МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ІМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації щодо виконання
індивідуального завдання

Черкаси 2020

УДК 519.2
ББК 22.171

Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика: Методичні рекомендації щодо виконання індивідуального завдання / Уклад.: Г.В. Косенюк. – Черкаси: ЧНУ ім. Богдана Хмельницького, 2020. – 84 с.

© Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, 2005
©Косенюк Г.В., 2005

ВСТУП

Математична статистика – наука, яка вивчає методи обробки результатів спостережень масових випадкових явищ, які володіють статистичною стійкістю і закономірністю, з метою виявлення цієї закономірності. Висновки про закономірності, яким підпорядковані явища, що вивчаються методами математичної статистики, завжди ґрунтуються на обмеженому вибірковому числі спостережень. При більшому числі спостережень ці висновки можуть виявитися іншими. Для винесення точнішого висновку про закономірності явища математична статистика спирається на теорію ймовірностей, яка має справу з теоретичними моделями випадкових явищ.

Обробивши результати спостережень, дослідник висуває ряд гіпотез (припущень) про те, що явище, яке розглядається, можна описати тією або іншою ймовірнісною теоретичною моделлю. Далі, використовуючи математично-статистичні методи, можна дати відповідь на питання, яка з гіпотез або моделей є прийнятною. Саме ця модель і вважається закономірністю явища, що вивчається. Наскільки коректні такі висновки, покаже практика використання вибраної моделі.

З метою закріплення та поглиблення теоретичних знань, набутих при вивченні дисципліни, а також закріплення практичних навичок в обробці результатів статистичних спостережень, в навчальний план включене індивідуальне завдання, яке студенти виконують у ІІІ семестрі.

Робота передбачає статистичну обробку результатів спостережень в обсязі, який визначається програмою дисципліни.

Перед виконанням роботи необхідно уяснити, як обробити вихідну статистичну інформацію, щоб одержати обґрунтовані інженерні висновки. Необхідно з’ясувати доцільність і можливість використання комп'ютерної техніки.

Одержані числові результати розрахунків потрібно проаналізувати і на їх основі зробити висновки пізнавального або практичного характеру.

Необхідно звернути увагу на оформлення індивідуального завдання згідно з вимогами державних стандартів.

Захист виконаної роботи відбувається публічно (у присутності студентів курсу). Для захисту студент готує презентацію в редакторі Power Point (8-10 слайдів), куди виносить основні положення роботи і отримані результати. Оцінка виставляється після представлення роботи і відповідей на запитання викладача і присутніх на захисті студентів. Критерії оцінювання роботи наведені в розділі 4. Орієнтовні запитання до захисту надані в додатку 10.

В методичних рекомендаціях дається основний теоретичний матеріал, яким студенту необхідно оволодіти для виконання індивідуального завдання. Приклади, що ілюструють теоретичний матеріал, запозичені, зокрема, із таких підручників:

1. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 6-е доп. - М.: Высш. шк., 2002. – 405 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. - 9-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.
3. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.

1. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання є однаковим для всіх студентів. Для статистичної обробки кожному студенту пропонуються дві вибірки – *X* та *Y*, які наведені в ***додатку 1***. Пару вибірок *X* та *Y* студент вибирає згідно з його порядковим номером у журналі академічної групи.

До початку роботи над індивідуальним завданнямстудент оформляє завдання на виконання роботи (форма завдання наведена в ***додатку 9***), роздрукувати на аркуші А4 з обох сторін і надати на підпис керівнику.

ЗАВДАННЯ

На виході двох ідентичних систем автоматичного керування технологічними процесами встановлені реєстратори, які записують відхилення в часі вихідного параметру системи від заданого значення. При якісній роботі системи це відхилення повинно дорівнювати нулю, але за рахунок впливу на систему дії випадкових факторів воно виявляється відмінним від нуля. Розсіювання відхилень від нуля для обох систем однакове, якщо системи ідентичні і працюють в однакових умовах.

Для аналізу роботи систем із записів реєстраторів зроблені вибірки *X* та *Y* однакового об’єму. Є підстави припустити, що відхилення вихідного параметру кожної із систем від заданого розподілені нормально. Оскільки системи працюють незалежно одна від одної, то вибірки незалежні.

Для кожної з вибірок необхідно:

1) побудувати гістограми частот;

2) за вибірками з генеральних сукупностей *X* і *Y* побудувати нормальні криві;

3) перевірити гіпотези про нормальний розподіл генеральних сукупностей *X* та *Y*, використовуючи критерій погодженості Пірсона;

4) знайти оцінки математичних сподівань і дисперсій генеральних сукупностей;

5) оцінити невідомі математичні сподівання *M[X]* і *M[Y]* генеральних сукупностей *X* і *Y* за допомогою довірчого інтервалу з надійністю 0,95;

6) перевірити гіпотезу про рівність нулю математичних сподівань генеральних сукупностей X і Y;

7) запропонувати просту гіпотезу про рівність дисперсій генеральних сукупностей $H_0 : D(X) = D(Y)$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : D(X) \neq D(Y)$. Прийняти рівень значущості $\alpha = 0{,}1$. Перевірити запропоновану гіпотезу;

8) оцінити відхилення емпіричного розподілу від нормального;

9) за одержаними результатами обробки даних вибіркових сукупностей для кожної із генеральних сукупностей представити ймовірнісну теоретичну модель;

10) зробити висновки про роботу систем автоматичного керування.

Для автоматизації обчислень та побудови графіків використати доцільно використати відповідні програми (MS Exel, Statistica). Посилання на використання прикладних програм навести в тексті роботи.

По кожному пункту завдання зробити висновки щодо статистичних характеристик досліджуваних відхилень, отриманих у даному пункті, та їх відповідності показникам роботи систем.

2. РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

2.1. Побудова гістограм частот

Для наочного зображення статистичного розподілу використовують різні графіки, зокрема, полігон і ***гістограму***.

Гістограму будують у випадку неперервної ознаки, що вивчається. Для цього інтервал, на якому знаходяться всі значення ознаки, що спостерігаються, розбивають на декілька часткових інтервалів довжиною h і для кожного інтервалу знаходять суму частот n_i варіант, що попали в i-й інтервал.

Для побудови інтервального ряду необхідно визначити довжину часткових інтервалів, на які розбивається весь інтервал значень ознаки випадкової величини, що спостерігається. Вважаючи, що всі часткові інтервали мають одну і ту ж саму довжину, для кожного інтервалу потрібно встановити його верхню і нижню границі, а далі згідно з отриманою сукупністю часткових інтервалів згрупувати результати спостережень.

Довжину часткового інтервалу h потрібно вибирати так, щоб побудований ряд не був занадто громіздким і в той же час дозволяв виявити характерні риси зміни значень випадкової величини, тобто характерні ознаки явища, що вивчається.

Розбиття інтервалу зміни значень ознаки випадкової величини на часткові інтервали здійснюється так.

Визначається розмах варіації R

$$R=X_{max}-X_{min}$$

Далі вибирається число часткових інтервалів N. Для того, щоб згрупований ряд був не занадто громіздким, число інтервалів N вибирають від семи до одинадцяти. Кількість часткових інтервалів точніше визначається за формулою Стреджеса:

$$N=1+3{,}322\ \lg n,$$

де n – число варіант вибіркової сукупності.

Далі визначається довжина часткового інтервалу

$$h=\frac{R}{N}=\frac{R}{1+3.322\lg n}.$$

За початок першого інтервалу рекомендується брати величину

$$X_{поч}=X_{min}-0,5h.$$

Верхня границя останнього інтервалу $X_{кінц}$ повинна задовольняти вимогу

$$(X_{кінц}-h) \le X_{max} < X_{кінц}.$$

Проміжні інтервали отримують, додаючи до кінця попереднього інтервалу довжину часткового інтервалу h.

Далі необхідно визначити інтервальні частоти, тобто кількість значень ознаки, що попали в кожний частковий інтервал. При цьому в інтервал включаються значення випадкової величини більші або рівні нижній границі і менші верхньої границі.

Гістограмою частот називають сходинкову фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ (густина частоти). Площа часткового i-го прямокутника дорівнює $h\frac{n_i}{h}=n_i$ – сумі частот варіант, що попали в i-й інтервал. Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки n.

Приклад.

Побудувати гістограму частот за даним розподілом вибірки обсягом n=100 (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Номер інтервалу, i	Частковий інтервал, $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу, n_i	Густина частоти, $\frac{n_i}{h}$
1	2	3	4
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5,0
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3,0
5	17-21	8	2,0

Розв'язання.

Довжина кожного часткового інтервалу $h = x_{i+1} - x_i = 9 - 5 = 4.$

У четвертий стовпець табл. 2.1 впишемо значення густин частот $\frac{n_i}{h}$.

Побудуємо на осі абсцис задані інтервали довжиною h=4. Проведемо над цими інтервалами відрізки, паралельні осі абсцис, які знаходяться від неї на відстанях, рівних відповідним густинам частоти $\frac{n_i}{h}$. Наприклад, над інтервалом (1, 5) побудуємо відрізок, паралельний осі абсцис, на відстані $\frac{n_i}{h} = \frac{10}{4} = 2{,}5$. Аналогічно побудуємо інші відрізки.

Побудована гістограма зображена на рис. 2.1.

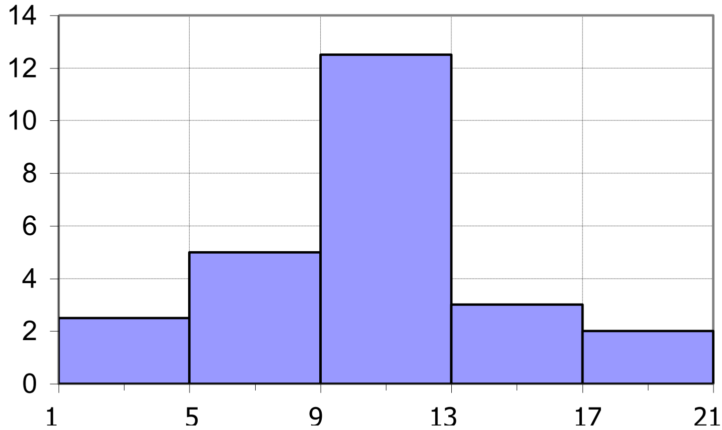

Рис. 2.1. Гістограма частот

Література: [1, с. 151-154; 2, с.194-196].

2.2. Знаходження точкових оцінок математичних сподівань і дисперсій генеральних сукупностей

Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу можна знайти декількома методами. Один із них – ***метод найбільшої правдоподібності***, який зводиться до знаходження максимуму функції одного або декількох аргументів (параметрів).

Нехай X – неперервна випадкова величина, яка в результаті n випробувань прийняла значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо, що густини розподілу ймовірностей – функція $f(x)$ – задана, але не відомий параметр θ, яким визначається ця функція.

Функцією правдоподібності неперервної випадкової величини X називають функцію аргументу θ

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot .... \cdot f(x_n; \theta) \cdot$$

Якщо густина розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X визначається двома невідомими параметрами θ_1 і θ_2, то функція правдоподібності є функцією двох незалежних аргументів θ_1 і θ_2:

$$L = f(x_1; \theta_1, \theta_2) \cdot f(x_2; \theta_1, \theta_2) \cdot .... \cdot f(x_n; \theta_1, \theta_2).$$

Оцінкою найбільшої правдоподібності параметра θ називається таке його значення θ^*, при якому функція правдоподібності досягає максимуму.

Функції L і $\ln L$ досягають максимуму при одному і тому ж значенні θ, тому замість знаходження максимуму функції L знаходять максимум функції $\ln L$, що значно зручніше.

Логарифмічною функцією правдоподібності називають функцію $\ln L$.

Точку максимуму функції $\ln L$ аргументу θ можна знайти таким чином :

1. Знайти похідну $\dfrac{d(\ln L)}{d\theta}$.

2. Знайдену похідну прирівняти до нуля і знайти критичну точку θ^* - корінь отриманого рівняння. Це рівняння називають ***рівнянням правдоподібності***.

3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2(\ln L)}{d\theta^2}$. Якщо друга похідна при $\theta = \theta^*$ від'ємна, то θ^* – точка максимуму.

Знайдену точку максимуму θ^* приймають за оцінку найбільшої правдоподібності параметра θ.

Якщо густина розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X визначається двома невідомими параметрами θ_1 і θ_2, то знаходять логарифмічну функцію правдоподібності і для знаходження її максимуму складають і розв'язують систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\ln L)}{\partial\theta_1} = 0, \\ \dfrac{\partial(\ln L)}{\partial\theta_2} = 0. \end{cases}$$

Приклад.

Знайти методом найбільшої правдоподібності оцінки параметрів a і σ нормального розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

якщо в результаті n випробувань величина X прийняла значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Розв'язання.

Складемо функцію правдоподібності, враховуючи, що $\theta_1 = a,\ \theta_2 = \sigma$.

$$L = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Звідси отримуємо

$$L = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Знайдемо логарифмічну функцію правдоподібності

$$\ln L = -n\ln\sigma + \ln\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} - \frac{\sum(x_i - a)^2}{2\sigma^2}.$$

Знайдемо часткові похідні по a і по σ:

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial a} = \frac{\sum x_i - na}{\sigma^2}; \quad \frac{\partial(\ln L)}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum(x_i - a)^2}{\sigma^3}.$$

Прирівнявши часткові похідні до нуля отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\sum x_i - na}{\sigma^2} = 0, \\ -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{\sum(x_i - a)^2}{\sigma^3} = 0, \end{cases}$$

розв`язавши яку відносно a і σ^2, отримаємо:

$$a = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}_в; \;\; \sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x}_в)^2}{n} = D_в.$$

Таким чином, шукані оцінки найбільшої правдоподібності: $a^* = \bar{x}_в$; $\sigma^* = \sqrt{D_в}$. Необхідно відмітити, що перша оцінка незміщена, а друга зміщена.

