{3}x))$ (a et $b \in \mathbb{R}$)*
2. *On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $h(x) = (ax + b)e^x$ $h"(x) + 2h'(x) + 4h(x) = (7ax + 7b + 4)e^x$. Donc $h(x)$ est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients : $a = \frac{1}{7}$ et $b = \frac{-4}{49}$. Donc $h(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E.*
3. Condition nécessaire *: Montrons que si f est solution de E alors $f - h$ est solution de E_0*
   f est solution de E si et seulement si $f" + 2f' + 4f = xe^x$
   h est solution de E si et seulement si $h" + 2h' + 4h = xe^x$
   $f - h \Leftrightarrow f" + 2f' + 4f - (h" + 2h' + 4h) = 0 \Leftrightarrow (f" - h") + 2(f' - h') + 4(f - h) = 0$ donc $f - h$ est solution de l'équation homogène.
   Condition suffisant *: Montrons que si $f - h$ est solution de E_0 alors f est solution de E.*
   $f - h$ est solution de E_0 si et seulement si $(f" - h") + 2(f' - h') + 4(f - h) = 0 \Leftrightarrow f" + 2f' + 4f - (h" + 2h' + 4h) = 0 \Leftrightarrow f" + 2f' + 4f = h" + 2h' + 4h$ comme h est solution de E, on a : $h" + 2h' + 4h = xe^x \Rightarrow f" + 2f' + 4f = xe^x$. Comme f vérifier l'équation alors f est solution de E.
   $(f - h)$ est solution de E_0 donc $f - h = e^{-x}(a\cos(\sqrt{3}x) + b\sin(\sqrt{3}x))$
   $\Leftrightarrow h = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x + e^{-x}(a\cos(\sqrt{3}x) + b\sin(\sqrt{3}x))$
4. *Soit s une solution de E. Les conditions $s(0) = 1$, $s(1) = 0$ sont réalisées si et seulement si*
   $$\begin{cases} 1 &= e^{-0}(a\cos(\sqrt{3}\times 0) + b\sin(\sqrt{3}\times 0)) + \frac{1}{7}(0 - \frac{4}{7})e^0 \\ 0 &= e^{-1}(a\cos(\sqrt{3}\times 1) + b\sin(\sqrt{3}\times 1)) + \frac{1}{7}(1 - \frac{4}{7})e^1 \end{cases}$$
   $$\Rightarrow \begin{cases} 1 &= a + \frac{-4}{49} \\ 0 &= e^{-1}(a\cos(\sqrt{3}) + b\sin(\sqrt{3})) + \frac{3}{49}e \end{cases}$$
   On a $a = \frac{53}{49}$ et $b = -\frac{54\cos(\sqrt{3})+3e^2}{49\sin(\sqrt{3})}$

5.3 Exercice

Exercice 5.3.1. *Sur $]0, +\infty$, on considère l'équation différentielle (E) du 1^{er} ordre :*

$$y' + \frac{1}{t}y = ln(t)$$

.

a) *Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée à (E).*
b) *A l'aide d'une intégration par partie, déterminer sur $]0, +\infty[$ la primitive $\int tlnt$.*

c) En utilisant la méthode de variation de constant, déterminer toutes les solution de (E).
d) Déterminer les solution de (E) vérifiant les conditions initiale $y(1) = 2$.

Exercice 5.3.2. *Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En l'an 2000, l'effectif était égale à mille(1 000).L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f. Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000, +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle : (E_1); $y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$.*

1. Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $[2000, +\infty[$ par :
   $h(t) = \frac{200}{t}$. Vérifie que h est une solution de (E_1).
2. Résous l'équation différentielle (E_2) : $y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0$.
3. a) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_2).
   b) Déduis-en les solution de (E_1).
   c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que : $\forall t \in [2000, +\infty[$,
   $f(t) = 999,9e^{(10-\frac{t}{200})} + \frac{200}{t}$.
   d) Déterminer le nombre d'individus de cette population animal en 2021.
   Donner le résultat arrondi à l'ordre 0.

Exercice 5.3.3. *Soit $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[$*

1. a) Résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (2\sin\theta)z + 1 = 0$ (e_0).
   b) Déterminer le module et un argument de chacune des racines de (e_0).
2. On considère l'équation différentielle : $y" + 2(\sin\theta)y' + y = x\cos\theta + 2\sin\theta$ (e_1).
   a) On pose $y_0(x) = ax + b$; avec a et b des nombres réels.
   Déterminer les réels a et b tels que y_0 soit solution de (e_1).
   b) Montrer qu'une fonction y est solution de (e_1) si et seulement si $y - y_0$ est solution d'une équation différentielle homogène du seconde ordre que l'on résoudra.
3. Déterminer toutes les solutions de (e_1).

Exercice 5.3.4. *On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.*

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de E si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 5.3.5. 1. *Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*

2. On considère l'équation différentielle $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$ (E')
   a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$ soit une solution de (E').

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E). Résoudre l'équation (E').

3. *Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$*
4. *Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de h.*
5. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note ε la courbe représentative de la fonction h et Γ celle de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.*

   a) Étudier les positions relatives de ε et de Γ.

   b) Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Exercice 5.3.6. *1. On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ est est l'unique fonction ϕ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi' = \phi$ et $\phi(0) = 1$.*
On considère un réel α.

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{ax}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

b) On considère une fonction g solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est constante.

c) En déduire l'ensemble des solutions de $y' = ay$.

2. *On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.*

   a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x)a \cos x + b \sin x$ soit une solution de (E).

   b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

   c) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

   d) En déduire les solutions de (E).

   e) Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Exercice 5.3.7. *On considère les deux équations différentielles définies sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: (E) : $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$ et (E_0) : $y' + y = 1$.*

1. *Déterminer les solutions de (E_0).*
2. *On considère deux fonctions f et g dérivables sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ telles que $f(x) = g(x) \cos x$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_0).*
3. *Déterminer la solution de f de (E) telle que $f(0) = 0$.*

6 Dénombrement et Probabilité

6.1 Dénombrement

6.1.1 Les ensembles finis

Définition 6.1. On dit qu'un ensemble E est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments. Le nombre d'élément de E est appelé le ***cardinal*** de l'ensemble et est noté : $Card(E)$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.

Par convention, l'ensemble vide est un ensemble fini de cardinal 0.

Définition 6.2 (Dénombrer)**.** Dénombrer c'est compter le nombre d'éléments qui contient un ensemble un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Définition 6.3 (Partition d'une ensemble)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots E_p$ des sous-ensembles d'un ensemble E fini ou non. On dit que $P = (E_1, \ldots, E_p)$ est une partition de E lorsque

$$\begin{cases} \text{il sont non vide} \\ E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_p = E \\ E_1, \ldots, E_p \text{ sont disjoints deux à deux.} \end{cases}$$

Propriété 6.1 (Formule sur les cardinal)**.** .

1. *Si $P = (E_1, \ldots, E_p)$ est une partition d'un ensemble fini E, on a :*
   $Card(E) = Card(E_1) + Card(E_2) + \ldots + Card(E_p)$
2. *Si A et B sont deux ensemble fini,*
   on a : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
3. *Pour tous ensemble fini A et B*
   $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$ *(Produit cartésien)*

6.1.2 p-liste d'un ensemble fini

Définition 6.4. Soit E un ensemble fini, p un entier naturel non nul.
On nomme ***p-liste d'éléments*** de E, toute liste $(x_1; x_2; ....; x_p)$ où $x_1; x_2; \ldots x_p$ sont tous élément de E (on note des p-liste de E : E^p.)

Préposition 6.1. *n et p sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2. E est un ensemble de cardinal n. L'ensemble des p-listes de e a pour cardinal n^p.*

6.1.3 Arrangements

Définition 6.5. On obtient un arrangement de p parmi n lorsqu'on choisit p éléments différents parmi n élément possibles en tenant compte de l'ordre dans lequel ils ont été choisis.

Théorème 6.1. *Si $0 \leq p \leq n$, le nombre d'arrangements possibles obtenus en choisissant p éléments parmi n est :* $A_n^p = \frac{n}{(n-p)!}$.

Remarque 6.1. Soit E un ensemble a n élément, on appelle **permutation** tous arrangement de n élément de E Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est $n!$.

6.1.4 Combinaisons

Définition 6.6. On appelle combinaison d'un ensemble E de cardinal n tout sous-ensemble d E de cardinal p.

Théorème 6.2. *Si $0 \leq p \leq n$, le nombre de combinaisons possibles dans un ensemble à n élément est :* $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

6.1.5 Tableau récapitulatif

Modalisation	les p éléments sont ordonnées	les p éléments sont distincts	outil	nombre de tirage
Tirage successif avec remise	oui	non	p-list	n^p
trage successif sans remise	oui	oui	arrangement ou pemutation	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
tirage simultanée	non	oui	combinaison	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

6.2 Probabilité

6.2.1 Expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs issue (ou résultat) possible et qu'on ne peut ni prévoir ni calculer laquelle de ses issues sera réalisée lorsque l'expérience a eu lieu.

N.B : Éventualités ces sont les issues de l'expérience aléatoires.

Remarque 6.2. Presque la totalité des expériences aléatoire (e.a) étudiées aurons des nombres finie d'issues. Elle serons notés par les lettres ε ou $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, etc$ lorsqu'il y' a plusieurs e.a en étude.

6.2.2 Événement

Définition 6.7. Un événement est une partie (ou sous ensemble) de l'ensemble Ω des issues d'une e.a.

6.2.3 Vocabulaire

a) Dire qu'une issue a de e.a réalise l'événement A signifie que a est un élément de l'ensemble A. On note : $a \in A$.

b) On dit que A est inclue dans B si tout élément de A est dans B.
On écrit $A \subseteq B$.

c) Une événement est ***élémentaire*** s'il contient qu'une seule issue $B = \{w_i\}$.

d) $\emptyset$ est événement ***impossible***. Il traduit la possibilité qu'aucune issues ne se réalise.

e) Ω est appelé événement ***certain***. Il traduit la possibilité que l'une des issues prévue soit le résultat de l'e.a.

f) Événement ***complémentaire*** (contraire) de A est l'ensemble de Ω qu'on réalise pas en A. On le note $\overline{A}$.

g) ***L'intersection*** de A et B est l'événement noté $A \cap B$ est formé par les élément qui sont dans A et dans B, il se réalise si A **et** B se réalisent.

h) La ***réunion*** de A et B est l'événement noté $A \cup B$ constitué les issues qui réalise l'événement A **ou** l'événement B.
c'est-à-dire ***au moins*** l'un des deux.

i) A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$. Elle ne peut pas se réalisent simultanément.

6.2.4 Lois de probabilité

Définition 6.8. Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre P_i, positif ou nul le telle façon que $P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$.

Issue	x_i	x_2	$\ldots$	x_n
Probabilité	P_1	P_2	$\ldots$	P_n

Ce nombre P_i est appelé probabilité de l'issue x_i.

6.2.5 Probabilité d'une événement

Définition 6.9. La probabilité d'une événement A est donnée par la **somme** des probabilité de toutes les issues qui composent cet événement.

$$P(A) = \sum_{x=A} P_x$$

N.B : $P(A)$ est appelé mesure de probabilité de A.

Propriété 6.2. *La probabilité de l'événement* ***certain*** *est* $P(\Omega) = 1$

La probabilité de l'événement ***impossible*** *est* $P(\emptyset) = 0$

Pour tout événement A *:* $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
et $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

Si l'événement est ***indépendant*** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si l'événement est ***incompatible*** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

6.2.6 Équiprobable

Définition 6.10. Il y a équiprobable si toutes les issues ont la même probabilité. Dans ce cas :

$$P_i = \frac{1}{\text{nombre d'issue de l' e.a}}$$

Dans le cas d'une loi ***équiprobable***, la probabilité d'une événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

6.2.7 Variable aléatoire

Définition 6.11. une variable aléatoire(v.a) est une fonction définie sur Ω et a valeurs dans $\mathbb{R}(\Omega \to \mathbb{R})$ on la note X avec Ω univers d'une e.a.

loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 6.12. Une v.a X est définie sur l'univers Ω d'une e.a.

Notons $E = (x_1; x_2; ...; x_n)$ l'ensemble des valeurs prises par X.

La loi de probabilité de X est la fonction qui à pour chaque x_i de E lui associe sa probabilité notée $P(X = x_i)$. On peut la représenter sous forme d'une tableau de valeurs.

x_i	x_1	x_2	.....	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	.....	$P(X = x_n)$

Espérance, variance et écart-type d'une loi de probabilité

Définition 6.13. .

1. L'**espérance** mathématique de la loi de probabilité de X est la moyenne de la série des x_i pondérés par P_i, on le note $E(x)$.
$$E(x) = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n},$$
or $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ donc $p(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$,
$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

2. La **variance** de la loi probabilité de X est la variance de de série des x_i pondérés par P_i ; on la note $V(x)$
$$V(x) = E([x - E_X])^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$
Démonstration. $V(x) = E[(x - E(x))^2] = E(x^2 + E(x)^2 + 2xE(x)) == E(x^2) + E[E(x)^2] + E[2xE(x)]$ or $E(x) = \sum_k x_k P(X = x_k) = nbre \Rightarrow E(x)^2$ est un nombre donc $E[E(x)^2] = E(x)^2$ car $E(nbre) = nbre$.De même $E(2xE(x)) = 2E(x)E(x)$ donc $Var = E(x^2) + E(x)^2 - 2E(x)^2 = E(x^2) - E(x)^2$. □

3. L' **écart-type** de la loi de probabilité de X est l'écart-type de la série des x_i pondérés par P_i ; on la note $\delta(x)$.
$$\delta(x) = \sqrt{V(x)}$$

6.2.8 Loi Binomial

Définition 6.14. On considère une expérience aléatoire à deux issues. l'une qu'on appelle ***Succès*** avec une probabilité p et l'autre, l'événement contraire qu'on appelle ***Échec*** avec une probabilité $1-p$. C'est une ***épreuve de Bernoulli*** de paramètre p égale à la probabilité de succès.

On recommence n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p de façons identique c'est-à-dire ***avec remise***.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur les n épreuves.X prend les valeurs $0; 1; 2; \ldots; n$. On écrit : $X(\Omega) = 0; 1; 2; \ldots; n$.

On dit que X suit une loi binomiale $\mathbb{B}(n, p)$ de paramètres n et p.

On pose X le nombre de succès au tours de n répétition $(0; 1; 2; \ldots; n)$. La probabilité d'obtenir k succès est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} P^k (1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial.

"k parmi n", c'est-à-dire le nombre de chemins qui aboutissent à k succès.

Expérience ; et écart-type d'un loi Binomial. .

Soit v.a X qui suit une loi binomial $\mathbb{B}(n, p)$.

$$E(x) = np, \; V(x) = np(1-p) \text{ et } \delta = \sqrt{np(1-p)}$$

6.2.9 Probabilité conditionnelles

Définition 6.15. Soit Ω un ensemble fini et p une loi de probabilité sur l'univers Ω liée à une e.a. Soit A et B deux événements de l'univers Ω tel que $P(B) \neq 0$.

On définie la probabilité que ***A soit réalisé sachant que B est réalisé*** noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ de la manière suivante :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Théorème 6.3. *Soient A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$.*

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P(A) \times P_A(B).$$

Propriété des probabilités conditionnelles : On admet que la probabilité conditionnelle $P(a)$ vérifie toutes les propriétés usuelles des lois de probabilité.

Théorème 6.4. *Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.*

1) Pour tout événement B, $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_\Omega(A) = 1$

3) Pour tout événement B, $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

4) Si B et C sont deux événements incompatibles, alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

Propriété 6.3. *Si A et B sont deux événements indépendants : $P_A(B) = P(B)$.*

Démonstration. $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(A)} = P(B)$. □

Formule de probabilité total

Théorème 6.5. *Soit $\{A_i; i \in I\}$ un système complet d'événement, tous de probabilité non nulle.Soit B un événement. Alors :*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$$

6.3 Exercice

Exercice 6.3.1. *Les deux partie A et B de cet exercice sont indépendantes.*
Partie A
En vue de sélectionner des joueurs pour la un tournoi internationale de football, une fédération nationale met en place à la disposition de l'entraineur un certain nombre de joueurs évoluant du pays et hors du pays. Parmi eux, il y a des joueurs professionnels et des joueurs non professionnels. Ces joueurs se répartissent comme suit :

- 75% *des joueurs évoluant au pays ;*
- 60% *des joueurs évoluant au pays sont professionnels.*
- 80% *des joueurs évoluant hors du pays sont professionnels.*

On choisie au hasard un joueur pour subir un teste antidopage.
On désigne par A l'évènement « Le joueur choisie évolue au pays ».
On désigne par B l'évènement « Le joueur choisie est professionnel ». On désigne par C l'évènement « Le joueur choisie évolue au pays et professionnel ».

