《概率论与数理统计》期末速通

1. 概率论的基本概念

1.1 随机试验与样本空间

1.1.1 随机试验

[**定义1.1.1**] 称一个试验为**随机试验**, 记作 E , 如果它满足如下三个条件:

① 试验可在相同条件下重复进行.

② 每次试验可能的结果不止一个, 且能事先明确试验的所有可能的结果.

③ 进行一次试验前不能确定哪个结果会出现.

1.1.2 样本空间

[**定义1.1.2**] 随机试验中的每个结果称为**一个样本点**(element), 记作 e . 随机试验中所有可能的结果组成的集合称为**样本空间**(sample space), 记作 S 或 Ω . 样本空间是全体样本点组成的集合.

[**注**] 样本空间的表示方法同集合的表示方法:

① 列举法, 适用于样本点有限多的情况.

② 描述法, 适用于样本点无限多的情况.

[**例1.1.1**] 写出下列试验的样本空间.

(1) 抛一枚硬币, 观察正面(H)和反面(T)出现的情况.

$S=\{H,T\}$.

(2) 将一枚硬币抛三次, 观察正面出现的次数.

$S=\{0,1,2,3\}$.

(3)某人一天接到的电话的次数.

$S=\{0,1,2,\cdots\}=\{k\mid k\in\mathbb{N}\}$.

(4)从一批灯泡中抽取一只, 检测其寿命.

$S=\{t\mid t\geq 0\}$.

(5)某地一天的最高温度和最低温度, 规定最低温度不小于 T_0 , 最高温度不大于 T_1 .

$S=\{(x,y)\mid T_0\leq y\leq x\leq T_1\}$.

1.2 随机事件

1.2.1 随机事件

[**定义1.2.1**] 试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**, 简称**事件**, 用大写英文字母 $A, B, \cdots$ 表示. 由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**.

[**定理1.2.1**] 若试验 E 的样本空间 S 是有限集, 则它的基本事件有 $|S|$ 个.

[**定义1.2.2**] 在每次试验中, 若随机事件的一个样本点出现, 则称该随机事件**发生**, 否则称为**不发生**. 样本空间 S 包含所有样本点, 在每次试验中它都发生, 称其为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点, 在每次试验中它都不发生, 称其为**不可能事件**. 除必然事件和不可能事件外的事件统称为**随机事件**.

[**例1.2.1**] 写出下列试验的随机事件.

(1) 将一枚硬币抛三次, 观察三次出现同一面的情况.

$A = \{HHH, TTT\}$.

(2) 从一批灯泡中抽取一只, 其寿命小于 $1000\ \mathrm{h}$.

$A = \{t \mid 0 \leq t < 1000\}$.

(3) 某地一天的最高温度与最低温度相差 $10\ {}^\circ\mathrm{C}$, 规定最低温度不小于 T_0 , 最高温度不大于 T_1 .

$A = \{(x, y) \mid y - x = 10, T_0 \leq y \leq x \leq T_1\}$.

1.2.2 事件的关系

[**定义1.2.3**] 事件有包含、相等、互斥(互不相容)、对立四种关系.

关系	集合表示	概率论含义
包含关系	$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生
相等关系	$A = B$	事件 A 发生导致事件 B 发生,反之亦然
互斥关系 (互不相容)	$AB = \varnothing$	事件 A 和事件 B 不可能同时发生
对立关系	$AB = \varnothing, A \bigcup B = S$	一次试验中, 事件 A 和事件 B 有且只有一个发生. 记作 $B = \overline{A}$.

[**定义1.2.4**] 若事件组 $A_1, \cdots, A_n$ 中任意两事件都互斥, 则称这组事件**两两互斥**或**两两互不相容**, 集合表示为 $A_i A_j = \varnothing \ \ (i, j = 1, 2, \cdots; i \neq j)$.

[**定理1.2.2**] 一次试验中, 基本事件两两互斥.

1.2.3 事件的运算

[**定义1.2.5**] 事件有和(并)、积(交)、差三种运算.