Вибіркове середнє $\bar{x}_в$ і вибіркову дисперсію $D_в$ доцільно обчислювати ***методом добутків***, який дає зручний спосіб знаходження умовних моментів різного порядку з рівновіддаленими варіантами.

Для розрахунків доцільно скористуватися розрахунковою таблицею, яка складається так:

1) у перший стовпець таблиці записують вибіркові (початкові) варіанти, розміщуючи їх у зростаючому порядку;

2) у другий стовпець таблиці записують частоти варіант, додають усі частоти і їх суму $\sum n_i$ (обсяг вибірки n) записують у нижню клітинку стовпця ;

3) у третій стовпець записують умовні варіанти $u_i = \dfrac{x_i - C}{h}$, причому в якості фальшивого нуля C вибирають варіанту, яка знаходиться приблизно посередині варіаційного ряду, і приймають h рівним різниці між будь-якими двома

сусідніми варіантами. Практично ж третій стовпець заповнюється так: у клітинці рядка, який містить фальшивий нуль, пишуть 0; в клітинках над нулем пишуть послідовно -1, -2, -3 і т.д., а під нулем – 1, 2, 3 і т.д.;

4) перемножують частоти на умовні варіанти і записують їх добутки $n_i \cdot u_i$ в четвертий стовпець; додавши всі отримані числа, їх суму $\sum n_i \cdot u_i$ розміщують у нижній клітинці стовпця. Доцільно окремо додавати від'ємні числа четвертого стовпця (їх суму A_1 записують у клітинку рядка, який включає фальшивий нуль) і окремо додатні числа (їх суму A_2 записують у передостанню клітинку стовпця). Тоді $\sum n_i u_i = A_1 \cdot A_2$;

5) перемножують частоти на квадрати умовних варіант, і записують їх добутки $n_i \cdot u_i^{\ 2}$ в п'ятий стовпчик; додавши всі отримані числа, їх суму $\sum n_i \cdot u_i^{\ 2}$ розміщують у нижній клітинці стовпця. При обчисленні добутків $n_i \cdot u_i^{\ 2}$ п'ятого стовпця доцільно числа $n_i \cdot u_i$ четвертого стовпця множити на u_i;

6) перемножують частоти на квадрати умовних варіант, збільшених на одиницю, і записують добутки $n_i(u_i+1)^2$ в шостий контрольний стовпець; додавши всі отримані числа, їх суму $\sum n_i(u_i+1)^2$ розміщують у нижній клітинці стовпця. Шостий стовпець служить для контролю обчислень: якщо сума $\sum n_i(u_i+1)^2$ виявиться рівною сумі $\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$ (як і повинно бути згідно з тотожністю $\sum n_i(u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$), то обчислення виконані правильно.

Після того, як розрахункова таблиця заповнена і перевірена правильність обчислень, обчислюють умовні моменти першого і другого порядків:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n}, \qquad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}.$$

Далі обчислюють вибіркові середню і дисперсію за формулами:

$$\bar{x}_в = M_1^* + C, \qquad D_в = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] h^2$$

Приклад.

Знайти методом добутків вибіркові середню і дисперсію такого статистичного розподілу:

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Розв'язання.

Складемо розрахункову табл. 2.2, для чого:

1) запишемо варіанти в перший стовпець;

2) запишемо частоти в другий стовпець і суму частот n=100 помістимо в нижню клітину стовпця;

3) у якості фальшивого нуля *C* виберемо варіанту 11,0, яка розміщена приблизно посередині варіаційного ряду, і розрахуємо умовні варіанти $u_i = \frac{x_i - C}{h}$, де $h = x_{i+1} - x_i = 10{,}4 - 10{,}2 = 0{,}2$. У клітинці третього стовпця, яка належить рядку, що містить фальшивий нуль, пишемо 0. Над цим нулем записуємо послідовно -1, -2, -3, -4, а під нулем – 1, 2, 3, 4, 5;

Таблиця 2.2

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
1	2	3	4	5	6
10,2	2	-4	-8	32	18
10,4	3	-3	-9	27	12
10,6	8	-2	-16	32	8
10,8	13	-1	-13	13	0
11,0	25	0	A_1 = -46		25

Продовження таблиці 2.2

11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36
			A_2=103		
	n=100		$\Sigma\, n_i u_i$ =57	$\Sigma\, n_i u_i^2$=383	$\Sigma n_i(u_i+1)^2$=597

4) добутки частот на умовні варіанти $n_i u_i$ записуємо в четвертий стовпець. Окремо знаходимо суму від'ємних (-46) і додатних (103) чисел. Складемо ці числа і їх суму (57) поміщаємо в нижню клітинку стовпця;

5) добуток частот на квадрати умовних варіант запишемо в п'ятий стовпець. Суму чисел стовпця (383) поміщаємо в нижню клітинку стовпця;

6) добутки частот на квадрати умовних варіант, збільшених на одиницю, записуємо в шостий контрольний стовпець. Суму (597) чисел стовпця поміщаємо в нижню клітинку стовпця.

Виконаємо контроль отриманих результатів:

$$\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 383 + 2\cdot 57 + 100 = 597\,,$$

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597\,.$$

Обчислення виконані правильно.

Обчислимо умовні моменти першого і другого порядків:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0{,}57\,,$$

$$M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 3{,}83 .$$

Обчислимо вибіркові середнє і дисперсію:

Знайдений раніше крок $h = 0{,}2$.

$$\overline{x}_в = M_1^* h + C = 0{,}57 \cdot 0.2 + 11 = 11{,}11 ,$$

$$D_в = \left[M_2^* - \left(M_1^* \right)^2 \right] \cdot h^2 = \left[3{,}83 - (0{,}57)^2 \right] \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}14 .$$

Як уже зазначалось, викладена вище методика розрахунку вибіркових характеристик придатна для випадку рівновіддалених варіант. На практиці, як правило, результати спостережень не є рівновіддаленими числами. В цьому випадку відповідною обробкою значень ознаки, що спостерігаються, можна звести обчислення до випадку рівновіддалених варіант.

З цією метою інтервал, який містить всі значення ознаки, що спостерігаються (початкові варіанти), розбивають на декілька рівних часткових інтервалів (практично, в кожний частковий інтервал повинно потрапити не менше 8-10 початкових варіант). Далі знаходять середини часткових інтервалів, які і створюють послідовність рівновіддалених варіант.

В якості частоти кожної "нової" варіанти (середини часткового інтервалу) приймають загальне число початкових варіант, які попали у відповідний частковий інтервал.

Приклад.

Вибіркова сукупність обсягом *n*=100 задана табл. 2.3. Скласти розподіл рівновіддалених варіант.

Таблиця 2.3

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
1,00	1	1,19	2	1,37	6
1,03	3	1,20	4	1,38	2
1,05	6	1,23	4	1,39	1
1,06	4	1,25	8	1,40	2
1,08	2	1,26	4	1,44	3

Продовження таблиці 2.3

1,10	4	1,29	4	1,45	3
1,12	3	1,30	6	1,46	2
1,15	6	1,32	4	1,49	4
1,16	5	1,33	5	1,50	2

Розв'язання.

Розіб'ємо інтервал 1,00 – 1,50, наприклад, на такі п'ять інтервалів: 1,00 – 1,10; 1,10 – 1,20; 1,20 – 1,30; 1,30 – 1,40; 1,40 – 1,50.

Прийнявши середини часткових інтервалів у якості нових варіант y_i отримаємо рівновіддалені варіанти $y_1 = 1{,}05$; $y_2 = 1{,}15$; $y_3 = 1{,}25$; $y_4 = 1{,}35$; $y_5 = 1{,}45$.

Знайдемо частоту n_1 варіанти y_1:

$$n_1 = 1 + 3 + 4 + 6 + 2 + \frac{4}{2} = 18.$$

Оскільки початкова варіанта 1,10 одночасно є кінцем першого часткового інтервалу і початком другого, частота 4 цієї варіанти ділиться порівну між обома частковими інтервалами.

Знайдемо частоту варіанти y_2:

$$n_2 = \frac{4}{2} + 3 + 6 + 5 + 2 + \frac{4}{2} = 20.$$

Аналогічно обчислимо частоти інших варіант: $n_3 = 25$; $n_4 = 22$; $n_5 = 15$.

В результаті отримаємо такий розподіл рівновіддалених варіант:

y_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
n_i	18	20	25	22	15

В індивідуальному завданні кожна вибірка містить $n = 50$ варіант. Тому спочатку треба побудувати інтервальний ряд, як було показано в п. 2.1, а потім, прийнявши середини часткових інтервалів за „нові" варіанти y_i, отримати розподіл рівновіддалених варіант.

Література: [1, с. 160-174; 2, с. 229-293].

2.3. Інтервальні оцінки

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу.

Нехай за даними вибірки знайдена статистична характеристика θ^*, яка служить оцінкою невідомого параметра θ. Будемо вважати θ сталим числом. Оцінка θ^* тим точніше визначає параметр θ, чим менше абсолютна величина різниці $\theta - \theta^*$. Іншими словами , якщо $\delta > 0$ і $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$, то чим менше δ, тим оцінка точніша. Таким чином, додатне число δ характеризує точність оцінки.

Однак, статистичні методи не дозволяють категорично стверджувати, що оцінка θ^* задовольняє нерівність $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$. Можна лише говорити про імовірність γ, з якою ця нерівність здійснюється.

Надійністю (***довірчою ймовірністю***) оцінки θ за θ^* називають імовірність γ, з якою виконується нерівність $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$.

Зазвичай надійність оцінки задається наперед, причому в якості γ беруть число, близьке до одиниці. Найчастіше задають надійність, що дорівнює 0,95; 0,99; 0,999.

Нехай імовірність того, що $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$ дорівнює γ:

$$P(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta) = \gamma .$$

Замінивши нерівність $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$, рівносильною їй подвійною нерівністю $-\delta < \theta - \theta^* < \delta$, або $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$, маємо

$$P[\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta] = \gamma .$$

Це співвідношення слід розуміти так: ймовірність того, що інтервал ($\theta^* - \delta$, $\theta^* + \delta$) заключає в собі (покриває) невідомий параметр θ, дорівнює γ.

Довірчим називають інтервал ($\theta^* - \delta$, $\theta^* + \delta$), який покриває невідомий параметр із заданою надійністю γ.

Інтервал ($\theta^* - \delta, \theta^* + \delta$) має випадкові кінці, які називають довірчими границями. В різних вибірках отримують різні значення θ^*, отже від вибірки до вибірки будуть змінюватися і кінці довірчого інтервалу, тобто довірчі границі самі є випадковими величинами – функціями від x_1, x_2,..., x_n.

Оскільки випадковою величиною є не параметр θ, що оцінюється, а довірчий інтервал, то правильніше говорити не про імовірність попадання θ в довірчий інтервал, а про імовірність того, що довірчий інтервал покриє θ.

Наприклад, потрібно оцінити невідоме математичне сподівання a за допомогою довірчих інтервалів, якщо кількісна ознака X розподілена нормально, а середнє квадратичне відхилення σ невідоме.

За даними вибірки можна побудувати випадкову величину T (її можливі значення будемо позначати через t):

$$T = \frac{\overline{X} - a}{S / \sqrt{n}},$$

де $\overline{X}$ – вибіркове середнє;
S – „виправлене” середнє квадратичне відхилення;
n – обсяг вибірки.

Ця величина має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями вільності.

Густина розподілу Стьюдента:

$$S(t, n) = B_n \left[1 + \frac{t^2}{n-1} \right]^{-\frac{n}{2}},$$

де $$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Видно, що розподіл Стьюдента визначається параметром n – обсягом вибірки (або, що те ж саме, числом ступенів вільності $k = n-1$) і не залежить від невідомих параметрів a і σ. Ця особливість є значною перевагою цього розподілу.

Оскільки $S(t,n)$ – парна функція від t, ймовірність виконання нерівності $\left|\frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right| < \gamma$ визначається так

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t,n)dt = \gamma .$$

Замінивши нерівність у круглих дужках рівносильною подвійною нерівністю, отримаємо

$$P\left[\left(\overline{X} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right) < a < \left(\overline{X} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right] = \gamma .$$

Отже, користуючись розподілом Стьюдента, ми знайшли довірчий інтервал $\left(\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, який покриває невідомий параметр з надійністю γ. Тут випадкові величини $\overline{X}$ і S замінені невипадковими величинами $\overline{x}$ і s, знайденими за вибіркою. Параметр t_γ знаходимо з таблиці, наведеної в ***додатк*у 2**, за заданими n і γ.

Приклад.

Кількісна ознака генеральної сукупності розподілена нормально. За вибіркою $n = 16$ знайдені вибіркове середнє $\overline{x} = 20{,}2$ і „виправлене” середнє квадратичне відхилення $s = 0{,}8$. Оцінити невідоме математичне сподівання за допомогою довірчого інтервалу з надійністю 0,95.

Розв’язання.

Знайдемо t_γ. Користуючись таблицею значень t_γ (***додаток 2***) за $n = 16$ і $\gamma = 0{,}95$ знаходимо $t_\gamma = 2{,}13$.

Знайдемо довірчі інтервали:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 20{,}2 - 2{,}13 \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 19{,}774 \ ,$$

$$\bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 20{,}2 + 2{,}13 \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 20{,}626 \ .$$

Отже з надійністю 0,95 невідомий параметр a знаходиться в довірчому інтервалі $19{,}774 < a < 20{,}626$.