1. *a) Traduis l'énoncé par un arbre de probabilité.*
   b) Donne $P_A(B)$, la probabilité de B sachant A.
   c) Démontre que la probabilité de l'évènement C est égale à 0.45.
2. *Calculer la probabilité de B.*

Partie B
Un entraineur doit sélectionner de joueurs parmi ceux mis à disposition. Pour ce fait, il soumet d'abord chaque joueur à test qui consiste à faire trois tirs au but successifs à partir du point de penalty. Et retenu à l'issue de ce premier test, tout les joueur que réussit au moins deux de ces trois tirs. On suppose que les tirs sont indépendants les uns au autres et que la probabilité qu"un joueur donnée réussisse un tir est égale à $\frac{3}{4}$.

1. *Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussir par un joueur donné à l'issue de l'épreuve de trois tirs au but successifs.*
   a) Détermine les variable prise par X.

b) Détermine la lois de probabilité de X.

2. *Calculer l'espérance mathématique de X.*
3. *Démontre que la probabilité qu'un joueur donné retenu est égale à* $\frac{27}{32}$.

Exercice 6.3.2. *Un éleveur de chevaux possède dans son écurie quatre étalons et six juments. Il décide de vendre trois de ces animaux pour faire face à ses dépenses. On suppose que tous les animaux ont la même probabilité d'être vendus.*

1. *a) Calculer card* Ω.

   b) Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « Parmi les trois chevaux, il y a au plus un étalon ».
   B : « Parmi les trois chevaux, il y a au moins une jument ».

2. *Le prix d'un étalon est 500 000 francs et celui d'une jument est 400 000 francs. Calculer la probabilité de l'évènement*
   C : « Obtenir un prix de vente total qui soit au moins de 1 200 000 francs ».
3. *Cet éleveur doit payer la scolarité de ses trois enfants répartie comme suit :*
   - *800 000 F pour le premier garçon qui est en année de master à l'université ;*
   - *400 000 F pour sa fille qui est à l'internat ;*
   - *80 000 F pour le deuxième garçon qui est au lycée.*

   Quelle est la probabilité pour que cet éleveur puisse payer la scolarité totale de ses enfants en élevant les trois chevaux au hasard.
4. *Soit X la variable aléatoire, qui à chaque tirage de trois chevaux, associe le prix de vente obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X.*
   NB : *On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.*

Exercice 6.3.3. *Une urne contient cinq boule portant le numéro 2 ; quatre boule portant le numéro 3 et trois boules portant le numéro 4.*
On tire simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. *Déterminer les probabilité des évènements suivantes :*
   A : « Tirer au moins une boule portant le numéro 3 ».
   B : « Tirer trois boule portant tous des numéros différents ».
   C : «Tirer trois boule portant le même numéro ».
   D : « Tirer trois boule dont exactement deux portent le même numéro ».
2. *Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros marqués sur les tris boules tirées.*
   a) Quelles sont les valeurs prises par X.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique $E(x)$ *de X.*
3. *On appelle succès l'évènement E : «* $(E \geq 10)$ *»*
   a) Calculer la probabilité de E.
   b) On répète trois fois l'expérience de manière indépendant. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès.

On donne : $\frac{23}{110} \simeq 0.2$ *;* $\frac{87}{110} \simeq 0.7$

Exercice 6.3.4. *Afin d'éviter des licenciements dans un entreprise, la direction et le personnel se sont mis d'accord, pour réduire la durée hebdomadaire du travail et de la faire passer de cinq à quatre jours. L'un des trois jours de congé sera dimanche, les deux autres étant répartis au hasard dans la semaine. Dans un sac, on dépose six boules portant chacune le nom d'un des jours de la semaine, du lundi au samedi. Chaque employé choisit ses deux jours de congé autre que dimanche en tirant au hasard et simultanément deux de ces boules, supposées indiscernable au touche. Il remet ensuite les deux boules tirées dans le sac.*

1. a) *Soit A l'évènement «l'un des jours de congé est est le lundi» et B l'évènement «l'un des jours de congé est est le samedi».*
   Démontrer que : $P(A) = P(A) = \frac{1}{3}$.

   d) *On définit les évènement C et D suivants : C «parmi les jours de congés figurent le lundi, ou le samedi, ou les deux jours». C «les jours de congés sont trois jours consécutifs».*
   Calculer $P(c)$ *et* $P(D)$.

   c) *Yao aimerait bien avoir les même jours de congé que Mariam.*
   Quelle est la probabilité que son souhait se réalise ?

3. *L'entreprise compte douze employés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'employés ayant tiré le samedi comme jour de congé.*

   a) *Quelle est la loi de probabilité de X ?*

   b) *Calculer l'espérance mathématique et la variance de* X.

   c) *Calculer la probabilité pour que 5 employés trient le samedi comme jour de congé.*

   d) *Calculer la probabilité pour qu'au mois deux employés tirent le samedi comme jour de congé.*

Exercice 6.3.5. *Une urne contient N boules indispensables au toucher dont une porte le n°1, deux portent le n°2, ...,n portent le numéro n.(n est un nombre impaire strictement supérieur à 1).*

1. *On tire une boule de l'urne.*

   Soit E l'événement «la boule tirée est un nombre pair» et F l'événement «la boule tirée est un nombre impair».

   a) *Montrer que :* $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

   b) *En posant* $n = 2k + 1$ *(k étant un entier nature non nul), montrer que :* card $E = \frac{(n-1)(n+1)}{4}$ *et* card $F = \frac{(n+1)^2}{4}$.

   c) *En déduire les probabilité des événements E et F.*

2. *On tire simultanément deux boules de l'urne.*
   Calculer la probabilité pour que la somme des numéros portés pas les deux boules soit un nombre impaire.

3. *Dans cette question, on prend* $n = 19$.
   On tire une boule de l'une boule de l'urne. On désigne par A l'événement «le numéro de la boule tirée est un multiple de 5 ou un multiple de 7» et par B l'événement «le numéro de la boule tirée est impair».

a) Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

b) Les événements A et B sont-ils indépendant.

Exercice 6.3.6. *1. En notant $p(A/B)$ la probabilité de l'événement contraire de B, démontrer que : $p(A/\overline{B}) = \frac{p(A)-p(A/B).p(B)}{1-p(B)}$.*

2. Lors d'une récente saison de classe (période durant laquelle la classe et autorisée dans une région donnée), on a pu établir les statistiques suivant : 30% des renards sont enragés ; parmi les renards abattus, 40% étaient enragé.

a) En désignant par b $(b \neq 1)$ la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enragé.
*(*Durant la période considérée, on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage*).*

b) Quelle est la plus petite valeur b pour que p soit inférieur ou égale à 0.1 ?

c) A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $\frac{1}{3}$. Une chasse est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoire décontaminés après la saison de chasse. Quelle est dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminer au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison ?

Exercice 6.3.7. *Mariam, une jeune diplômée, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constante que :*

- *Pour un jour donné, la probabilité qu'il ait une affluence de clients est 0.6 ;*
- *Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0.7 ;*
- *Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0.4 ;*

On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et
B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est 0.58.

c) Mariam réalise un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là.
On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

   a) *Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 :* $P_n = 1 - (0.42)^n$.
   b) *Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait* $P_n = 0.9999$.

Exercice 6.3.8. *Une boîte contient 6 boule et n boules blanches toutes indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de même couleur, le joueur gagne* $100F$ *et si les boules sont de couleurs différentes, le joueur perd* $100F$.

1. *Dans cette question, suppose* $n = 3$.
   a) *calculer le probabilité d'obtenir :*
      i. *Deux boule de même couleur ;*
      ii. *Deux boule de couleurs différentes.*
   b) *Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit verte ?*
2. *Dans cette question, l'entier naturel n est quelconque et supérieur à 3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage successive sans remise de deux boules associe le gain algébrique en francs du joueur.*
   a) *Exprimer en fonction de n les probabilité des événements* $[X = -100]$ *et* $[X = 100]$.
   b) *Montrer que l'espérance mathématique de X est* $E(X) = 100\frac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$.
   c) *Pour quelles valeurs de n a-t-on* $E(X) < 0$ *?*

Exercice 6.3.9. *Un test de recrutement dans une entreprise est constitué de 5 questions. Pour chaque candidat, on attribue +2 points pour une réponse juste et -2 points pour une réponse fausse ou non donnée. On note n le nombre de réponses justes données par un candidat.*

1. a) *Montrer que la note N d'un candidat à la fin du test est* $N = 4n - 10$.
   b) *En déduire l'ensemble des notes possibles qu'un candidat à ce test peut avoir.*
2. *Le candidat Eya trouve les réponses exactes des deux premières questions. Il répond au hasard aux trois dernières questions. On admet que sa réponse est juste avec la probabilité de* $\frac{1}{3}$ *et pour tout autre candidat la probabilité de donner une réponse juste à une des cinq questions est de* $\frac{1}{2}$.
   a) *Déterminer l'ensemble des notes que Eya peut avoir à la fin du test.*
   b) *Pour être admis à l'école, un candidat doit obtenir à l'issue du test une note supérieure ou égale 6. Quelle est la probabilité pour que :*
      A : « Eya réussisse au test ».
      B : « Un candidat autre que Eya réussisse au test ».

Exercice 6.3.10 (TC)**.** *Un sac contient 30 boules indiscernables au toucher dont* α *noires,* β *blanches et* γ *rouges. On suppose qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac. Soit l'événement E « Obtenir deux boules de même couleur ».*

1. *Calculer en fonction de* α, β *et* γ *la probabilité* $P(\alpha, \beta, \gamma)$ *de l'événement E.*

2. *On se propose de déterminer α, β et γ afin que $P(\alpha, \beta, \gamma)$ soit minimale. Pour cela on munit l'espace affine ε d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$et on considère les points $A(30; 0; 0)$; $B(0; 30; 0)$ et $C(0; 0; 30)$. Soit le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ de ε.*
   a) *Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :*
      $x + y + z - 30 = 0.$
   b) *En déduire que M appartient au plan (ABC).*
   c) *Démontrer que 870 $P(\alpha, \beta, \gamma)$ + 30 = OM^2.*
   d) *Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).*
      Déterminer les coordonnées du point H.
   e) *En déduire les valeurs de α, β et γ qui rendent minimale $P(\alpha, \beta, \gamma)$, puis calculer la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ correspondante.*
3. *Le sac contient désormais 10 boules noires, 10 boules blanches et 10 boules rouges. Soit n et k deux entiers naturels supérieur ou égal à 2.*
   Un joueur mise n francs et tire simultanément deux boules du sac.
   - *S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois sa mise et le jeu est terminé.*
   - *S'il obtient deux boules de couleurs différentes, il remet les deux boules tirées dans le sac et tire à nouveau simultanément deux boules.*
   - *S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit $(k - 1)$ fois sa mise, sinon il perd sa mise et le jeu est terminé.*

   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   a) *Montrer que la probabilité pour que le joueur ait un gain algébrique égal à $kn - n$ est $\frac{2}{29}$.*
   b) *Déterminer la loi de probabilité de X.*
   c) *Calculer l'espérance mathématique E(X) en fonction de k et n.*

Exercice 6.3.11. *Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7.Les boules portant un numéro pair sont de couleur blanche ; les boules portant un numéro impaire sont de couleur noire.*

1. *On suppose que, lorsque l'on tire une boule de l'urne, et si l'on désigne par p_k la probabilité de tirer la boule numérotée k, alors on a :*
   $p_1 = p_3 = p_5 = p_7 = \alpha$ *et* $p_2 = p_4 = p_6 = 2\alpha$.
   On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer :
   a) *Une boule blanche ?*
   b) *Une boule noire ?*
   c) *On tire une boule. On note sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième fois une boule de l'urne. On réalise ainsi deux tirages successifs que l'on suppose indépendants.*
      Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules blanches sorties au cours des deux tirages.
      i) *Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?*
      ii) *Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(x)$ et l'écart-type $\sigma(x)$ de X.*

2. *On tire maintenant simultanément deux boules de l'urne. On associe à cette épreuve un univers Ω dont les éventualités sont des paires de deux boules. On suppose que n est le nombre de boules blanche figurant dans une paire et p la probabilité de l'événement réduit à cette paire alors le rapport $\frac{p}{n+1}$ est le même pour toutes éventualités de Ω.*
Calculer la probabilité de l'événement : $\ll tirerdeuxboulesblanches \gg$.

Exercice 6.3.12. *Une urne contient 6 jetons rouges et 4 jetons jaunes. Un jeu consiste à tirer simultanément 2 jetons de l'urne. Si les jetons sont de même couleur, le joueur gagne 1000 KMF.S'ils sont de couleurs différentes, alors le joueur perd 1000 KMF.*

1. *a) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur.*
   b) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes.
2. *On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux jetons associe le gain ou la perte du joueur.*
   a) Donner les différentes valeurs possibles de X.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(x)$ de X.

Exercice 6.3.13. *Un tiroir contient, $\text{pêle} - \text{mêle}$, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.*

1. *On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.*
   a) Calculer la probabilité de l'événement A : $\ll$ tirer 2 chaussures de la même couleur $\gg$
   b) Calculer la probabilité de l'événement B : $\ll$ tirer un pied gauche et un pied droit $\gg$.
   c) Montrer que la probabilité de l'événement C : $\ll$ tirer les deux chaussures d'un même modèle $\gg$ est $\frac{1}{19}$.
2. *On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.*
   a) Justifier que X prend les valeurs $2, 3, 4$.
   b) Montrer que la loi de probabilité de X est :$p(X = 2) = \frac{1}{6}$; $p(X = 3) = \frac{1}{3}$ et $p(X = 4) = \frac{1}{2}$.
   c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 6.3.14. *A. On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux évènements. Dans le cas d'équiprobabilité rappeler les probabilités des évènements suivants : A, A sachant B, $A \cap \overline{B}$ et $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.*

B. Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages. Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit : - Le premier jour la ville est délestée.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$

On désigne par D_n l'évènement : $\ll$ La ville est délestée le nième jour$\gg$ et p_n la probabilité de l'évènement D_n, $p_n = p(D_n)$

1. *Montrer les égalités suivantes : $p(D_1) = 1$; $p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$;*
   $p(D_{n+1}/\overline{D_n}) = \frac{5}{6}$.
2. *Exprimer p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et $p(D_{n+1}/\overline{D_n})$.*
3. *En déduire que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$*
4. *On pose $u_n = 6p - \frac{90}{29}$, pour $nIn\mathbb{N}^*$.*
   a) *Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son $1er$ terme.*
   b) *Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.*
   c) *Un match de football doit se jouer le $20^{\text{ème}}$ jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.*

Exercice 6.3.15. *Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.Il y a 8% d'ingénieurs et 80% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production. On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :*

— *M l'événement :$\ll$ Le personnel interrogé est un agent de maintenance.$\gg$;*
— *O l'événement : $\ll$ Le personnel interrogé est un opérateur de production.$\gg$;*
— *I l'évènement :$\ll$Le personnel interrogé est un ingénieur.$\gg$;*
— *F l'évènement : $\ll$ Le personnel interrogé est une femme.$\gg$*

1. *Construire un arbre pondéré correspondant aux données.*
2. *Calculer la probabilité d'interroger :*
   a) *un agent de maintenance ;*
   b) *une femme agent de maintenance ;*
   c) *une femme.*
3. *Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue.*
   Des études ont montré que sur une journée :

— *La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$.*
— *La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$*
— *La probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$*
. On note
— *A l'événement : $\ll$ L'alarme se déclenche.$\gg$*
— *B l'événement : $\ll$ Une panne se produit.$\gg$*

a) *Démontrer que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.*
b) *Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.*

c) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Exercice 6.3.16. *Un jeu consiste à lancer quatre fois de suite, une pièce de monnaie bien équilibrée dont l'une des faces est notée F ($Face$) et l'autre P ($Pile$). On lit sur la face supérieure de la pièce. Si l'on obtient F alors on gagne 2 points, si l'on obtient P alors on perd 1 point. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de points obtenus à l'issue des quatre lancers.*

1. *a) Déterminer l'univers Ω associé. (On pourra s'aider d'un arbre).*
   b) Calculer la probabilité d'obtenir 3 fois F ($Face$).
2. *a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.*
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir des points strictement inférieurs à 8 ?
   d) Déterminer la probabilité p' que la variable aléatoire X prenne une valeur strictement comprise entre -3 et 7.
3. *a) Calculer l'espérance $E(x)$ mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.*
   b) Calculer la variance $V(X)$ et l'écart-type σ de X.

