数值分析 期末速通教程

2. 插值

2.1 多项式插值

[**定义2.1.1**] 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 给定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $(n+1)$ 个相异节点 $a\leq x_0<x_1<\cdots<x_n\leq b$ 的函数值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$, 若存在简单函数 $P(x)$ 满足**插值条件** $P(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$, 则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**插值函数**, 称 $[a,b]$ 为**插值区间**, 称 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为**插值节点**, 求插值函数的方法称为**插值方法**, 简称**插值法**. 在 $[a,b]$ 上, 用简单函数 $P(x)$ 近似函数 $f(x)$ 产生的误差函数称为**插值余项**, 记作 $R(x)=f(x)-P(x)$. 若插值函数 $P(x)$ 是 $\deg\leq n$ 的代数多项式, 即 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 其中系数 $a_i\in\mathbb{R}\ \ (i=0,1,\cdots,n)$, 则称 $P(x)$ 为**插值多项式**, 称对应的插值法为**多项式插值**; 若 $P(x)$ 是分段多项式, 则称对应的插值法为**分段多项式插值**; 若 $P(x)$ 是三角多项式, 则称对应的插值法为**三角插值**.

[**定理2.1.1**] [**插值多项式的存在唯一性**] 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 $(n+1)$ 个互异节点 $a\leq x_0<x_1<\cdots<x_n\leq b$ 处的函数值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$, 则 $\exists$ 唯一的 $\deg\leq n$ 的代数多项式 $P(x)$ 满足插值条件 $P(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$.

[**证**] $P(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$ 即 $\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0\\a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1\\\cdots\\a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n\end{cases}$.

方程组的系数矩阵的行列式 $\begin{vmatrix}1&x_0&x_0^2&\cdots&x_0^n\\1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{0\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)\neq 0$, 则有唯一解.

2.2 Lagrange插值

[**定理2.2.1**] [**Lagrange 插值多项式**] 插值多项式都表示为插值节点的已知值 y_i 和节点上的插值基函数 l_i 的线性组合, 这样的插值多项式称为**Lagrange 插值多项式**.

(1) [**一次插值多项式, 线性插值多项式**] $s.t.\ L_1(x_0)=y_0,L_1(x_1)=y_1$ 的一次多项式为 $L_1(x)=l_0(x)\cdot y_0+l_1(x)\cdot y_1$, 其中 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$, $l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$ 都是线性多项式, 且 $l_i(x_j)=\delta_{i,j}=[i=j]\ \ (0\leq i,j\leq 1)$. 称 $l_0(x)$, $l_1(x)$ 为节点 x_0 , x_1 处的线性插值基函数.

(2) [**二次插值多项式, 抛物插值多项式**] $s.t.\ L_2(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,2)$ 的二次多项式为 $L_2(x)=l_0(x)\cdot y_0+l_1(x)\cdot y_1+l_2(x)\cdot y_2$, 其中 $l_0(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$, $l_1(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$, $l_2(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ 都是二次多项式, 且 $l_i(x_j)=\delta_{i,j}=[i=j]\ \ (0\leq i,j\leq 2)$. 称 $l_i(x)\ \ (i=0,1,2)$ 为节点 x_0,x_1,x_2 处的二次插值基函数.

(3) [n **次插值多项式**] 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 $(n+1)$ 个相异节点 $a\leq x_0<x_1<\cdots<x_n\leq b$ 处的函数值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$, 则 $\exists$ 唯一的 n **次 Lagrange 插值多项式**
$L_n(x)=\sum\limits_{k=0}^n l_k(x)\cdot y_k=\sum\limits_{k=0}^n y_k\cdot\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n\dfrac{x-x_i}{x_k-x_i}$, 其中
$l_k(x)=\dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n\dfrac{x-x_i}{x_k-x_i}\ \ (k=0,1,\cdots,n)$ 称为 n **次 Lagrange 插值基函数**, 它们都是 n 次多项式, 且 $l_k(x_j)=\delta_{k,j}=[k=j]\ \ (0\leq k,j\leq n)$. 令
$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, 则
$w'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$, 进而 $l_k(x)=\dfrac{w_{n+1}(x)}{(x-x_k)\cdot w'_{n+1}(x_k)}$,
$L_n(x)=w_{n+1}(x)\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{y_k}{(x-x_k)\cdot w'_{n+1}(x_k)}$.