Література: [1, с. 174-180; 2, с. 213-219].

2.4. Перевірка гіпотези про рівність дисперсій генеральних сукупностей

На практиці задача порівняння дисперсій виникає, коли потрібно порівняти точність приладів, методів вимірювань, інструментів тощо. Очевидно, що прийнятним є той прилад, метод або інструмент, який забезпечить менше розсіювання, результатів, тобто меншу дисперсію. У нашому випадку рівність дисперсій свідчить про те, що системи автоматичного керування ідентичні.

Нехай генеральні сукупності X і Y розподілені нормально. За незалежними вибірками з обсягами n_1 і n_2, взятими із цих сукупностей, знайдені „виправлені” вибіркові дисперсії S_x^2 і S_y^2. Потрібно за „виправленими” вибірковими дисперсіями при даному рівні значущості α перевірити гіпотезу про те, що дисперсії генеральних сукупностей X і Y рівні між собою:

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

Зважаючи на те, що виправлені дисперсії є незміщеними оцінками генеральних дисперсій, тобто

$$M[S_x^2] = D(X)\,, \ M[S_y^2] = D(Y)\,,$$

нульову гіпотезу можна записати так:

$$H_0 : M[S_x^2] = M[S_y^2].$$

Таким чином, потрібно перевірити, чи рівні між собою математичні сподівання виправлених вибіркових дисперсій.

Таке завдання ставиться тому, що зазвичай виправлені дисперсії виявляються різними. Тому виникає питання: суттєво чи несуттєво відрізняються виправлені дисперсії?

Якщо виявиться, що нульова гіпотеза справедлива, тобто генеральні дисперсії однакові, то відмінність „виправлених” дисперсій не значуща і може бути пояснена випадковими причинами.

Якщо виявляється, що нульову гіпотезу слід відхилити, то відмінність „виправлених” дисперсій значуща і не може бути пояснена випадковими причинами, а є наслідком того, що самі генеральні дисперсії різні.

У якості критерію перевірки нульової гіпотези про рівність генеральних дисперсій приймемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої, тобто випадкову величину

$$F_{емп} = \frac{s_Б^2}{s_М^2}.$$

Оскільки від вибірки до вибірки s_x^2 і s_y^2 будуть різними, то їх відношення буде являти собою випадкову величину F, яка має розподіл Фішера-Снедекора зі ступенями вільності $k_1 = n_1 - 1$ і $k_2 = n_2 - 1$, де n_1 – обсяг вибірки, за якою отримана більша дисперсія, n_2 – обсяг вибірки, за якою знайдена менша дисперсія.

Критична область будується залежно від виду конкуруючої гіпотези. При конкуруючій гіпотезі – $H_1 : M[S_x^2] \neq M[S_y^2]$ будують двосторонню критичну область виходячи з вимоги, щоб імовірність попадання критерію в цю область при допущенні справедливості нульової гіпотези дорівнювала прийнятому рівню значущості α (рис. 2.1).

Найбільша потужність (ймовірність попадання критерію в критичну область при справедливості конкуруючої гіпотези) досягається тоді, коли ймовірність попадання критерію в кожний з двох інтервалів критичної області дорівнює $\frac{\alpha}{2}$.

Таким чином, якщо позначити через F_1 ліву границю критичної області і через F_2 – праву, то повинні виконуватись співвідношення $P(F > F_1) = \frac{\alpha}{2}$, $P(F < F_2) = \frac{\alpha}{2}$.

Рис. 2.1. Двостороння критична область

Достатньо знайти критичні точки, щоб знайти саму критичну область: $F > F_1$, $F < F_2$, а також область прийняття нульової гіпотези: $F_2 < F < F_1$.

Праву критичну точку $F_1 = F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2};\ k_1;\ k_2\right)$ знаходять безпосередньо за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора (***додаток 3***) за рівнем значущості $\frac{\alpha}{2}$ і ступенями вільності k_1 і k_2.

Лівих критичних точок ця таблиця не містить, тому що ці точки можна не відшукувати. Достатньо знайти праву критичну точку при рівні значущості, вдвічі меншому заданого, і тоді не тільки ймовірність попадання критерію F в "праву частину" критичної області (тобто правіше F_1) дорівнює $\frac{\alpha}{2}$, але й імовірність попадання цього критерію в "ліву частину" критичної області (тобто лівіше F_2) також дорівнює $\frac{\alpha}{2}$. Оскільки ці події несумісні, то ймовірність попадання критерію в цю двосторонню критичну область буде рівна $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

Таким чином, у випадку конкуруючої гіпотези $H_1: D(X) \neq D(Y)$ достатньо знайти критичну точку $F_1 = F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; \ k_1; \ k_2\right)$.

Усе вищесказане можна сформулювати у вигляді правила.

Правило. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій нормальних сукупностей при конкуруючій гіпотезі $H_1: D(X) \neq D(Y)$, потрібно обчислити емпіричне значення критерію $F_{емп}$, як відношення більшої виправленої дисперсії до меншої

$$F_{емп} = \frac{s_Б^2}{s_М^2}$$

і за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора за рівнем значущості $\frac{\alpha}{2}$ (вдвічі меншим заданого) і числом ступенів вільності k_1 і k_2 (k_1 - число ступенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число ступенів вільності меншої дисперсії) знайти критичну точку $F_{кр}$ $(\frac{\alpha}{2}; k_1, k_2)$. Якщо $F_{емп} < F_{кр}$ – немає підстав відхилити нульову гіпотезу. Якщо $F_{емп} > F_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад.

За двома незалежними вибірками, обсяги яких відповідно дорівнюють n_1=10 і n_2=18, взятими із нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдені виправлені вибіркові дисперсії $s_x^2 = 1{,}23$ і $s_y^2 = 0{,}41$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій $H_0: D(X) = D(Y)$ при конкуруючій гіпотезі H_1: D(X) $\neq$ D(Y).

Розв'язання.

Знайдемо емпіричне значення критерію $F_{емп}$ як відношення більшої виправленої дисперсії до меншої

$$F_{емп} = \frac{1,23}{0,41} = 3.$$

За умовою, конкуруюча гіпотеза має вид $D(X) \neq D(Y)$, тому критична область двостороння.

За таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора (***додаток 3***), за рівнем значущості вдвічі меншим заданого, тобто при $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$, і числом ступенів вільності $k_1 = 10 - 1 = 9$ і $k_2 = 18 - 1 = 17$ знаходимо критичну точку $F_{кр}(0,05; 9,17)=2,50$.

Оскільки $F_{емп} > F_{кр}$, нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій відхиляємо. Іншими словами, вибіркові виправлені дисперсії відрізняються суттєво. Наприклад, якби ці дисперсії характеризували точність двох методів вимірювань, то перевагу варто було б віддати тому методу, який має меншу дисперсію, тобто 0,41.

Література: [1, с. 207-210; 2, с.288-293].

2.5. Побудова нормальних кривих за дослідними даними

Для побудови нормальної кривої необхідно визначити емпіричні і теоретичні (вирівнюючі) частоти.

Емпіричними частотами називають частоти n_i, які фактично спостерігаються.

Вирівнюючими (теоретичними) називають частоти n_i', які знаходяться теоретично (обчисленням):

$$n_i' = nP_i,$$

де n – кількість спостережень;

P_i – ймовірність значення x_i' ознаки, що спостерігається, за умови, що X має визначений розподіл.

У випадку неперервного розподілу ймовірності окремих можливих значень дорівнюють нулю. Тому необхідно побудувати інтервальний ряд, як показано в п. 2.1, а потім замінити його дискретним.

Для заміни інтервального варіаційного ряду дискретним потрібно середнє значення i-го інтервалу прийняти за варіанту x_i , а відповідну інтервальну частоту n_i – за частоту цієї варіанти.

Вирівнюючі частоти неперервного розподілу знаходять із рівності

$$n_i' = nP_i ,$$

де n – кількість випробувань (обсяг вибірки);

P_i – ймовірність попадання випадкової величини X в i-й частковий інтервал, обчислена при припущені, що вона має визначений розподіл.

Якщо випадкова величина X (генеральна сукупність) розподілена нормально, то вирівнюючі частоти знаходять за формулою:

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i), \qquad (1)$$

де n – кількість випробувань (обсяг вибірки);

h – довжина часткового інтервалу;

$\sigma_в$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення;

$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}$;

$\overline{x}_в$ – вибіркове середнє;

x_i – середина i-го часткового інтервалу;

$\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$. Значення функції $\varphi(u)$ наведені в ***додатку 4***.

Нормальну криву за вибірковими даними будують наступним чином:

1) знаходять $\overline{x}_в$ і $\sigma_в$ із застосуванням будь-якого методу;

2) знаходять ординати y_i (вирівнюючі частоти) теоретичної кривої за формулою:

$$y_i = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i);$$

3) будують точки (x_i, y_i) в прямокутній системі координат і з'єднують їх плавною кривою.

Близькість вирівнюючих частот до тих, що спостерігаються, підтверджує правильність припущення про те, що ознака, яка вивчається, розподілена нормально.

Приклад.

Внаслідок групування ознак x_i неперервної випадкової величини X і переходу від інтервального варіаційного ряду до дискретного, отриманий такий розподіл:

варіанти	x_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55
частоти	n_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4

За вибірковими даними побудувати нормальну криву і полігон частот.

Розв'язання.

Скориставшись методом добутків, знайдемо $\overline{x}_в = 34{,}7$, $\sigma_в = 7{,}38$.

Обчислимо вирівнюючі частоти за формулою $n_i' = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i)$, для чого складемо розрахункову табл. 2.4.

Таблиця 2.4

x_i	n_i	$x_i - \overline{x}_в$	$n_i = \frac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}$	$\varphi(u_i)$	$y_i = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i) = 248 \cdot \varphi(u_i)$
15	6	-19,7	-2,67	0,0113	3
20	13	-14,7	-1,90	0,0551	14
25	38	-9,7	-1,31	0,1691	42
30	74	-4,7	-0,63	0,3271	82
35	106	0,3	0,05	0,3984	99
40	85	5,3	0,73	0,3036	76
45	30	10,3	1,41	0,1476	37
50	10	15,3	2,09	0,0449	11
55	4	20,3	2,77	0,0086	2
	n=366				$\Sigma y_i = 366$

Значення функції $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$ наведені в ***додатку 4***. Визначимо довжину часткового інтервалу $h=x_{i+1}-x_i=20-15=5$.

За отриманими даними будуємо нормальну (теоретичну) криву за вирівнюючими частотами і полігон частот (рис. 2.2). Для порівняння обидві криві розміщені на одному графіку.

Порівняння графіків наочно показує, що побудована теоретична крива задовільно відображає результати спостережень.

Для того, щоб впевненіше вважати, що дані спостережень свідчать про нормальний розподіл ознаки, необхідно перевірити статистичну гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

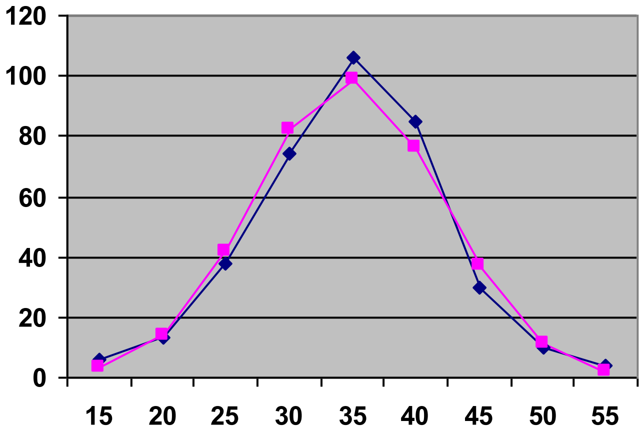

Рис. 2.2. Нормальна крива і полігон частот

Інший спосіб знаходження теоретичних частот при припущенні, що генеральна сукупність розподілена нормально, наводиться нижче.

1. Весь інтервал значень випадкової величини X, що спостерігається, ділять на N часткових інтервалів (x_i, x_{i+1})

однакової довжини. Кількість інтервалів можна вибрати за формулою Стреджеса, як було показано в п. 2.1.

Знаходять середини часткових інтервалів

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

В якості частоти n_i варіанти x_i^* приймають число варіант, які попали в i-й інтервал. В результаті отримують послідовність рівновіддалених варіант і відповідних їм частот:

$$\begin{matrix} x_1^* & x_2^* & \ldots & x_N^* \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_N \end{matrix}$$

При цьому $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$.

2. Обчислюють, наприклад, методом добутків, вибіркову середню $\overline{x}_в^*$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення σ^*.

3. Нормують випадкову величину X, тобто переходять до величини $Z = \frac{X - \overline{x}_в^*}{\sigma^*}$ і обчислюють кінці інтервалів (z_i, z_{i+1}):

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}_в^*}{\sigma^*}, \; z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}_в^*}{\sigma^*},$$

причому, найменше значення Z, тобто z_1, приймають рівним $-\infty$, а найбільше, тобто z_N, приймають рівним ∞.

4. Обчислюють теоретичні ймовірності p_i попадання X в інтервали (x_i, x_{i+1}) за рівністю

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

де $\Phi(z_i)$ – функція Лапласа, значення якої наведені в ***додатку 5***.

5. Знаходять теоретичні частоти $n_i' = np_i$.

Приклад.

Знайти теоретичні частоти за заданим інтервальним розподілом вибірки обсягу n=200, вважаючи, що генеральна сукупність розподілена нормально (табл. 2.5):

Таблиця 2.5

Номер інтервалу	Границі інтервалу		Частота	Номер інтервалу	Границі інтервалу		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				
							n=200

Розв'язання.