Exercice 6.3.17. *Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément 3 boules de l'urne.*

1. *Déterminer le nombre de tirages possibles.*
2. *Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :*
   A : ≪ Les nombres portés par ces 3 boules sont tous des nombres premiers.≫
   B : ≪ Les nombres portés par ces 3 boules sont tous divisibles par 3. ≫
   C : ≪ Deux boules portent un numéro divisible par 3. ≫
   D : ≪ Les trois numéros sont des multiples de 2. ≫
   E : ≪ Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3. ≫
   F : ≪ Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. ≫

Exercice 6.3.18. *On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3.*
U_1 contient 3 boules vertes et 2 boules rouges ;
U_2 contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes ;
U_3 contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte.

Description de l'épreuve

L'épreuve consiste à tirer une boule dans U_1.
Si elle est verte on la met dans U_2 puis on tire une boule dans U_2.
Si elle est rouge, on la met dans U_3 puis on tire une boule dans U_3.

1. *a) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte.*
   b) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première est rouge.
   c) En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage.

d) Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage.

e) Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage.

2. *Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :*
   - Une boule verte, on gagne 1000 F
   - Une boule jaune, on gagne 500 F
   - Une boule rouge, on perd 500 F

   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3. *Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante. Les résultats seront donnés au centième près par défaut.*

   a) Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au deuxième tirage.

   b) Calculer la probabilité pour que seulement les 8 premiers obtiennent une boule verte au deuxième tirage.

   c) Calculer la probabilité pour qu'au moins un élève ait une boule verte au second tirage.

7 Statistique

7.1 Caractéristique de position

7.1.1 Mode

Définition 7.1. On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal.

7.1.2 Moyenne

Définition 7.2. Pour une série statistique $(x_i; n_i)_{1 \leq i \leq p}$ la moyenne est le nombre noté $\overline{X}$, définie par :

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ...n_px_p}{n_1 + n_2 + ... + n_p}$$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_p = N$ donc :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i = \frac{1}{N}[x_1 + x_2 + ... + x_p]$$

7.1.3 Médiane et Quartiles

Définition 7.3. .

La ***médiane*** est une valeur qui permet de partager une série statistique en deux population de même effectif. Les nombre d'observations inférieures et supérieurs à la valeur médiane sont égaux.

Pour déterminer la médiane de N valeur, on range ces valeurs par ordre croissant.

Si N est ***pair***, la médiane m est la demi-somme des termes de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$

Si N est ***impair***, la médiane est valeur de caractère de rang $\frac{N+1}{2}$

Le ***première quartile*** est le plus petite élément Q_1 des valeurs de la série statistique tel qu'au moins 25% des données sont inférieurs ou égale à Q_1.

Le ***troisième quartile*** est le plus petite élément Q_3 des valeurs de la statistique tel qu'au mois 75% données sont inférieures ou égales à Q_3.

7.1.4 Écart inter-quartile

Définition 7.4. L'écart inter-quartile d'une série statistique de première quartile Q_1 et du troisième quartile Q_3 est égale à la différence $Q_3 - Q_1$.

N.B : La plus grande et la plus petite données à une série est ***l'étendue***.

7.2 Caractéristique de dispersion

7.2.1 Écart moyen

Soit une série statistique $(x_i; n_i)_{1\leq i\leq p}$ de moyenne $\overline{x}$. L'écart moyen est le nombre réel e_m définie par :

$$e_m = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} |x_i - \overline{x}|}{\sum\limits_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_i|x_1 - \overline{x}| + ... + n_p|n_p - \overline{x}|}{n_1 + ... + n_p}$$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_p = N$ donc :

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i|x_i - \overline{x}|$$

7.2.2 Variance et Écart-type

Définition 7.5. Soit une série statistique $(x_i; n_i)_{i\leq i\leq p}$ de moyenne $\overline{x}$.

La variance est le nombre réel V définie par :

$$var(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_i(x_i - \overline{x})^2 + ... + n_p(x - \overline{x})^2}{n_1 + ... + n_2}$$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_p = N$ donc :

$$var(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2$$

L'écart-type est le nombre réel positif Q définie par : $Q(x) = \sqrt{var(x)}$

Formule de könig : Soit une statistique $(x_i; n_i)_{1\leq i\leq p}$ de moyenne $\overline{x}$, d'effectif N et de variance $var(x)$. On a :

$$var(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i^2 n_i - \overline{x}^2$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i^2 n_i - \overline{x}^2}$$

7.3 Série statistique à deux caractères

Définition 7.6. On appelle série statistique à deux variables (ou série statistique double), une série statistique où deux caractères sont étudiés simultanément.

Remarque 7.1. Dans ce chapitre, on n'étudiera que des séries statistiques doubles dont les deux caractères étudiés sont quantitatifs. Si, pour chacun des n individus de la population, on note x_i et y_i les valeurs prises par les deux caractères, on peut alors présenter la série statistique sous la forme d'un tableau :

caractère x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
caractère y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

7.3.1 Nuage de points

Définition 7.7. Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$, avec $1 \leq i \leq n$, est appelé le ***nuage de points*** associé à cette série statistique.

7.3.2 Point moyen d'un nuage

Définition 7.8. Soit $(x_i; y_i; n_{ij})$ une série statistique à deux caractères quantitatifs.
On appelle ***point moyen*** **G** du nuage des points représentant cette série le point de coordonnées $(\overline{x}; \overline{y})$; où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales $(x_i; n_i)$ et $(y_j; n_j)$.

7.4 Ajustement affine

7.4.1 Interpolation et extrapolation

Définition 7.9. L'interpolation et l'extrapolation sont des méthodes qui consistent à estimer une valeur inconnue dans une série statistique.
• Pour une *interpolation*, le calcul est réalisé dans le domaine d'étude fourni par les valeurs de la série.
• Pour une *extrapolation*, le calcul est réalisé en dehors du domaine d'étude.

7.4.2 Droite d'ajustement

Définition 7.10. Lorsque les points d'un nuage sont sensiblement alignés, on peut construire une droite, appelé *droite d'ajustement (ou droite de régression)*, passant ≪ au plus près ≫ de ces points.

1. ***Méthode de Mayer :*** Cet ajustement consiste à déterminer la droite passant par deux points moyens du nuage de point.
2. ***Méthode des moindres carrés***
   Définition : Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère un nuage de n points de coordonnées $(x_i; y_i)$.
   La droite D d'équation $y = ax + b$ est appelée droite de régression de y en x de la série statistique si et seulement si la quantité suivante est minimale :
   $$\sum_{i=1}^{n}(M_iQ_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$$
   a) Soit $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq n}$ une série statistique à deux caractères x et y, d'effectif total N.

   La ***covariance*** de cette série est le nombre réel noté $cov(x; y)$ tel que :
   $$cov(x; y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})) = (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_iy_i) - \overline{xy}$$
   b) Soit $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y tel que $var(x) \neq 0$.

   La ***droit de régression*** de y en x passant par le point moyen du nuage associé à cette série et a pour coefficient directeur $\frac{cov(x;y)}{var(x)}$.
   Une équation de cette droite est :
   $$y - \overline{y} = \frac{cov(x; y)}{var(x)}(x - \overline{x})$$
   Remarque :
   • La ***droit de régression*** de x en y passant par le point moyen du nuage associé à cette série et a pour coefficient directeur $\frac{cov(x;y)}{var(y)}$.
   Une équation de cette droite est :
   $$y - \overline{y} = \frac{cov(x; y)}{var(y)}(y - \overline{y})$$
   avec $var(y) \neq$ et $var(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \overline{y}^2$
   • Quelque soit la méthode utilisé le point moyen G appartient à la droite de régression.
   c) Soit $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y tel que $var(x) \neq 0$ et $var(y) \neq 0$. Le ***coefficient de corrélation*** linéaire de cette série est le nombre réel r tel que :
   $$r_{xy} = \frac{cov(x; y)}{\sqrt{var(x)}\sqrt{var(y)}}$$
   N.B : - On admet que : $|r| \leq 1$.
   - La corrélation entre les deux caractère x et y est d'autant meilleure que $|r|$ est proche de 1.
   • Si $r_{xy} > 0$, les valeurs prises par y ont tendance à croître quand les valeurs de x augmentent.
   • Si $r_{xy} < 0$, les valeurs prises par y ont tendance à décroître quand les valeurs de x augmentent.
   • Si $r_{xy} = 0$, les variations des variables x et y sont indépendantes.

7.5 Exercice d'application

Application 5. *On considère la série statistique à deux variables données dans le tableau suivant :*

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40
y_i	13	23	34	44	50	65	75	90

1. *Dans un repère, représenter le nuage de points$(x_i; y_i)$.*
2. *Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.*
3. *Soit G_1, le point moyen associé aux quatre premiers points du nuage et G_2 le point moyen associé aux quatre derniers points du nuage.*
   a) *Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.*
   b) *Déterminer une équation de la droite D_1 d'ajustement par la méthode de Mayer et tracer la droite. Monter que $G \in D_1$.*
4. *Déterminer une équation de la droite D_2 d'ajustement par la méthode des moindres carrés et tracer la droite. Monter que $G \in D_2$.*
   Que constatez-vous ?
5. *Calculer la valeur de x pour $y = 70$.*
   S'agit-il d'une interpolation ou d'une extrapolation ?
6. *calculer le coefficient de corrélation et interpréter le résultat.*

Solution Application 5. 1. *Voir figure 3 annexe*

2. *Coordonnées du point moyen G du nuage de points.*
   $\overline{x} = \frac{5+10+15+20+25+30+35+40}{8} = 22.5 \qquad \overline{y} = \frac{13+23+34+44+50+65+75+90}{8} = 49.25 \; G(22.5, 49.25)$
3. a) $x_{G_1} = \frac{5+10+15+20}{4} = 12.5 \qquad y_{G_1} = \frac{13+23+34+44}{4} = 28.5 \qquad G_1(12.5, 28.5)$
   $x_{G_2} = \frac{25+30+35+40}{4} = 32.5 \qquad y_{G_2} = \frac{50+65+75+90}{4} = 70 \qquad G_2(32.5, 70)$
   b) *L'équation a pour équation $E : y = ax + b$, $a = \frac{70-28.5}{32.5-12.5} = 2.075$. $G_1 \in E \Leftrightarrow 28.5 = 2.075 \times 12.5 + b \Leftrightarrow b = 2.5625$ donc $D_1 : y = 2.075x + 2.5625$. $2.075 \times 22.5 + 2.5625 = 49.25$ donc $G \in D_1$*
4. *Par la méthode des moindres carrés, la droite d'ajustement de y en x a pour équation $y = ax+b$ avec : $a = \frac{cov(x,y)}{var(x)}$.*
   $cov(x, y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})) \approx 280.625$
   $var(x) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} ((x_i - \overline{x})^2) \approx 131.25$
   $a = \frac{280.625}{131.25} \approx 2.138$ *et* $b = \overline{y} - a\overline{x} = 49.25 - 2.138 \times 22.5 = 1.145$
   donc $y = 2.138x + 1.145$. *Or* $2.138 \times 22.5 + 1.145 = 49.25$ *donc* $G \in D_2$.
   On constate que quelque soit la méthode utilisé le point moyen G appartient à la droite de régression.
5. *Pour $y = 70$, on a $70 = 2.138x + 1.145 \Leftrightarrow x = \frac{70-1.45}{2.138} \approx 32$*
   Les calculs sont réalisés dans domaine d'étude, on parle donc d'interpolation.
6. *calculons le coefficient de corrélation :* $r_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)var(y)}}$
   $var(y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} ((y_i - \overline{y})^2) \approx 604.44$
   Donc $r_{xy} = \frac{280.625}{\sqrt{131.25 \times 604.44}} \approx 0.99$

Le coefficient de corrélation est proche de 1 donc la corrélation entre les deux variables est fortes. Les points du nuage sont proches de la droite d'ajustement.

7.6 Exercice

Exercice 7.6.1. *Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents à EPM (école privé de Mitsamiouli) de 2015 à 2020.*

Année x_i	2015	2016	2017	2018	2019	2020
nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

1. *Dans un repère, représenter le nuage de points*$(x_i; y_i)$.
2. *Déterminer les coordonnées du point moyen* G *du nuage de points.*
3. *Soit* G_1, *le point moyen associé aux trois premiers points du nuage et* G_2 *le point moyen associé aux trois derniers points du nuage.*
   a) *Calculer les coordonnées de* G_1 *et* G_2.
   b) *Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer et tracer la droite.*
4. *Calculer nombre d'adhérents en 2021.*
   S'agit-il d'une interpolation ou d'une extrapolation ?
5. *calculer le coefficient de corrélation et interpréter le résultat.*

Exercice 7.6.2. *L'étude ci-dessous donne le nombre de personnes qui viendraient prendre une chemise en fonction du prix en euros proposé.*

Prix x_i	18	20	22.5	25	27.5	30	32.5	35	37.5	40
nombre de clients y_i	47	45	41	39	36	30	25	22	18	15

1. *Dans un repère, représenter le nuage de points*$(x_i; y_i)$.
2. *Déterminer les coordonnées du point moyen* G *du nuage de points.*
3. *Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés et tracer la droite.*
4. *Calculer le prix qui doit couter une chemise pour avoir 60 clients.*
   S'agit-il d'une interpolation ou d'une extrapolation ?
5. *calculer le coefficient de corrélation et interpréter le résultat.*

Exercice 7.6.3. *Le directeur de l'association L'AVENIR DE MA PATRIE sollicité une évaluation et un suivi de la classe de* $3^{\text{ème}}$ *auprès d'un encadreur pédagogique.*
Ce dernier a relevé pour les six dernières années le nombre x *d'élèves présentés et le nombre* y *d'élèves admis à l'examen d'entrée en seconde. Les résultats sont notés dans le tableau suivant :*

Examen d'entrée en seconde session	2015	2016	2017	2017	2019	2020
Nombre d'élèves présentés x_i	85	62	56	22	55	51
nombre de clients y_i	40	19	53	20	51	35

1. *Dans un repère, représenter le nuage de points*$(x_i; y_i)$.

2. *Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.*
3. *Soit G_1, le point moyen associé aux trois premiers points du nuage et G_2 le point moyen associé aux trois derniers points du nuage.*
   a) *Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.*
   b) *Déterminer une équation de la droite d'ajustement par deux méthodes différents. (les deux équations sont différents)*
4. a) *En supposant que la tendance de cet analyse reste uniforme et en utilisant l'expression de la droite de régression de y en x, pour cette session de 2021 de l'Union des Comores, donner alors une estimation des nombres des admis sachant que cette école a présenté 64 élèves.*
   b) *Selon le rapport de l'encadreur, le problème soulevé est l'effectif des élèves qui empêche l'enseignant à prendre en charge les élèves en difficultés. Alors, pour qu'un jour cette classe réussisse à 100% à l'examen d'entrée en seconde, donner une estimation de l'effectif des élèves que le directeur présentera.*
5. *calculer le coefficient de corrélation et interpréter le résultat.*

La suite du programme est spécial TC

8 Barycentre

8.1 Barycentre de deux points pondéré

Définition 8.1. Un point pondéré est un couple $(A;\alpha)$ formé d'un point A et d'un coefficient réel α.

Définition 8.2. Soient α et β deux réel tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et A et B deux points du plan.

On appelle ***barycentre*** de deux point pondéré $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ l'ensemble des points G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

Notation : $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

Préposition 8.1.

i. Soit M un point du plan et $M \neq G$ on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

ii. Si on pose $M = A$ on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Démonstration.

i. Soit M un point du plan et $M \neq G$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ en appliquant la relation de Chasles on a : $\alpha(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})+\beta(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GM}+\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

ii. Si on pose $M = A$ on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

□

Définition 8.3 (Isobarycentre)**.** On parle d'un ***isobarycentre*** de deux points pondéré lorsque les coefficients α et β sont égaux $(\alpha=\beta)$. Dans se cas G est le milieu du segment $[AB]$.

Coordonner du barycentre de deux points pondérés. Soient A et B deux points du repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $G = bar(A,\alpha),(B,\beta)$, on a :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \text{ et } y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

8.2 Barycentre de trois points pondéré

Définition 8.4. Soient α, β et γ trois réel tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et A, B et C trois points du plan. On appelle ***barycentre*** des trois points pondérés $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ l'ensemble des points G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Notation : $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

Remarque 8.1. Si $\alpha = \beta = \gamma$ on dit que G est ***l'isobarycentre*** de trois points pondérés $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$. Dans ce cas G est le centre de gravité du triangle ABC.

