Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

„Диференциални уравнения и приложения“

спец. Информатика, 2 курс, зимен семестър,

учебна година 2023/2024

Тема № ИНФ2023-УП-3.8.

04.02.2024 г.

София

Изготвил: Стоян Стоянов Иванов

Ф. No. 9MI0400132

Група III

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема на проекта:

Учебен проект по ДУПрил

спец. ИНФОРМАТИКА, 2 курс, зимен семестър, уч. год. 2023/2024

Тема ИНФ2023-УП-3.8.

Задача 1.

Дадена е задачата на Коши

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = x + y + z + \sin t, \\ \dot{y} = x + y - 2z + \sin t, \\ \dot{z} = x - y - z, \\ x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1. \end{array}\right.$$

а) Решете символно дадената задача на Коши и начертайте графиката на $y(t)$ в подходящ интервал.

б) Опишете метода на Ойлер за намиране на решение на дадената задача на Коши.

в) Решете числено дадената задача на Коши с метода на Ойлер със стъпки $h_1 = 0.6, h_2 = 0.03, h_3 = 0.02$. Начертайте графиките на полученото приближение на $y(t)$ в същия интервал.

Задача 2.

Дадена е системата

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y(y-2) \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{array}\right.$$

а) Намерете нейните равновесни точки и ги изследвайте относно устойчивост.

б) Напишете линейното приближение на системата в околност на една от намерените равновесни точки.

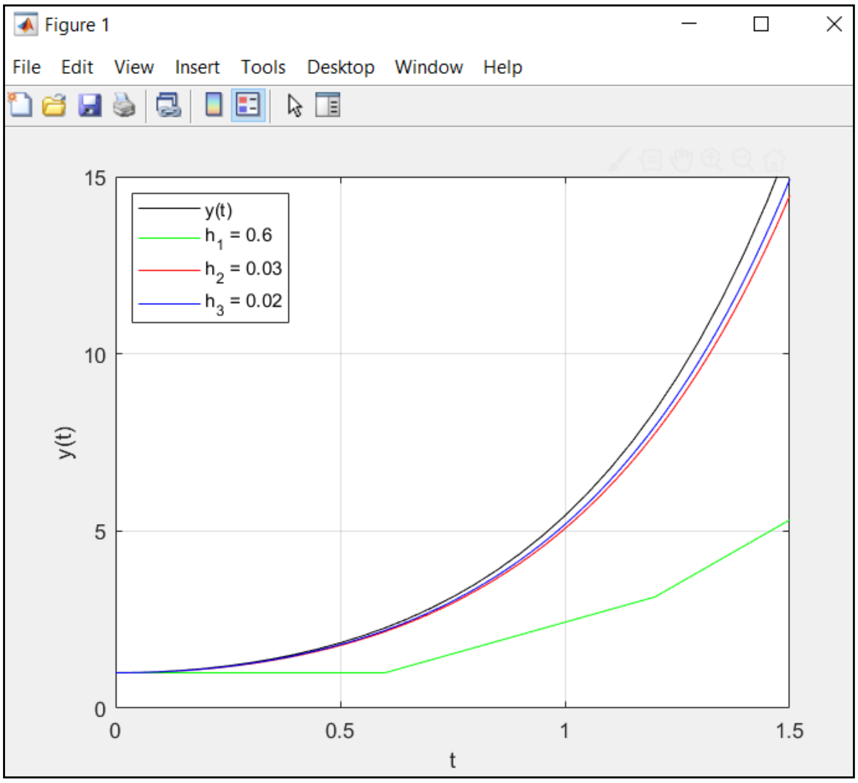
в) Начертайте (с MATLAB) фазов портрет на написанта линейна система в подточка (б). Към всяка една от изобразените фазови криви (без равновесната точка) начертайте по един тангенциален вектор. Маркирайте със символа звезда положението на равновесие.