1. Знайдемо середини інтервалів $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

Наприклад, $x_1^* = \dfrac{4+6}{2} = 5$. Поступаючи аналогічно, отримаємо послідовність рівновіддалених варіант x_i^* і відповідних їм частот n_i:

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2. Користуючись методом добутків знайдемо вибіркову середню і вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\bar{x}_в^* = 12{,}63, \quad \sigma^* = 4{,}695 .$$

3. Знайдемо інтервали (z_i, z_{i+1}), враховуючи, що $\bar{x}_в^* = 12{,}63$, $\sigma^* = 4{,}695$, $\dfrac{1}{\sigma^*} = 0{,}213$. Для цього складаємо розрахункову табл. 2.6.

4. Знайдемо теоретичні ймовірності p_i і шукані теоретичні частоти $n_i' = np_i$, для чого складемо розрахункову табл. 2.7.

Шукані теоретичні частоти розміщені в останньому стовпці таблиці.

Література [2, с. 249 – 250, с. 333 – 335].

Таблиця 2.6

i	Границі інтервалу		$x_i - \overline{x}^*$	$x_{i+1} - \overline{x}^*$	Границі інтервалу	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x}^*}{\sigma^*}$
1	4	6	-	-6,63	$-\infty$	-1,41
2	6	8	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	-4,63	-2,63	-0,99	-0,156
4	10	12	-2,63	-0,63	-0,156	-0,13
5	12	14	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	-	1,57	∞

Таблиця 2.7

i	Границі інтервалу		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i' = np_i = 200\,p_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
2	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3389	0,0818	1636
3	-0,99	0,156	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	0,156	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,12
5	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64
					$\sum p_i = 1$	$\sum n_i' = 200$

2.6. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральних сукупностей

Перевірка гіпотези про закон розподілу здійснюється за допомогою спеціально підібраної величини – критерію узгодженості.

Існує декілька критеріїв узгодженості: χ^2 ("хі квадрат"), Колмогорова, Смірнова К. Пірсона, тощо. Для перевірки гіпотези про нормальний закон розподілу генеральної сукупності скористаємось критерієм К. Пірсона, перевагою якого є те, що він застосовується не тільки до нормального, але і до інших розподілів. З цією метою будемо порівнювати емпіричні і теоретичні частоти, які, зазвичай, відрізняються. У прикладі, розглянутому в п. 2.5, отримані такі дані:

емпіричні частоти	6	13	38	74	106	85	30	10	4
теоретичні частоти	3	14	42	82	99	76	37	11	2

Виникає питання, чим викликані такі розходження. Це може пояснюватись наступним:

– розходження між частотами випадкове (несуттєве) і пояснюється або недостатнім обсягом вибірки або способом групування числових значень ознаки, або іншими причинами;

– розходження частот не випадкове (суттєве) і пояснюється тим, що теоретичні частоти обчислені виходячи із неправильної гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Критерій Пірсона відповідає на поставлене питання, але він, як і будь-який інший критерій, не доводить справедливість гіпотези, а лише встановлює на прийнятому рівні значущості α її узгодження або неузгодження з даними спостережень.

Таким чином, нехай за вибіркою обсягу n отримано емпіричний розподіл:

варіанти x_i x_1 x_2 ... $x_к$

частоти n_i n_1 n_2 ... $n_к$

Припустимо, що генеральна сукупність розподілена нормально, і, виходячи з цього, обчислені теоретичні частоти n_i'. При рівні значущості α треба перевірити нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена нормально.

У якості критерію перевірки нульової гіпотези приймемо величину

$$\chi^2 = \frac{\sum (n_i - n_i')^2}{n_i'}. \qquad (2)$$

Ця величина випадкова, оскільки в різних дослідах вона приймає різні, наперед невідомі значення. Зрозуміло, що чим менше відрізняються емпіричні і теоретичні частоти, тим менша величина критерію (2) і, отже, він в певній мірі характеризує близькість емпіричного і теоретичного розподілів.

Відмітимо, що піднесенням до квадрату різниць частот усувають можливість взаємного погашення додатних і від'ємних різниць. Діленням на n_i' досягається зменшення кожного із доданків, інакше сума була б настільки велика, що призводила б до відхилення нульової гіпотези навіть тоді, коли вона справедлива.

Закон розподілу випадкової величини χ^2 при $n \to \infty$, незалежно від того, якому закону підпорядкована генеральна сукупність, наближається до закону χ^2 з k ступенями вільності. Тому випадкова величина (2.2) позначена як χ^2, а сам критерій називають критерієм узгодження "хі квадрат".

Число ступенів вільності знаходять з рівності k=s-1-r, де s – число груп (часткових інтервалів) вибірки; r – число параметрів гіпотетичного (запропонованого) розподілу, які оцінюються за даними вибірки.

Зокрема, якщо гіпотетичний розподіл – нормальний, то оцінюють два параметри (математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення), тому $r=2$ і число ступенів вільності $k=s-1-r=s-1-2=s-3$.

Оскільки односторонній критерій "жорсткіше" відхиляє нульову гіпотезу, ніж двосторонній, побудуємо правосторонню критичну область, виходячи із вимоги, щоб імовірність попадання критерію в цю область, у припущенні, що справедлива нульова гіпотеза, дорівнювала прийнятому рівню значущості α:

$$P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha;k)] = \alpha \;.$$

Таким чином, правостороння критична область визначається нерівністю $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha;k)$.

Позначимо значення критерію, обчисленого за даними спостережень, через $\chi^2_{емп}$ і сформулюємо правило перевірки нульової гіпотези.

Правило. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу *H₀*: генеральна сукупність розподілена нормально, потрібно спочатку обчислити теоретичні частоти n'_s, а потім значення критерію за даними вибірки:

$$\chi^2_{емп} = \frac{\sum (n_i - n'_i)^2}{n} \qquad (3)$$

і за таблицею критичних точок χ^2 (***додаток 6***), за заданим рівнем значущості α і числом ступенів вільності k=s-3 знайти критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha;k)$.

Якщо $\chi^2_{емп} < \chi^2_{кр}$ – немає підстав відхилити нульову гіпотезу.

Якщо $\chi^2_{емп} > \chi^2_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Примітка. Обсяг вибірки повинен бути достатньо великим, принаймні не менше 50.

Приклад.

При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні і теоретичні частоти (приклад із п. 2.5):

емпіричні частоти	n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
теоретичні частоти	n'_i	3	14	42	82	99	76	37	13

Рішення.

Обчислимо $\chi^2_{емп}$, для чого складемо розрахункову табл. 2.8.

Знайдемо число ступенів вільності, зважаючи на те, що число груп вибірки (число різних варіант) *s=8*, *k=8-3=5*.

Таблиця 2.8

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	3	3	9	3,00	36	12,00
2	13	14	-1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	-4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	-8	64	0,78	5476	66,68
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	-7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
	366	366			$\chi^2_{емп} =$ =7,19		373,19

Для контролю обчислень формулу (3) перетворимо до виду

$$\chi^2_{емп} = \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n .$$

Обчислене значення критерію $\chi^2_{емп} = 7{,}19$.

$$\sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 373{,}19 - 366 = 7{,}19 .$$

Обчислення виконані правильно.

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (***додаток 6***), за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і числом ступенів вільності *k*=5 знаходимо $\chi^2_{кр}$ (0,05;5)=11,1.

Оскільки $\chi^2_{емп} < \chi^2_{кр}$ – немає підстав відхилити нульову гіпотезу. Іншими словами, розходження емпіричних і теоретичних частот несуттєве. Отже, дані спостережень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Література: [1, с. 251-259; 2, с. 329-332].

2.7. Перевірка гіпотез про рівність нулю генеральних середніх нормальних генеральних сукупностей

За умовою індивідуального завдання при якісній роботі досліджуваних систем відхилення вихідного параметра від заданого значення повинне дорівнювати нулю. Тому логічно припустити, що якщо система після дії випадкових факторів повертається у нормальний стан керування, то середнє значення відхилення повинне дорівнювати нулю, інакше буде мати місце систематична похибка керування, яка не залежить від дії випадкових факторів а визначається властивостями системи.

Таким чином, якщо генеральна сукупність розподілена нормально, причому генеральне середнє a невідоме, але є підстави вважати, що воно дорівнює нулю, тобто $a_0 = 0$, необхідно перевірити гіпотезу про рівність нулю генерального середнього. Якщо ця гіпотеза буде прийнята, то будуть підстави для висновку, що система працює без систематичних похибок керування.

Оскільки дисперсія генеральної сукупності невідома, то в якості критерію перевірки нульової гіпотези $H_0 : a = a_0 = 0$ приймемо випадкову величину

$$T = \frac{(\overline{X} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$$

де S – „виправлене” середнє квадратичне відхилення;
n – обсяг вибірки;
$\overline{X}$ – середнє вибіркове.

Величина T має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями вільності.

Правило перевірки нульової гіпотези формулюється так.

Правило. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0$ про рівність невідомої генеральної середньої a (нормальної сукупності з невідомою дисперсією) гіпотетичному значенню $a_0 = 0$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : a \neq a_0$, потрібно обчислити спостережене значення критерію

$$T_{спост} = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{s}$$

і за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (***додаток 7***), за заданим рівнем значущості α (розміщеним у верхньому рядку таблиці розподілу Стьюдента) і числом ступенів вільності $k = n - 1$ знайти двосторонню критичну точку $t_{двост.кр}(\alpha, k)$.

Якщо $|T_{спост}| < t_{двост.кр}$ – немає підстав відхилити нульову гіпотезу.

Якщо $|T_{спост}| > t_{двост.кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад.

За вибіркою обсягом $n = 20$, взятою із нормальної генеральної сукупності, знайдені вибіркове середнє $\bar{x}_d = 16$ і «виправлене» середнє квадратичне відхилення $s = 4{,}5$. Треба при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 15$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : a \neq 15$.

Розв'язання.

Обчислимо спостережене значення критерію

$$T_{спост} = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{s} = \frac{(16 - 20) \cdot \sqrt{20}}{4{,}5} = 0{,}99 .$$

За умовою, конкуруюча гіпотеза має вигляд $H_1 : a \neq a_0$, тому критична область двостороння.

За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (***додаток 7***) за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$, розміщеному у верхньому рядку таблиці, і за числом ступенів вільності $k = 20 - 1 = 19$ знаходимо критичну точку $t_{двост.кр}(0{,}05; 19) = 2{,}09$.

Оскільки $|T_{спост}| < t_{двост.кр}$ – немає підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто вибіркове середнє незначуще відрізняється від гіпотетичної генеральної середньої.

Література: [1, с. 218 – 226; 2, с. 308 – 312].

2.8. Оцінка відхилення емпіричного розподілу від нормального

Для оцінки відхилення емпіричного розподілу від нормального використовують різні характеристики, до яких, зокрема, відносяться асиметрія і ексцес.

Асиметрія емпіричного розподілу визначається вибірковим коефіцієнтом асиметрії, який визначається формулою

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_в^3},$$

де m_3 – центральний емпіричний момент третього порядку;

$\sigma_в$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення.

Якщо полігон частот варіаційного ряду асиметричний, то одна із його гілок, починаючи з вершини, має плавніший "спуск", ніж інша.

При від'ємному вибірковому коефіцієнті асиметрії плавніший "спуск" полігону частот спостерігається зліва, в іншому випадку – справа.

Ексцес емпіричного розподілу визначається вибірковим коефіцієнтом крутості, який обчислюється за формулою

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_в^4} - 3,$$

де m_4 – центральний емпіричний момент четвертого порядку.

Ексцес служить для порівняння на гостро- чи плосковершинність вибіркового розподілу з нормальним розподілом генеральної сукупності.

Для випадкової величини, розподіленої нормально, ексцес дорівнює нулю. Тому за стандартне значення вибіркового ексцесу приймають E_k=0. Якщо вибірковому розподілу відповідає від'ємний ексцес, то відповідний полігон частот має плоскішу вершину порівняно з нормальною кривою. У випадку додатного ексцесу полігон має загострену вершину порівняно з нормальною кривою.

Моменти m_3 і m_4 зручно обчислювати методом добутків, як це було розглянуто в п. 2.2.

Приклад.

Емпіричний розподіл має наступні характеристики: m_3 =0,0007, m_4 =0,054, $\sigma_в = \sqrt{0,14}$. Знайти асиметрію і ексцес.

Розв'язання.

Знайдемо асиметрію і ексцес:

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_в^3} = \frac{-0,0007}{(\sqrt{0,14})^3} = -0,01 .$$

$$E_к = \frac{m_4}{\sigma_в^4} - 3 = \frac{0,054}{(\sqrt{0,14})^3} - 3 = 0,24 .$$

Даний розподіл має плавніший "спуск" зліва і загострену вершину порівняно з теоретичним розподілом.

Література [1, с. 186 – 188; 2, с. 250 – 252].

3. ОФОРМЛЕННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання має бути написане літературною мовою, без орфографічних помилок, русизмів та сленгових слів, виправлень, вставок, скорочень слів, крім загальноприйнятих. Вона повинне бути змістовним, матеріал поданий логічно, послідовно, з використанням літературних джерел. Оформлення роботи повинно відповідати вимогам стандартів.

Робота має бути віддрукована. При комп’ютерному наборі текст індивідуального завдання набираєтьсяшрифтом Times New Roman, розмір 14 пт, через півтора інтервали, вирівнювання по ширині.

Текст викладається на стандартному аркуші паперу з одного боку, з такими полями: від лівого краю аркуша – 30 мм, від правого краю аркуша – 10 мм, від верхнього краю аркуша до першого рядка тексту – 20 мм, від останнього рядка тексту до нижнього краю аркуша – 20 мм.

