Звіт

про виконання завдання з самостійної роботи

з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика»

тема «Статистичні оцінки параметрів розподілу»

студентом Балинським Максимом Миколайовичем (група КН-21)

в 2022-2023 навчальному році

за індивідуальним варіантом №2

Задача 1. З нормально розподіленої генеральної сукупності взята вибірка об'єму n = 10:

Дані до задачі				
x_i	1250	1270	1280	1290
n_i	2	4	3	1

За вибіркою знайти:

1) незміщену оцінку генеральної середньої;

2) незміщену оцінку генеральної дисперсії;

3) інтервальну оцінку генеральної середньої з надійністю 0,95;

4) інтервальну оцінку генеральної дисперсії з надійністю 0,99.

Розв'язання:

1) Знайдемо незміщену оцінку генеральної середньої. В якості оцінки генеральної середньої приймають вибіркову середню:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n;$$

$$\bar{x}_{\text{в}} = (1250 + 1270 + 1280 + 1290)/4 = 1272{,}5.$$

2) Знайдемо вибіркову оцінку генеральної середньої дисперсії:

$$D_{\text{в}} = (2 \cdot (1250 - 1272{,}5)^2 + 4 \cdot (1270 - 1272{,}5)^2 + 3 \cdot (1280 - 1272{,}5)^2 + 1 \cdot (1290 - 1272{,}5)^2)/10 = 151{,}25.$$

Знайдемо незміщену оцінку генеральної середньої дисперсії:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}} = \frac{10}{9} \cdot 151{,}25 = 168{,}05.$$

3) Знайдемо інтервальну оцінку генеральної середньої з надійністю 0,95, використаємо формулу:

$$\bar{x}_{\text{в}} - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < \bar{x}_{\text{в}} + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Усі величини відомі, окрім t та середнього квадратичного відхилення. Знайдемо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{S^2};$$

$$\sigma = \sqrt{168{,}05} \approx 12{,}96.$$

Знайдемо t зі співвідношення $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, отже, t = 2,36. Підставивши значення, знайдемо інтервальну оцінку генеральної середньої:

$$1272{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{12{,}96}{\sqrt{10}} < a < 1272{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{12{,}96}{\sqrt{10}};$$

$$996{,}45 < a < 1002{,}54.$$

4) Знайдемо інтервальну оцінку генеральної дисперсії з надійністю 0,99, використаємо формулу:

$$D_{\text{в}} - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < D_{\text{в}} + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Усі величини відомі, окрім t. Знайдемо t зі співвідношення $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495$, отже, t = 2,58. Підставимо значення у формулу:

$$151{,}25 - 2{,}58 \cdot \frac{12{,}96}{\sqrt{10}} < a < 151{,}25 + \ 2{,}58 \cdot \frac{12{,}96}{\sqrt{10}};$$

$$140{,}67 < a < 161{,}82.$$

Відповідь: 1) $\bar{x}_{\text{в}}$ = 1272,5 − незміщена оцінка генеральної середньої;

2) $S^2 = 168{,}05$ − незміщена оцінка генеральної дисперсії;

3) 996,45< a <1002,54 − інтервальна оцінку генеральної середньої з надійністю 0,95;

4) 140,67< a <161,82 − інтервальна оцінка генеральної дисперсії з надійністю 0,99.

Задача 2. З нормально розподіленої генеральної сукупності взята вибірка об’єму n = 50:

Дані до задачі				
x_i	18,40	18,90	19,30	19,60
n_i	5	10	20	15

За вибіркою знайти:

1) незміщену оцінку генеральної середньої;

2) незміщену оцінку генеральної дисперсії;

3) інтервальну оцінку генеральної середньої з надійністю 0,95;

4) інтервальну оцінку генеральної дисперсії з надійністю 0,99.

Розв'язання:

1) Знайдемо незміщену оцінку генеральної середньої. В якості оцінки генеральної середньої приймають вибіркову середню:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n;$$

$$\bar{x}_{\text{в}} = (18{,}40 + 18{,}90 + 19{,}30 + 19{,}60)/4 = 19{,}05.$$

2) Знайдемо вибіркову оцінку генеральної середньої дисперсії:

$$D_{\text{в}} = (5 \cdot (18{,}40 - 19{,}05)^2 + 10 \cdot (18{,}90 - 19{,}05)^2 + 20 \cdot (19{,}60 - 19{,}05)^2 + 15 \cdot (19{,}60 - 19{,}05)^2)/50 = 0{,}2585\,.$$

Знайдемо незміщену оцінку генеральної середньої дисперсії:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}} = \frac{50}{49} \cdot 0{,}2585 \approx 0{,}2637.$$

3) Знайдемо інтервальну оцінку генеральної середньої з надійністю 0,95, використаємо формулу:

$$\bar{x}_{\text{в}} - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < \bar{x}_{\text{в}} + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Усі величини відомі, окрім t та середнього квадратичного відхилення. Знайдемо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{S^2};$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}2637} \approx 0{,}513.$$

Знайдемо t зі співвідношення $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475,$ отже, t = 1,96. Підставивши значення, знайдемо інтервальну оцінку генеральної середньої:

$$19,05 - 1,96 \cdot \frac{0,513}{\sqrt{50}} < a < 19,05 + 1,96 \cdot \frac{0,513}{\sqrt{50}};$$

$$18,9078 < a < 19,1922.$$

4) Знайдемо інтервальну оцінку генеральної дисперсії з надійністю 0,99, використаємо формулу:

$$D_{\text{в}} - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < D_{\text{в}} + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Усі величини відомі, окрім t. Знайдемо t зі співвідношення $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,99}{2} = 0,495,$ отже, t = 2,58. Підставимо значення у формулу:

$$0,2585 - 2,58 \cdot \frac{0,513}{\sqrt{10}} < a < 0,2585 + 2,58 \cdot \frac{0,513}{\sqrt{10}};$$

$$0,0713 < a < 0,4456.$$

Відповідь: 1) $\bar{x}_{\text{в}}$ = 19,05 − незміщена оцінка генеральної середньої;

2) $S^2 = 0,2585$ − незміщена оцінка генеральної дисперсії;

3) $18,9078 < a < 19,1922$ − інтервальна оцінку генеральної середньої з надійністю 0,95;

4) $0,0713 < a < 0,4456$ – інтервальна оцінка генеральної дисперсії з надійністю 0,99.