2.1. Код на MATLAB за подточка (А):

```
function [sol_x, sol_y, sol_z] = task_1

        t = 0 : 0.05 : 5;
        h = [0.6, 0.03, 0.02];

        [sol_x, sol_y, sol_z] = dsolve ('Dx = x + y + z + sin(t)', 'Dy = x + y - 2*z + sin(t)',  'Dz = x - y - z', 'x(0) = 1', 'y(0) = 1', 'z(0) = 1');

        plot(t, eval(sol_y), 'k');
        hold on
        axis([0, 1.5, 0, 15])
        grid on

        for k = 1 : length(h)

                t_range = 0 : h(k) : 5;

        x = ones(size(t_range));
        y = ones(size(t_range));
        z = ones(size(t_range));

            for n = 1 : length(t_range) - 1
                x(n + 1) = x(n) + h(k) * (x(n) + y(n) + z(n) + sin(t_range(n)));
                y(n + 1) = y(n) + h(k) * (x(n) + y(n) - 2 * z(n) + sin(t_range(n)));
                z(n + 1) = z(n) + h(k) * (x(n) - y(n) - z(n));
            end

            if k == 1
                plot(t_range, y, 'g');
            end

            if k == 2
                plot(t_range, y, 'r');
            end

            if k == 3
                plot(t_range, y, 'b');
            end
        end

        legend show
        legend({'y(t)', 'h_1 = 0.6', 'h_2 = 0.03', 'h_3 = 0.02'}, 'Location', 'northwest')
    xlabel('t')
    ylabel('y(t)')

end
```

```
sol_x =     (13*exp(2*t))/15
          + 1/(6*exp(13^(1/2)*t)^(1/2)*exp(t)^(1/2))
          + exp(13^(1/2)*t)^(1/2)/(6*exp(t)^(1/2))
          - (5^(1/2)*cos(t - atan(2)))/5
          - (11*13^(1/2))/(78*exp(13^(1/2)*t)^(1/2)*exp(t)^(1/2))
          + (11*13^(1/2)*exp(13^(1/2)*t)^(1/2))/(78*exp(t)^(1/2));

sol_y =     (13*exp(2*t))/15
          + 1/(6*exp(13^(1/2)*t)^(1/2)*exp(t)^(1/2))
          + exp(13^(1/2)*t)^(1/2)/(6*exp(t)^(1/2))
          - (5^(1/2)*cos(t - atan(2)))/5
          + (7*13^(1/2))/(78*exp(13^(1/2)*t)^(1/2)*exp(t)^(1/2))
          - (7*13^(1/2)*exp(13^(1/2)*t)^(1/2))/(78*exp(t)^(1/2));

sol_z =     1/(2*exp(13^(1/2)*t)^(1/2)*exp(t)^(1/2))
          + exp(13^(1/2)*t)^(1/2)/(2*exp(t)^(1/2))
          + 13^(1/2)/(26*exp(13^(1/2)*t)^(1/2)*exp(t)^(1/2))
          - (13^(1/2)*exp(13^(1/2)*t)^(1/2))/(26*exp(t)^(1/2));
```

2.2. Графика на получено приближение за y(t) за подточка (B):



2.3. Описание метода на Ойлер за подточка (Б):

1) Б) Метод на Ойлер:

В интервала $[x_0, A]$ се избират N точки: $x_0, x_1 \dots x_N \equiv A$. Това става равномерно, като се изчислява стъпка $h = \frac{A - x_0}{N}$ и точките се намират по формулата: $x_i = x_0 + ih \quad i = 0, 1, 2 \dots N$. Тогава $x_1 - x_0 = h$, $x_2 - x_1 = h$ и т.н. . .