运算	集合表示	概率论含义
和(并)	$(A\bigcup B)$ 或 $(A+B)$	事件 A 和事件 B 中至少有一个事件发生
积(交)	$(A\bigcap B)$ 或 AB	当且仅当事件 A 和事件 B 同时发生时,事件 $(A\bigcap B)$ 发生
差	$A-B=A\overline{B}$	当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时,事件 $(A-B)$ 发生

[**注**] 事件运算的优先级: 先进行逆运算, 再进行交运算, 最后进行并或差运算.

[**定义1.2.6**]

(1) 对 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$,

① 和事件: $A_1\bigcup\cdots\bigcup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

② 积事件: $A_1\bigcap\cdots\bigcap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(2) 对可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$,

① 和事件: $A_1\bigcup\cdots\bigcup A_n\bigcup\cdots=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$.

② 积事件: $A_1\bigcap\cdots\bigcap A_n\bigcap\cdots=\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$.

[**定理1.2.3**] [**事件的运算法则**] 设事件 A,B,C .

(1) [**吸收律**] 若 $A\subset B$, 则 $A\bigcup B=B,AB=A,\overline{B}\subset\overline{A}$.

(2) [**交换律**]

① $A\bigcup B=B\bigcup A$.

② $AB=BA$.

(3) [**结合律**]

① $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$.

② $(AB)C=A(BC)$.

(4) [**分配律**]

① $A(B\bigcup C)=AB\bigcup AC$.

② $A\bigcup BC=(A\bigcup B)(A\bigcup C)$.

③ $A(B-C)=AB-AC$.

(5) [**对偶律**,**De Morgan律**]

① $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\ \overline{B},\overline{A\bigcup B\bigcup C}=\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

② $\overline{AB}=\overline{A}\bigcup\overline{B},\overline{ABC}=\overline{A}\bigcup\overline{B}\bigcup\overline{C}$.

[**定理1.2.4**] 对事件 A 和事件 B :

① $(A-B),AB,(B-A)$ 这三个事件两两互斥.

② $A=(A-B)\bigcup AB,B=(B-A)\bigcup AB$.

③ $A\bigcup B=(A-B)\bigcup AB\bigcup(B-A)$.

1.3 频率与概率

[**定义1.3.1**] [**概率的描述性定义**] 称随机事件A发生的可能性的大小的度量(非负值)为该事件的**概率**.

[**定义1.3.2**] 相同条件下进行 n 次试验,其中事件 A 发生的次数为 n_A ,称 n_A 为事件 A 发生的**频数**, 称比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**,记作 $f_n(A)$. 频率大小表示事件发生的频繁程度, 频率越大, 事件发生越频繁, 这表明: 该事件在试验中发生的可能性越大.

[**注1**] 随着 n 增大, $f_n(A)$ 趋于一个常数, 这称为频率的**稳定性**.

[**注2**] [**概率的统计性定义**] 用事件 A 发生的频率近似表示其概率.

[**定理1.3.1**] [**频率的基本性质**] 设样本空间为 S , 对事件 A 的频率为 $f_n(A)$.

① $0\leq f_n(A)\leq 1$.

② $f_n(S)=1$.

③ 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是两两互斥的事件, 则 $f\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(A_i)$.

[**定义1.3.3**] [**概率的公理化定义**] 设随机试验 E 的样本空间为 S . 对 E 中的每个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$, 若集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件, 则称 $P(A)$ 为 A 的**概率**.

① [**非负性**] 对 $\forall$ 事件 A , 都有 $P(A)\geq 0$.

② [**规范性**] 对必然事件 S , 有 $P(S)=1$.

③ [**可列可加性**] 设 $A_1,A_2,\cdots$ 是一列两两互斥的事件, 即对 $\forall i,j=1,2,\cdots$ 且 $i\neq j$, 有 $A_iA_j=\varnothing$, 则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}P(A_i)$.

[**定理1.3.2**]

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) [**有限可加性**] 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是一列两两互斥的事件, 则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(3) [**减法公式**] 对事件 A 和事件 B , 有 $P\left(A\overline{B}\right)=P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(4) [**单调性**] 对事件 A 和事件 B , 若 $B\subset A$, 则 $P(A)\geq P(B)$.