[**证**]

(2) 以求 $l_0(x)$ 为例. 因 l_0 是二次多项式, 且零点为 x_1 , x_2 , 则 $l_0(x)=A(x-x_1)(x-x_2)$.

代入 $l_0(x_0)=1$, 解得: $A=\dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$.

[**注**] Lagrange 插值的优缺点:

(1) 优点: 插值基函数和插值多项式形式对称, 易编程. 节点不变而函数值变化时, 基函数不变, 可用于不同批次的采样值.

(2) 缺点: 节点或节点个数改变时, 全部插值基函数都变化, 插值多项式也变化, 在实际计算中不方便.

[**例2.2.1**] 函数 $y=f(x)$ 的函数表如下.

x_i	1	2	3
y_i	2	-1	2

(1) 求抛物插值多项式.

(2) 求 $f(1.5)$ 的近似值.

[**解**]

(1) $L_2(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\cdot 2+\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\cdot(-1)+\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\cdot 2$

$=3x^2-12x+11$.

(2) $f(1.5)\approx L_2(1.5)=-\dfrac{1}{4}$.

[**定理2.2.1**] $l_i(x)\ \ (0\leq i\leq n)$ 是关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的插值基函数, 则:

(1) ① $\displaystyle\sum_{i=0}^n l_i(x_i)=n$; ② $\displaystyle\sum_{i=0}^n l_k(x_i)=1\ \ (0\leq k\leq n)$.

(2) $\displaystyle\sum_{i=0}^n x_i^m\cdot l_i(x_i)=x^m\ \ (0\leq m\leq n)$.

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^n (x_j-x)^k\cdot l_j(x)=0\ \ (k=1,\cdots,n)$.

[**证1**]

(2) 注意到 LHS 是函数 x^k 的关于相异节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 $\deg\leq n$ 的插值多项式,

而 x^k 是自身的 $\deg\leq n$ 的插值多项式, 由插值多项式的唯一性即证.

(3) 原式 $\displaystyle=\sum_{j=0}^n\left[l_j(x)\cdot\sum_{i=0}^k C_k^i x_j^i(-x)^{k-i}\right]=\sum_{j=0}^n\sum_{i=0}^k\left[l_j(x)\cdot C_k^i x_j^i(-x)^{k-i}\right]$

$\displaystyle=\sum_{i=0}^k\sum_{j=0}^n\left[l_j(x)\cdot C_k^i x_j^i(-x)^{k-i}\right]=\sum_{i=0}^k\left[C_k^i(-x)^{k-i}\cdot\sum_{j=0}^n l_j(x)\cdot x_j^i\right]$

$\displaystyle=\sum_{i=0}^n C_k^i(-x)^{k-i}\cdot x^i$ * 由 (2) .

$=(x-x)^i\equiv 0$.

[**证2**]

(2) 设 $f(x)=x^k\ \ (k=0,1,\cdots,n)$, 则 $f(x)$ 的 n 次 Lagrange 插值多项式 $\displaystyle L_n(x)=\sum_{j=0}^n x_j^k\cdot l_j(x)$,

插值余项 $\displaystyle R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot w_{n+1}(x)$.

注意到 $\displaystyle f^{(n+1)}(x)=\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}x^k=0\ \ (k\leq n)$, 则 $f^{(n+1)}(\xi)=0$, 即 $R_n(x)=0$, 亦即 $L_n(x)=f(x)$.

[**例2.2.2**] 设 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_5$ 的插值基函数. 求证: $\displaystyle\sum_{i=0}^5(x_i-x)^2\cdot l_i(x)=0$.

[**证**] 原式 $\displaystyle=\sum_{i=0}^5(x_i^2-2x_i\cdot x+x^2)\cdot l_i(x)$

$\displaystyle=\sum_{i=0}^5 x_i^2\cdot l_i(x)-2x\cdot\sum_{i=0}^5 x_i\cdot l_i(x)+x^2\cdot\sum_{i=0}^5 l_i(x)=x^2-2x\cdot x+x^2\cdot 1=0$.

[**定理2.2.2**] 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数, 在区间 (a,b) 上有 $(n+1)$ 阶导数, 则用 n 次 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 近似函数 $f(x)$ 的误差或**插值余项** $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot w_{n+1}(x)$, 其中 $\xi\in(a,b)$ 且依赖于 x .