Развиваме функцията $y(x)$ в $x_1 = x_0 + h$ по формулата на Тейлър около точката x_0. Имаме $y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(\alpha)$, $\alpha \in (x_0, x_1)$. Тъй като търсим функция, която удовлетворява уравнението $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ и началното условие $y(x_0) = y_0$, се получава $y(x_1) = y(x_0) + h f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} y''(\alpha)$, $\alpha \in (x_0, x_1)$. Тук последното събираемо разглеждаме като локална грешка за точката x_0. Намираме приближена формула за $y_1(x)$ т.е. $y_1(x) = y_0 + h f(x_0, y_0) \Rightarrow$ щом знаем решението в (x_0, y_0), намираме решението в съседната точка (x_1, y_1).
Грешката тук е $R(x) = \frac{h^2}{2!} y''(\alpha)$, $\alpha \in (x_0, x_1)$ т.е. сложността е $O(h^2)$

$\Rightarrow$ Общата формула за метода на Ойлер е:

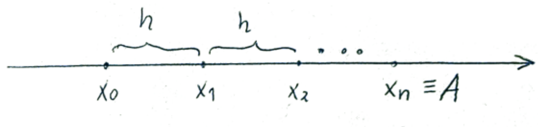
$$y(x_{i+1}) = y_i + h f(x_i, y_i) \text{ за } i = 0, 1 \dots N-1$$

Прилагаме горните разсъждения за
и търсим за $y(t)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + z + \sin(t) \\ \dot{y} = x + y - 2z + \sin(t) \\ \dot{z} = x - y - z \\ x(0) = 1;\ y(0) = 1;\ z(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(x_n + y_n + z_n + \sin(t_n)) \\ y_{n+1} = y_n + h(x_n + y_n - 2z_n + \sin(t_n)) \\ z_{n+1} = z_n + h(x_n - y_n - z_n) \\ n \in [1 \dots N-1] \end{cases}$$

Нека $t \in [0, 5]$. От $h = \frac{A - x_0}{N} \Rightarrow N = \frac{A - x_0}{h}$. За $h_1 = 0{,}6$ следва, че $N = \frac{5-0}{0{,}6} = 8\frac{1}{3}$ итерации. За $h_2 = 0{,}03$ следва, че $N = \frac{5-0}{0{,}03} = 166\frac{2}{3}$ итерации. За $h_3 = 0{,}02$ следва, че $N = \frac{5-0}{0{,}02} = 250$ итерации



Правим проверка за ефективността на метода по формулата
$N h^2 = (A - x_0) h$

За $h_1 = 0{,}6$ имаме $8\frac{1}{3} \cdot 0{,}6^2 = (5-0) \cdot 0{,}6 \overset{1}{\Leftrightarrow} \frac{25}{3} \cdot \frac{9}{25} = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$

1 е ефективността на метода

За $h_2 = 0{,}03$ има $166\frac{2}{3} \cdot 0{,}03^2 = (5-0) \cdot 0{,}03 \overset{1}{\Leftrightarrow} \frac{500}{3} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^2 \Leftrightarrow 0{,}15 = 0{,}15$

За $h_3 = 0{,}02$ има $250 \cdot 0{,}02^2 = (5-0) \cdot 0{,}02 \overset{1}{\Leftrightarrow} 250 \cdot \frac{1}{2500} = 0{,}1 \Leftrightarrow$
$0{,}1 = 0{,}1$

3.1. Равновесни точки и устойчивост – подточка (А):

3.2. Линейно приближение за равновесна точка (0,0) – подточка (Б):

2 а) и б)

$$\begin{cases} \dot{x} = y(y-2) = y^2 - 2y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$$

1) Намиране равновесни точки:

$$\begin{cases} y(y-2)=0 \\ -x-2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=0 \\ x_1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2=2 \\ -x_2-4=0;\ x_2=-4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Равновесните точки са $(x_1, y_1)=(0,0)$ и $(x_2, y_2)=(-4,2)$

Дефиниция: $Ax+By+C=0$

$$f(x,y) \sim f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$
$$g(x,y) \sim g(a,b) + g'_x(a,b)(x-a) + g'_y(a,b)(y-b)$$

Правим линейно (първо) приближение:

$$\begin{cases} \dot{x} = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) \\ \dot{y} = g'_x(a,b)(x-a) + g'_y(a,b)(y-b) \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(a,b) = \begin{pmatrix} f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \\ g'_x(a,b) & g'_y(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y-2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0.(x-a) + (-2)(y-b) \\ \dot{y} = (-1)(x-a) + (-2)(y-b) \end{cases} \text{ за } (x_1, y_1) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0.x - 2.y \\ \dot{y} = -1x - 2.y \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \text{ и } \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \ \& \ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Фазовият портрет в околността на равновесната точка $(x_1, y_1)=(0,0)$ е седло, за $\lambda_{1,2}$ – собствени с-ти на матр. A.