Стиль викладу вимагає вживання таких висловів: «як показали результати розрахунку», «дані таблиці свідчать», «з цього можна зробити висновок» тощо. У тексті слід дотримуватися одного і того самого граматичного часу: теперішнього або минулого, а у висновках і пропозиціях - майбутнього.

Графіки, таблиці та схеми повинні мати назву і порядковий номер.

У оформленні треба дотримуватись усіх правил зображення статистичної інформації. Якщо є потреба посилатись на той чи інший ілюстративний матеріал, то слід зазначити „див. табл...., с.”.

Слово “Таблиця” та її номер пишеться над правим верхнім кутом таблиці (наприклад, “Таблиця 1”), а під ним (посередині) – назва таблиці, яка розкриває сутність її змісту. Доцільно розташовувати таблицю на одному аркуші. Якщо таблицю переносять на іншу сторінку, то на наступному аркуші пишуть праворуч над таблицею: “Продовження таблиці 1”. У тексті на таблиці роблять посилання (наприклад: “... інформація наведена в табл. 1”). У заголовку таблиці текстову інформацію подають у такому вигляді: шрифт – Times New Roman, розмір 14 пт, через один інтервал, вирівнювання по центру. У самій таблиці текстову інформацію слід подавати так: шрифт – Times New Roman, розмір 14 пт, через півтора інтервали, вирівнювання по ширині (якщо багато інформації) або по лівому краю (якщо мало інформації). Числову інформацію слід подавати так: шрифт – Times New Roman, розмір 14 пт, через півтора інтервали, вирівнювання по правому краю, з однаковою кількістю знаків після коми в кожному числовому показнику.

Посилання на джерела слід оформлювати ретельно:

– цитати виписувати дослівно;

– обов'язково зазначати автора та інші видавничі атрибути першоджерела;

– якщо передається чужа думка, то слід робити вказівку типу «див....»;

– список літератури складати в алфавітному порядку;

– до списку літератури слід включати тільки дійсно використані під час написання роботи джерела, на які є посилання.

Використовуючи формули, слід:

– під кожною формулою в окремому рядку давати пояснення символів у послідовності, яка значиться у формулі;

– позначення індексів і математичних степенів розміщувати відповідно знизу і зверху;

– схожі за написом літери і числа писати чітко;

– формули, на які робляться посилання, нумерувати арабськими цифрами в круглих дужках і розташовувати по правому полю від формули (формули повинні бути набрані в редакторі формул MS Equation або іншому). Нумерація формул – наскрізна в межах роботи (наприклад, (2), (5)) або в межах розділу (наприклад, (2.2), (2.5)). Формули повинні мати однакове форматування і розмір символів у всій роботі. Розмір символів наступний: звичайний текст – 14 пт, крупний індекс – 10 пт, дрібний індекс – 8 пт, крупний символ – 18 пт, дрібний символ – 12 пт. Формули розміщуються по центру, без абзацу.

На цитати та формули слід робити посилання – вказувати у квадратних дужках порядковий номер інформації (за списком використаних літературних джерел) та номер сторінки, наприклад: [2, с. 20]. Посилання на використані джерела повинні бути лише по тексту, а не біля формул чи таблиць.

Перелік використаної літератури включає назви всіх робіт, які застосовувались при виконанні індивідуального завдання, відповідно до державного стандарту.

Додатки розміщуються в кінці роботи після списку літератури. Вони повинні мати власну нумерацію, їх послідовність має збігатись з порядком появи посилань на них у тексті. У додатки можна включати будь-яку документацію, яка використовується в роботі. Додатки нумеруються в порядку посилання на них в роботі таким чином: Додаток 1, Додаток 2 і т. д. у правому верхньому куті, наскрізна нумерація додатків по сторінках не потрібна. Всі додатки відокремлюються від роботи окремим аркушем, на якому по центру написано: ДОДАТКИ (шрифт Times New Roman, 22 пт).

Індивідуальне завдання підписується на першій та останній сторінках. На останній сторінці зазначається дата завершення роботи.

Загальна схема оформлення роботи:

- титульний аркуш;
- підписане викладачем і студентом завдання з номером варіанта;
- зміст;
- розрахункова частина, зміст якої визначається цими методичними рекомендаціями;
- висновки;
- список використаної літератури;
- додатки.

Індивідуальне завдання починається з титульного аркуша (***додаток 8)***. Далі йдуть завдання (***додаток 9***), яке друкується на аркуші з обох сторін, та зміст. Ці аркуші не нумеруються. Нумерація проставляється зі вступу (с. 3), якщо він є в роботі, або з наступного за змістом аркуша. Нумерація здійснюється арабськими цифрами посередині нижнього поля аркуша.

Зміст включає назви всіх розділів, підрозділів і пунктів індивідуального завдання з відповідними номерами, з яких вони починаються. Всі числові позначення сторінок повинні бути розміщені в одному стовпчику (колонці) з правого боку аркуша.

Кожний розділ починається з нового аркуша. Тексту кожного розділу передує його назва (заголовок), написана прописними літерами. Перед назвою розділів арабськими цифрами проставляється порядковий номер розділу. Назви підрозділів пишуться як основний текст (Times New Roman, розмір 14 пт). Крапки в кінці назв розділів та підрозділів не ставляться. Після назви розділу йде назва підрозділу, номер якого складається з двох цифр. Перша цифра означає номер розділу, друга цифра – це наскрізна нумерація підрозділів в межах розділу. Між розділом і підрозділом необхідно зробити пропуск в один інтервал, а між підрозділом і основним текстом пропуск не робиться. Назва розділу орієнтується по центру, без абзацу. Назва підрозділу орієнтується як основний текст, з абзацу. Переноси слів у заголовках глав і параграфів не дозволяються.

Написання розділових та інших знаків підпорядковується наступним правилам:

1. *Написання розділових знаків: крапка, кома*. Перед розділовими знаками (крапка, кома) пробіл не ставиться, після них обов'язково ставиться пробіл.

2. *Написання знаку "–"*: 1) як знак тире „–" – в цьому випадку перед знаком і після нього обов'язково ставиться пробіл; 2) як дефіс „-" – в цьому випадку пробіли не ставляться, оскільки дефіс означає з'єднання слів.

3. *Абзац*. Перший рядок кожного нового абзацу починається з відступом на 1 см від лівого поля.

4. Двокрапка. Знак двокрапки в тексті пишеться без пробілу після слова, за яким вона ставиться, після неї обов'язково ставиться пробіл.

5. Лапки (дужки). Лапки (дужки) ставляться в тексті разом (без пробілу) з поняттям, яке береться в лапки (дужки). Після лапок (дужок) обов'язково робиться пробіл, якщо немає іншого розділового знаку. Крапка, кома, крапка з комою, двокрапка та тире перед закриттям лапок (дужок) не ставляться.

6. *Знаки: номер, параграф, процент, градус, хвилина, секунда, дріб.* Ці знаки зустрічаються в тексті тільки в поєднанні з цифровими позначеннями, наприклад: №5, §6, 50%, 15º35′. В друкованому тексті знаки номера та параграфа не відділяються

від цифри пробілом. Знак процента ставиться безпосередньо за цифровим позначенням, а після нього обов'язково ставиться пробіл. При написанні кількох чисел знаки номера, параграфа та процента не подвоюються. Їх пишуть наступним чином: № 1-4; § 2, 3, 4; відповідно 98, 96,5 та 100%.

7. *Знаки арифметичних дій: додавання, віднімання, множення, ділення, знак рівності.* Ці знаки пишуться за загальними правилами, до знаку і після нього пробіл не ставиться.

Схеми в індивідуальному завданні використовуються для того, щоб показати склад, структуру та взаємозв'язки між окремими елементами явища, системи, процесу, що розглядається, або відобразити послідовність етапів того чи іншого процесу. Креслення схем має відповідати вимогам стандартів.

Схеми, графіки, діаграми називаються рисунками. Вони позначаються безпосередньо під рисунком словом "Рис." та отримують відповідний номер. Наприклад: Рис. 1. Далі пишеться назва рисунку. Якщо у розділі тільки один рисунок, то номера він не має. Рисунки розташовуються відразу ж після посилання на них у тексті. Нумерація рисунків може бути наскрізною, або по розділах.

Схеми повинні бути розміщені на одному аркуші, відразу після посилання на них в тексті роботи. Якщо за розміром вони не вміщаються на сторінку відразу після тексту посилання, то їх можна подати на окремому листі. Розрив у схемах не допускається. Використання сканованих рисунків в роботі не допускається.

У процесі виконання індивідуального завдання часто використовують ілюстративні матеріали у вигляді діаграм, графіків.

Засобом графічного зображення залежності однієї величини від змін іншої є графік. Для побудови графіків використовують, як правило, прямокутну систему координат.

В індивідуальному завданні частина інформації може бути подана у вигляді списку. Списки бувають марковані або нумеровані. Номер списку подається з абзацу.

Відстань між порядковим номером і текстом у списку повинна бути мінімальною. Якщо у списку нумеруються речення, то вони повинні закінчуватись крапкою і кожен новий пункт списку повинен починатись з великої літери. Якщо у списку нумеруються елементи речення, то після номера списку ставиться дужка, а не крапка, текст починається з малої літери, в кінці пункту ставиться крапкою з комою.

У маркованому списку допускається використовувати лише такий маркер як “–”.

Якщо текст індивідуального завдання містить довгі стандартні назви, скорочення допускаються згідно з ГОСТ 7.12-77. Перед використанням скорочення необхідно навести повну назву слова чи словосполучення, а поруч, у круглих дужках, вказати скорочене позначення, наприклад: науково-дослідні та дослідно-конструкторські роботи (НДДКР). Надалі в тексті використовується абревіатура.

4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Визначаючи підсумкову оцінку, керуються такими критеріями:

– ступінь глибини і самостійності виконання роботи;

– рівень теоретичної підготовки з використаних у роботі статистичних методів і прийомів обробки первинних даних;

– уміння і результативність практичного застосування статистичної методології;

– здатність аналізувати отримані результати, аргументовано формулювати висновки і пропозиції;

– уміння вільно викласти суть і результати свого дослідження.

Критерії оцінювання індивідуального завдання наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Університетська шкала оцінювання (15-бальна)	Національна шкала оцінювання (4-бальна)	Оцінка за шкалою ECTS (7-бальна)	Критерії визначення оцінки
1	2	3	4
90–100	5 (відмінно)	A	***відмінно*** – студент повністю оволодів знаннями теоретичного матеріалу дисципліни і здобув практичні навички, що забезпечило відмінне виконання індивідуального завдання без помилок або з 1-2 несуттєвими помилками.
82–89	4 (добре)	B	***дуже добре*** – студент добре засвоїв теоретичний матеріал дисципліни і здобув практичні навички на рівні, який дав можливість виконати індивідуальне завдання на рівні вище середнього з кількома помилками.

Продовження таблиці 4.1

<table>
<tr><td>75–81</td><td></td><td>C</td><td>добре – студент засвоїв теоретичний матеріал з дисципліни і набув практичні навички, що забезпечило в цілому правильне виконання індивідуального завдання, але з 2-3 грубими помилками.</td></tr>
<tr><td>68–74</td><td rowspan="2">3 (задовільно)</td><td>D</td><td>задовільно – студент в цілому засвоїв теоретичний матеріал і набув практичні навички, що дозволило непогано виконати індивідуальне завдання, проте кількість суттєвих помилок становить більше трьох.</td></tr>
<tr><td>60–67</td><td>E</td><td>достатньо – студент ознайомлений в загальних рисах з теоретичним матеріалом і має практичні навички, що виявилось достатнім для виконання індивідуального завдання на рівні мінімальних вимог.</td></tr>
<tr><td>35–59</td><td rowspan="2">2 (незадовільно)</td><td>FX</td><td>незадовільно – студент має уявлення про теоретичний матеріал дисципліни, але при виконанні індивідуального завдання допустився дуже грубих помилок. Необхідно доопрацювати матеріал і повторно виконати індивідуальне завдання у.</td></tr>
<tr><td>1–34</td><td>F</td><td>незадовільно – студент не розуміє теоретичного матеріалу та не має практичних навичок для виконання індивідуального завдання. Необхідна подальша робота з обов’язковим повторенням матеріалу, необхідного для виконання індивідуального завдання.</td></tr>
</table>

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 6-е доп. - М.: Высш. шк., 2002. – 405 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. - 9-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.
3. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.

Додаткова література

4. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 1986. – 80с.
5. Анісімов В.В., Черняк О.І. Математична статистика. – К.: МП "Леся", 1999.
6. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Наука, 1984.
7. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986.
8. Бугір М.К. Посібник з теорії ймовірності та математичної статистики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 176 с.
9. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1962.
10. Володин Б.Г., Танин М.Н., Динер И.Я. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под. ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.
11. Жлуктенко В.Ш., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики. – К.: УМК ВО, 1991. – 252 с.
12. Ивченко Г.И.,Медведев Ю.И. Математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1984.
13. Карасев А. Я. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1977.

14. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1985.
15. Свешников И.В. (под редакц.) Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
16. Теорія ймовірностей: 36 задач / За ред. А.В. Скорохода. – К.: Вища шк. Гол. вид-во. 1976.
17. Турчин В.М. Математична статистика в прикладах і задачах. – К.: НМК ВО, 1993.
18. Черняк А.И. Методические указания и учебные задания для самостоятельной работы по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов факультета кибернетики. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1988.