(1) 特别地, 若 $\max\limits_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M$, 则 $|R_n(x)|\leq\dfrac{M}{(n+1)!}\cdot|w_{n+1}(x)|$.

(2) 常用的低阶插值余项公式:

① $n=1$ 时, $R_1(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-x_0)(x-x_1)$, 其中 $\xi\in(a,b)$.

② $n=2$ 时, $R_2(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{6}\cdot(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$, 其中 $\xi\in(a,b)$.

[**例2.2.3**] 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 的一组数据如下.

x_i	1	2	3
y_i	0.3679	0.1353	0.0183

用抛物插值求 $\mathrm{e}^{-2.1}$ 的近似值, 并估计误差.

[**解**]

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-2.1}\approx L_2(2.1)\\&=\frac{(2.1-x_1)(2.1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\cdot y_0+\frac{(2.1-x_0)(2.1-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot y_1+\frac{(2.1-x_0)(2.1-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\cdot y_2\\&=\frac{0.1\times(-0.9)}{2}\times0.3679+\frac{1.1\times(-0.9)}{-1}\times0.1353+\frac{1.1\times0.1}{2}\times0.0183\approx0.1184\ .\end{aligned}$$

$|R_2(x)|=\dfrac{1}{6}\left|\mathrm{e}^{-\xi}\cdot(x-1)(x-2)(x-3)\right|<\dfrac{1}{6\mathrm{e}}|(x-1)(x-2)(x-3)|$, 其中 $\xi\in(1,3)$.

则 $|R_2(2.1)|<\dfrac{0.3679}{6}\times0.099\leq0.0060701$.

[**例2.2.4**] 设函数 $f(x)\in C^2[a,b]$, 其中 $[a,b]$ 是区间. 求证:
$\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|f(x)-\left[f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|\leq\dfrac{(b-a)^2}{8}M$, 其中 $M=\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|f''(x)\right|$.

[**证**] 注意到 $f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上过点 $(a,f(a))$ 和点 $(b,f(b))$ 的线性插值多项式 $L_1(x)$,

由余项公式: $\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)-L_1(x)|=\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|\dfrac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-a)(x-b)\right|$

$$\leq\frac{M}{2}\cdot\max_{a\leq x\leq b}|(x-a)(x-b)|=\frac{(b-a)^2}{8}\cdot M\ .$$

[例2.2.5] 设 $f(x) \in C^2[a,b]$, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 求证: $\max\limits_{a \le x \le b} |f(x)| \le \dfrac{(b-a)^2}{8} \cdot \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

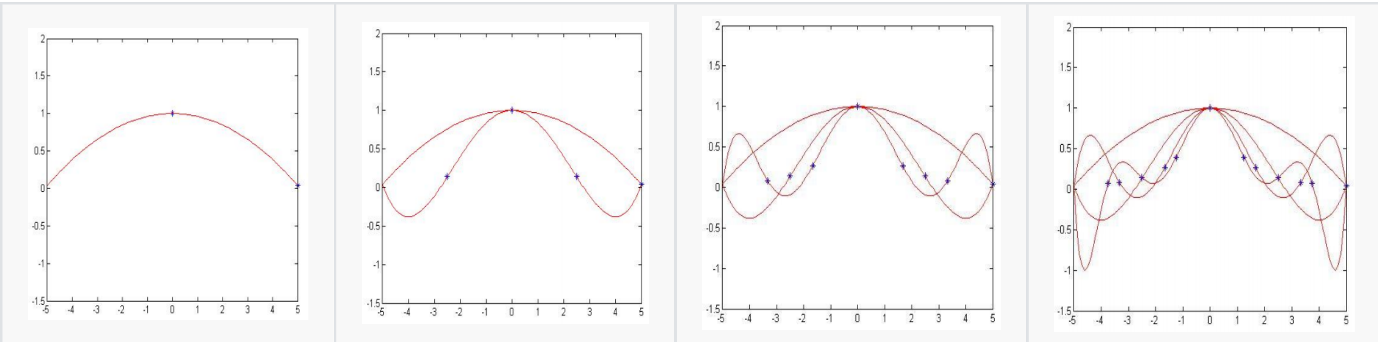
[证1] 取 $f(x)$ 的一阶Lagrange插值多项式 $L_1(x) = f(a) \cdot \dfrac{x-b}{a-b} + f(b) \cdot \dfrac{x-a}{b-a}$.