2) Фундаменталната система решения е $ФСР = \{ e^{(-1+\sqrt{3})t}, e^{(-1-\sqrt{3})t} \}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_1.\vec{u}.e^{(-1+\sqrt{3})t} + C_2.\vec{v}e^{(-1-\sqrt{3})t}$$, където C_1 и C_2 са произволни const, $\vec{u}$ & $\vec{v}$ са собств. вектори

3) Собствени вектори:

$\lambda_1 = -1+\sqrt{3}$: $(A - \lambda_1 E)\vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & -2 \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} (1-\sqrt{3})u_1 - 2u_2 = 0 \\ -1\,u_1 + (-1+\sqrt{3})u_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow u_1 = (-1+\sqrt{3})u_2 \text{ т.е. избираме } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\lambda_2 = -1-\sqrt{3}$: $(A - \lambda_2 E)\vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -2 \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} (1+\sqrt{3})v_1 - 2v_2 = 0 \\ -1\,v_1 + (-1+\sqrt{3})v_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow v_1 = (-1+\sqrt{3})v_2 \text{ т.е. избираме } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{(-1+\sqrt{3})t}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(-1-\sqrt{3})t}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) Графика на кривите:

$$L_{c_1c_2} \left| \begin{array}{l} x_\ell(t) = c_1 e^{(-1+\sqrt{3})t} \\ y_\ell(t) = c_2 e^{(-1-\sqrt{3})t} \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Чертаем първо в декартова коорд. система и след това в базиса (*) и (**). Фазовият портрет ще бъде в базиса същият, но деформиран. Нека c_1 и $c_2 > 0$, за да сме в I-ви квадрант.

4.1) $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow (x_\ell, y_\ell) = (0,0) = (x_1, y_1)$ – равновесната точка

4.2.) $c_1 \neq 0,\ c_2 = 0 \Rightarrow (x_\ell, y_\ell) = (c_1 e^{(-1+\sqrt{3})t}, 0)$ – полуос $O^+_{x_\ell} \setminus \{0,0\}$

4.3.) $c_1 = 0,\ c_2 \neq 0 \Rightarrow (x_\ell, y_\ell) = (0, c_2 e^{(-1-\sqrt{3})t})$ – полуос $O^+_{y_\ell} \setminus \{0,0\}$

4.4.) $c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0 \Rightarrow$ изключваме t. Повдигаме на $\uparrow^{-1}$

$$\left| \begin{array}{l} x_\ell^{-1} = c_1 e^{+(1-\sqrt{3})t} \\ y_\ell = c_2 e^{-(1+\sqrt{3})t} \end{array} \right. \Rightarrow x_\ell^{-1} y_\ell = c_1 c_2 \text{ или } y_\ell = c_1 c_2 \cdot x_\ell^{-1} \text{ т.е. хиперболи}$$