ЗМІСТ

Д О Д А Т К И

Додаток 1

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант №1									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,464	0,137	2,455	-0,323	0,068	0,906	-0,513	-0,525	0,595	0,881
0,296	-0,288	1,298	0,241	-0,957	1,179	-1,055	0,007	0,769	0,971
0,060	-2,526	-0,531	-0,194	0,543	-1,501	-0,488	-0,162	-0,136	1,033
-1,558	0,187	-1,190	0,022	0,525	-0,690	0,756	-1,618	-0,345	-0,511
1,486	-0,354	-0,634	0,697	0,926	1,372	0,225	0,378	0,761	0,181
0,464	0,137	2,455	-0,323	0,068	0,906	-0,513	-0,525	0,595	0,881
0,296	-0,288	1,298	0,241	-0,957	1,179	-1,055	0,007	0,769	0,971
0,060	-2,526	-0,531	-0,194	0,543	-1,501	-0,488	-0,162	-0,136	1,033
-1,558	0,187	-1,190	0,022	0,525	-0,690	0,756	-1,618	-0,345	-0,511
1,486	-0,354	-0,634	0,697	0,926	1,372	0,225	0,378	0,761	0,181

Варіант №2									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-0,482	1,678	-0,057	-1,229	-0,486	-1,787	-1,630	-0,105	-0,116	-1,339
-1,376	-0,150	1,356	-0,561	-0,256	-0,261	-0,146	-0,357	-1,698	1,827
-1,010	0,598	-0,918	1,598	0,065	1,237	-0,392	-1,384	-2,832	-0,959
-0,005	-0,899	0,012	-0,725	1,147	1,046	-0,627	0,360	-1,108	0,424
1,393	-1,163	-0,911	1,231	-0,199	-0,508	0,561	-0,992	-2,357	0,969
-0,482	1,678	-0,057	-1,229	-0,486	-1,787	-1,630	-0,105	-0,116	-1,339
-1,376	-0,150	1,356	-0,561	-0,256	-0,261	-0,146	-0,357	-1,698	1,827
-1,010	0,598	-0,918	1,598	0,065	1,237	-0,392	-1,384	-2,832	-0,959
-0,005	-0,899	0,012	-0,725	1,147	1,046	-0,627	0,360	-1,108	0,424
1,393	-1,163	-0,911	1,231	-0,199	-0,508	0,561	-0,992	-2,357	0,969

Варіант №3

Вибіркові сукупності

X					Y				
-1,805	-0,166	-1,186	-0,202	0,658	0,425	-0,439	0,358	-1,939	0,891
-2,008	0,032	1,180	0,151	-1,141	0,290	-0,227	0,602	0,873	-0,437
-1,633	0,079	1,114	-0,376	1,151	-0,902	-0,220	-0,057	-1,399	-0,230
0,542	0,471	0,882	-0,310	-1,210	0,610	0,385	-0,649	-0,577	0,237
0,250	-1,029	1,265	0,479	-0,927	2,709	-0,300	0,738	0,513	-0,289
0,199	0,208	0,159	-0,313	-2,828	0,921	0,996	0,606	0,606	0,145
-1,083	1,119	0,272	0,084	-0,439	-0,986	2,273	-0,747	-0,584	0,446
-0,219	0,004	-1,347	-0,792	-0,623	-1,047	1,291	0,247	0,541	-1,661
-0,291	-2,015	-0,307	0,041	-1,793	0,063	-2,098	0,481	0,484	1,045
1,221	-0,594	0,121	0,790	-1,275	-0,699	-1,132	-1,363	-0,586	-1,023

Варіант №4

Вибіркові сукупності

X					Y				
0,768	0,665	0,084	-0,880	-0,579	0,551	0,375	-1,658	-0,851	0,234
0,079	-0,528	0,110	0,899	-0,521	0,292	0,427	0,210	-0,120	-0,656
-1,473	-0,813	0,071	0,524	1,266	-1,206	-0,831	-0,736	0,418	0,340
0,034	1,026	2,990	-0,574	-0,491	-1,114	0,191	1,041	-0,513	-0,086
-2,127	1,297	-1,433	-1,345	-3,001	0,479	0,074	0,008	-0,344	-0,158
-1,334	1,278	-0,515	-0,566	2,923	0,500	0,359	0,326	-0,287	1,114
-0,568	-0,109	1,045	0,031	-1,202	-1,346	-0,451	-0,518	-0,921	0,161
0,942	0,772	1,250	-0,199	0,394	0,193	0,574	-1,181	-0,509	-0,094
-0,288	1,810	1,378	0,584	-1,045	-0,254	1,501	0,192	-1,190	-0,886
0,733	0,402	0,226	1,216	0,843	-0,144	1,068	-0,432	1,410	-0,318

Продовження додатку 1

Варіант №5									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,630	-0,537	0,782	0,060	0,499	-0,431	1,705	1,164	0,884	-0,298
-0,491	0,665	-0,135	-0,145	-0,498	0,457	1,064	-1,420	0,489	0,375
-0,430	-0,243	-0,151	0,162	-0,798	1,006	-0,066	-0,732	-1,186	-1,941
0,762	0,298	1,049	1,810	2,885	-0,768	-0,129	-0,309	0,754	0,247
0,531	0,416	-1,541	1,456	2,040	-0,124	0,196	0,023	-1,204	-1,711
0,424	-0,444	0,593	0,993	-0,106	0,116	0,484	-1,272	1,066	1,097
0,593	0,658	-1,127	-1,407	-1,579	-1,616	1.458	1,262	0,736	-0,916
0,862	-0,885	-0,142	-0,504	0,532	1,381	0.022	-0,281	-0,342	1,222
0,235	-0,628	-0,023	-0,463	-0,899	-0,394	-0,538	1,707	-0,188	-1,153
-0,853	0,402	0,777	0,833	0,410	-0,349	-1,094	0,580	1,395	1,298

Варіант №6									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-1,752	-0,329	-1,256	0,318	1,531	0,349	-0,958	-0,059	0,415	-1,084
-0,291	0,085	1,701	-1,087	-0,443	-0,292	0,248	-0,539	-1,382	0,318
-0,933	0,130	0,634	0,899	1,409	-0,883	-0,095	0,229	0,129	0,367
-0,450	-0,244	0,072	1,028	1,730	0,056	-1,488	-0,078	-2,361	-0,992
0,512	-0,882	0,490	-1,304	-0,266	0,757	-0,361	0,194	-1,078	0,529
-0,702	0,472	0,429	-0,664	-0,592	1,443	-1,515	-1,209	-1,043	0,278
0,284	0,039	-0,518	1,351	1,473	0,889	0,300	0,339	-0,206	1,392
-0,509	1,420	-0,782	-0,429	-1,266	0,627	-1,165	0,819	-0,261	0,409
-1,776	-1,033	1,977	0,014	0,702	-0,435	-0,816	1,131	0,656	0,061
-0,044	1,807	0,342	-2,510	1,071	-1,220	-0,060	-0,764	0,079	-0,964

Продовження додатку 1

Варіант №7									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,263	-0,578	1,612	-0,148	-0,383	-1,007	-0,414	0,638	-0,186	0,507
0,986	0,439	-0,192	-0,132	0,167	0,883	-0,400	-1,440	-0,385	-1,414
-0,441	-0,852	-1,446	-0,605	-0,348	1,018	0,963	-0,004	2,504	-0,847
-0,866	0,489	0,097	0,379	0,192	0,842	0,065	1,420	0,426	-1,191
-1,215	0,675	1,621	0,394	-1,447	-0,321	2,199	-0,540	-0,037	0,185
-0,475	-1,210	0,183	0,526	0,495	1,297	-1,613	1,241	-1,016	-0,090
1,200	0,131	2,502	0,344	-1,060	-0,909	-1,695	-0,666	-0,838	-0,866
-0,498	-1,202	-0,057	-1,354	-1,441	-1,590	0,987	0,441	0,637	-1,116
-0,743	0,894	-0,028	1,119	-0,598	0,279	2,241	0,830	0,267	-0,156
0,779	-0,780	-0,954	0,705	-0,361	-0,734	1,365	1,297	-0,142	-1,387

Варіант №8									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-0,206	-0,195	1,017	-1,167	-0,079	-0,452	0,058	-1,068	-0,394	-0,406
-0,092	0,927	-0,439	0,256	0,503	0,338	1,511	-0,465	-0,118	-0,454
-1,222	-1,582	1,786	-0,517	-1,080	-0,409	-0,474	-1,890	0,247	0,575
0,068	0,075	-1,383	-0,084	0,159	1,276	1,141	0,186	-0,973	-0,266
0,183	1,600	-0,335	1,553	0,889	0,896	-0,035	0,461	0,486	1,246
-0,811	-2,904	0,618	0,588	0,533	0,803	-0,696	0,690	0,820	0,557
-1,010	1,149	1,033	0,336	1,306	0,835	1,523	0,296	-0,426	0,004
1,453	1,210	-0,043	0,220	-0,256	-1,161	-2,030	-0,046	0,243	1,082
0,759	-0,838	-0,877	-0,177	1,183	-0,218	-3,154	-0,963	-0,822	-1,114
0,287	0,278	-0,454	0,897	-0,122	0,013	0,346	0,921	0,238	-0,586

Варіант №9									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-1,601	-0,570	0,133	-0,660	1,485	0,682	-0,898	0,686	0,658	0,346
0,597	0,362	-3,760	1,159	0,874	-0,794	-0,915	1,215	1,627	-1,248
0,033	-1,527	1,422	0,308	0,845	-0,151	0,741	0,064	1,212	0,823
-1,063	-0,594	-1,526	-0,787	0,873	-0,405	-1,324	0,162	-0,163	-2,716
0,985	0,340	0,276	0,911	-0,170	-0,551	1,000	-0,838	0,275	-0,304
-1,694	0,710	-0,655	-0,546	1,654	0,134	0,466	0,033	-0,039	0,838
0,369	-1,990	-1,190	0,666	-1,614	0,082	0,922	-0,139	-0,833	0,091
-0,337	0,199	-0,160	0,625	-0,891	-1,464	-0,318	1,297	0,932	-0,032
0,392	0,106	-1,430	-0,204	-0,326	0,825	-0,432	-0,094	-1,566	0,679
-0,669	0,035	-2,077	1,077	0,525	-0,154	-1,036	0,015	-0,220	0,882

Варіант №10									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
1,385	1,320	-0,509	-0,381	-1,671	-0,524	-0,805	1,348	0,676	0,799
0,824	0,040	-1,734	0,251	0,054	-0,379	1,298	-0,126	0,104	-0,529
0,441	-0,372	-1,336	0,062	1,506	-0,315	-0,112	-0,452	1,594	-0,264
0,344	-0,324	0,686	-1,487	-0,126	0,803	-0,961	0,183	-0,358	-0,184
-0,401	-0,679	0,921	0,476	1,121	-0,864	0,128	-0,551	-0,872	1,511
-0,248	0,788	-0,577	0,122	-0,536	0,293	1,207	-2,243	1,642	1,353
1,327	0,763	-1,724	-0,709	1,100	-1,346	-0,946	-0,157	0,522	-1,264
-1,433	-1,008	-0,990	0,090	0,940	0,207	-0,745	0,638	1,469	1,214
0,901	1,531	-0,889	-1,019	0,084	1,531	-0,144	-1,920	0,678	-0,402
-0,266	-1,309	0,597	0,989	0,934	1,079	-0,656	-0,999	-0,036	-0,537

Продовження додатку 1

Варіант №11									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,978	0,109	1,434	-1,094	-0,265	-0,857	-1,421	-1,773	0,570	-0,053
1,382	-1,454	1,537	-1,299	0,363	-0,356	-0,025	0,294	2,194	-0,395
0,229	-0,584	0,705	0,124	0,341	1,320	-0,824	-1,541	-0,163	2,329
-0,602	0,399	1,121	-1,026	0,087	1,018	-1,437	0,661	0,091	-0,637
2,285	0,554	0,418	-0,577	-1,489	-1,255	0,092	-0,597	-1,051	-0,980
-0,805	1,286	-0,772	-0,636	-1,312	-1,045	1,559	-0,871	-0,102	-0,123
1,468	0,047	0,131	0,355	0,162	-1,491	-0,739	-1,182	-0,533	-0,497
0,379	0,858	-0,440	1,453	-1,356	0,503	-1,134	1,950	-1,816	-0,283
-0,276	0,752	-1,110	-1,378	-0,583	0,360	0,365	1,578	0,621	1,344
-0,856	0,787	-0,063	-2,052	-1,192	-0,831	1,623	1,135	0,759	-0,189

Варіант №12									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,489	-0,209	1,659	0,054	1,635	0,169	0,794	-1,550	1,845	-0,388
0,963	0,052	0,037	0,637	-1,335	0,055	0,010	-0,860	-0,621	0,713
0,567	-1,156	-0,125	-0,534	0,711	-0,511	0,187	-0,644	-1,090	-1,281
0,598	-0,352	0,719	-0,341	0,056	-1,041	1,429	0,235	0,314	-1,693
-0,791	-0,528	0,946	1,673	-0,680	-0,784	1,494	-0,086	-1,071	-1,196
0,918	1,163	-1,445	0,759	0,878	-1,781	-0,056	-2,141	-0,234	0,975
-0,600	-0,096	0,696	0,446	1,417	-2,140	0,599	-0,157	1,485	1,387
-1,074	-1,379	0,086	-0,331	-0,288	-0,309	-1,527	-0,408	0,183	0,856
-0,366	-1,084	-0,626	0,798	1,706	-1,160	-0,838	1,462	0,636	0,570
-0,678	-2,335	1,202	-1,697	0,547	-0,201	-0,373	-1,363	-0,081	0,958