由余项公式 $|R_n(x)| = |f(x) - L_1(x)| = \left| \dfrac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x-a)(x-b) \right|$

$$\le \frac{1}{2} \max_{a \le x \le b} |f''(\xi)| \cdot \max_{a \le x \le b} |(x-a)(x-b)| \le \frac{(b-a)^2}{8} \cdot \max_{a \le x \le b} |f''(x)| .$$

[证2] **例2.2.4** 中代入 $f(a) = f(b) = 0$ 即证.

[例2.2.6] [**Runge 现象**] 对函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \ \ (-5 \le x \le 5)$, 用 Lagrange 插值多项式, 取不同的插值节点数 $(n+1)$, 其中 n 为插值多项式的次数, 得到的函数图象如下图所示.



由图知: 插值节点数较多时, 构造的高次插值多项式有大震荡, 余项不收敛到 0 , Lagrange 插值多项式的这种震荡现象称为**Runge现象**.

[注1] 一般地, 插值节点越多、插值多项式的次数越高, 误差越小, 函数逼近越好. 但并非所有连续函数都如此, 因为插值余项不仅与插值节点有关, 还与函数的高阶导有关.

[注2] 为提高插值精度, 可用分段低次插值.

2.3 差商与 Newton 插值

[定义2.3.1] 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 $(n+1)$ 个相异节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$. 称 $f[x_k,x_j]=\dfrac{f(x_k)-f(x_j)}{x_k-x_j}=\dfrac{f(x_j)-f(x_k)}{x_j-x_k}$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_k,x_j 的 1 **阶差商**, 称 $f[x_i,x_j,x_k]=\dfrac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_k-x_i}$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i,x_j,x_k 的 2 **阶差商**, 称 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\dfrac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_k]}{x_k-x_0}$ 为 $f(x)$ 关于节点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的 k 阶差商. 特别地, 规定 $f(x_i)$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i 的 0 **阶差商**.

[注] 差商的计算方法: 差商表.

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,\cdots,x_4]$

[定理2.3.1] 差商的性质.

(1) 差商可用函数值线性表示. 函数 $f(x)$ 的 k 阶差商可用函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)$ 线性表示为 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$.

① 二阶差商 $f[x_i,x_j]=\dfrac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}=\dfrac{f(x_i)}{x_i-x_j}+\dfrac{f(x_j)}{x_j-x_i}$.

② 三阶差商 $f[x_i,x_j,x_k]=\dfrac{f(x_i)}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}+\dfrac{f(x_j)}{(x_j-x_k)(x_j-x_i)}+\dfrac{f(x_k)}{(x_k-x_j)(x_k-x_i)}$.

(2) **[差商的对称性]** k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]$ 关于节点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 对称, 即将节点任意重排后差商不变.

(3) **[差商与导数的关系]** 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在 k 阶导数, 且节点 $x_0,x_1,\cdots,x_k\in[a,b]$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ $s.t.\ f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\dfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$.

[证] (1) ② $f[x_i,x_j,x_k]=\dfrac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}=\dfrac{\dfrac{f(x_k)-f(x_j)}{x_k-x_j}-\dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}}{x_k-x_i}$

$$=\frac{[f(x_k)-f(x_j)]\cdot(x_j-x_i)-[f(x_j)-f(x_i)]\cdot(x_k-x_j)}{(x_k-x_j)(x_j-x_i)(x_k-x_i)}$$

$$=\frac{(x_j-x_i)\cdot f(x_k)-(x_j-x_i)\cdot f(x_j)-(x_k-x_j)\cdot f(x_j)+(x_k-x_j)\cdot f(x_i)}{(x_k-x_j)(x_j-x_i)(x_k-x_i)}$$

$$=\frac{f(x_k)}{(x_k-x_j)(x_k-x_i)}-\frac{f(x_j)}{(x_k-x_j)(x_j-x_i)}+\frac{f(x_i)}{(x_j-x_i)(x_k-x_i)}$$

$$= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} + \frac{f(x_j)}{(x_j - x_k)(x_j - x_i)} + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_j)(x_k - x_i)} .$$