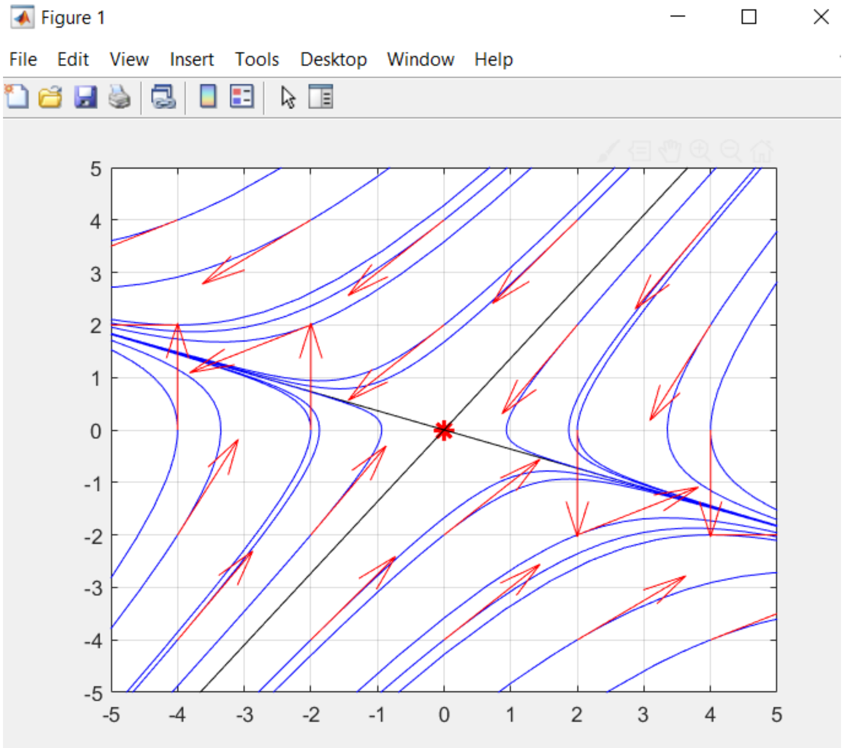
$$x_\ell \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \qquad x_\ell \xrightarrow[t\to-\infty]{} +\infty$$

$$y_\ell \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \qquad y_\ell \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$$

и е симетрично в останалите квадранти

5) Към базиса (*), (**)

3.3. Фазов портрет и код на MATLAB за подточка (В):




```
function task_2

        A = [0, -2; -1, -2];

    eq_point = A \ [0;0];
        plot(eq_point(1), eq_point(2), 'r*', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
    hold on
        axis([eq_point(1) - 5, eq_point(1) + 5, eq_point(2) - 5, eq_point(2) + 5])
        grid on

    [T, D] = eig(A);
    range = -10 : 1 : 10;

        if imag(D(1,1)) == 0
            plot(eq_point(1) + T(1,1) * range, eq_point(2) + T(2,1) * range, 'k');
            plot(eq_point(1) + T(1,2) * range, eq_point(2) + T(2,2) * range, 'k');
        end

    x = eq_point(1) - 4 : 2 : eq_point(1) + 4;
        y = eq_point(2) - 4 : 2 : eq_point(2) + 4;

    [X, Y] = meshgrid(x,y);

        t_max = 50;

        function z = rhs(~, y)
                        z = A * y;
        end

        for i = 1 : length(x)
            for j = 1 : length(y)
                [~, Z_1] = ode45(@rhs, [0, t_max], [X(i,j), Y(i,j)]);
                [~, Z_2] = ode45(@rhs, [0, -t_max], [X(i,j), Y(i,j)]);
                plot(Z_1(:,1), Z_1(:,2), 'b');
                plot(Z_2(:,1), Z_2(:,2), 'b');

            end
        end

    Dx = A(1,1) * x + A(1,2) * Y;
        Dy = A(2,1) * x + A(2,2) * Y;

        d = sqrt(Dx.^2 + Dy.^2);
        quiver(X, Y, Dx./d, Dy./d, 'r');
end
```

4. Използвана литература:

1. „Диференциални уравнения и приложения ” – ЛЕКЦИЯ 2 и 3 – доц. д-р Тодор Павлов Попов;
2. „Компютърни числени методи” – ЛЕКЦИЯ 9 – проф. д-р Снежана Гочева – Илиева;
3. „Диференциални уравнения и приложения – летен 2022 (за спец. софтуерно инженерство)” – изследовател R1 д-р Матей Константинов.