Préposition 8.2.

i. Soit M un point du plan et $M \neq G$ on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

ii. Si on pose $M = A$ on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

Démonstration. Même méthode qu'avec deux points. □

Coordonner du barycentre de trois points pondérés. Soient A et B deux points du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ si $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ et $G = bar\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ on a :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

8.3 Fonction vectorielle de Leibniz

Soit $(A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ un système de n points pondérés. On appelle fonction vectorielle de Leibniz associé à la famille $(A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$, l'application : $\begin{cases} f : \text{X} \longrightarrow V \\ M \to f(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k} \end{cases}$

Théorème 8.1.

— *Si* $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ *f est bijective et il existe une et unique point G tel que* $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$, $G = bar\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)\}$.

— *Si* $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$ *f constant.*

Homogénéité du barycentre. Soit $S = \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ avec $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. Si $G = bar\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ alors
$G = bar\{(A_1, \lambda\alpha_1), (A_2, \lambda\alpha_2), ..., (A_n, \lambda\alpha_n)\}$.

Cas particulier n = 3 : Si $G = bar\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, on a : $G = bar\{(A, \lambda\alpha), (B, \lambda\beta), (C, \lambda\gamma)\}$.

Théorème du barycentre partielle.

Soit $S = \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2, ..., (A_i, \alpha_i), (A_{i+1}, \alpha_{i+1}), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, il existe G tel que $G = bar\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2, ..., (A_i, \alpha_i), (A_{i+1}, \alpha_{i+1}), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ Si $\sum\limits_{k=1}^{1} \alpha_k \neq 0$, il existe G_1 tel que $G_1 = bar\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2, ..., (A_i, \alpha_i)\}$ Si $\sum\limits_{k=i+1}^{n} \alpha_k \neq 0$, il existe G_2 tel que $G_2 = \{(A_{i+1}, \alpha_{i+1}), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ Donc $G = bar\{(G_1, \sum\limits_{k=1}^{1} \alpha_k), (G_2, \sum\limits_{k=i+1}^{n} \alpha_k)\}$

Cas particulier n = 3 : Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ on a : $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$. si $\alpha+\beta \neq 0$ on a : $G_1 = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ donc $G = bar\{(G_1,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$.

8.4 Lignes de niveaux

Soit f une application tel que : $\begin{cases} f : P \longrightarrow \mathbb{R} \\ m \longrightarrow f(m) \end{cases}$

On appel ***lignes de niveaux*** $k \in \mathbb{R}$ l'ensemble des M du plan qui vérifie :

$$f(m) = k$$

Ensemble des point M tels que $MA = K$.
$f(m) = MA \Leftrightarrow MA = k$

- Si $k < 0$ l'ensemble des points M cherchés est vide.
- Si $k = 0$ l'ensemble des points M cherchés est réduit en A ; $\{A\}$.
- Si $k > 0$ l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre A et de rayon k.

Ensemble des point M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{U} = K$, $U \neq 0$.

- Si $k = 0$, on a :$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{U} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{U}$ donc l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par A perpendiculaire à $\overrightarrow{U}$.
- Si $k \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{U} = K \neq 0$. Soit H le projeté orthogonale de M sur $D(A, \overrightarrow{U})$,on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{U} = k \Rightarrow (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}).\overrightarrow{U} = k \Rightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{U} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{U} = k$, comme $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{U} = \vec{0}$. On a : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{U} = k$. Donc, M décrie la droite passant par H est perpendiculaire à $\overrightarrow{U}$.

  Déterminons H : $H \in D(A, \overrightarrow{U})$ donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{U}$ sont colinéaire. Donc, $\overrightarrow{HA} = \alpha\overrightarrow{U}$ avec $(\alpha \in \mathbb{R})$. Alors, $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{U} = k \Rightarrow \alpha\overrightarrow{U}.\overrightarrow{U} = k \Rightarrow \alpha\overrightarrow{U}^2 = k \Rightarrow \alpha = \frac{k}{||\overrightarrow{U}||^2}$.

Ensemble des point M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = K$.

- Si $k = 0$ on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.donc l'ensemble des points M cherchés est le cercle de diamètre $[AB]$.
- Si $k \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = K \neq 0$. Soit I milieu du $[AB]$, on a : $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k \Rightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = k \Rightarrow MI^2 - IA^2 = k \Rightarrow MI^2 = k + IA^2$.
  - Si $k + IA^2 < 0$ l'ensemble des points M cherchés est l'ensemble vide.
  - si $k + IA^2 = 0$ l'ensemble des points M cherchés est le singleton $\{I\}$.
  - Si $k + IA^2 > 0$ l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + IA^2}$.

8.5 Fonction scalaire de Leibniz

Soit $(A_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ un système de n points pondérés. On appelle *fonction scalaire de Leibniz* associé à la famille $(A_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq n}$, l'application :

$$\begin{cases} \varphi : \text{ X } \longrightarrow \overrightarrow{R} \\ M \to \varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA}_k^2. \end{cases}$$

Théorème 8.2.

i. Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, *alors* $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k MG^2 + \varphi(G)$ *avec* $G = bar\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2, ..., (A_n, \alpha_n)\}$

ii. Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$, *alors* , $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MI}.g(I) + \varphi(I)$.

Démonstration. Soit I un point du plan. $MA_k^2 = \overrightarrow{MA_k}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MA_k})^2 = MI^2 + IA_k^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}_k$ $\varphi(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2 = \alpha_1(MI^2 + IA_1^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}_1) + \alpha_2(MI^2 + IA_2^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}_2) + ... + \alpha_n(MI^2 + IA_n^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\sum\limits_{k=1}^{n} IA_k) + \varphi(I)$. Posons $\sum\limits_{k=1}^{n} IA_k = g(I)$ on a : $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k MI^2 + 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I)$.

- Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, $G = bar\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2, ..., (A_n, \alpha_n)\}$. Posons, $I = G$ on a :$\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k MG^2 + 2\overrightarrow{MG}g(G) + \varphi(G)$ comme $g(G) = 0$, Donc $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k MG^2 + \varphi(G)$.

- Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0 \Rightarrow \varphi(M) = 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I)$. □

Ensemble des points M tels que $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA}_k^2 = k$.

i. Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0 \Rightarrow \varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k MG^2 + \varphi(G) \Rightarrow \varphi(M) = k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k MG^2 + \varphi(G) = k \Rightarrow MG^2 = \frac{k-\varphi(G)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} = \lambda$.
   a. Si $\lambda < 0$ l'ensemble des points M cherchés est l'ensemble vide.
   2. Si $\lambda = 0$ l'ensemble des points M cherchés est le singleton $\{G\}$.
   3. Si $\lambda > 0$ l'ensemble des points M cherchés est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

ii. Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0 \Rightarrow \varphi(M) = 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I)$ $\varphi(M) = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I) = k \Rightarrow 2\overrightarrow{MI}g(I) = k - \varphi(I)$ Posons $2g(I) = \overrightarrow{v}$ et $k - \varphi(I) = \beta$,on a donc : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{v} = \beta$,
   a. Si $\beta = 0$ l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par I est perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$.
   b. Si $\beta \neq 0$ l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par son projeté orthogonale sur $D(I, \overrightarrow{v})$ perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$.

Ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB}=k$. Soit A et B deux points distincts du plan, K un réel strictement positif. $\frac{MA}{MB}=k \Leftrightarrow MA^2=k^2MB^2 \Leftrightarrow MA^2-k^2MB^2=0$

1. Si $k=1$ alors $MA=MB$, l'ensemble des points M cherchés est la médiatrice du segment $[AB]$
2. Si $k\neq 0$ alors $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\neq 0$, il existe un point unique G barycentre des points pondérés : $(A,1);(B,-k^2)$. $MA^2-k^2MB^2=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})=0$ $G_1=bar\{(A,1);(B,k)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A}+k\overrightarrow{G_1B}=\overrightarrow{0}$ $G_2=bar\{(A,1);(B,-k)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2A}-k\overrightarrow{G_2B}=\overrightarrow{0}$ $(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1A}+k\overrightarrow{MG_1}+k\overrightarrow{G_1B}).(\overrightarrow{MG_2}+\overrightarrow{G_2A}-k\overrightarrow{MG_2}-k\overrightarrow{G_2B})=0 \Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{MG_1}.(1-k)\overrightarrow{MG_2}=0 \Leftrightarrow (1+k)(1-k)\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2}=0 \Rightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2}=0$. Donc l'ensemble des points M cherchés est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

8.6 Exercice

Exercice 8.6.1. *Voir les maths de noël premier s 6.4 (Barycentre).*

Exercice 8.6.2. *Soit A,B,C un triangle, $\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta'\gamma'$ des réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et $\alpha'+\beta'+\gamma'=\neq 0$. On considère M le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)$ et (C,γ), puis M' le barycentre de $(A,\alpha'),(B,\beta')$ et (C,γ').*

Démontrer que $M=M'$ si et seulement si les vecteurs (α,β,γ) et (α',β',γ') sont colinéaires. Ce résultat subsiste-t-il si on considère le barycentre de 4 points ?

Exercice 8.6.3. *Étant donnés deux points A et B du plan et k un réel strictement positif, on désigne par Γ_k l'ensemble des points M du plan distincts de B et tels que $\frac{MA}{MB}=k$.*

1. *Rappeler la nature de Γ.*
2. *On suppose désormais que $k\neq 1$.. Démontrer que M appartient à Γ_k si et seulement si le produit scalaire $(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})$ est nul.*
3. *En déduire que Γ_k est un cercle dont on précisera le diamètre.*
4. *Application : soit ABC un triangle non isocèle en C et, sur la parallèle en B à (AC), les points C_1 et C_2 tels que $BC_1=BC_2=BC$. Démontrer que (CC_1) et (CC_2) sont sécantes avec (AB) en des points notés I et J. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.*

Exercice 8.6.4.
<u>Partie A</u>

Soit, dans l'espace E, quatre points A, B, C et D distincts deux à deux.

1. *Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, D est le barycentre du système $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$.*
2. *On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que : $||\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}||=BD$.*
3. *On suppose maintenant que $ABCD$ est un rectangle.*

   Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que :
   $MA^2-MB^2+MC^2=BD^2$.

Partie B

On considère dans l'espace E deux parallélogrammes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ainsi que les milieux I, J, K et L de $[AA'], [BB'], [CC']$ et $[DD']$ respectivement.

1. *Montrer que L est barycentre des points I, J et K affectés de coefficients que l'on précisera. En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.*
2. *Soit O, Q et P les centres respectifs des parallélogrammes $IJKL, ABCD$ et $A'B'C'D'$. Montrer que O est le milieu de $[PQ]$.*

Exercice 8.6.5. *On considère un triangle ABC du plan.*

1. a) *Déterminer et construire le point G, barycentre de $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$*
   b) *Déterminer et construire le point G', barycentre de $\{(A, 1); (B, 5); (C, -2)\}$.*
2. a) *Soit J le milieu de $[AB]$.*

   Exprimer $\overrightarrow{GG'}$, $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).
   b) *Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).*

   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de $\{(A, a'); (C, c')\}$.

Exercice 8.6.6. *Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1; 1]$. On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (c - k)\}$.*

1. *Représenter les points A, B, C, le milieu de I de $[BC]$ et construire les points G_1 et G_{-1}.*
2. a) *Montrer que pour tout réel k de l'intervalle $[-1; 1]$, on a l'égalité : $AG_k = \frac{-k}{k^2+1}BC$.*
   b) *Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$.*
   c) *En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1; 1]$.*

   Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.
3. *Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :*
   $||2\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}|| = ||2\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}||$.
4. *Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :*
   $||2\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}|| = ||2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}||$.
5. *L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0; 0; 2), (-1; 2; 1)$ et $(-1; 2; 5)$. Le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.*
   1) *Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants.*
   b) *Calculer le rayon du cercle C intersection de E et F.*

9 ARITHMÉTIQUE

9.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$ ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...$ ensemble des entiers naturel.
$\mathbb{N}^* = 1, 2, 3, ...$ $\mathbb{Z}^*_- = ..., -4, -3, -2, -1.$
Soit $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{Z} = ..., -2a, -a, a, 2a, 3a, ...$
$a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a.

Notation :

pgcd = plus grand diviseur commun
ppcm = plus petit commun multiple

Diviseur commun positif à 6 et 8 sont 1,2 donc le $pgcd(6, 8) = 2$.
$6\mathbb{Z} = 0, 6, 12, 24, 30, ...$ $8\mathbb{Z} = 0, 8, 16, 24, 32, ...$ $ppcm(6, 8) = 24$

Relation entre ppcm et pgcd de a et b. $ppcm(a, b) \times pgcd(a, b) = a \times b.$

On note : $a \wedge b = pgcd(a, b)$ et $a \vee b = pgcd(a, b)$

Définition 9.1. Un entier $p \geq 2$ pour le quel $D(P) = \pm 1, \pm P$ s'appelle **nombre première**.

Les nombres premières sont : 2,3,5,7,11,13,17,19, $\cdots$.

Définition 9.2. Soit a et b dans $\mathbb{Z}$. On dit que b divise a (ou que b est diviseur de a) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times b$.

On note : $b \mid a$. On dit aussi que a est un multiple de b ou que a est divisible par b.

Remarque 9.1. 1 (-1) divise tous les entiers et 0 est divisible par tous les entiers car 0 $\times a = 0$ $\forall a \in \mathbb{Z}$

Propriété 9.1.

1. *Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$ (la transitivité).*
2. *Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = b$ ou $a = -b$ ($a = \pm b$).*
3. *Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors $c \mid \lambda a + \lambda' b$.*

Démonstration.

1. $a \mid b \Rightarrow b = ka$ ($k \in \mathbb{Z}$). $b \mid c \Rightarrow c = k'b$ ($k' \in \mathbb{Z}$) donc $c = k'ka$. soit $\lambda = k'k \in \mathbb{Z}$. On a $c = \lambda a$ et $a \mid c$.
2. $a \mid b \Rightarrow b = ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$ $b \mid a \Rightarrow a = k'b$ avec $k' \in \mathbb{Z}$. Comme $b \neq 0$, en divisant par b on obtient $1 = kk'$ donc, soit $k = k' = -1$ donc $b = a$ ou $b = -a$.
3. $c \mid a \Rightarrow a = kc$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $c \mid b \Rightarrow b = k'c$ avec $k' \in \mathbb{Z}$. $\lambda a + \lambda b = \lambda kc + \lambda' k'c = c\ (\lambda c + \lambda' c')$. On pose $\alpha = kc + k'c' \in \mathbb{Z}$. On a $\lambda a + \lambda' b = \alpha c$ donc $c \mid \lambda a + \lambda' b$.

$\square$

Démonstration par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p(n)$ une propriété qui dépend de n. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p(n_0)$ est vrai et $\forall n \geq n_0$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ alors $\forall n \geq n_0$ (p_n) est vrai.

Exemples 9.1. *Montrer par récurrence sur n que 3 divise $n^3 - n$ pour tout entier $n \geq 2$.*

Solution 9.1. ***initialisation :*** *Pour $n = 2$ $2^3 - 2 = 6$ or $6 = 3 \times 2$ donc vrai pour $n = 2$.*

Hérédité : *Soit $n \geq 2$, on suppose que la propriété est vrai au rang n et on veut montrer que 3 divise $(n+1)^3 - (n+1)$. On a 3 divise $n^3 - n$ donc $n^3 - n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ A t-on $(n+1)^3 - (n+1) = 3k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ oui car, $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = 3k + 3n^2 + 3n = 3(k + n^2 + n)$ soit $k' = k + n^2 + n$ On a : $(n+1)^3 - (n+1) = 3k'$.*

Division euclidien.

Théorème 9.1 (Théorème fondamental)**.** *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe des entier q et r unique tels que $\boldsymbol{a = bq + r}$ avec $a \leq r \leq b$.*

9.2 PPCM et PGCD

9.2.1 PPCM (*plus petit commune multiple*)

Définition 9.3. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, il y a des multiple commun de a et b dans $\mathbb{N}^*$. $\mid a \mid \mid b \mid$ par exemple, il y en alors un plus petit, noté $ppcm(a, b)$ ou $a \vee b$.