[**定义2.3.2**] 设函数 $f(x)$ 在节点 $x_i \ \ (i = 0, 1, \cdots, n)$ 处的函数值为 $f(x_i)$, 则过这 $(n+1)$ 个节点的 n **次 Newton 插值多项式** $N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$, 其中插值基函数为 1 , $(x - x_0)$, $(x - x_0)(x - x_1)$, $\cdots$, $(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$. 因 $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x, x_0]$, $f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) \cdot f[x, x_0, x_1]$, $\cdots$, $f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, \cdots, x_n] + (x - x_n) \cdot f[x, x_0, \cdots, x_n]$, 将后式代入前式得: $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) + \cdots + (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \cdot f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ $+ (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n) \cdot f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]$, 即 $N_n(x)$ 中 $a_i = f[x_0, x_1, \cdots, x_i]$, 余项 $R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n) \cdot f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = w_{n+1}(x) \cdot f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]$.

[**注1**] 由插值多项式的唯一性: $N_n(x) \equiv L_n(x)$, 其插值系数 $a_i = f[x_0, x_1, \cdots, x_i] \ \ (i = 0, 1, \cdots, n)$.

因 $w_{n+1}(x) \cdot f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x)$, 则 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, 其中 $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

[**注2**] Newton 插值多项式相比 Lagrange 插值多项式的优点: 易增加节点.

[**例2.3.1**] 函数 $f(x)$ 的函数表如下.

x_k	0	1	2	4
$f(x_k)$	1	9	23	3

(1) 求 Lagrange 插值多项式.

(2) 求 Newton 插值多项式.

(3) 插值余项.

[**解**]

(1) 插值基函数 $l_0(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{7}{8}x^2 - \dfrac{7}{4}x + 1$,

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - \frac{8}{3}x ,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = -\frac{x^3}{4} + \frac{5}{4}x^2 - x ,$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{12} .$$

Lagrange 插值多项式 $L_3(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} l_i(x) \cdot y_i = l_0(x) + 9 \cdot l_1(x) + 23 \cdot l_2(x) + 3 \cdot l_3(x)$

$$= -\frac{11}{4}x^3 + \frac{45}{4}x^2 - \frac{x}{2} + 1 .$$

(2) 差商表.

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	$f(0)=1$			
1	$f(1)=9$	$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=8$		
2	$f(2)=23$	$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=14$	$\dfrac{14-8}{2-0}=3$	
4	$f(3)=3$	$\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=-10$	$\dfrac{-10-14}{4-1}=-8$	$\dfrac{-8-3}{4-0}=-\dfrac{11}{4}$

$$
\begin{aligned}
N_3(x)&=1+8(x-0)+3(x-0)(x-1)-\frac{11}{4}(x-0)(x-1)(x-2)\\
&=-\frac{11}{4}+\frac{45}{4}x^2-\frac{x}{2}+1=L_3(x)\,.
\end{aligned}
$$

(3) $R_4(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)$, 其中 $\xi\in(0,4)$.

[**例2.3.2**] 设 $f(x)=x^7+x^4+3x+1$. 求:

(1) $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$.

(2) $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

[**解**] 因 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, 其中 ξ 介于 x_0 和 x_n 间, 则:

(1) $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=\dfrac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=1$, 其中 ξ 介于 2^0 和 2^7 间.

(2) $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=\dfrac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0$, 其中 ξ 介于 2^0 和 2^8 间.

2.4 Hermite 插值多项式

[**定理2.4.1**] 设函数 $f(x)\in C^n[a,b]$, $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是区间 $[a,b]$ 上相异的节点, 则 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ 关于其变量连续.