Продовження додатку 1

Варіант №13

Вибіркові сукупності

X					Y				
-1,627	-0,017	0,699	0,661	-0,073	0,188	1,183	-1,054	-1,615	-0,765
-1,096	1,215	0,320	0,738	1,865	-1,169	-0,667	-0,674	-0,062	1,378
-1,532	1,031	-0,799	1,665	-2,756	-0,151	-0,704	0,602	-0,672	1,264
0,024	-1,183	-0,927	-0,629	0,204	-0,825	0,496	2,543	0,262	-0,785
0,192	0,125	0,373	-0,931	-0,079	0,186	-0,306	0,621	-0,292	1,131
-1,324	-1,229	-0,648	-0,430	0,811	0,868	0,787	1,845	-0,374	-0,651
-0,726	-0,746	1,572	-1,420	1,509	-0,361	-0,310	-3,117	1,637	0,642
-1,618	1,082	-0,319	0,300	1,524	-0,418	-1,712	0,358	-1,032	0,537
1,695	0,843	2,049	0,388	-0,297	1,077	-0,462	0,655	0,940	-0,354
0,790	0,605	3,077	1,009	-0,906	-1,004	0,693	-1,098	1,300	0,549

Варіант №14

Вибіркові сукупності

X					Y				
1,792	-0,895	-0,136	-1,765	1,077	0,418	-0,150	0,808	0,697	0,435
0,771	-0,741	-0,492	-0,770	-0,458	-0,021	1,385	-1,225	-0,066	-1,471
-1,438	0,423	-1,211	0,723	-0,731	0,883	-2,109	-2,455	-0,210	1,644
-0,294	1,266	-1,994	-0,730	0,545	0,397	1,069	-0,383	-0,097	-0,985
-1,966	0,909	1,400	0,685	-0,800	1,759	0,268	1,387	-0,414	1,615
-0,999	1,587	1,423	0,937	-0,943	0,090	1,185	-1,204	0,300	-1,354
0,581	0,000	0,231	0,079	-2,842	-0,846	-0,508	-0,516	0,370	-1,452
-0,580	0,481	-2,400	-1,462	-0,972	1,116	-0,994	0,374	-3,336	-0,058
0,834	-1,227	-0,709	-1,039	-0,014	-0,383	-0,512	-0,347	0,881	-0,638
-0,376	-0,813	0,660	-1,029	-0,137	0,371	0,376	0,968	1,338	-0,786

Продовження додатку 1

Варіант №15									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-1,621	0,815	-0,544	-0,376	-0,852	0,436	1,562	0,815	-1,048	0,188
0,163	-0,161	2,501	-0,265	-0,285	1,934	1,070	0,215	-0,876	0,073
1,786	-0,538	-0,437	0,324	0,105	-0,421	-0,410	-0,947	0,700	-1,006
2,140	1,218	-0,351	-0,068	0,254	0,448	-1,461	0,784	0,317	1,013
0,064	0,410	0,368	0,419	-0,982	1,371	0,100	-0,505	0,856	0,890
0,789	-0,131	1,330	0,506	-0,645	-1,414	2,426	1,389	-0,169	-0,194
-0,011	-0,372	-0,699	2,382	-1,395	-0,467	1,256	-0,585	-1,359	-1,804
-0,463	0,003	-1,470	1,493	0,960	0,364	-1,267	-0,007	0,616	0,624
-1,210	-0,669	0,009	1,284	-0,617	0,355	-0,589	-0,243	-0,015	-0,712
1,157	0,481	0,560	1,287	1,129	-0,126	0,006	1,532	1,328	0,980

Варіант №16									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,052	1,504	-1,350	-1,124	-0,521	0,515	0,839	0,778	0,438	-0,550
-0,315	-0,865	0,851	0,127	-0,379	1,640	-0,441	0,717	0,670	-0,301
0,938	-0,055	0,947	1,275	1,557	-1,484	-1,137	0,398	1,333	1,988
0,497	0,502	0,385	-0,467	2,468	-1,810	-1,438	0,283	1,740	0,420
2,308	-0,399	-1,798	0,018	0,780	1,030	0,806	-0,408	-0,547	-0,280
1,815	0,101	-0,561	0,236	0,166	0,227	-0,309	0,056	0,610	0,732
-0,421	0,432	0,586	1,059	0,278	-1,672	1,859	1,433	-0,919	-1,770
0,008	0,555	-1,310	-1,440	-0,142	-0,295	-0,630	-0,911	0,133	-0,308
1,191	-0,114	1,039	1,083	0,185	-0,492	0,419	-0,433	-2,260	1,299
1,918	0,318	1,348	0,935	1,250	-0,175	-0,828	-0,336	-1,019	0,726

Продовження додатку 1

Варіант №17									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,012	-0,739	-1,181	-0,645	-0,736	1,801	-0,209	-0,389	0,867	-0,555
-0,586	-0,044	-0,983	0,332	0,371	-0,072	-1,212	1,047	-1,930	0,812
-0,122	1,515	0,338	-1,040	-0,008	0,467	-0,600	0,923	1,126	-0,752
0,879	0,516	-0,920	2,121	0,674	1,481	0,660	-0,986	1,644	-2,159
0,435	1,149	-0,065	1,391	0,707	0,548	-0,490	-1,139	0,249	-0,933
0,645	-0,878	-0,904	0,896	-1,284	0,237	-0,378	-0,510	-1,123	-0,129
-1,017	0,529	0,973	-1,202	0,005	-0,644	-0,167	-0,664	0,167	-0,514
0,242	0,427	-0,727	-1,150	-1,092	-0,736	0,925	-0,050	-0,200	-0,770
0,445	-1,287	-1,463	-0,650	0,412	-2,714	-0,903	-0,341	0,957	0,273
0,443	0,203	0,423	1,423	0,508	1,058	-0,828	0,143	-1,059	0,345

Варіант №18									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,255	1,036	1,471	0,476	0,592	-0,658	0,677	0,155	1,068	-0,759
-0,370	0,522	-1,890	0,858	-0,389	0,609	1,210	0,489	-0,006	0,834
0,097	1,709	1,790	-0,929	0,405	0,024	-0,036	0,580	-0,642	-1,121
0,520	0,889	-0,540	0,266	-0,354	0,524	-0,788	-0,497	-0,973	1,481
-0,311	-1,772	0,496	1,275	-0,904	0,147	1,497	0,657	-0,469	-0,783
0,561	0,199	0,477	-1,673	0,802	-0,491	0,333	-0,020	-1,009	-0,330
2,245	-1,326	-0,232	0,001	-0,120	-0,106	-0,117	1,081	0,193	0,139
1,202	0,145	-0,475	-1,013	-1,708	-0,496	0,656	0,352	-0,643	0,180
1,956	-0,431	0,517	0,383	-1,363	-0,217	0,184	-0,760	0,606	-1,477
0,425	-0,429	0,376	-0,258	-1,054	0,812	0,656	0,796	1,358	1,280

Продовження додатку 1

Варіант №19									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-0,604	0,857	-0,695	0,397	0,296	-0,285	0,191	0,158	1,672	1,190
-0,868	-0,013	-1,576	-0,168	0,047	-0,159	0,086	-1,077	0,287	-0,001
0,205	0,937	-0,099	-1,281	-0,276	0,845	0,752	0,663	0,989	1,160
-0,556	-0,689	1,535	-0,711	-0,743	-0,470	-0,960	-1,174	0,303	1,579
-0,615	-0,154	0,008	1,353	-0,381	1,137	0,022	0,175	0,586	2,941
1,578	1,529	-0,294	-1,301	0,614	0,099	-0,700	-0,003	1,052	1,643
0,626	-0,447	-1,261	-2,029	0,182	1,176	0,083	1,868	0,872	0,965
-0,493	-0,020	0,920	1,473	1,873	-0,289	0,410	0,394	0,881	0,054
-0,217	0,342	1,423	0,364	-0,119	0,509	-2,266	0,189	0,149	-0,157
1,041	-0,792	0,347	-1,367	-0,632	-1,238	-0,136	-0,352	-1,163	1,305

Варіант №20									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,568	-0,226	0,391	-0,074	-0,312	0,400	1,583	0,481	-1,048	0,759
0,051	0,549	-2,192	1,257	-1,460	0,363	0,127	-1,020	-1,192	0,449
-0,126	0,490	0,279	0,372	-0,578	-0,836	2,285	-0,448	0,720	0,891
-0,637	1,255	-0,354	0,032	-1,076	0,510	0,622	0,352	-0,103	-0,496
-0,943	-0,694	0,248	0,092	0,673	0,354	-0,489	0,819	0,623	-1,428
-1,208	-1,038	0,140	-0,762	-0,854	-0,249	2,431	0,067	-0,874	-0,317
-0,487	-2,117	0,195	-0,785	-0,695	0,522	-1,003	-1,748	-1,534	-0,407
2,154	1,041	-1,314	-0,414	2,310	0,314	0,134	-0,041	1,251	1,202
-0,107	-0,757	1,118	0,838	0,613	0,912	0,556	-1,588	-0,891	-2,380
0,459	1,550	-1,004	0,227	0,308	2,272	0,008	0,059	0,682	-0,878

Продовження додатку 1

Варіант №21									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-0,099	2,391	1,067	-2,060	0,464	-0,103	3,486	1,121	0,632	-1,626
-0,526	-1,090	-1,002	0,132	1,504	0,050	-0,393	-0,080	1,465	0,070
0,115	-0,601	1,751	1,956	-0,196	- 0,252	-0,329	-0,242	-0,521	0,818
0,400	-0,522	0,571	-0,101	2,160	-0,586	-0,118	-0,167	-0,469	-1,171
0,430	0,017	0,185	0,377	1,883	-0,443	-0,039	-1,244	-0,820	0,104
-0,713	0,541	-0,571	0,807	-1,560	1,000	0,140	-0,549	0,887	2,237
-0,117	0,530	-1,599	1,602	0,412	-1,450	-1,217	1,074	-1,021	-0,424
1,187	-1,523	1,437	0,051	1,237	-0,798	1,616	-0,823	-1,207	1,258
-0,182	-0,186	0,517	1,438	0,831	-1,319	-0,539	-0,192	0,150	2,127
1,964	-0,629	-0,944	-0,028	0,948	1,005	0,242	-0,432	-0,329	0,113

Варіант №22									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,230	1,523	1,658	0,753	0,724	0,183	-0,147	0,505	0,448	-0,053
0,839	-0,849	-0,145	-1,843	-1,276	0,481	-0,142	-0,534	0,403	0,370
-0,801	0,343	-1,822	0,447	-0,931	-0,824	-0,484	0,864	-1,069	0,860
-0,124	0,727	1,654	-0,182	-1,381	-1,146	-0,572	0,159	0,186	-0,343
1,221	0,088	-0,267	0,032	-0,564	0,654	1,141	-0,056	0,067	-0,219
0,912	-0,473	0,511	-1,035	-1,070	0,259	-0,120	0,406	1,404	-1,837
1,397	0,064	-0,898	0,023	-1,204	1,236	-1,686	-0,753	-0,465	0,551
0,652	-0,457	2,450	1,117	-0,083	-1,195	-0,498	-1,012	0,523	-0,270
1,302	-0,936	-1,354	-0,789	1,254	0,906	0,030	-0,789	-0,657	0,816
-1,114	0,433	0,555	1,641	-0,297	-0,029	-0,414	0,386	0,022	0,505

Продовження додатку 1

Варіант №23									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-0,005	2,174	0,254	0,224	-0,631	0,508	-1,384	-2,653	0,946	0,918
1,893	-1,361	-0,366	0,115	-0,907	-0,510	-0,285	0,450	0,312	-0,469
-0,900	-1,373	0,653	2,343	-0,296	0,624	-0,102	-0,592	-0,510	0,449
1,219	0,254	-0,356	0,167	-0,991	1,153	0,023	-0,823	-0,007	-0,881
-1,010	1,099	1,158	0,976	0,488	0,509	0,983	0,524	-1,324	0,876
-0,150	-0,088	-0,448	0,573	0,822	0,395	0,023	-0,387	-0,368	-1,527
-0,050	0,457	0,605	-1,021	0,406	-0,613	-0,834	1,158	2,139	0,243
0,060	0,229	-0,632	0,091	-0,175	0,668	-0,316	-1,652	1,464	-2,183
0,276	0,895	0,309	1,793	-0,376	0,261	-0,705	-0,996	-0,314	0,547
0,054	0,678	0,307	-0,217	-0,460	-0,729	-0,517	0,589	1,927	0,940

Варіант №24									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-0,003	0,344	1,242	0,646	0,234	-2,172	0,660	-1,541	1,087	0,124
-0,495	0,268	-1,543	-1,201	0,917	-0,223	0,109	0,205	1,831	-0,840
-0,965	-3,305	-0,103	-1,105	2,427	-1,222	-0,474	-0,297	-0,852	0,371
-0,076	-0,365	0,805	-0,418	0,690	0,623	2,017	1,495	0,583	-0,663
0,578	0,145	-1,438	1,122	-1,406	1,172	0,272	2,245	1,207	1,227
-0,398	-0,958	-0,171	0,056	0,529	-0,514	-0,681	-0,366	-1,483	-0,951
0,338	-0,246	0,247	-0,459	1,231	-1,232	-0,497	1,025	-0,301	-0,790
-0,613	-0,871	0,245	-0,039	-0,721	0,813	0,402	1,541	0,691	-1,420
-0,779	-0,304	0,791	1,402	-1,428	1,097	0,948	0,222	-0,704	-0,375
1,203	0,801	-0,682	-1,425	-0,877	0,536	0,988	2,529	0,768	-1,321

