Звіт
про виконання завдання з самостійної роботи
з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика»
тема «Послідовності незалежних випробувань»
студентом Стовба П.В. (група КН-22)
в 2023-2024 навчальному році
за індивідуальним варіантом даних №21

Завдання 1. Фабрика випускає 80 % продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що із 350 виробів, виготовлених фабрикою, кількість першосортних виробів буде: а) 200 виробів; б) 200 – 220; в) не більше 80.

Розв'язок

а) оскільки відомо точну кількість виробів, доцільно буде використати локальну теорему Лапласа.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях з ймовірністю появи події А рівній р (0<p<1) подія А наступить рівно k разів (байдуже в якій послідовності) визначається за наближеною формулою:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi(x), \text{де}$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}} -$ функція Гауса,

$x = \frac{k - n * p}{\sqrt{npq}} -$ аргумент функції Гауса

Отже, у нашому випадку: *k=200, n=350, p=0.8, q=1-p=0.2*

Спочатку обчислимо $\varphi(x)$ за формулою аргумента, а потім знайдемо табличне значення локальної теореми Лапласа

$$x = \frac{200 - 350 * 0.8}{\sqrt{350 * 0.8 * 0.2}} = -10,69.$$

Беремо значення функції Гауса з таблиці та підставляємо у локальну формулу Лапласа : $\varphi(10{,}69) = 0$, адже значення функції Гауса при всіх значеннях x > 4 рівне 0.

Отже:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{350 * 0.8 * 0.2}} * 0 = 0.$$

б) оскільки кількість разів появи події А серед n випробувань (першосортних виробів) коливається від 200 до 220, то можна скористатися інтегральною теоремою Лапласа.

Інтегральна теорема Лапласа. *Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події рівна p (0<p<1), подія наступить не менше k_1 разів і не більше k_2 разів приблизно рівна*:

$$P(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислимо x' та x'':

$$x' = \frac{200 - 350 * 0.8}{\sqrt{350 * 0.8 * 0.2}} = -10,69.$$

$$x'' = \frac{220 - 350 * 0.8}{\sqrt{350 * 0.8 * 0.2}} = -8,01.$$

Оскільки значення обох аргументів більше за 5 (тобто, за максимальне значення інтегральної функції Лапласа), то беремо значення функції = 0.5

Отже , шукана ймовірність: P(200, 220) = $\Phi(x'')$ – $\Phi(x')$ = 0.

в) використаємо інтегральну формулу Лапласу. Значення коливається від 0 до 80 (хоча такого , що не буде жодної першосортної деталі практично неможливо. Але для того, щоб розв'язати цю задачу за інтегральною теоремою Лапласа необхідно мати два значення k_1 і k_2, беремо як друге значення 0).

Отже:

$$x' = \frac{0 - 350 * 0.8}{\sqrt{350 * 0.8 * 0.2}} = -37,41.$$

$$x'' = \frac{80 - 350 * 0.8}{\sqrt{350 * 0.8 * 0.2}} = -26,72.$$

Обидва значення знову більше за 5, тому P(0, 80) = $\Phi(x'')$ – $\Phi(x')$ = 0.

Висновок: у ситуаціях коли формула Бернуллі не спрацьовує можна використати локальну або інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

Завдання 2. Серед великої кількості мікросхем, що знаходяться в комплекті, 13% – нестандартні. Знайти ймовірності того, що серед 4 мікросхем, навмання взятих із комплекту, буде:

а) тільки одна нестандартна;

б) принаймні одна нестандартна.

Розв'язок

а) оскільки відомо ймовірність нестандартної деталі, а також що взяли навмання 4 мікросхеми, то лише одна буде нестандартною, а інші стандартними (як протилежна подія). Отже, ймовірність того, що буде тільки одна нестандартна деталь:

$$P(A) = p * q = 0.13 * (1 - 0.13)^3 = 0.13 * 0.87^3 = 0.0856$$

б) q – ймовірність появи стандартної мікросхеми. Щоб знайти ймовірність появи принаймні однієї нестандартної схеми, необхідно знайти ймовірність того, що чотири деталі будуть стандартні, а потім за формулою протилежних подій від 1 відняти ймовірність появи двох стандартних деталей. Отже:

$$P(B) = 1 - q^4 = 1 - 0.87^4 = 0.427102$$

Висновок: для вирішення задачі достатньо було скористатись теоремою множення ймовірностей.

Завдання 3. Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на станцію протягом години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірності того, що протягом години на телефонну станцію зателефонують:

а) 4-ох абонентів;

б) не більше 3-ох абонентів.

Розв'язок

а) оскільки загальна кількість випробувань велика (2000), а значення ймовірності дуже маленьке(p=0.001), то скористаємось формулою Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k * e^{-\lambda}}{k!},$$

де $\lambda = n * p$.

За умовою, $\lambda = n * p = 2000 * 0.001 = 2$, k = 4. Отже, ймовірність того, що протягом години на телефонну станцію зателефонують двоє клієнтів:

$$P_{2000}(4) = \frac{2^4 * e^{-2}}{4!} = 0.09022.$$

б) оскільки необхідно знайти ймовірність, того що зателефонують не більше 3 клієнтів, і ці події не відбудуться одночасно, то скористаємось сумою подій. Події, які нас влаштовують: $P_{1000}(0), P_{1000}(1), P_{1000}(2), P_{1000}(3)$. Знайдемо ймовірності цих подій:

$$P_{2000}(0) = \frac{2^0 * e^{-2}}{0!} = 0,1353.$$

$$P_{2000}(1) = \frac{2^1 * e^{-2}}{1!} = 0,2706.$$

$$P_{2000}(2) = \frac{2^2 * e^{-2}}{2!} = 0,2706.$$

$$P_{2000}(3) = \frac{2^3 * e^{-2}}{3!} = 0,1804.$$

Отже, ймовірність того, що на станцію зателефонують не більше 3-ох клієнтів:

$$P(k \leq 3) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = 0,8569$$

Висновок: при великих значеннях випробувань та дуже маленьких значеннях ймовірності необхідно використовувати формулу Пуассона.