[**定义2.4.1**] 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是区间 $[a,b]$ 上相异的节点, $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数. 若 $f(x)\in C^1[a,b]$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[x_0,x]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, 进而定义**重节点的** 1 **阶差商** $f[x_0,x_0]=\lim\limits_{x\to x_0}f[x_0,x]=f'(x_0)$. 因 $f[x_0,x_0,x_1]=\dfrac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0]}{x_1-x_0}$, 令 $x_1\to x_0$, 定义**重节点的** 2 **阶差商** $f[x_0,x_0,x_0]=\lim\limits_{\substack{x_1\to x_0\\x_2\to x_0}}f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f''(x_0)}{2}$. 同理定义**重节点的** n **阶差商** $f[\underbrace{x_0,\cdots,x_0}_{n个}]=\lim\limits_{x_i\to x_0}f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

[定义2.4.2] 在 Newton 插值多项式 $N_n(x)$ 中, 令 $x_i\to x_0\ \ (i=1,\cdots,n)$, 则 $H_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\cdots+\dfrac{1}{n!}(x-x_0)^n\cdot f^{(n)}(x_0)$ 是在点 x_0 处满足 $H_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\ \ (k=0,1,\cdots,n)$ 的 **Hermite 插值多项式**, 其余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)$, 其中 $\theta\in(a,b)$.

[注1] Hermite 插值多项式不仅保证多项式在插值节点处的函数值相等, 还保证在插值节点处的若干阶导数相等, 即函数图象足够光滑.

[注2] 一般地, 只需给定 $(m+1)$ 个插值条件(函数值和导数值), 即可构造 $\deg\le m$ 的 Hermite 插值多项式.

[注3] Taylor 多项式是 Hermite 插值多项式的特例.

[例2.4.1] 求 $s.t.\ P(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,2)$ 且 $P'(x_1)=f'(x_1)$ 的、$\deg\le 3$ 的插值多项式和余项, 其中函数 $f(x)$ 任意阶可导.

[解] 因 $P(x)$ 过点 $(x_i,f(x_i))\ \ (i=0,1,2)$,

则 $P(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)\cdot f[x_0,x_1,x_2]$

$+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$.

因 $P'(x_1)=f'(x_1)$, 则 $A=\dfrac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)\cdot f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$.

设余项 $R(x)=f(x)-P(x)=k(x)\cdot(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$, 其中 $k(x)$ 为待定函数.

设函数 $\varphi(t)=f(t)-P(t)-k(x)\cdot(t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$,

则 $\varphi(x_j)=0\ \ (j=0,1,2)$, 且 $\varphi'(x_1)=0$, $\varphi(x)=0$,

进而 $\varphi(t)$ 在区间 (a,b) 上有 5 个零点(二重根计 2 次).

反复用 Rolle 定理得: $\varphi^{(4)}(t)$ 在 (a,b) 上至少有一个零点 θ ,

则 $\varphi^{(4)}(\theta)=f^{(4)}(\theta)-4!\cdot k(x)=0$, 进而 $k(x)=\dfrac{f^{(4)}(\theta)}{4!}$.

故 $R(x)=f(x)-P(x)=\dfrac{f^{(4)}(\theta)}{4!}\cdot(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$, 其中 θ 介于 x_0,x_1,x_2,x 间.

[**例2.4.2**] 求 $s.t.\ H_3(x_k)=y_k$, $H_3(x_{k+1})=y_{k+1}$, $H_3'(x_k)=m_k$, $H_3'(x_{k+1})=m_{k+1}$ 的两点三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$.

[**解**] 设 $H_3(x)=\alpha_k(x)\cdot y_k+\alpha_{k+1}(x)\cdot y_{k+1}+\beta_k(x)\cdot m_k+\beta_{k+1}(x)\cdot m_{k+1}$,

其中 $\alpha_k(x)$, $\alpha_{k+1}(x)$, $\beta_k(x)$, $\beta_{k+1}(x)$ 是关于节点 x_k 和 x_{k+1} 的三次 Hermite 插值基函数,

分别满足 $\begin{cases}\alpha_k(x_k)=\alpha_{k+1}(x_{k+1})=1\\ \alpha_k(x_{k+1})=\alpha_{k+1}(x_k)=0\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha_k'(x_k)=\alpha_k'(x_{k+1})=0\\ \alpha_{k+1}'(x_k)=\alpha_{k+1}'(x_{k+1})=0\end{cases}$,

$\begin{cases}\beta_k(x_k)=\beta_{k+1}(x_{k+1})=1\\ \beta_k(x_{k+1})=\beta_{k+1}(x_k)=0\end{cases}$, $\begin{cases}\beta_k'(x_k)=1,\beta_k'(x_{k+1})=0\\ \beta_{k+1}'(x_k)=0,\beta_{k+1}'(x_{k+1})=1\end{cases}$.

(1) 对 $\alpha_k(x)$, 因 x_{k+1} 是其二重零点, 则 $\alpha_k(x)=(ax+b)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$.

因 $\alpha_k(x_k)=ax_k+b=1$, 则 $\alpha_k'(x)=a\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2+2(ax+b)\dfrac{x-x_{k+1}}{(x_k-x_{k+1})^2}$.

代入 $\alpha_k'(x_k)=0$, 解得: $a=-\dfrac{2}{x_k-x_{k+1}}$, $b=\dfrac{2x_k}{x_k-x_{k+1}}+1$.

故 $\alpha_k(x)=\left(\dfrac{2(x-x_k)}{x_{k+1}-x_k}+1\right)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$, 同理 $\alpha_{k+1}(x)=\left(\dfrac{2(x-x_{k+1})}{x_k-x_{k+1}}+1\right)\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$.

(2) 对 $\beta_k(x)$, 设 $\beta_k(x)=a(x-x_k)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$.

代入 $\beta_k'(x_k)=a=1$, 解得: $\beta_k(x)=(x-x_k)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$.

同理 $\beta_{k+1}(x)=(x-x_{k+1})\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$.

(3) 故 $H_3(x)=\left(\dfrac{2(x-x_k)}{x_{k+1}-x_k}+1\right)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2\cdot y_k+\left(\dfrac{2(x-x_{k+1})}{x_k-x_{k+1}}+1\right)\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2\cdot y_{k+1}$

$$+(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2\cdot m_k+(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2\cdot m_{k+1}\ .$$

余项 $R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\theta)}{4!}\cdot(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$.

[**例2.4.3**] 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$, $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, $f(1)=2$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. 求 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式和误差.

[**解**] 有 4 个插值条件, 故插值多项式为 3 次, 要求到 3 阶差商.

x_k	$f(x_k)$	**一阶差商**	**二阶差商**	**三阶差商**
0	1			
0	1	$\dfrac{f'(0)}{1!}=\dfrac{1}{2}$		
1	2	$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$	$\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1-0}=\dfrac{1}{2}$	
1	2	$\dfrac{f'(1)}{1!}=\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\frac{1}{2}-1}{1-0}=-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{1-0}=-1$

$H_3(x)=f(0)+\dfrac{1}{2}(x-0)+\dfrac{1}{2}(x-0)^2+(-1)(x-0)^2(x-1)=-x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{x}{2}+1$.

误差 $R_3(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\times(x-z_0)(x-z_1)\cdots=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot(x-0)^2(x-1)^2$.

[**例2.4.4**] 已知函数 $f(x)$ 满足:

x_k	-1	0	1
$f(x_k)$	0	-4	-2
$f'(x_k)$		0	5
$f''(x_k)$		6	

求 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式和误差.

[**解**] 有 6 个插值条件, 故插值多项式为 5 次, 要求到 5 阶差商.

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	五阶差商
-1	0					
0	-4	$\dfrac{-4-0}{0-(-1)}=-4$				
0	-4	$\dfrac{f'(0)}{1!}=0$	$\dfrac{0-(-4)}{0-(-1)}=4$			
0	-4	$\dfrac{f'(0)}{1!}=0$	$\dfrac{f''(0)}{2!}=3$	$\dfrac{3-4}{0-(-1)}=-1$		
1	-2	$\dfrac{-2-(-4)}{1-0}=2$	$\dfrac{2-0}{1-0}=2$	$\dfrac{2-3}{1-0}=-1$	$\dfrac{-1-(-1)}{1-(-1)}=0$	
1	-2	$\dfrac{f'(1)}{1!}=5$	$\dfrac{5-2}{1-0}=3$	$\dfrac{3-2}{1-0}=1$	$\dfrac{1-(-1)}{1-0}=2$	$\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$

$$
\begin{aligned}
H_5(x) &= 0-4(x+1)+4(x+1)(x-0)+(-1)(x+1)(x-0)(x-0) \\
&\quad +0(x+1)(x-0)(x-0)(x-0)+1(x+1)(x-0)(x-0)(x-0)(x-1) \\
&= x^5-2x^3+3x^2-4\,.
\end{aligned}
$$

$$
R_5(x)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x+1)(x-0)^3(x-1)^2\,.
$$