Exemple : $10 \vee 12 = 60$ car $10 = 5 \times 2$ et $12 = 2 \times 2 \times 3$

Propriété 9.2. *Les multiples communs à a et b sont les multiple de $a \vee b$. Autrement dit : m multiple de a et $b \Leftrightarrow (a \vee b)|m$ ou $a|m$ et $b|m \Leftrightarrow (a \vee b)|m$.*

Démonstration. $\Leftarrow$ évident car $a|a \vee b$ et $b|a \vee b$. $\Rightarrow$ Supposons que $a|m$ et $b|m$, on a $m = (a \vee b)q + r$ avec $0 \geq r < a \vee b$. Mais alors $a|r$ et $b|r$ donc $r = 0$ par définition du ppcm. □

9.2.2 PGCD (*plus grand commun diviseur*)

Définition 9.4. Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. considérons leur commun dans $\mathbb{N}*$. Il y a des diviseurs commun et ils sont en nombre fini, donc il y en a un plus grand noté $pgcd(a, b)$ ou $a \wedge b$.

Exemple : $12 \wedge 30 = 6$ car $D(12) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$ et $D(30) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

Remarque 9.2. $(-a) \wedge b = a \wedge (-b) = a \wedge b$. On peut toujours se ramener au cas $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Définition 9.5. a et b sont ***premier entre eux*** ou (a est premier avec b) si $a \wedge b = 1$.

Corollaire 9.1. *Les diviseurs communs entre a et b sont des diviseurs de $a \wedge b$. Autrement dit $d|a$ et $a|b \Rightarrow d|a \wedge b$.*

Lien entre PGCD et PPCM

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$, $D = a \wedge b$, $m = a \vee b$. On pose $a = Da'$ et $b = Db'$. avec $a' \wedge b' = 1$ alors

$$\begin{cases} M = Da'b' = ab' = a'b \\ MD = ab \end{cases}$$

Démonstration. $Da'b' = ab' = a'b$ est un multiple commun de a et de b donc $M|Da'b'$.
Inversement, $M = k_1a = ka'D$ donc a' divise $\frac{M}{D}$ (qui est un entier). De même, b' divise $\frac{M}{D}$. Comme $a' \wedge b' = 1$, alors $a'b'|\frac{M}{D}$ d'où $Da'b'$ divise M. □

9.2.3 Algorithme d'Euclide (A.E)

L'algorithme d'Euclide est une méthode pratique pour calculer le pgcd de deux entiers. Le pgcd est ***le dernier reste non nul*** de l'algorithme d'Euclide.

Exemple : $2010 = 871 \times 2 + 268$; $817 = 268 \times 3 + 67$; $268 = 67 \times 4 + 0$, donc le $pgcd(2010, 871) = 67$.

Explication de l'algorithme d'Euclide : Si $a = bq + r$ alors les diviseurs de a et b sont les même que ceux de b et r. En effet, si $d|a$ et $d|b$ alors $d = a - bq$ autrement dit r.

Inversement, si $d|b$ et $d|r$ alors $d|bq + r$. l'algorithme d'Euclide : $a = bq_1 + r_1$; $b = r_1q_2 + r_2$; $\cdots$; $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ et $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$. On a $b > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0$ la suite des non nul est strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ donc elle est obligatoirement fini. La fin de l'algorithme est nécessairement caractérisée par un reste nul, d'où, $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$, car $r_n|r_{n-1}$.

9.3 Théorème de Bezout et ses conséquences

Théorème de Bachet. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = a \wedge b$.

Théorème de Bezout. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, a et b sont premier entre eux implique qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

Démonstration. $\Rightarrow$ c'est le théorème de *Bachet* avec $a \wedge b = 1$.
$\Leftarrow$ Si $d|a$ et $d|b$ alors $d|au + bv(= 1)$ on a $d = \pm 1$ donc a et b sont premiers entre eux. □

Corollaire 9.2. *Soit $D = a \wedge b$. On a $a = Da'$ et $b = Db'$ avec a' et b' premiers entre eux.*

Démonstration. On a d'après Bachet, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au+bv = D$ alors $Da'u+Db'v = D$. On simplifie par D, on obtient $a'u+b'v = 1$ donc d'après Bezout, a' et b' sont premiers entre eux. □

Théorème de Gauss. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a|c$.

Démonstration. On a $bc = ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et il existe $u, v \in \mathbb{Z}$, $au + bv = 1$ $acu + bcv = c$ par conséquent $c = a(cu + kv)$ donc $a|c$. □

Théorème 9.2. *Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge (bc) = 1$.*

Démonstration. D'après Bezout, ou bachet, il existe $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}$ tels que $au+bv = 1$ et $au'+bv' = 1$. En multipliant ces deux égalités, on obtient $(au + bv)(au' + bv') = 1$, soit $(auv' + cuv' + u'bv) + bc(vv') = 1$ d'après Bezout, on conclut que $a \wedge (bc) = 1$. □

Théorème 9.3. *Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ si $a|b$, $b|c$ et $au + bv = 1$ alors $ab|c$.*

Démonstration. On a $b|c$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que $c = ka$, on a $b|c$ donc $b = ka$ comme $a \wedge b = 1$ donc d'après Gauss $b|k$. Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $k = bk'$ on a $c = ka = bk'a$ donc $ab|c$. □

9.4 Équation diophantienne (résolution dans $\mathbb{Z}$ de $ax + by = c$)

On se donne rois entiers $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $c \in \mathbb{Z}$, on cherche les solutions $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = c$.

1. On calcule $a \wedge b$.
   - Si $a \wedge b$ ne divise pas c, alors il y'a pas de solution car $A \wedge b$ doit diviser $ax + by$.
   - Si $a \wedge b$ divise c, alors en divisant $ax + by = c$ par $a \wedge b$, on se ramène à résoudre $a'x + b'y = c'$ avec $a' \wedge b' = 1$. Car si on note $D = a \wedge b$ on a $a = Da'$, $b = Db'$ et $c = Dc'$ avec $a' \wedge b' = 1$.
2. On résoudre $a'x + b'y = c'$ où $a' \wedge b' = 1$ de solution générale s'écrit

$$\begin{cases} x = x_0 + kb' \\ y = y_0 - ka'. \end{cases}$$

   Avec $k \in \mathbb{Z}$ et (x_0, y_0) une solution particulière.

Démonstration. Par l'algorithme d'Euclide, on sait trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$. En multipliant par c cette équation, on obtient, $acu + bcv = c$ donc (cu, cv) est une solution particulière de $ax + by = c$.
• On note (x_0, y_0) une solution particulière de $ax + by = c$. On a : $ax_0 + by_0 = c$. En comparant les deux equations, on a : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ donc d'après Gauss $b|x - x_0$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tels que $x - x_0 = kb$ en remplaçant, on obtient $akb = b(y_0 - y)$, c'est à dire $y = y_0 - ka$
• Réciproquement, si $\begin{cases} x = x_0 + kb \\ y = y_0 - ka \end{cases}$
Avec $k \in \mathbb{Z}$ et (x_0, y_0) une solution particulière alors $ax + by = (a(x_0 + kb) + b(y_0 - ka)) \Leftrightarrow ax_0 + akb + by_0 - bka = ax_0 + by_0 = c$. □

Exemples 9.2. *L'objectif est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\wp$ ayant pour équation cartésienne : $39x + 27y + 7z = 53$. Soit $M(x; y; z)$ un point appartient un plan $\wp$ et au plan d'équation $z = 5$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.*

a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation. $(E) : 13x + 9y = 6$.

b. justifier que l'équation $(S) : 13x + 9y = 1$ admet au moins un couple solution.

c. Donner un couple, solution particulière de l'équation (S), en déduire une solution particulier de l'équation E.

d. Résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

e. Vérifier s'il existe des points appartenant au plan $\wp$ et au plan d'équation $z = 5$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.Si oui, déterminer les coordonnées de ces points.

Solution 9.2.

a. *Si* $z = 5$ *alors* $39x + 27y + 35 = 53 \Leftrightarrow 39x + 27y = 18$. *En divisant à gauche et à droite de l'égalité par* 3 *on obtient* $(E) : 13x + 9y = 6$.

b. *Les nombres* 13 *et* 9 *sont premier entre eux (pgcd*$(13, 9) = 1$*) donc d'après le théorème de Bézout l'équation* $13x + 9y = 1$ *admet au moins un couple de solution.*

c. $13 = 9 \times 1 + 4$ $(\Rightarrow 4 = 13 - 9)$ *;* $9 = 2 \times 4 + 1 \Rightarrow 1 = 9 - 2(13 - 9) \Rightarrow 1 = 9 \times 3 + 13 \times (-2)$, *en multipliant par* 6 *à gauche et à droite de l'équation, on a* $6 = 9 \times 18 + 13 \times (-12)$. *Donc le couple* $(-2; 3)$ *est un couple solution particulier de* (S), *et le couple* $(-12; 18)$ *est un couple solution particulier de* (E).

d. *Si* $(x; y)$ *est un couple de solution , alors* $13x + 9y = 6$. *Comme* $(-12; 18)$ *est solution, donc* $13(-12) + 9(18) = 6$. *En soustrayant membre à membre ces deux égalités, il vient :* $13x + 9y - 13(-12) - 9(18) = 0 \Rightarrow 13(x + 12) = 9(18 - y)$, *on conclut de cette égalité que* 13 *divise* $9(18 - y)$ *et que* 9 *divise* $13(x - 12)$, *comme* 9 *et* 13 *sont premier entre eux, d'après le théorème de Gauss* 13 *divise* $18 - y$ *et* 9 *divise* $x + 12$ *donc il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y = 18 - 13k$ *et* $x = -12 + 9k$.

Reprenons l'équation (E) *:* $13(-12 + 9k) + 9(18 - 13k) = 6$. *L'égalité est vérifiée. Le couple* $(x; y)$ *est solution de* (E).

d. *Il faut chercher* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $-12 + 9k \in \mathbb{N}$ *et* $18 - 13k \in \mathbb{N}$. *Donc* $k \geq \frac{12}{9} \simeq 1.33$ *et* $k \leq \frac{18}{13} \simeq 1.38$, *donc il n'existe pas des points appartenant au plan* $\wp$ *et au plan d'équation* $z = 5$ *et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels.*

Exemples 9.3. *On suppose que le chiffrement de Hill agit sur des couples de nombres de l'ensemble* $\{0, 1, \cdots, 25\}$ *(Dans un tableur on assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier. A →0, B → 1,* $\cdots$ *,Y → 24 et Z → 25). La fonction de codage*$f : (x_1; x_2) \mapsto (y_1; y_2)$ *est telle que* (S)

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \equiv y_1 (mod\ 26) \\ 5x_1 + 7x_2 \equiv y_2 (mod\ 26) \end{cases}$$

1. *Utiliser le tableur pour coder "SAID".*
2. *On doit trouver la fonction de décodage* $g : (y_1; y_2) \mapsto (x_1; x_2)$.
   a) *Démontrer que :* $\begin{cases} 43x_1 \equiv 7y_1 - 4y_2 (mod\ 26) \\ 43x_2 \equiv -5y_1 + 9y_2 (mod\ 26) \end{cases}$
   ainsi, en posant $7y_1 - 4y_2 = z_1$ *et* $-5y_1 + 9y_2 = z_2$, *on est amené à chercher les entiers* x_1 *et* x_2 *tels que :* $43x_1 \equiv z_1 (mod\ 26)$ *et* $43 \equiv z_2 (mod\ 26)$.
   b) *Monter qu'il existe des entier relatifs* p *et* q *tels que* $43p + 26q = 1$.
   c) *Trouver un entier relatif* p *tel que* $43p \equiv 1 (mod\ 26)$.
   d) *Déduisez-en que :* $x_1 \equiv 5y_1 + 12y_2 (mod\ 26)$ *et* $x_2 \equiv 15y_1 + 25y_2 (mod\ 26)$.
   e) *Utiliser le tableur pour décoder le mot "LJAIANK". Ce mot étant de sept lettres, ajoutez la lettre 'U' à la fin du pour avoir des paquets de deux lettres. Le décodage terminé, on supprime la lettre dont le code est 'U'.*

Solution 9.3. *1.*

S	A	I	D
18	0	8	3
6	12	6	9
G	M	G	J

2. a) $\begin{cases} 43x_1 \equiv 7y_1 - 4y_2(mod\ 26) \\ 43x_2 \equiv -5y_1 + 9y_2(mod\ 26) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 43x_1 \equiv 7(9x_1 + 4x_2) - 4(5x_1 + 7x_2)(mod\ 26) \\ 43x_2 \equiv -5(9x_1 + 4x_2) + 9(5x_1 + 7x_2)(mod\ 26) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 63x_1 + 28x_2 - 20x_1 - 28x_2 \equiv 43x_1(mod\ 26) \\ -45x_1 - 20x_2 + 45x_1 + 63x_2 \equiv 43x_2(mod\ 26) \end{cases}$

b) *Les nombres* 43 *et* 26 *sont premier entre eux (pgcd*$(13, 9) = 1$*) donc d'après le théorème de Bézout il existe des entier relatifs* p *et* q *tels que* $43p + 26q = 1$.

c. *Trouvons un entier relatif* $p/\ 34p \equiv 1(mod26)$ *l'aide de l'algorithme d'Euclide.*
$43 = 26 + 17 \quad 26 = 17 + 9 \quad 9 = 8 + 1$
$17 = 43 - 26 \quad 9 = 26 - (43 - 26) = -43 + 2 \times 26 \quad 8 = 2 \times 43 - 3 \times 26$ *donc* $1 = -3 \times 43 + 5 \times 26$ *donc* $-3 \times 43 \equiv 1(26)$

d. *Déduisons que :* $x_1 \equiv 5y_1 + 12y_2(mod\ 26)$ *et* $x_2 \equiv 15y_1 + 25y_2(mod\ 26)$.

$\begin{cases} 43x_1 \equiv z_1(mod26) \\ 43x_2 \equiv z_2(mod\ 26) \end{cases}$ *on multiplie par* -3.

$\begin{cases} -3 \times 43 \equiv -3 \times z_1 \equiv -3(7y_1 - 4y_2) \equiv -21y_1 + 12y_2 \equiv 5y_1 + 12y_2(mod26) \\ -3 \times 43x_2 \equiv -3 \times z_2 \equiv -3(-5y_1 + 9y_2) \equiv 15y_1 - 27y_2 \equiv 15y_1 + 25y_2(mod\ 26) \end{cases}$

e. *Décodage du mot "LJAIANK"*

L	J	A	I	A	N	K
11	9	0	8	0	13	10
7	0	18	18	0	13	4
H	A	S	S	A	N	E

9.5 Congruence

Définition 9.6. m est un entier naturel non nul. Dire que deux entier relatifs a et b sont ***congrus modulo m*** signifie qu'il sont le ***même reste*** dans la division euclidienne par m.

Notation* :** On écrit $a \equiv b(mod\ b)$. On lit a ***congru à b ***modulo*** m.
Exemple : $11 \equiv 5(mod\ 4)$ et $-4 \equiv 2(mod\ 3)$.

Théorème 9.4.
1. *m est un entier naturel non nul, pour tous entiers relatifs a et b. On a $a \equiv b(mod\ m)$ si est seulement si m divise $a - b$.*
2. *m est un entier naturel non nul, pour tous entiers relatifs a, b et c. Si $a \equiv b(mod\ m)$ et $b \equiv c(mod\ m)$, alors $a \equiv c(mod\ m)$.*
3. *m est un entier naturel non nul et a, b, a' et b' sont des entiers relatifs. Si $a \equiv b(mod\ m)$ et $a' \equiv b'(mod\ m)$, alors :*
   • $a + a' \equiv b + b'(mod\ m)$ • $a - a' \equiv b - b'(mod\ m)$ • $aa' \equiv bb'(mod\ m)$.

Exemples 9.4. *Montrer que* 5 *divise* $9^k - 4^k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Solution 9.4. $9 \equiv 4(mod\ 5) \Rightarrow 9^4 \equiv 4^k(mod\ 5)$ *donc* $9^4 - 4^k \equiv 4^k - 4^k(mod\ 5) \equiv 0(mod\ 5)$ *donc* 5 *divise* $9^k - 4^k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

théorème des restes chinois.

Théorème 9.5. *Soient m, n des entiers supérieur ou égal à 2 premier entre eux, $a, b \in \mathbb{Z}$ alors la solution générale du système* $\begin{cases} x \equiv a(mod\ m) \\ x \equiv b(mod\ n) \end{cases}$ *est donnée par $x = x_0 + kmn$ où $k \in \mathbb{Z}$ et x_0 est une solution particulier.*

Démonstration. On cherche $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} x = a + mu \\ x = b + nv \end{cases} \Rightarrow a+mu = b+nv \Rightarrow mu-nv = b-a$ comme $m \wedge n = 1$ alors l'équation a des solutions : elle sont données par $u = u_0 + kn$ $k \in \mathbb{Z}$ d'où $x = a + mu_0 + kmn = x_0 + kmn$ où x_0 est une solution particulière . □

Exemples 9.5. Objectif, *trouver les entiers naturels n qui divisés par 7 donnent 5 pour reste, et divisés par 11 donnent 4 pour reste.*

a. *Justifier l'affirmation suivant : « n appartient à ε » équivaut à « il existe trois entiers naturels n,p,q tels que (S)* $\begin{cases} n = 7p + 5 \\ n = 11q + 4 \end{cases}$ *»*
b. *Prouver que (S) équivaut à (S')* $\begin{cases} n = 7p + 5 & (1) \\ 11q - 7p = 1 & (2) \end{cases}$.
c. *Montrer qu'il existe des entiers relatifs p et q tels que $11q - 7p = 1$.*
d. *Démonter que l'équation $11q + 7p = 1$ équivaut à $11(q-2) = 7(p-3)$.*
e. *Déduisez-en l'ensemble des couples $(p; q)$ solutions de (2).*
f. *Déduisez-en les valeurs de n et concluez.*

Solution 9.5.

a. $\begin{cases} n \equiv 5(7) \\ n \equiv 4(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{il existe } p \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } n = 7p + 5 \\ \textit{il existe } q \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } n = 11q + 4 \end{cases}$
b. $\begin{cases} n = 7p + 5 \\ n = 11q + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7p + 5 \\ 11q + 4 = 7p + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7p + 5 \\ 11q - 7p = 5 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7p + 5 \\ 11q - 7p = 1 \end{cases}$
c. *Comme 11 et -7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout il existe p et q tels que $11q - 7p = 1$.*
d. $11(q-2) = 7(p-3) \Leftrightarrow 11q - 11 \times 2 = 7p - 7 \times 3 \Leftrightarrow 11q - 7p = 11 \times 2 - 7 \times 3 \Leftrightarrow 11q - 7p = 1$
e. *D'après d. 11 divise $7(p-3)$ et comme 11 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $p-3$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que $p - 3 = 11k$ donc $p = 3 + 11k$. En remplaçant dans $11(q-2) = 7(p-3)$ on an $11(q-2) = 7 \times 11k \Leftrightarrow q = 2 + 7k$.*
f. $n = 7p + 5$ $n = 7(3 + 11k) + 5$ *donc* $n = 26 + 7 \times k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.
Remarque : $n \equiv 26(7 \times 11k)$

9.6 Exercice

Exercice 9.6.1. *Montrer que les confirmations suivantes sont vrai ou faux.*

1. *Le quotient de (-23) par (-5) est par 4.*

2. *Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entier b et 64 sont premiers entre eux.*
3. $147^{146} \equiv 2(mod\ 12)$.
4. $x^2 \equiv 0(mod\ 8)$ *équivaut à* $x \equiv 0(mod\ 8)$
5. *Si* $\begin{cases} x \equiv 3(mod\ 4) \\ x \equiv 4(mod\ 5) \end{cases}$ *alors* $x \equiv 19(mod\ 20)$
6. *Soit n un entier. Alors les nombres $2n + 3$ et $5n + 7$ sont premiers entre eux.*

Exercice 9.6.2.

1. *Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.*
2. *Soit $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$; $n \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de n les restes de A_n modulo 5.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $A_n \equiv 3(mod\ 5)$.*
4. *Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier $N = 1253^{2014} \times 13^{2015}$.*

Exercice 9.6.3.

1. *Vérifier que $7^2 \equiv -1(mod\ 10)$.*
2. *Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel $1 + 7 + 7^2 + \cdots 7^{400}$?*

Exercice 9.6.4.

1. *On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.*
   a) *Montrer que le couple $(9, -3)$ est une solution particulière de l'équation (E).*
   b) *Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).*
2. *Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système* $\begin{cases} n \equiv 6(mod\ 7) \\ n \equiv 15(mod\ 18) \end{cases}$

Exercice 9.6.5. *Soit n un entier nature, on considère les entiers $p = n + 5$ et $q = 2n + 3$ et on note $d = PGCD(p, q)$.*

1. a) *Calculer $2p - q$. En déduire les valeurs possibles de d.*
   b) *Montrer que si p est un multiple de 7 alors q est un multiple de 7.*
   c) *Montrer que p est une multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$*
2. *Montrer que $d = 7$ si et seulement si $n \equiv 2[7]$.*
3. *Déterminer d dans les cas suivants,*
   a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.
   b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$

Exercice 9.6.6.

1. *On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x + 53y = 1$.*

   a) *Vérifier que* $(-9, 8)$ *est une solution de* (E).
   b) *Résoudre l'équation* (E).
   c) *Déterminer l'ensemble des inverses de* 47 *modulo* 54.
   d) *En déduire que* 44 *est le plus petit inverse positif de* 47 *modulo* 53.
2. a) *Justifier que* $45^{52} \equiv 1[53]$.
   b) *Déterminer alors le reste de* 45^{106} *modulo* 53.
3. *Soit* $N = 1 + 45 + 45^2 + \cdots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{k-105} 45^k$.
   a) *Montrer que* $44N = 10[53]$.
   b) *En déduire le reste de* N *modulo* 53.

Exercice 9.6.7. *Soit dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* (E) : $3x - y = 4$.
Trouver une solution particulier évident et résoudre l'équation (E) *dans* $\mathbb{Z}^2$.
Soit (u_n) *la suite réelle définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$

1. a) *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $u_n = 2 + 3^{n+1}$.
   b) *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $3^n \equiv 1[2]$.
   c) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, u_n *est un nombre impair.*
2. *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le couple* (u_n, u_{n+1}) *est une solution de l'équation* (E).
3. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *les termes* u_n *et* u_{n+1} *sont premiers entre eux.*
4. *Déterminer alors le* $PGCD(6 + 3^{1002}, 6 + 3^{1003})$.

10 CONIQUES

10.1 Étude analytique

Définition 10.1. On appelle conique les courbes du second degré c'est à dire les courbes dont les points $M(x, y)$ dans un repère orthonormé, vérifient l'équation implicite suivante :

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e \textbf{ avec } |a| + |b| \neq 0$$

. Les coefficients $a, b, c, dete$ étant réels.

10.1.1 Coniques dépourvues de centre

Théorème 10.1. *Lorsque le produit $ab = 0$ avec $|a| + |b| \neq 0$, on a si :*

1. *Si $a = 0$ et $c = 0$ suivant le signe de $\Delta'_1 = d^2 - be$.*
   - $\Delta'_1 > 0$ ***deux droites horizontales*** *d'équation $y = y_1 et y = y_2$.*
   - $\Delta'_1 = 0$ ***une droite horizontale*** *d'équation $y = y_0$*
   - $\Delta'_1 < 0$ *aucun point.*
2. *Si $a = 0$ et $c \neq 0$* ***une parabole*** *d'axe parallèle à (Ox) du type $Y^2 = 2pX$.*
3. *Si $b = 0$ et $d = 0$suivant le signe de $\Delta'_2 = c^2 - ae$*
   - $\Delta'_2 > 0$ ***deux droites verticales*** *d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$*
   - $\Delta'_2 = 0$ ***une droite verticale*** *d'équation $x = x_0$*
   - $\Delta'_2 < 0$ *aucun point.*
4. *$b = 0$ et $d \neq 0$ une parabole d'axe parallèle à (Oy) du type $Y = aX^2$*

10.1.2 Coniques à centre

Par définition, une conique à pour équation $ax - 2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \Leftrightarrow a(x^2 + \frac{2c}{a}) + b(y^2 + \frac{2d}{b}) + e = 0 \Leftrightarrow a[(x + \frac{c}{a})^2 + (\frac{c^2}{a^2})] + b[(y + \frac{d}{b})^2 + \frac{d^2}{b^2}] + e = 0 \Leftrightarrow a(x + \frac{c}{a})^2 + b(y + \frac{d}{b})^2 = \frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} - e$
On pose alors $k = \frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} - e$ e et l'on fait le changement de variable suivant :
$\begin{cases} X = x + \frac{c}{a} \\ Y = y + \frac{d}{b} \end{cases}$ de nouvelle origine $\Omega(-\frac{c}{a}; -\frac{d}{b})$,
on obtient alors l'équation : $aX^2 + bY^2 = k$.

1. $ab > 0$
   - Si $k = 0$ la seul solution de l'équation est $X = 0$ et $Y = 0$, donc la conique se réduit à Ω.
   - Si $k < 0$ l'équation n'a pas de solution donc la conique ne possède aucun point.
   - $k > 0$, on divise par k : $\frac{a}{k}X^2 + \frac{b}{k}Y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{k}{a}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$.

     On pose alors comme $a > 0$, $b > 0$ et $k > 0$: $\alpha^2 = \frac{k}{a}$ et $\beta^2 = \frac{k}{b}$. On obtient alors : $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ équation d'une ellipse.

     Remarque 10.1. α : longueur de demi-axe horizontal de l'ellipse.
     β : longueur de demi-axe vertical de l'ellipse.
     Si $\alpha = \beta$ l'ellipse est alors un cercle de rayon α.

2. $ab < 0$
   - Si $k = 0$ l'équation devient $Y^2 = -\frac{a}{b}X^2 \Leftrightarrow Y = \pm X\sqrt{-\frac{a}{b}}$. la conique est alors la réunion de deux droites.
   - $k \neq 0$, on divise par k : $\frac{a}{k}X^2 + \frac{b}{k}Y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{k}{a}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$

     Comme a et b sont de signes contraires deux cas sont envisageables :

     a) $\frac{k}{a} >$ et $\frac{k}{b} < 0$, on pose alors $\alpha^2 = \frac{k}{a}$ et $\beta^2 = -\frac{k}{b}$,
        on obtient alors : $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$

     b) $\frac{k}{a} <$ et $\frac{k}{b} > 0$, on pose alors $\alpha^2 = -\frac{k}{a}$ et $\beta^2 = \frac{k}{b}$,
        on obtient alors : $-\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = -1$

     On obtient alors dans ces deux cas l'équation d'une hyperbole.

Théorème 10.2. *Lorsque le produit $ab \neq 0$, la conique possède un centre et son équation peut s'écrire sous la forme :*

$$aX^2 + bY^2 = k \textit{ \textbf{de centre} } \Omega(-\frac{c}{a}; -\frac{d}{b})$$

1. $ab > 0$
   - *$k = 0$ La conique se réduit à un seul point Ω.*
   - *$k < 0$ La conique ne possède **aucun point**.*
   - *$k > 0$ La conique est une ellipse d'équation du type $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$*

2. $ab < 0$
   - *$k = 0$ La conique est l'union de **deux droites** d'équation*
     $Y = \pm X\sqrt{-\frac{a}{b}}$ symétriques par rapport à (ΩX) et (ΩY)
   - *$k \neq 0$ La conique est **une hyperbole** d'équation du type*
     $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = \pm 1$ d'asymptotes $Y = \pm\frac{\beta}{\alpha}X$

Remarque 10.2. Toutes les coniques à centre possèdent deux axes de symétrie (ΩX) et (ΩY).

10.2 Excentricité et foyers

Définition 10.2. Soit F un point fixe, D une droite fixe et e un réel strictement positif (F $\neq D$). Pour tout point M du plan, on note H le projeté orthogonal de M sur D. Une conique de **foyer F** est alors l'ensemble des points M vérifiant $\frac{MF}{MH} = e$. e est appelé **l'excentricité et *D* la directrice** de la conique. La perpendiculaire Δ à D passant par le foyer F est appelé **axe focal** de la conique.

Remarque 10.3.
- On ne retrouve pas toutes les coniques définies analytiquement mais seulement les **coniques propres** c'est à dire la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. Quand e tend vers 0, la conique se rapproche d'un cercle et quand e tend vers $+\infty$, la conique se rapproche de sa directrice.
- Toutes les coniques ainsi définies sont symétriques par rapport à leur axe focal.

Théorème 10.3. *On appelle p la distance de F à la directrice D. Suivant les valeurs de l'excentricité e, on obtient les coniques suivantes :*

1. *Si $e = 1$ la conique est une parabole d'équation $Y^2 = 2pX$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$. S étant le sommet de la parabole.*

2. *Si* $e \neq 0$ *La conique possède un centre* Ω*, un deuxième foyer* F'*, symétrique de* F *par rapport à* Ω*. Son expression dans le repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *est de la forme :*
   - $e < 1$, $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. *La conique est alors une ellipse.*
   - $e > 1$, $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. *La conique est alors une hyperbole. On a* $a^2 = \frac{e^2 p}{(1-e^2)^2}$ *et* $b^2 = \frac{e^2 p}{|1-e^2|}$

10.3 Éléments caractéristiques et Équation paramétrique d'une conique

10.3.1 Parabole

Théorème 10.4.

1. *Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *sous la forme :* $y^2 = 2px$ *alors la canonique est un parabole. Dans le repère précédent, le foyer à pour coordonnées* $F(\frac{p}{2}, 0)$.*La directrice à pour équation* $x = -\frac{p}{2}$ *et le sommet de la parabole est le centre du repère.*
2. *L'équation de la tangente en un point* (x_0, y_0)*de la parabole est* $yy_0 - p(x + x_0)$.
3. *Une parabole d'équation* $y^2 = 2px$ *dans un repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *a pour représentation paramétrique :*
   $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$.

Exemples 10.1. *Donner les éléments caractéristiques de la conique d'équation* $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$. *Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe aux points d'abscisse* -1.

Solution 10.1. $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow -2x = y^2 - 6y + 10 \Leftrightarrow -2x = (y-3)^2 + 1 \Leftrightarrow -2(x + \frac{1}{2}) = (y-3)^2$. *Dans le repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *avec* $\Omega(-\frac{1}{2}, 3)$ *on reconnaît la parabole* (P) *d'équation* $Y^2 = -2X$. *(excentricité :* $e = 1$*) de foyer* $F(-1, 0)$ *et de directrice d'équation* $Y = 1$. *Dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *cette parabole a pour foyer* $F(-\frac{3}{2}, 3)$ *et pour directrice la droite* $x = \frac{1}{2}$. *La sommet de cette parabole est le point* $S(\frac{1}{2}, 3)$. **Si x = -1** *alors* $y^2 - 6y + 8 = 0$ *ce qui donne* $y = 2$ *ou* $y = 4$.
• *La tangente à* (P) *en* $A(-1, 2)$ *a pour équation cartésienne*
$y \times 2 - 3(y + 2) + 1(x - 1) + 10 = 0$ *soit* $x - y + 3 = 0$
• *La tangente à* (P) *en* $B(-1, 4)$ *a pour équation cartésienne*
$y \times 4 - 3(y + 4) + 1(x - 1) + 10 = 0$ *soit* $x + y - 3 = 0$

10.3.2 Ellipse

Théorème 10.5.

1. *Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *sous la forme :* $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ ***avec*** $a^2 > b^2$, *alors la canonique est une ellipse.*
   Si on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ *on obtient alors les éléments caractéristiques suivants :* $e = \frac{c}{a}$, $p = \frac{b^2}{c}$, *et* $\Omega F = c$
   Les foyers ont pour coordonnées $F(c, 0)$ *et* $F'(-c, 0)$, *les directrices ont pour équation* $x = \frac{a^2}{c}$ *et* $x = \frac{-a^2}{c}$. *Les sommets sont les points* $(a, 0)$, $(-a, 0)$,$(b, 0)$ *et* $(-b, 0)$.
2. *L'équation de la tangente en un point* (x_0, y_0) *de l'ellipse est* $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

3. *Une ellipse d'équation* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ *dans un repère* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ *a pour représentation paramétrique :* $\left\{\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t \end{array}\right.$ *avec* $t\in[0;2\pi[$

Démonstration. Nous avons vu que toute équation du second degré se mettant sous la forme : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ était une ellipse. De plus si le foyer F se trouve sur l'axe des abscisses, le grand axe de l'ellipse se trouve sur les abscisses et donc $a^2>b^2$.
Comme $a^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$ donc $\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$, on a alors,

- $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ en posant $c^2=a^2-b^2$ on obtient $e^2=\frac{c^2}{a^2}$ soit $e=\frac{c}{a}$
- $b^2=\frac{e^2b^2}{1-e^2}\Leftrightarrow p^2=\frac{b^2(1-e^2)}{e^2}=\frac{b^2\times\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^4}{c^2}\Leftrightarrow p=\frac{b^2}{c}$.
- $\Omega F=\frac{e^2p}{1-e^2}=\frac{b^2}{p}=b^2\times\frac{c}{b^2}=c$.

□

Définition 10.3. Soit D une droite, on appelle **affinité orthogonale** d'axe D et de rapport $k\in\mathbb{R}^*$, l'application affine f qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ où O est la projection orthogonale de M sur D.

Théorème 10.6. *Dans le repère orthonormé* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$*, soit*

- *Le cercle* ε *de rayon* a.
- *L'ellipse* ε *d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *avec* $a>b$. *On passe du cercle* ε *par une affinité orthogonale d'axe* (Ωx) *et de rapport* $\frac{b}{a}$.

Théorème 10.7. *Les tangentes d'un point du cercle* ε *et du point* M *correspondant à l'ellipse* ξ *sont sécantes à l'axe* (Ωx) *au même point* T.

Exemples 10.2. *Donner la nature de la conique d'équation* $3x^2+4y^2+x-39=0$ *en précisant foyer(s), directrice(s) et excentricité. Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe aux points d'abscisse 3.*

Solution 10.2. $3x^2+4y^2+x-39=0\Leftrightarrow 3(x^2+2\frac{1}{6}x+\frac{1}{36})+4y^2-\frac{1}{12}-39=0\Leftrightarrow 3(x+\frac{1}{6})^2+4y^2=\frac{469}{48}$ $\Leftrightarrow\frac{(x+\frac{1}{6})^2}{\frac{469}{36}}+\frac{y^2}{\frac{469}{48}}=1$. *Dans le repère* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ *avec* $\Omega(-\frac{1}{6},0)$ *on reconnaît l'ellipse* (E) *d'équation* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, *avec* $a^2=\frac{169}{36}$ *et* $b^2=\frac{469}{48}$. *Comme* $a^2>b^2$ *son axe focal est* $(\Omega,\vec{i})$. *Par ailleurs,* $c^2=\frac{469}{12}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{469}{12^2}$ *donc* $c=\frac{\sqrt{469}}{12}$ *Cette ellipse a pour excentricité* $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. *Dans* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, $F(\frac{\sqrt{469}}{12},0)$ $D:x=\frac{a^2}{c}=\frac{\sqrt{469}}{3}$ *et* $D':=-\frac{\sqrt{469}}{3}$. *Dans* $(O,\vec{i},\vec{j})$, $F(\frac{\sqrt{469}-2}{12},0)$ $D:x=\frac{2\sqrt{469}-1}{3}$ *et* $D':=\frac{-2\sqrt{469}-1}{3}$, **si x = 3** *alors* $27+4y^2+3-39=0$ *ce qui donne* $y^2=\frac{9}{4}$ *d'où* $y=\pm\frac{3}{2}$.
• *La tangente à* (E) *en* $A(3,\frac{3}{2})$ *a pour équation cartésienne* $3x(3)+4y(\frac{3}{2})+\frac{1}{2}(x+3)-39=0$ *donc* $19x+12y-75=0$.
• *La tangente à* (E) *en* $B(3,-\frac{3}{2})$ *a pour équation cartésienne* $3x(3)+4y(-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}(x+3)-39=0$ *donc* $19x-12y-75=0$.

10.3.3 Hyperbole

Théorème 10.8.

1. *Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *sous la forme :* $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ *alors la conique est une hyperbole. Si on pose* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ *on obtient alors les éléments caractéristiques suivants :* $e = \frac{c}{a}$, $p = \frac{b^2}{c}$ *et* $\Omega F = c$*. Les foyers ont pour coordonnées* $F(c, 0)$ *et* $F'(-c, 0)$*, les directrices ont pour équation* $x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$ *et* $x = \frac{-a^2}{c} = \frac{-a}{e}$*. Les sommets sont les points* $(a, 0)$, $(-a, 0)$*, les asymptotes ont pour équations :* $Y = \frac{b}{a}X$ *et* $Y = -\frac{b}{a}X$
2. *L'équation de la tangente en un point* (x_0, y_0) *de l'hyperbole est* $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.
3. *Soit l'hyperbole* Γ *d'équation dans le repère orthonormé* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$*. L'hyperbole* Γ *dans le repère normé centré en* Ω *et dirigé vers ses deux asymptotes* $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$ *a pour équation :* $XY = \frac{c^2}{4}$.

Démonstration. Nous avons vu que toute équation du second degré se mettant sous la forme : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ était une hyperbole. Comme $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1}$ donc $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$, on a alors,

- $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ en posant $c^2 = a^2 + b^2$ on obtient $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ soit $e = \frac{c}{a}$
- $b^2 = \frac{e^2b^2}{e^2-1} \Leftrightarrow p^2 = \frac{b^2(e^2-1)}{e^2} = \frac{b^2 \times \frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \Leftrightarrow p = \frac{b^2}{c}$.
- $\Omega F = \frac{e^2p}{e^2-1} = \frac{b^2}{p} = b^2 \times \frac{c}{b^2} = c$.

□

Exemples 10.3. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{u}, \vec{v})$*, soit* M *un plan d'affixe* $z = x+iz$*,* M_1 *d'affixe* z^2 *et* M_2 *d'affixe* z^5*. On considère l'ensemble* $\mathbb{H} = \{M$ ***du plan tels que*** M, M_1 *et* M_2 ***sont alignés***$\}$*. Déterminer* $\mathbb{H}$*.*

Solution 10.3. $M(z), M_1(z^2)$ $M_2(z^5)$ *sont alignés* $\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{MM_2}}{\overrightarrow{MM_1}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z^5-z}{z^2-z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z^4-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ *et* $z \neq 0$ $\Leftrightarrow (z+1)(z^2+1) = 0 \in \mathbb{R}$ *et* $z \neq 0, z \neq 1 \Leftrightarrow im(x+iy+1)(x^2+2ixy-y^2+1) = 0$ *où* $x \neq 0, y \neq 0$ *et* $x \neq 1$*.* $\Leftrightarrow im(x^3 + 3ix^2y + x^2 - 3xy^2 + 2ixy + x - iy^3 - y^2 + iy + 1) = 0$ *où* $x \neq 0, y \neq 0$ *et* $x \neq 1$*.* $\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0$ *où* $x \neq 0, y \neq 0$ *et* $x \neq 1$*.* $\Leftrightarrow 3(x + \frac{1}{3})^2 - y^2 + 1$ *où* $x \neq 0, y \neq 0$ *et* $x \neq 1$*.* $\Leftrightarrow -\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2} = 1$ *c'est un équation réduite d'une l'hyperbole* $\mathbb{H}$ *privé de* O *et privé des points d'intersection de* $\mathbb{H}$ *avec la droite d'équation* $x = 1$*, les points* $K(0, \sqrt{6})$ *et* $K'(1, -\sqrt{6})$*. Alors* $\mathbb{H}$ *est de centre le point* $\Omega(\frac{-1}{3}, 0)$*, d'axe focale suivant* (Oy)*. Soit* $M(x, y)$ *dans le repère* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *et* $M(X, Y)$ *dans le repère* $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$*. Donc* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ *on aura* $\begin{cases} x = X - \frac{1}{3} \\ y = Y \end{cases}$ *(*)* *donc l'équation sera* $-\frac{X^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2}$*, alors* $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$*,* $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$ *et* $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$*. Dans le repère* $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$*,* $\mathbb{H}$ *est une hyperbole de foyer* $F(0, \frac{2}{3}\sqrt{2})$ *et* $F'(0, -\frac{2}{3}\sqrt{2})$ *d'axe transverse* (Oy) *de sommet* $A(0, \sqrt{\frac{2}{3}})$ *et* $A'(0, -\sqrt{\frac{2}{3}})$*, d'excentricité* $e = \frac{c}{b} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$*, et de directrices* $D : Y = \frac{b^2}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *associé à* F*. Et* D *associée à* F'*,* $D : Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$*. Dans le* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *et vu les relations (*)* $F(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{2})$*,* $F'(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{2})$*,* $A(-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ *et* $A'(-\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$*. Donc* $\mathbb{H}$ *est un hyperbole privée de* k *et* k'*.*

10.4 Exercice

Exercice 10.4.1. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé.*

1. *Écrire l'équation de la parabole P de foyer $F(-1,2)$ et de directrice D d'équation $3x-2y+2=0$.*
2. *Écrire l'équation de l'ellipse E de foyer $F(2,1)$, de directrice D d'équation $x-2y-2=0$ et d'excentricité $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.*
3. *Écrire l'équation de l'ellipse E de foyer $F(1,0)$ et $F'(-1,2)$ et de demi-grande axe de longueur 3.*
4. *Déterminer l'ensemble des centres des cercles passant par un point fixe F et tangents à un cercle fixe C (on discutera selon la position de F par rapport à C).*
5. *Montrer que deux coniques sont semblables si et seulement si elles ont la même excentricité.*
6. *Montrer que deux paraboles sont isométriques si et seulement si elles ont le même paramètre.*
7. *Démontrer que $F=\{M(z)/\frac{z-i}{\bar{z}+4+i}\in i\mathbb{R}\}$ est inclus dans une conique que l'on tracera et dont on donnera tous les éléments caractéristiques.*

Exercice 10.4.2. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Vérifier si les courbes d'équations suivantes sont des conique. Si oui, on donnera la nature (hyperbole, parabole, ellipse) et les éléments caractéristique.*

- $5x^2+8y^2+4xy+16x-8y=16$
- $x^2+2y^2-2x+4y=-5$
- $x^2+y^2+4xy-2x+4y=0$
- $x^2+2y^2-2xy+2x+6y=0$
- $4x^2-4y^2-2xy=1$
- $x^2+2xy+y^2+2x+2y=5$
- $xy+3x-y=5$
- $xy+3x+2y=-6$
- $3x^2-y^2-2xy+x+3y=3$
- $3x^2-4xy+2y^2-5x+y=8$
- $2x^2-5xy-3y^2+5x-y=-2$
- $x^2-2xy+y^2+2x-3y+3$
- $9x^2-12xy+4y^2-3x+2y=2$
- $x^2+2xy+y^2-4x+8y=-10$
- $x^2+4xy+4y^2-4x+2y=1$
- $9x^2-42xy+49y^2+12x-28y=-4$
- $x^2-6xy+y^2-3x+2y=4.$

Exercice 10.4.3. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit la courbe (Γ) dont une équation est : $y^2+2y-4x+3=0$.*

1) *a. Montrer que (Γ) est une parabole dont on précisera les éléments caractéristiques.*
b. Tracer Γ.

2) Soit le point $A(-1,1)$. Déterminer par leurs équations les tangentes (T) et (T') à la parabole (Γ) menées du point A, dont on précisera leurs points de contact avec (Γ).

Exercice 10.4.4. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$. Soit f la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.*

1. *Déterminer la forme complexe de f.*
2. *Une courbe (C) a pour équation : $15x^2+13y^2-2\sqrt{3}xy-768=0$.*
   a) Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par f.
   b) En déduire que (C') est une ellipse que l'on caractérisera. Tracer (C').
3. *Déterminer alors la nature de la courbe (C) et préciser ses caractéristiques.*

Exercice 10.4.5. *Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.*

1. *Écrire l'équation de l'hyperbole H de foyer $F(3,2)$, de directrice D d'équation $x-y+1=0$ et d'excentricité $\sqrt{2}$.*
2. *Écrire l'équation de H sous la forme $(x-a)(y-b)=c$ pour des réels a,b,c. En déduire les coordonnées du centre Ω de H.*
3. *Déterminer les axes, puis le second couple foyer-directrice (F',D') de H(on donnera les coordonnées de F' et une équation de D').*
4. *Montrer que la courbe E d'équation $3x^2+3y^2+2xy-14x-26y+27=0$ est une ellipse.*
5. *Montrer que Ω est le centre de E.*
6. *Déterminer les axes et l'équation réduite de E.*
7. *En déduire les longueurs des axes, la distance focale et l'excentricité de E.*
8. *Montrer que les coniques E et H ont les mêmes foyers.*

Exercice 10.4.6. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit (E) la canonique dont le point $F(\sqrt{3},3)$ est l'un de ses foyers, le point $S(2,0)$ est l'un de ses sommets et la droite $D:=\frac{4}{\sqrt{3}}$ est l'une de ses directrices.*

1. *Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.*
2. *Montrer que la droite $(T):x\sqrt{3}+2y=4$ est une tangente à (E) en un point A que l'on précisera.*

Exercice 10.4.7. *Soit le plan complexe P muni du repère orthonormal $R=(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique 3 cm).*

a. *Soit (H) l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant : $3x^2-y^2+2x+1=0$.*
   Montrer que (H) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et une asymptote.
b. *Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe $z=x+iy$ tels que les points A,M et M' d'affixe $1,z$ et z^4 soient alignés. (On pourra poser $Z=1+z+z^2+z^3$ et exprimer le complexe Z en fonction de x et y)*

3 *Construire l'ensemble Γ.*

Exercice 10.4.8. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la conique ξ d'équation : $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.*

1. *Déterminer la nature de ξ et préciser ses foyers, ses sommets. Trace ξ.*
2. *Déterminer les équations des hyperboles de centre O, dont les sommets sont des sommets de ξ et les asymptotes sont perpendiculaires. Tracer ces hyperboles.*
3. *Soit f la fonction définie $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\int_0^{6sinx}\sqrt{36-t^2}dt$.*
   a) *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.*
   b) *Montrer que l'aire de ξ es unité d'aires est $A=2f(\frac{\pi}{2})$.*
   c) *En déduire la valeur de A.*

Exercice 10.4.9. *Dans le plan P muni du repère orthonormé $R=(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm on considère l'ensemble ξ des points M d'affixe z tels que*
$|z-1-i|=\frac{1}{4}|z+i\overline{z}-8(1+i)|$.

1. *Soit p l'application du plan dans lui-même , qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\frac{1}{2}|z-i\overline{z}+8(1+i)|$*
   On pourra poser $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x,y,x' et y' sont des réels.

a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $p(M) = M$

b)) Montrer que, pour tout point M, les coordonnées du point M' vérifient l'équation : $x' + y' - 8 = 0$. On appellera (D) la droite d'écrite par les points M'

c) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D). caractériser géométriquement l'application p.

2. On se propose de déterminer l'ensemble défini au début de l'exercice..

a) Montrer que $z - z' = \frac{1}{2}|z + i\overline{z} - 8(1+i)|$

b) En déduire que l'ensemble ξ est une ellipse de foyer F d'affixe $1+i$, de directrice (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$. Préciser l'axe focal.

c) Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $2+2i$ et $-2-2i$ sont deux sommets de ξ.

3. Allure de l'ensemble ξ

a) Construire dans le repère $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$ la droite (D), l'axe focal, les points A, A' et F.

b) Déterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse.

c) Donner l'allure de ξ.

Exercice 10.4.10. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité $1cm$, on considère les points $A(-1, 0)$ et $I(4, 0)$. On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet A et un foyer est le point O.*

1. a) Déterminer les coordonnées des autres sommets de (E) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$.

c) Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2. a) Démontrer qu'une équation de (E) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) Déterminer par leurs équation les tangentes T et T' à (E) passant par le point $H(-2, 0)$.

Exercice 10.4.11. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le points $(\frac{1}{2\cos(\theta)}, 2\tan(\theta))$*

1. a) Montrer que lorsque θ décrit l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ le point M varie sur une hyperbole (H) dont on donnera une équation cartésienne.

b) Déterminer par leurs coordonnées les sommets et les foyers de (H).

2. Soit T la tangente à (H) en M. Montrer qu'une cartésienne de T dans le repère $O, \vec{u}, \vec{v}$ est $2x - y.\sin(\theta) - 2\cos(\theta) = 0$.

3. On désigne par P_1 et P_2 les points d'intersection de T avec les asymptotes Δ_1 et $\Delta - 2$ à l'hyperbole (H).

a) Déterminer les coordonnées des points P_1 et P_2.

b) Montrer que l'aire du triangle OP_1P_2 est indépendante de θ.

Exercice 10.4.12. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

1. a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques les coniques suivants : $(E) : x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ et $(E) : y^2 - 2x - 4 = 0$.

b) Tracer E et P.

2. Soit Γ la courbe d'équation $y^2 + 2|x| = 4$

a) Vérifier que $(O, \vec{v})$ *est un axe de symétrie de* (Γ).

b) Tracer (Γ) *dans le repère* $(O, \vec{u}, \vec{v})$

3. *a) Soit* (C) *le cercle d'équation :* $x^2 + y^2 = 4$.
   Vérifier que pour tout réel t *de* $[0, 2]$, *le point* $M(t, \sqrt{4-t})$ *appartient à (C).*

   b) On pose $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t}dt$. *Montrer que* $I_1 = \pi$.

4. *Calculer* $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4}dt$

5. *Soit* A *l'aire de la partie du plan limitée par la courbe* Γ *et* E.
   Exprimer A *en fonction de* I_1 *et* I_2 *puis calculer* A.

11 Géométrie dans l'espace

11.1 Vecteur dans l'espace

La notion vue dans le plan se généralise dans l'espace.

Définition 11.1. Un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est donc définie par :

- Une *direction* celle de la droite (AB) ;
- Un *sens* celui de A vers B ;
- Une *norme* ou *longueur* la distance AB. On note $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Théorème 11.1. *1. Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ non nuls sont égaux ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) si, et seulement si, $ABCD$ est un parallélogramme.*

2. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque 11.1. Le vecteur nul ($\vec{0}$) est colinéaire à tout vecteur.
- les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.
- les droite (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
- une droite (AB) est l'ensemble des points M tels que :$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}$.

11.2 Géométrie vectorielle

11.2.1 Vecteurs coplanaires

Définition 11.2.

1. Quatre points de l'espace sont *coplanaires* s'il appartiennent à la même plan.
2. Trois vecteur de l'espace sont *coplanaire* s'il existe quatre points A, B, C et D coplanaires tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Théorème 11.2.

1. *Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaire si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.*
2. *A, B et C sont trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M définis par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ $x, y \in \mathbb{R}$.*

11.2.2 Repérage dans l'espace

Définition 11.3. On appelle *repère* dans l'espace tout quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O constitué un point origine et les trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ une base.

Théorème 11.3. *$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.*

1. *Pour tout point M il existe un unique triplet de nombre $(x, y, z)\in \mathbb{R}$tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les trois réels uniques (x, y, z) sont appelés coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. x correspond à l'abscisse, y à l'ordonnée et z à la cote.*

2. *Le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit orthonormal si, et seulement si, $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$ et $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ 2 à 2 orthogonaux.*

Propriété 11.1. *Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$*

1. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées (x,y,z) et (x',y',z'), alors*
   - *Pour tout $k \in \mathbb{R}$ $k\vec{u}$ a pour coordonnées (kx,ky,kz).*
   - *Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x',y+y',z+z')$.*
2. *Si A et B ont pour coordonnées (x_A,y_A,z_A) et (x_B,y_B,z_B), alors,*
   - *Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_A-x_B, y_A-y_B, z_A-z_B)$*
   - *Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2})$.*

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et
$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$

11.2.3 Représentation paramétrique

Paramétrage d'un droite. Soit une droite (Δ) définie par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$. La droite (Δ) admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'un plan. Soit un plan $\wp$ définie par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et deux vecteurs non colinéaire $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$. La plan $\wp$ admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$\wp : \begin{cases} x = x_A + at + \alpha s \\ y = y_A + bt + \beta s \\ z = z_A + ct + \gamma s \end{cases} \qquad (t,s) \in \mathbb{R}.$$

11.3 Produit Scalaire

Définition 11.4. On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$, le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace on a alors :
   - $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{v}+\vec{u}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$ (*identité remarquable*)
   - $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ (*expression trigonométrique*)
2. Si dans un plan $\wp$, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :
   $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ (*Expression à l'aide de projections*)
3. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
   $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ (*expression analytique*)

Théorème 11.4. *$\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et a et b deux nombres.*
• $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ • $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ • $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab).(\vec{u}.\vec{v})$.

11.3.1 Orthogonalité dans l'espace

Vecteur orthogonaux.

Définition 11.5. Dans l'espace , dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nul sont *orthogonaux* signifie que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Théorème 11.5.

a) *Deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.*
b) *Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.*

Vecteur à un plan. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ non nul, est normal à un plan $\wp$ signifie que la droite (AB) est perpendiculaire à ce plan $\wp$.

Remarque 11.2. Tout vecteur $\vec{n}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur normal à ce plan $\wp$.

Orthogonalité d'une droite et d'un plan. Le plan $\wp$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est un ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Remarque 11.3. Pour qu'une droite Δ et un plan $\wp$ soient perpendiculaires, il suffit que Δ soit orthogonale à deux droites sécantes de $\wp$.

Plans perpendiculaires. Deux plans $\wp_1$ et $\wp_2$ de vecteur normal respective n_1 et n_2 sont perpendiculaire si, et seulement si, $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$.

11.3.2 Équation cartésienne du plan

Théorème 11.6. *Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*

• *Tout plan $\wp$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme : $ax+by+cz+d = 0$ $d \in \mathbb{R}$.*

• *Réciproquement si a, b et c sont trois nombres donnés non tous nuls, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.*

Remarque 11.4. Pour trouver, dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un plan dont on connait un point A et un vecteur normal $\vec{n}$, il suffit d'exprimer l'égalité $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ à l'aide des coordonnées de A et de $\vec{n}$.

Distance d'un point à un plan. Soit A un point de l'espace et (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$. La distance de A à (P) est $d(A, P) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{||\vec{n}||}$ (M étant un point quelconque de P). Si le point A a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) et le plan (P) à pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors $d(A, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Positions relatives d'une droite et d'un plan . Si D est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\wp$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$:
• Si $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$ alors $\wp$ et D sont sécants en un point.
• Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors la droite D est strictement parallèle à $\wp$ ou incluse dans $\wp$: A étant un point quelconque de D :
- Si $A \in \wp$ alors la droite D est incluse dans le plan.
- Si $A \notin \wp$ alors la droite D est strictement parallèle au plan $\wp$.

Positions relatives de deux plans $\wp$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\wp'$ est un plan de vecteur normal $\vec{n'}$:
• Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires les plans $\wp$ et $\wp'$ sont strictement parallèles ou confondus A étant un point quelconque de $\wp$ alors :
- Si $A \in \wp'$ alors les plans $\wp$ et $\wp'$ sont confondus.
- Si $A \notin \wp'$ alors les plans $\wp$ et $\wp'$ sont strictement parallèles.
• Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires les plans $\wp$ et $\wp'$ sont sécants leur intersection est une droite D.

Application 6. *L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(-1, 2, 0), B(1, 2, 4)$ et $C(-1, 1, 1,)$.*

1. a) *Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.*
   b) *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.*
   c) *Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré*
2. *Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$*
   a) *Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).*
   b) *Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).*
3. *Soient P_1 le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$ et p_2 le plan passant par O et parallèle au plans d'équation $x - 2z + 6 = 0$.*
   a) *Démontrer que le plan P_2 a pour équation $x = 2z$.*
   b) *Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.*
   c) *Soit la droite D passant passe par $A(2, -4, 1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(0, -3, 0)$.*
   Déterminer l'équation paramétrique de la droite D et Démontrer que D est la droite d'intersection des plans P_1 et P_2.
4. *Démontrer que la droite D coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.*

Solution Application 6.

1. a) *A, B et C sont aligné si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.*
   Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2, 0, 4)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(0, -1, 1)$. On a en particulier $-1 = 0k$ (en analysant la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4$.

c) $AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ *et* $AC = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. *Comme* $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{2}{\sqrt{10}}$, *donc* $\widehat{BAC} = 51°$ *(on utilise la calculatrice).*

2. *a) Les points* A, B *et* C *ne sont pas alignés et donc les points* A, B *et* C *définissent un unique pan, le plan* (ABC). $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 4 \times (-1) = 0$ *et* $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0 \times 2 + (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = 0$. *Le vecteur* $\vec{n}$ *est orthogonal aux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan* (ABC). *Donc, le vecteur* $\vec{n}$ *est un vecteur normal au plan* (ABC).

   b) Le plan (ABC) *est le plan passant par* $A(-1, 2, 0)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}(2, -1, -1)$. *Une équation cartésienne du plan* (ABC) *est*
   $2(x + 1) - (y - 2) - (z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z + 4 = 0$

3. *a) Un vecteur normal au plan* P'_2 *d'équation* $x - 2z + 6$ *est le vecteur* $\vec{n}_2$ *de coordonnées* $(1, 0, -2)$. *Puisque* P_2 *est parallèle à* $P'_2, \vec{n}_2$ *est encore un vecteur normal au plan* P_2. *Ainsi,* P_2 *est le plan passant par* $O(0, 0, 0,)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}_2(1, 0, -2)$. *Une équation cartésienne de* P_2 *est donc* $x - 2z \Leftrightarrow x = 2z$.

   b) Un vecteur normal au plan P_1 *d'équation* $3x+y-2z = 0$ *est le vecteur* $\vec{n}_1$ *de coordonnées* $(3, 1, -2)$. *Les vecteurs* $\vec{n}_1$ *et* $\vec{n}_2$ *ne sont pas colinéaires et donc les plans* P_1 *et* P_2 *ne sont pas parallèles. Par suite, les plans* P_1 *et* P_2 *sont sécants en une droite.*

   c) Équations paramétriques de la droite D : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

   Comme P_1 *et* P_2 *sont sécants en une droite, il suffit de vérifier que tout point de* D *est un point de* $P_1 \cap P_2$. *Soit* $M(2t, -4t-3, t), t \in \mathbb{R}$ *un point de la droite* D. $3x_M + y_M - 2z_M = 3(3t) + (-4t - 3) - 2(t) + 3 = 6t - 4t - 3 - 2t + 3 = 0$ *et donc* M *appartient à* P_1. *De même,* $x_M - 2z = (2t) - 2(t) = 0$ *et donc* M *appartient à* P_2. *Ainsi, tout point de* D *appartient à* P_1 *et* P_2 *et donc* $P_1 \cap P_2$ *est la droite* D.

4. *Soit* $M(2t, -4t-3, t), t \in \mathbb{R}$, *un point de la droite* D. $M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(2t)-(-4t-3)-t+4 = 0 \Leftrightarrow 7t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -1$. *Quand* $t = -1$, *on obtient le point* I *de coordonnées* $(-2, 1, -1)$. *Le points* I *est le point d'intersection des plans* $(ABC), P_1$ *et* P_2.

11.4 Exercice

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 11.4.1.

1. *Dans chacun des cas suivants, précisez su* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*
   a) $\vec{u}(2, 1, -3)$ *et* $\vec{v}(1, 2, 2)$
   2. $\vec{u}(14, -24.5, 17.5)$ *et* $\vec{v}(-4, 7, -5)$
2. *On donne les points* $A(1, -1, 2)$, $B(0, 5, 3)$ *et* $C(4, -19, -1)$. *Ces points sont-il alignés ?*
3. *Existe-t-il des valeurs de* a *et* b *pour lesquelles les points* $A(1, 0, -3)$, $B(-3, 2, 1)$ *et* $C(a, b, 5)$ *sont alignés ?*

4. *Déterminer les nombres a et b pour lesquels les vecteur $\vec{u}(-2, a, -5)$ et $\vec{c}(4, -6, b)$ sont colinéaires.*
5. *On donne les points $A(5, 2, 1), B(7, 3, 1), C(-1, 4, 5)$ et $D(-3, 3, 5)$. Le quadrilatère $ABCD$ est-il parallélogramme ?*

Exercice 11.4.2.

1. *Les points $A(2, 0, 1), B(1, 2, 0), C(8, -4, 1)$ et $D(1, 12, -3)$ sont-il coplanaires.*
2. *Quelle relations doivent vérifier x, y, z pour que les points $A(3, 2, 1), B(1, 2, 0), C(3, 1, -2)$ et $D(x, y, z)$ soient dans le même plan.*
3. *On donne les vecteurs $\vec{u}(0, -1, 1), \vec{v}(-2, -1, 3)$ et $\vec{w}(-1, -1, -1)$. Le triplet ($\vec{u}c\vec{v}, \vec{w}$) est-il une base des vecteurs de l'espace ?*

Exercice 11.4.3. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).*
On considère les points $A(1, 0, 2), B(0, 0, 1)$ et $C(0, -1, 1)$.

1. *Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.*
2. a) *Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.*
   b) *En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.*
3. a) *Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$, puis AB et BC.*
   b) *En déduire la nature exacte du parallélogramme $ABCD$.*
4. a) *Calculer la distance d en unité de longueur du point O au plan P passant par A, B et C.*
   b) *Calculer le volume V en unité de volume de la pyramide de sommet 0 et de base $ABCD$.*

Exercice 11.4.4. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :*
• *Les points $A(0, 1, -1)$ et $B(-2, 2, -1)$.*
• *La droite de représentation graphique* $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}$

1. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).*
2. *Montrer que les droites (AB) et D ne sont ni parallèles, ni sécantes.*
   Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel. On considère le point M de la droite D de coordonnées $(-2 + u, 1 + u, -1 - u)$.
3. *Vérifier que le plan P d'équation $x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à la droite D et passe par le point M.*
4. *Montrer que le plan P et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4 + 6u, 3 - 3u, -1)$.*
5. a) *Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite D.*
   b) *Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?*
6. a) *Exprimer MN^2 en fonction de u.*
   b) *En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.*

Exercice 11.4.5. *L'espace est muni d'un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère deux droites d_1 *et* d_2 *définies par les représentations paramétriques :* $d_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ *et* $d_2 : \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

On admet que les droites d_1 *et* d_2 *sont non coplanaires.*

1. *Vérifier que le point* $A(2,3,0)$ *appartient à la droite* d_1.
2. *Donner un vecteur directeur* $\vec{u}_1$ *de la droite* d_1 *et un vecteur directeur* $\vec{u}_2$ *de la droite* d_2. *Les droites* d_1 *et* d_2 *sont-elles parallèles ?*
3. *Vérifier que le vecteur* $\vec{v}(1,-2,-3)$ *est orthogonal aux vecteurs* $\vec{u}_1$ *et* $\vec{u}_2$.
4. *Soit* P *le plan passant par le point* A, *et dirigé par les vecteurs* $\vec{u}_1$ *et* $\vec{v}$.
   a) *Montrer qu'une équation cartésienne du plan* P *est :* $5x+4y-z-22=0$.
   b) *Déterminer les coordonnées du point* B *intersection de la droite* d_2 *et du plan* P.
5. *On considère maintenant la droite* Δ *dirigée par le vecteur* $\vec{v}(1,-2,-3)$, *et passant par le point* $B(3,3,5)$.
   a) *Donner une représentation paramétrique de cette droite* Δ.
   b) *Les droites* d_1 *et* Δ *sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.*
   c) *Montrer que la droite* Δ *est à la fois sécante avec les deux droites* d_1 *et* d_2 *et orthogonale à ces deux droites.*

Exercice 11.4.6. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit S *l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *tels que* $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-10=0$ *et soit les points* $A(1,1,1), B(-1,1,3)$ *et* $C(5,4,-6)$.

1. *Montrer que* S *est une sphère dont on précisera le centre* I *et le rayon* R.
2. a) *Montrer que* A, B *et* C *déterminent un plan* P.
   b) *Vérifier qu'une équation de* P *est :* $x+y+z-3=0$.
3. a) *Montrer que l'intersection de* S *et* P *n'est pas vide.*
   b) S *coupe donc* P *suivant un cercle* C *de centre* J *et de rayon* r.

   On rappelle que J *est le projeté orthogonal de* I *sur le plan* P.
   Déterminer les coordonnées de J *et calculer* r.
4. *Soit le plan* Q *d'équation* $2x-y+2z+13=0$.
   Montrer que le plan Q *est tangent à la sphère* S *au point* $H(\frac{-5}{3},\frac{1}{3},\frac{-14}{3})$.

Exercice 11.4.7. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1. *On considère le plan* P *passant par le points* $B(1,-2,1)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}(-2,1,5)$ *et le plan* R *d'équation* $x+2y-7=0$.
   a) *Démontrer que les plans* P *et* R *sont perpendiculaire.*
   b) *Démontrer que l'intersection des plans* P *et* R *est la droites* Δ *passant par le point* $C(-1,4,-1)$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}(2,-1,1)$.

c) *Soit le point $A(5, -2, -1)$, calculer la distance du point A aux plans P et R.*

d) *Déterminer la distance du point A à la droite Δ.*

2. a) *Soit pour tout nombre réel t, le point M_t, de coordonnées $(1 + 2t, 3 - t, t)$.*
Déterminer en fonction de t la longueur AM_t. On note $\phi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) *Étudier le sens de variation de ϕ sur $\mathbb{R}$, préciser son minimum.*

c) *Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.*

Exercice 11.4.8. *On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.*

1. a) *Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.*

b) *En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.*

c) *Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.*

d) *Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).*

2. *Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Déduire de 1.a) que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) ; préciser la position du point I sur le segment $[AG]$.*

3. *Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.*

a) *Écrire une équation du plan (BDE).*

b) *Écrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).*

c) *Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite Δ avec le plan (BDE).*

d) *Calculer $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}$.*

e) *En déduire la distance du point H au plan (BDE), puis le volume du tétraèdre $HBDE$.*

Volume du tétraèdre : $V = \frac{1}{3}b \times h$ où b est la surface de base et h la hauteur.