Продовження додатку 1

Варіант №25									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
0,377	2,240	0,854	-1,158	0,066	-0,710	-0,805	1,484	0,150	-0,938
-1,222	-1,329	0,336	-0,167	-0,788	-0,515	-0,760	0,003	-0,871	-0,430
0,821	-0,466	0,073	0,391	0,239	-0,660	0,891	-1,165	0,659	0,200
1,729	-0,132	0,251	-0,765	-1,602	2,205	-1,734	-1,182	-0,038	1,135
-1,040	0,415	-0,381	0,657	1,022	1,057	-1,090	1,604	-0,598	-0,760
0,124	-1,812	1,750	0,270	-0,114	0,127	-0,865	0,129	0,675	-0,751
0,517	-0,036	1,365	0,182	0,635	-0,992	1,804	0,877	0,526	-0,804
-0,140	-0,609	-0,802	-0,019	-1,042	0,839	-0,491	-0,376	1,740	-0,564
0,517	-0,894	-0,042	1,677	-0,226	0,607	0,766	-1,193	-1,110	-0,516
-0,971	-0,357	0,785	0,318	0,365	0,319	-0,483	-1,134	-0.572	0,243

Варіант №26									
Вибіркові сукупності									
X					Y				
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124
-1,222	-0,613	-0,050	0,054	1,893	-0,965	1,302	-0,398	-0,713	-0,124

Додаток 2

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,990	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,370	0,580	0,880
6	1,09	2,01	3,88	25	0,320	0,490	0,730
7	0,92	1,62	2,98	30	0,280	0,430	0,630
8	0,80	1,38	2,42	35	0,260	0,380	0,560
9	0,71	1,20	2,06	40	0,240	0,350	0,500
10	0,65	1,08	1,80	45	0,220	0,320	0,460
11	0,59	0,98	1,60	50	0,210	0,300	0,430
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,380
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,340
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,310
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,290
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,270
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,183
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток 3

Критичні точки розподілу F Фішера-Снедекора
(k_1-число ступенів вільності більшої дисперсії, k_2-число ступенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$																
k_2	k_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	20	30	40	50
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6080	6110	6210	6260	6290	6310
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,40	99,40	99,40	99,50	99,50	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,10	27,10	26,70	26,50	26,40	26,40
4	21,12	18,00	16,59	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,40	14,40	14,00	13,80	13,70	13,70
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89	9,55	9,38	9,29	9,24
6	13,74	10,29	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,40	7,23	7,14	7,09
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47	6,16	5,99	5,91	5,86
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,73	5,67	5,36	5,20	5,12	5,07
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	4,81	4,65	4,57	5,52
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,77	4,71	4,41	4,25	4,17	4,12
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,10	3,94	3,86	3,81
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	3,86	3,70	3,62	3,57
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,66	3,51	3,43	3,38
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,51	3,35	3,27	3,22

Продовження додатку 3

k_2	k_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	20	30	40	50
16	8,53	6,23	5,29	4,87	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,26	3,10	3,02	2,97
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,08	2,92	2,84	2,78
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	2,94	2,78	2,69	2,64
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	2,83	2,67	2,58	2,53
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,74	2,58	2,49	2,44
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,66	2,50	2,42	2,36
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,60	2,44	2,35	2,30
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,55	2,39	2,30	2,55
40	7,31	5,18	4,31	4,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,37	2,20	2,11	2,06
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,79	2,70	2,63	2,56	2,27	2,10	2,01	1,95
60	7,,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,20	2,03	1,94	1,88
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42	2,12	1,94	1,85	1,79
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37	2,07	1,89	1,80	1,73
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27	1,97	1,79	1,69	1,63
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22	1,92	1,74	1,63	1,56

k_2	k_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	80
Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$																
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	248	250	251	252	252	252
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,50	19,50	19,50	19,50	19,50	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,66	8,62	8,59	8,59	8,57	8,56
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,75	5,72	5,70	5,69	5,67
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	3,56	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,81	3,77	3,75	3,74	3,72
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,44	3,38	3,34	3,32	3,30	3,29
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,15	3,08	3,04	3,02	3,01	2,99
9	5,12	4,24	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	2,94	2,86	2,83	2,80	2,79	2,77
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,77	2,70	2,66	2,64	2,62	2,60
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,65	2,57	2,53	2,51	2,49	2,47
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,54	2,47	2,43	2,40	2,38	2,36
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	3,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,46	2,38	2,34	2,31	2,30	2,27
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,38	2,31	2,27	2,24	2,22	2,20
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,28	2,19	2,15	2,12	2,11	2,08

Закінчення додатку 3

k_2	k_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	80
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,19	2,11	2,06	2,04	2,02	1,99
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	2,04	1,99	1,97	1,95	1,92
22	4,30	3,41	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,07	1,98	1,94	1,91	1,89	1,86
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,03	1,94	1,89	1,86	1,84	1,82
26	4,23	3,37	3,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	1,99	1,90	1,84	1,82	1,80	1,78
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	1,96	1,87	1,82	1,79	1,77	1,74
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,31	2,27	2,21	2,16	1,93	1,84	1,79	1,76	1,74	1,71
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,84	1,74	1,69	1,66	1,64	1,61
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,78	1,69	1,63	1,60	1,58	1,54
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,75	1,65	1,59	1,56	1,53	1,50
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,70	1,60	1,54	1,51	1,48	1,45
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,68	1,57	1,52	1,48	1,45	1,41

Додаток 4

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1052	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0748	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0216	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0098	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Закінчення додатку 4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 5

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000						
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2581	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3668
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830
0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159	1,20	0,3849

Продовження x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,21	0,3869	1,51	0,4345	1,81	0,4649	2,22	0,4868
1,22	0,3883	1,52	0,4357	1,82	0,4656	2,24	0,4875
1,23	0,3907	1,53	0,4370	1,83	0,4664	2,26	0,4881
1,24	0,3925	1,54	0,4382	1,84	0,4671	2,28	0,4887
1,25	0,3944	1,55	0,4394	1,85	0,4678	2,30	0,4893
1,26	0,3962	1,56	0,4406	1,86	0,4686	2,32	0,4898
1,27	0,3980	1,57	0,4418	1,87	0,4693	2,34	0,4904
1,28	0,3997	1,58	0,4429	1,88	0,4699	2,36	0,4909
1,29	0,4015	1,59	0,4441	1,89	0,4706	2,38	0,4913
1,30	0,4032	1,60	0,4452	1,90	0,4713	2,40	0,4918
1,31	0,4049	1,61	0,4463	1,91	0,4719	2,42	0,4922
1,32	0,4066	1,62	0,4474	1,92	0,4726	2,44	0,4927
1,33	0,4082	1,63	0,4484	1,93	0,4732	2,46	0,4931
1,34	0,4099	1,64	0,4495	1,94	0,4738	2,48	0,4934
1,35	0,4115	1,65	0,4505	1,95	0,4744	2,50	0,4938
1,36	0,4131	1,66	0,4515	1,96	0,4750	2,52	0,4941
1,37	0,4147	1,67	0,4525	1,97	0,4756	2,54	0,4945
1,38	0,4162	1,68	0,4535	1,98	0,4761	2,56	0,4948
1,39	0,4177	1,69	0,4545	1,99	0,4767	2,58	0,4951
1,40	0,4192	1,70	0,4554	2,00	0,4772	2,60	0,4953
1,41	0,4207	1,71	0,4564	2,02	0,4783	2,62	0,4956
1,42	0,4222	1,72	0,4573	2,04	0,4793	2,64	0,4959
1,43	0,4236	1,73	0,7582	2,06	0,4803	2,66	0,4961
1,44	0,4251	1,74	0,4591	2,08	0,4812	2,68	0,4963
1,45	0,4265	1,75	0,4599	2,10	0,4821	2,70	0,4965
1,46	0,4279	1,76	0,4608	2,12	0,4830	2,72	0,4967
1,47	0,4292	1,77	0,4616	2,14	0,4838	2,74	0,4969
1,48	0,4306	1,78	0,4625	2,16	0,4846	2,76	0,4971
1,49	0,4319	1,79	0,4633	2,18	0,4854	2,78	0,4973
1,50	0,4332	1,80	0,4641	2,20	0,4861	2,80	0,4974

Закінчення додатку 5

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,82	0,4976	2,92	0,4982	3,20	0,49931	4,50	0,499997
2,84	0,4977	2,94	0,4984	3,40	0,49966	5,00	0,499997
2,86	0,4979	2,96	0,4985	3,60	0,499841		
2,88	0,4980	2,98	0,4986	3,80	0,499928		
2,90	0,4981	3,00	0,49865	4,00	0,499968		

Додаток 6

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,56
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток 7

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	6,31	12,70	31,82	63,70	318,30	637,00
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,90
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55

Закінчення додатку 7

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (одностороння критична область)					

Додаток 8

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО

ФАКУЛЬТЕТ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ,
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ ТА УПРАВЛЯЮЧИХ СИСТЕМ

Кафедра інформаційних технологій

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
з дисципліни
«Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси
та математична статистика»
на тему: «Статистична обробка результатів експерименту»

Студента (ки) ____ курсу групи__
напряму підготовки ____________
____
(прізвище та ініціали)

Керівник
____
____
(посада, вчене звання, науковий ступінь,
прізвище та ініціали)

Оцінка:
за університетською шкалою ___
за шкалою ECTS ______________
за національною шкалою _______
«_____»_____________ 201__ р.

Черкаси – 2020 рік

Додаток 9

„Теорія ймовірностей та математична статистка”

Індивідуальне завдання

„Статистична обробка результатів спостережень”

студенту групи КС-031 *Донченко Руслану Петровичу.*

Варіант № __

На виході двох ідентичних систем автоматичного керування технологічними процесами встановлені реєстратори, які записують відхилення в часі вихідного параметру системи від заданого значення. При якісній роботі системи це відхилення повинно дорівнювати нулю, але за рахунок впливу на систему дії випадкових факторів воно виявляється відмінним від нуля.

Для аналізу якості роботи систем із записів реєстраторів зроблені вибірки X і Y однакового обсягу. Виходячи із принципу роботи систем автоматичного керування такого типу можна припустити, що відхилення вихідного параметру кожної із систем від заданого розподілені нормально. Оскільки системи працюють незалежно одна від одної, то вибірки незалежні.

Для кожної з вибірок необхідно:

1) побудувати гістограми частот;
2) знайти оцінки математичних сподівань і дисперсій генеральних сукупностей методом найбільшої правдоподібності. Для спрощення розрахунків використати метод добутків;
3) оцінити невідомі математичні сподівання *M[X]* і *M[Y]* генеральних сукупностей X і Y за допомогою довірчого інтервалу з надійністю 0,95;
4) запропонувати просту гіпотезу про рівність дисперсій генеральних сукупностей $H_0 : D(X) = D(Y)$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : D(X) \neq D(Y)$. Прийняти рівень значущості $\alpha = 0{,}1$. Перевірити запропоновану гіпотезу;

5) за вибірками з генеральних сукупностей X і Y побудувати нормальні криві;
6) перевірити гіпотези про нормальний розподіл генеральних сукупностей X та Y, використовуючи критерій погодженості Пірсона;
7) перевірити гіпотезу про рівність нулю математичних сподівань генеральних сукупностей X і Y ;
8) оцінити відхилення емпіричного розподілу від нормального;
9) за одержаними результатами обробки даних вибіркових сукупностей для кожної із генеральних сукупностей представити ймовірнісну теоретичну модель. Зробити висновки про якість роботи систем автоматичного керування.

Вихідні дані до роботи:

<table>
<tr><td rowspan="10">Варіант №</td><td rowspan="5">X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Завдання видав викладач ___________________________Косенюк Г.В.

Завдання прийняв студент __________________________Донченко Р.П.

„ ___ „ ________________” 202 __ р.

Термін здачі роботи 30 листопада 2020 р.

Додаток 9

Орієнтовні запитання
до захисту індивідуального завдання

1. З якою метою виконується індивідуальне завдання?
2. Чому різниця між заданим і дійсним параметрами не постійна, а має випадковий характер?
3. Чим забезпечується незалежність параметрів, записаних реєстраторами?
4. На якій підставі в завданні висунуто припущення про нормальний розподіл відхилень – різниці між вихідним сигналом і системи і заданим.
5. Чому припускається, що дисперсії відхилень рівні?
6. Як будуються варіаційні ряди сукупностей X і Y?
7. Статистичні ряди розподілу сукупностей X і Y дискретні чи інтервальні?
8. Як вибирається кількість інтервалів інтервального ряду розподілу
9. Які вимоги ставляться до форми гістограми частот?
10. Чи підходить для подальшої обробки результатів спостережень двомодальна гістограма частот? Чому?
11. Як виправити ситуацію, коли гістограма частот має більше одного максимуму?
12. Що називають точковою оцінкою?
13. Якими методами можна скористатистатися для знаходження точкових оцінок?
14. У чому полягає сутність методу найбільшої правдоподібності знаходження оцінок?
15. Що означає термін «рівновіддалені варіанти»?
16. Як в роботі одержати рівновіддалені варіанти?
17. Що означає термін «інтервальна оцінка»?
18. Що називають довірчою ймовірністю?
19. Що означає термін «надійність оцінки»?

20. Що називають довірчим інтервалом?
21. На якій підставі висуваються гіпотези про рівність дисперсій генеральних сукупностей?
22. На якій підставі висуваються гіпотези про рівність математичних сподівань генеральних сукупностей?
23. Що називають критерієм перевірки нульової гіпотези?

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ІМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки
до виконання індивідуального завдання

Рецензенти:
Давидюк Г.Є. - доктор фізико-математичних наук, професор (Волинський державний університет імені Лесі Українки)
Жолонко М.М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького)

Укладач: Косенюк Григорій Володимирович, канд. техн. наук, доц.

У власному редагуванні

Комп'ютерний набір Олексія Косенюка

Коректор Ольга Журавльова

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК