Звіт

про виконання завдання з самостійної роботи

з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика»

тема «Послідовності незалежних випробувань»

студентом Гриб Софією Юріївною (група КІ-21)

в 2022-2023 навчальному році

за індивідуальним варіантом №2

Завдання 1. Фабрика випускає 70 % продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що із 200 виробів, виготовлених фабрикою, кількість першосортних виробів буде: а) 55 виробів; б) 55 – 70; в) не більше 85.

Розв'язання:

а) Для знаходження ймовірності використаємо локальну теорему Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

n = 200 – загальна кількість випробувань. Знайдемо кількість першосортних виробів k = 55, також знайдемо відсоток не першосортних виробів q = 1 – 0,7 = 0,3, за умовою p = 0,7. Підставимо дані у формулу:

$$P_{200}(55) = \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{42}}\varphi(x).$$

Тепер за формулою знайдемо x:

$$x = \frac{(k - np)}{\sqrt{npq}};$$

$$x = \frac{55 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}3 \cdot 0.7}} \approx \text{-}13{,}11.$$

Знайдемо $\varphi(x) = \varphi(-13{,}11) = 0$. Тепер знайдемо ймовірність того, що кількість не першосортних виробів буде 55:

$$P_{200}(55) = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot 0 = 0.$$

Шукана ймовірність: 0.

б) За умовою k_1 = 55, k_2 = 70, значення n, p та q залишаються такими ж самими. Знайдемо ймовірність того, що подія відбудеться не більше 70 та не менше 55 разів, для цього використаємо інтегральну теорему Лапласа:

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x^n) - \Phi(x'),$$

$$де\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz,\ x' \text{та } x^n - \text{верхня та нижня межі інтегрування.}$$

Знайдемо верхню та нижню межі інтегрування:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \approx -13{,}11;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \approx -10{,}8.$$

Знайдемо значення за допомогою таблиці: *Φ(x') = 0,2794*, *Φ(x'')* = 0,4382. Тепер підставимо значення в інтегральну теорему Лапласа:

$$P_{200}(55, 70) = \Phi(-10{,}8) - \Phi(-13{,}11) = -\Phi(10{,}8) + \Phi(13{,}11)$$
$$= -0{,}499997 + 0{,}499997 = 0.$$

Шукана ймовірність: 0.

в) Задача схожа на задачу б, тому не більше 85 запишемо як k_1 та k_2, де k_1 = 0 *і* k_2 = 85, інші дані залишаються такі ж. У цій задачі також використаємо інтегральну теорему Лапласа:

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x^n) - \Phi(x'),$$

$$де\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz,\ x' \text{та } x^n - \text{верхня та нижня межі інтегрування.}$$

Знайдемо верхню та нижню межі інтегрування:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \approx -21{,}6;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{85 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} \approx -8{,}48.$$

Знайдемо значення за допомогою таблиці: *Ф(x') = -0,4999, Ф(x'')* = 0,4999. Тепер підставимо значення в інтегральну теорему Лапласа:

$$P_{200}(0,85) \approx \Phi(-21,6) - \Phi(-8,48) = -\Phi(21,6) + \Phi(8,48)$$
$$= -0,4999 + 0,4999) = 0.$$

Шукана ймовірність: 0.

Завдання 2. Серед великої кількості мікросхем, що знаходяться в комплекті, 15% – нестандартні. Знайти ймовірності того, що серед 3 мікросхем, навмання взятих із комплекту, буде:

а) тільки одна нестандартна;

б) принаймні одна нестандартна.

Розв'язання:

а) Ймовірність навмання взяти нестандартну деталь 15%, тому p = 0,15, тоді ймовірність взяти стандарту деталь: $q = 1 – p = 1 – 0,15 = 0,85$. Так як ми будемо брати 3 деталі, то $n = 3$, $k = 1$. Для знаходження ймовірності взяти тільки одну нестандартну деталь, використаємо формулу Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k};$$

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k};$$

$$P_3(1) = \frac{3!}{1!(3-1)!} * 0,15^1 * 0,85^{3-1} = 0,325.$$

Шукана ймовірність: 0,325.

б) Ймовірність навмання взяти нестандартну деталь 15%, тому p = 0,15, тоді ймовірність взяти стандарту деталь: $q = 1 – p = 1 – 0,15 = 0,85$. Так як ми будемо брати 3 деталі, то $n = 3$, $k = 1$. Ймовірність знайдемо за такою формулою:

$$P_n(k) = P_n(k) + P_n(k + 1) + \ldots + P_n(n) ;$$

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} + C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k+1} + \ldots + P_n(n);$$

$$P_3(1) = \frac{3!}{1!(3-1)!} * 0{,}15^1 * 0{,}85^{3-1} + \frac{3!}{2!(3-2)!} * 0{,}15^2 * 0{,}85^{3-2} + \frac{3!}{3!(3-3)!} * 0{,}15^3 * 0{,}85^{3-3} = 0{,}325 + 0{,}057 + 0{,}003 = 0{,}385.$$

Шукана ймовірність: 0,385.

Завдання 3. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на станцію протягом години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірності того, що протягом години на телефонну станцію зателефонують:

а) 3 абоненти;

б) не більше 2 абонентів.

Розв'язання:

а) Для знаходження ймовірності того, що протягом години на телефонну станцію зателефонують, потрібно використати формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!;$$

де *n = 1000 – кількість незалежних випробувань, k =3.*

Для знаходження λ використаємо формулу: $\lambda = np$, $p = 0{,}001$, тоді $\lambda = 1000 * 0{,}001 = 1$. За формулою Пуассона знайдемо шукану ймовірність:

$$P_{1000}(3) = e^{-1}/3! = 1/6e \approx 0{,}06.$$

Шукана ймовірність: $P1000 = (3) \approx 0{,}06$.

б) Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на станцію протягом години 0,001, тобто $p = 0{,}001$, за умовою кількість абонентів 1000, тобто $n = 1000$. Для знаходження λ використаємо формулу: $\lambda = np$, тоді $\lambda = 1000 * 0{,}001 = 1$. Так як нам потрібно обчислити ймовірність того, що протягом години зателефонують не більше 2 абонентів, то доцільно обчислити ймовірність протилежних подій, тобто 1 або 2 абоненти серед 1000 зателефонують на станцію. Нехай p_1 – зателефонував один абонент, p_2 – зателефонувало два абоненти. Використаємо формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!;$$

$$P_{1000}(1) = e^{-1}/1! = 1/1e \approx 0{,}367;$$

$$P_{1000}(2) = e^{-1}/2! = 1/2e \approx 0{,}183.$$

Тепер знайдемо шукану ймовірність: $p_1 + p_2 = 0{,}367 + 0{,}183 = 0{,}55$.

Шукана ймовірність: 0,55.