《数字图像处理》期末速通教程

8. 图像复原

8.1 图像退化模型

(看一眼) p193 ~ 196 图像退化模型、图像复原.

[**定义 8.1.1**]

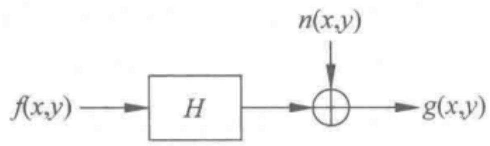
(1) 在图像生成、记录、传输过程中, 由成像系统、设备或外在干扰导致图片质量下降, 称为**图像退化**.

(2) 处理退化图像, 使其恢复原貌的过程称为**图像复原**.

(3) 图像复原是在给定退化图像 $g(x,y)$ 、了解退化的点扩散函数 $h(x,y)$ 和噪声项 $n(x,y)$ 的情况下, 估计原始图像 $f(x,y)$.

[**定义 8.1.2**]

(1) 原图像 $f(x,y)$ 受各种退化因素影响退化为 $g(x,y)$. 退化过程可抽象为一个退化系统 H 和加性噪声 $n(x,y)$ 的影响, 如下图所示.



(2) **退化模型**: $g(x,y)=H[f(x,y)]+n(x,y)$.

(3) **一维离散卷积退化模型**: $g_e(x)=\sum_{m=0}^{M-1}f_e(m)\cdot h_e(x-m)\ \ (x=0,1,\cdots,M-1)$.

用矩阵表示为 $\overrightarrow{g}=H\overrightarrow{f}$, 其中向量 $\overrightarrow{g}=\begin{bmatrix} g_e(0) \\ g_e(1) \\ \vdots \\ g_e(M-1)\end{bmatrix}$, 向量 $\overrightarrow{f}=\begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_e(1) \\ \vdots \\ f_e(M-1)\end{bmatrix}$, 矩阵

$H=\begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(M-1) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & \cdots & h_e(0)\end{bmatrix}$ 是循环矩阵, 其每一行都是前一行循环右移一位的结果.

(4) **二维离散卷积退化模型**: $g_e(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f_e(m,n)\cdot h_e(x-m,y-n)$ $(x=0,1,\cdots,M-1;y=0,1,\cdots,N-1)$.

考虑噪声, 用矩阵表示为 $g=Hf+\overrightarrow{n}$, 其中 g 是图像 f 的退化图像, 噪声 $\overrightarrow{n}=\begin{bmatrix}n_e(0)\\n_e(1)\\\vdots\\n_e(MN-1)\end{bmatrix}$, 张量 $H=\begin{bmatrix}H_0&H_{M-1}&\cdots&H_1\\H_1&H_0&\cdots&H_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\H_{M-1}&H_{M-2}&\cdots&H_0\end{bmatrix}$ 的每个部分 H_j 都是一个循环矩阵, 由延拓函数 $h_e(x,y)$ 的第 j 列构成, $H_j=\begin{bmatrix}h_e(j,0)&h_e(j,N-1)&\cdots&h_e(j,1)\\h_e(j,1)&h_e(j,0)&\cdots&h_e(j,2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\h_e(j,N-1)&h_e(j,N-2)&\cdots&h_e(j,0)\end{bmatrix}$.

8.2 图像复原的代数方法

[**定义 8.2.1**] 图像复原的代数方法是根据二维离散卷积退化模型 $g=Hf+\overrightarrow{n}$ 和关于 g 、H 、$\overrightarrow{n}$ 的某些先验知识, 确定某种最佳准则, 求原图像 f 的最优估计 $\hat{f}$.

8.2.1 无约束最小二乘复原

[**定理 8.2.1.1**] [**无约束最小二乘复原**] 设原图 f 是 $M\times N$ 的矩阵, 且 $M=N$. 已知退化过程 H 和退化图像 g , 若 H 可逆, 则 f 的估计 $\hat{f}=H^{-1}g$.

[**证**] 由二维离散卷积退化模型 $g=Hf+\overrightarrow{n}$, 有 $\overrightarrow{n}=g-Hf$.

下求 $\hat{f}$ s.t. $H\hat{f}$ 在最小二乘意义下近似 g , 即 s.t. $\left\|\overrightarrow{n}\right\|=\left\|g-H\hat{f}\right\|^2$ 最小.

定义**最佳准则** $J\left(\hat{f}\right)=\left\|g-H\hat{f}\right\|^2=\left(g-H\hat{f}\right)^T\left(g-H\hat{f}\right)$, 则 $J\left(\hat{f}\right)$ 的最小值对应最优解.

下求 $J\left(\hat{f}\right)$ 的极小值. 令 $\dfrac{\partial J\left(\hat{f}\right)}{\partial\hat{f}}=-2H^T\left(g-H\hat{f}\right)=0$,

则 $H^TH\hat{f}=H^Tg$, 解得: $\hat{f}=(H^TH)^{-1}H^Tg$.

$M=N$ 时, 假设方阵 H 可逆, 则 $\hat{f}=H^{-1}(H^T)^{-1}H^Tg=H^{-1}g$.

[**注**] 因 $\hat{f}$ 的选择不受其它条件约束, 故称**无约束复原**.

8.2.2 约束最小二乘复原

[**定义 8.2.2.1**]

(1) 在无约束最小二乘复原中附加约束条件, 称为**约束最小二乘复原**.

(2) 约束最小二乘复原一般用 Lagrange 乘数法求解.

设对原图 f 作某一线性运算 Q .

下求在约束条件 $\left|\left|\overrightarrow{n}\right|\right| = \left|\left|g - H\hat{f}\right|\right|^2$ 下, s.t. $\left|\left|Q\hat{f}\right|\right|^2$ 最小的 f 的估计 $\hat{f}$.

设 Lagrange 函数 $J\left(\hat{f}\right) = \left|\left|Q\hat{f}\right|\right|^2 + \lambda\left(\left|\left|g - H\hat{f}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{n}\right|\right|\right)$, 其中 λ 为 Lagrange 系数.

令 $\dfrac{\partial J\left(\hat{f}\right)}{\partial \hat{f}} = 2Q^TQ\hat{f} - 2\lambda H^T\left(g - H\hat{f}\right) = 0$,

则 $Q^TQ\hat{f} + \lambda H^THf\hat{f} - \lambda H^Tg = 0$, 解得: $\hat{f} = \left(H^TH + \dfrac{1}{\lambda}Q^TQ\right)^{-1}H^Tg$.

[**例 8.2.2.1**] 设退化 $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x} + \overrightarrow{n}$. 求在约束 $\min\limits_{\overrightarrow{x}}\left|\left|\overrightarrow{x}\right|\right|_2^2$ 下, s.t. $\left|\left|\overrightarrow{n}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{y} - A\overrightarrow{x}\right|\right|^2$ 最小的向量 $\overrightarrow{x}$ 的估计 $\hat{\overrightarrow{x}}$, 其中 $\left|\left|\overrightarrow{x}\right|\right|_2 = \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

[**解**] 设 $\min\limits_{\overrightarrow{x}}\left|\left|\overrightarrow{x}\right|\right|_2^2 = C$.

设 Lagrange 函数 $J\left(\hat{x}\right) = \left|\left|\overrightarrow{y} - A\overrightarrow{x}\right|\right|^2 + \lambda\left(\left|\left|\overrightarrow{x}\right|\right|_2^2 - C\right)$, 其中 λ 为 Lagrange 系数.

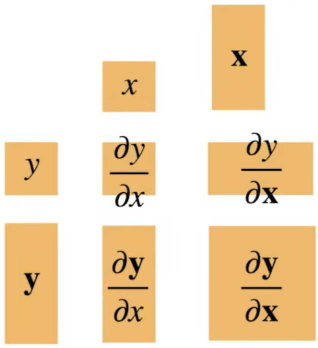
令 $\dfrac{\partial J\left(\hat{x}\right)}{\partial \hat{x}} = -2A^T\left(\overrightarrow{y} - A\overrightarrow{x}\right) + 2\lambda\overrightarrow{x} = 0$,

则 $A^T\overrightarrow{y} - A^TA\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$, 解得: $\overrightarrow{x} = (A^TA + \lambda I)^{-1}A^T\overrightarrow{y}$.

[补充] 向量和矩阵的导数

可参考: https://www.bilibili.com/video/BV1eZ4y1w7PY/

[**定义**] x 和 y 分别取标量和向量时, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 的取值如下图所示.



(1) x 是标量, y 是标量时, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 是标量.

(2) $\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 是向量, y 是标量时, $\dfrac{\partial y}{\partial \overrightarrow{x}}=\left[\dfrac{\partial y}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial y}{\partial x_n}\right]$ 是行向量.

(3) x 是标量, $\overrightarrow{y}=(y_1,\cdots,y_m)$ 是向量时, $\dfrac{\partial \overrightarrow{y}}{\partial x}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x}\end{bmatrix}$ 是列向量.

(4) $\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 是向量, $\overrightarrow{y}=(y_1,\cdots,y_m)$ 是向量时,

$$\frac{\partial \overrightarrow{y}}{\partial \overrightarrow{x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial \overrightarrow{x}}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial \overrightarrow{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$ 是矩阵.

[**例 1**]

(1) $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ 时, $\dfrac{\partial}{\partial \overrightarrow{x}}(x_1^2 + 2x_2^2) = \left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}x_1^2, \dfrac{\partial}{\partial x_2}(2x_2^2)\right] = [2x_1, 4x_2]$.

(2) 设标量 a 非向量 $\overrightarrow{x}$ 的函数, 标量 u 是 $\overrightarrow{x}$ 的函数, 则:

y	a	$a \cdot u$	$\sum x_i$	$\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$
$\dfrac{\partial y}{\partial \overrightarrow{x}}$	零向量的转置 $\overrightarrow{0}^T$	$a\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{x}}$	一向量的转置 $\overrightarrow{1}^T$	$2\overrightarrow{x}^T$

(3) 设向量 $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, 向量 $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^m$, 则 $\dfrac{\partial \overrightarrow{y}}{\partial \overrightarrow{x}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

y	a	$\overrightarrow{x}$	$A\overrightarrow{x}$	$\overrightarrow{x}^T A$
$\dfrac{\partial \overrightarrow{y}}{\partial \overrightarrow{x}}$	零矩阵 $0_{m \times n}$	一矩阵 $1_{m \times n}$	A	A^T

[**定理**]

(1) 基本运算的导数:

① 设标量 u 和标量 v 都是向量 $\overrightarrow{x}$ 的函数, 则:

y	$u+v$	$u\cdot v$
$\dfrac{\partial y}{\partial \overrightarrow{x}}$	$\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{x}}+\dfrac{\partial v}{\partial \overrightarrow{x}}$	$\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{x}}v+\dfrac{\partial v}{\partial \overrightarrow{x}}u$

② 设向量 $\overrightarrow{u}$ 和向量 $\overrightarrow{v}$ 都是向量 $\overrightarrow{x}$ 的函数, 则:

y	$a\cdot\overrightarrow{u}$	$A\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$	**内积** $\left\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right\rangle$
$\dfrac{\partial \overrightarrow{y}}{\partial \overrightarrow{x}}$	$a\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \overrightarrow{x}}$	$A\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \overrightarrow{x}}$	$\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \overrightarrow{x}}+\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial \overrightarrow{x}}$	$\overrightarrow{v}^T\cdot\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \overrightarrow{x}}+\overrightarrow{u}^T\cdot\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial \overrightarrow{x}}$

(2) [**链式法则**]

① 标量: $y=f(u)$, $u=g(x)$, 则 $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

② 向量:

链式法则	**维度**
$\dfrac{\partial y}{\partial \overrightarrow{x}}=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{x}}$	$(1,n)=(1)\cdot(1,n)$
$\dfrac{\partial y}{\partial \overrightarrow{x}}=\dfrac{\partial y}{\partial \overrightarrow{u}}\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \overrightarrow{x}}$	$(1,n)=(1,k)\cdot(k,n)$
$\dfrac{\partial \overrightarrow{y}}{\partial \overrightarrow{x}}=\dfrac{\partial \overrightarrow{y}}{\partial \overrightarrow{u}}\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \overrightarrow{x}}$	$(m,n)=(m,k)\cdot(k,n)$

[**例 2**] 设 $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ 是两无关的向量, 实数 $y \in \mathbb{R}$. 设函数 $z = \left(\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{w} \right\rangle - y\right)^2$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial \overrightarrow{w}}$.

[**解**] 令 $\begin{cases} a = \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{w} \right\rangle \\ b = a - y \\ z = b^2 \end{cases}$,

则 $$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{w}} = \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \overrightarrow{w}} = \frac{\partial b^2}{\partial b}\frac{\partial (a-y)}{\partial a}\frac{\partial \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{w} \right\rangle}{\partial \overrightarrow{w}}$$
$$= (2b) \cdot 1 \cdot \overrightarrow{x}^T = 2\left(\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{w} \right\rangle - y\right)\overrightarrow{x}^T .$$

[**例 3**] 设 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是与向量 $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ 无关的矩阵, 向量 $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^m$. 设函数 $z = \left|\left| X\overrightarrow{w} - \overrightarrow{y} \right|\right|$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial \overrightarrow{w}}$.

[**解**] 令 $\begin{cases} a = X\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{y} \\ z = \left|\left| \overrightarrow{b} \right|\right|^2 \end{cases}$,

则 $$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{w}} = \frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{b}}\frac{\partial \overrightarrow{b}}{\partial \overrightarrow{a}}\frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial \overrightarrow{w}} = \frac{\partial \left|\left| \overrightarrow{b} \right|\right|^2}{\partial \overrightarrow{b}}\frac{\partial \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{y}\right)}{\partial \overrightarrow{a}}\frac{\partial X\overrightarrow{w}}{\partial \overrightarrow{w}}$$
$$= 2\overrightarrow{b}^T \cdot 1_{m \times m} \cdot X = 2\left(X\overrightarrow{w} - \overrightarrow{y}\right)^T X .$$