(5) [**有界性**] 对 $\forall$ 事件 A , 都有 $0\leq P(A)\leq 1$.

(6) [**逆事件的概率**] 对 $\forall$ 事件 A , 有 $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$.

(7) [**加法公式**]

① 对事件 A 和事件 B , 有 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

② 对事件 A,B,C , 有

$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

[**证**]

(1) 令 $A_i=\varnothing\ \ (i=1,2,\cdots)$, 则 $A_iA_j=\varnothing\ \ (i,j=1,2,\cdots;i\neq j)$, 且 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\varnothing$.

由非负性和可列可加性: $0\leq P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(\varnothing)\geq 0$, 故 $P(\varnothing)=0$.

(2) 考虑可列个事件 $A_1,\cdots,A_n,A_{n+1},\cdots$, 其中 $A_i=\varnothing\ \ (i=n+1,n+2,\cdots)$.

由可列可加性: $P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=P\left(A_1\bigcup\cdots\bigcup A_n\bigcup\varnothing\bigcup\cdots\right)$

$=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+\cdots=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(3) 因 $(A-B)$ 与 AB 互斥, 且 $A=(A-B)\bigcup AB$, 由有限可加性即证.

(4) 因 $B\subset A$, 则 $AB=B$. 由非负性和减法公式: $P(A-B)=P(A)-P(AB)\geq 0$, 故 $P(A)\geq P(B)$.

(5) 由非负性、单调性和规范性即证.

(6) 因 $A\bigcup\overline{A}=S$ 且 A 和 $\overline{A}$ 互斥, 则 $1=P(S)=P\left(A\bigcup\overline{A}\right)=P(A)+P\left(\overline{A}\right)$, 故证.

(7) 因 $(A-B),AB,(B-A)$ 这三个事件两两互斥, 且 $A\bigcup B=(A-B)\bigcup AB\bigcup(B-A)$,

则 $P(A\bigcup B)=P(A-B)+P(AB)+P(B-A)$

$=[P(A)-P(AB)]+P(AB)+[P(B)-P(AB)]=P(A)+P(B)-P(AB)$.

1.4 古典概型

[**定义1.4.1**] 若随机试验 E 满足如下两个条件, 则称该随机试验的概率模型为**等可能概型**或**古典概型**:

① 样本空间 S 只含有限个样本点, 即 $S=\{e_1,\cdots,e_n\}$.

② 每个基本事件(样本点)发生的可能性相同.

[**定理1.4.1**] 设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e_1,\cdots,e_n\}$, 则古典概型中每个基本事件发生的概率都为 $\dfrac{1}{n}$.

[**证**] 设每个基本事件发生的概率为 p , 则 $1=P(S)=\displaystyle\sum_{i=1}^n P(\{e_i\})=n\cdot p$, 解得: $p=\dfrac{1}{n}$.

[**定理1.4.2**] 设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e_1,\cdots,e_n\}$, 古典概型中事件 $A=\{e_{i_1},\cdots,e_{i_k}\}$ 发生的概率为 $\dfrac{k}{n}$, 即事件 A 发生的概率等于 A 包含的基本事件数与 S 包含的基本事件数之比.

[**证**] 因 $A=\{e_{i_1}\}\bigcup\cdots\bigcup\{e_{i_k}\}$, 且事件 $\{e_{i_1}\},\cdots,\{e_{i_k}\}$ 两两互斥, 则 $P(A)=\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\dfrac{k}{n}$.

[**例1.4.1**] 将一个硬币抛三次. 求:

(1) 恰有一次出现正面的概率.

(2) 至少有一次出现正面的概率.

[**解**] 设随机试验 E : 将一个硬币抛三次,

其样本空间 $S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$.

因 S 包含 8 个基本事件, 且每个基本事件发生的可能性相同, 则 E 是古典概型.

(1) 设事件 A_1 : 恰有一次出现正面, 则 $A_1=\{HTT,THT,TTH\}$, 进而 $P(A_1)=\dfrac{3}{8}$.

(2) 设事件 A_2 : 至少有一次出现正面, 则 $\overline{A_2}=\{TTT\}$, 进而 $P(A_2)=1-P\left(\overline{A_2}\right)1=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

[例1.4.2] 一口袋中有 6 个球, 其中 4 个是白球、2 个是红球. 从袋中取球两次, 每次随机取一个球. 以放回抽样和不放回抽样两种方式分别求下列事件的概率:

(1) 两次取的球都是白球.

(2)取的两个球颜色相同.

(3)取的两个球中至少有一个是白球.

[解] 设事件 A : 两次取的球都是白球, B : 两次取的球都是红球, C : 取的两个球中至少有一个是白球, 则 A 和 B 互斥.

(1)

① 放回抽样: 显然该试验 E 是古典概型, 其样本空间 S 所含的样本点数 $6 \times 6 = 36$.

因事件 A 对应的样本点数 $4 \times 4 = 16$, 则 $P(A) = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$.

② 不放回抽样: 显然该试验 E 是古典概型, 其样本空间 S 所含的样本点数 $6 \times 5 = 30$.

$P(A) = \dfrac{4 \times 3}{30} = \dfrac{2}{5}$.

(2) 事件 $A \bigcup B$: 取的两个球颜色相同.

① 放回抽样: 显然该试验 E 是古典概型, 其样本空间 S 所含的样本点数 $6 \times 6 = 36$.

因事件 B 对应的样本点数 $2 \times 2 = 4$, 则 $P(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

因 A 和 B 互斥, 则 $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{9}$.

② 不放回抽样: 显然该试验 E 是古典概型, 其样本空间 S 所含的样本点数 $6 \times 5 = 30$.

$P(B) = \dfrac{2 \times 1}{30} = \dfrac{1}{15}$, 则 $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{7}{15}$.

(3) $C = \overline{B}$.

① 放回抽样: 显然该试验 E 是古典概型, 其样本空间 S 所含的样本点数 $6 \times 6 = 36$.

$P(C) = P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$.

② 不放回抽样: 显然该试验 E 是古典概型, 其样本空间 S 所含的样本点数 $6 \times 5 = 30$.

$P(C) = P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{1}{15} = \dfrac{14}{15}$.

[例1.4.3] **[生日模型]** 将 n 个球随机地放入 $N \ \ (N \geq n)$ 个盒子中, 求每个盒子中至多有一个球的概率.

[解] 显然随机试验 E : 将 n 个球随机地放入 $N \ \ (N \geq n)$ 个盒子中, 其样本空间所含的样本点数为 N^n .

设事件 A : 每个盒子中至多有一个球, 则 $P(A) = \dfrac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} = \dfrac{A_N^n}{N^n}$.

[例1.4.4] **[超几何分布]** 设 N 件产品中有 D 件次品. 从中任取 n 件产品, 求恰有 $k \ \ (k \leq D)$ 件次品的概率.

[解] 显然随机试验 E : 从 N 件产品中任取 n 件产品是古典概型, 其样本空间所含的样本点数为 C_N^n .

设事件 A : 从 N 件产品中任取 n 件产品, 其中有 k 件次品和 $(n-k)$ 件正品, 则 $P(A) = \dfrac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$.

[**例1.4.5**] [**抽签原理**] 袋中有 a 个白球和 b 个红球, k 个人依次取球. 以放回抽样和不放回抽样两种方式分别求第 $i\ \ (1 \leq i \leq k \leq a+b)$ 个人抽到白球(记为事件 B)的概率.

[**解**]

(1) 放回抽样: $P(B)=\dfrac{a}{a+b}$.

(2) 不放回抽样: 设随机试验 E : k 个人依次不放回地从 $(a+b)$ 个球中任取一个球,

其样本空间包含的样本点数为 $(a+b)\cdots(a+b-k+1)=A_{a+b}^k$.

第 i 个人抽到白球,有 a 种取法, 其余人任取 $(k-1)$ 个球,

有 $(a+b-1)\cdots[(a+b-1)-(b-1)+1]=A_{a+b-1}^{k-1}$ 种取法.

故 $P(B)=\dfrac{a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\dfrac{a}{a+b}$.

[**注**] 本题表明: $P(B)$ 与取球方式和取球的先后次序无关, 这是抽签的原理.

[**例1.4.6**] 在 $1\sim 2000$ 的整数中随机抽取一个数, 问抽到的数既不能被 6 整除、也不能被 8 整除的概率.

[**解**] 设随机试验 E : 在 $1\sim 2000$ 的整数中随机抽取一个数, 其样本空间 $S=\{1,\cdots,2000\}$.

设事件 A : 取出的数能被 6 整除. 因 $333<\dfrac{2000}{6}<334$, 则 $P(A)=\dfrac{333}{2000}$.

设事件 B : 取出的数能被 8 整除. 因 $\dfrac{2000}{8}=250$, 则 $P(B)=\dfrac{250}{2000}$.

$\overline{A}\ \overline{B}$: 取出的数既不能被 6 整除、也不能被 8 整除, 即不能被 $\operatorname{lcm}(6,8)=24$ 整除.

因 $83<\dfrac{2000}{24}<84$, 则 $P(AB)=\dfrac{83}{2000}$.

故 $P\left(\overline{A}\ \overline{B}\right)=P\left(\overline{A\bigcup B}\right)=1-P(A\bigcup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$=1-\left(\dfrac{333}{2000}+\dfrac{250}{2000}-\dfrac{83}{2000}\right)=\dfrac{3}{4}$.

[**例1.4.7**] 15 名学生中有 3 名优秀生. 将 15 名学生随机地平均分到 3 个班中, 求:

(1) 每个班各分到一名优秀生的概率.

(2) 3 名优秀生在同个班的概率.

[**解**] 设随机试验 E : 将 15 名学生随机地平均分到 3 个班中, 其样本空间 S 所含的样本点数为 $C_{15}^5C_{10}^5C_5^5$.

(1) 分配优秀生有 A_3^3 种方案, 分配另外 12 名学生有 $C_{12}^4C_8^4C_4^4$ 种方案, 故 $P=\dfrac{A_3^3C_{12}^4C_8^4C_4^4}{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}=\dfrac{25}{91}$.

(2) 分配 3 名优秀生有 3 种方案, 分配另外 12 名学生有 $C_{12}^2C_{10}^5C_5^5$ 种方案, 故 $P=\dfrac{3C_{12}^2C_{10}^5C_5^5}{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}=\dfrac{6}{91}$.

[**定理1.4.3**] [**实际推断原理**] 概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不发生.

[**例1.4.8**] 某接待站在某一周曾接待过 12 次来访, 且这 12 次接待都是在周二和周四进行. 问是否能推出接待时间有规定.

[**解**] 假设接待时间无规定, 则来访者在一周中的任一天去接待站是等可能的.

设随机试验 E : 12 次接待, 其样本空间 S 所含的样本点数为 7^{12} .

设事件 A : 12 次接待都在周二、周四, 则 $P(A)=\dfrac{2^{12}}{7^{12}}\approx 0.0000003<<1$.

由实际推断原理: 假设错误, 故接待时间有规定.

1.5 几何概型

[**定义1.5.1**] 若随机试验 E 满足如下两个条件, 则称该随机试验的概率模型为**几何概型**:

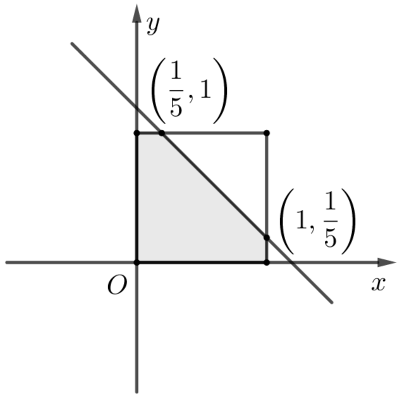
① 样本空间 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个可度量的几何区域.

② 每个样本点出现的概率相等, 样本点落入 S 的某一可度量的子区域 A 的可能性与 A 的几何度量成正比, 而与 A 的位置和形状无关.

[**定理1.5.1**] 设随机试验 E 是几何概型, 其样本空间为 S , 则事件 A 出现的概率 $P(A)=\dfrac{A\text{的几何度量}}{S\text{的几何度量}}$.

[**例1.5.1**] 从区间 $(0,1)$ 中任选两数, 求所取的两数之和 $<\dfrac{6}{5}$ 的概率.

[**解**] 设随机试验 E : 从区间 $(0,1)$ 中任选两数 x 和 y , 其样本空间 $S=\{(x,y)\mid 0<x,y<1\}$.



如上图, 使得 $x+y<\dfrac{6}{5}$ 的点 (x,y) 在直线 $x+y=\dfrac{6}{5}$ 的下方(不含边界).

A 的面积 $S_A=1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{17}{25}$, 则 $P(A)=\dfrac{\frac{17}{25}}{1}=\dfrac{17}{25}$.

1.6 条件概率

1.6.1 条件概率

[**例1.6.1**] 将一个硬币抛两次, 观察其出现正反面的情况. 设事件 A : 至少有一次为 H , 事件 B : 两次结果为同一面. 求 A 发生的条件下 B 发生的概率.

[**解**] 设随机试验 E : 将一个硬币抛两次, 观察其出现正反面的情况, 显然它是古典概型,

其样本空间 $S=\{HH,HT,TH,TT\}$.

因 $A=\{HH,HT,TH\},B=\{HH,TT\}$, 则 $AB=\{HH\},P(A)=\dfrac{3}{4},P(B)=\dfrac{2}{4},P(AB)=\dfrac{1}{4}$.

因 A 发生, 则可将样本空间缩减为 A , 进而事件 $B\mid A=\{HH\}$, 故 $P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

[**定义1.6.1**] 设 A 和 B 是两个事件, 且 $P(A)>0$. 称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

[**注1**] $P(AB)$ 与 $P(B\mid A)$ 的区别:

① $P(AB)$ 是样本空间为 S 时, 事件 A 和事件 B 同时发生的概率.

② $P(B\mid A)$ 是样本空间缩小为 A 时, 在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率.

[**注2**] 出现"已知 A 发生"、"在 A 发生的条件下"等字眼需考虑条件概率.

[**定理1.6.1**] 设随机试验 E 的样本空间为 S , A 、 B 、 C 是三个事件, 且 $P(A)>0$.

(1) $P(B\mid A)\geq 0$.

(2) $P(S\mid A)=1,P(\varnothing\mid A)=0$.

(3) $P(B\bigcup C\mid A)=P(B\mid A)+P(C\mid A)-P(BC\mid A)$.

(4) 若 B 与 C 互斥, 则 $P(B\bigcup C\mid A)=P(B\mid A)+P(C\mid A)$.

(5) $P(B-C\mid A)=P(B\mid A)-P(BC\mid A)$.

(6) $P\left(\overline{B}\mid A\right)=1-P(B\mid A)$.

[**例1.6.2**] 一盒子中有 4 个产品, 其中 3 个是正品, 1 个是次品. 从中任取产品两次, 每次任取一个产品, 作不放回抽样. 设事件 A : 第一次取得正品, B : 第二次取得正品,求 $P(B\mid A)$.

[**解**] 将产品编号, 其中 $1,2,3$ 号为正品, 4 号为次品. 用 (i,j) 表示第一、二次分别取到 i 、 j 号产品.

$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$, 共 9 个样本点.

$AB=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$, 共 6 个样本点. 故 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$.

1.6.2 乘法公式

[**定理1.6.2**] [**乘法公式**] 设 A 和 B 是两个事件.

(1) 若 $P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$.

(2) 若 $P(B)>0$, 则 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$.

[**推广**]

(3) 设 A,B,C 是三个事件, 则 $P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$.

(4) 设 $A_1,\cdots,A_n\ \ (n\geq 2)$ 是一列事件, A_i 先于 A_{i+1} 发生, 且 $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$, 则 $P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$.

[**证**]

(3) 因 $AB\subset A$, 由单调性: $P(A)\geq P(AB)>0$.

$P(ABC)=P[(AB)C]=P(AB)P(C\mid AB)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$.

[**注**] 乘法公式用于计算无独立性的若干个事件的积事件的概率. 若各事件独立, 则不能用乘法公式计算.

[**例1.6.3**] 袋中有 r 个红球、t 个白球. 每次从袋中任取一个球, 观察其颜色后放回, 再放入 a 个与取出的球同色的球. 连续取球四次, 求第一、二次取到红球, 且第三、四次取到白球的概率.

[**解**] 设事件 $A_i\ \ (i=1,2,3,4)$: 第 i 次取到红球.

$$P\left(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P\left(\overline{A_3}\mid A_1A_2\right)P\left(\overline{A_4}\mid A_1A_2\overline{A_3}\right)$$

$$=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+a+t}\cdot\frac{t}{r+2a+t}\cdot\frac{t+a}{r+3a+t}\ .$$

[**例1.6.4**] 某物品第一次落下打破的概率为 $\dfrac{1}{2}$. 若第一次落下未打破, 则第二次打破的概率为 $\dfrac{7}{10}$. 若前两次落下都未打破, 则第三次打破的概率为 $\dfrac{9}{10}$. 求落下三次都未打破的概率.

[**解**] 设事件 $A_i\ \ (i=1,2,3)$: 物品第 i 次落下未打破的概率,

则已知 $P\left(\overline{A_1}\right)=\dfrac{1}{2},P\left(\overline{A_2}\mid A_1\right)=\dfrac{7}{10},P\left(\overline{A_3}\mid A_1A_2\right)=\dfrac{9}{10}$.

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$$

$$=\left[1-P\left(\overline{A_1}\right)\right]\left[1-P\left(\overline{A_2}\mid A_1\right)\right]\left[1-P\left(\overline{A_3}\mid A_1A_2\right)\right]=\frac{3}{200}\ .$$

1.6.3 全概率公式与Bayes公式

[**定义1.6.2**] 设随机试验 E 的样本空间为 S , 称一组事件 $B_1,\cdots,B_n$ 是 S 的一个**划分**或**完备事件组**, 如果它们满足如下两个条件:

① $B_iB_j=\varnothing\ \ (i,j=1,\cdots n;i\neq j)$.

② $S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$.

[**注**] 样本空间的划分可能不唯一.

[**定理1.6.3**] 设随机试验 E 的样本空间为 S , 事件 $B_1, \cdots, B_n$ 是 S 的一个划分, 则每次试验中, $B_1, \cdots, B_n$ 中有且只有一个发生.

[**定理1.6.4**] [**全概率公式**] 设随机试验 E 的样本空间为 S , A 是 E 的一个事件, $B_1, \cdots, B_n$ 是 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0$, 则 $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$.

[**证**] $P(A) = P(AS) = P(A(B_1 \bigcup \cdots \bigcup B_n)) = P(AB_1 \bigcup \cdots \bigcup AB_n)$.

因 $AB_1, \cdots, AB_n$ 两两互斥, 则 $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$.

[**推论**] $n = 2$ 时, 有 $P(A) = P(A \mid B) P(B) + A\left(A \mid \overline{B}\right) P\left(\overline{B}\right)$.

[**注**] 全概率公式用于已知因的概率, 求果的概率.

[**定理1.6.5**] [**Bayes公式**] 设随机试验 E 的样本空间为 S , A 是 E 的一个事件, $B_1, \cdots, B_n$ 是 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0$, 则 $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(AB_i)}{P(A)} = \dfrac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) P(B_j)}$.

[**推论**] $n = 2$ 时, $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(A \mid B) P(B)}{P(A \mid B) P(B) + P\left(A \mid \overline{B}\right) P\left(\overline{B}\right)}$.

[**注**] Bayes公式用于已知果的概率, 求因的概率.

[例1.6.5] 仓库中的元件由如下表所示的三家制造商提供.

制造商	次品率	提供份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

求:

(1) 从仓库中随机抽取一个元件, 求它是次品的概率.

(2) 从仓库中随机抽取一个元件, 已知它是次品, 分别求该次品由三家制造商生产的概率.

[解] 设事件 A : 取到一个次品, 事件 $B_i\ \ (i=1,2,3)$: 该产品由 i 号制造商生产, 则 B_1,B_2,B_3 是样本空间 S 的一个划分.

已知 $P(B_1)=0.15,P(B_2)=0.80,P(B_3)=0.05,P(A\mid B_1)=0.02,P(A\mid B_2)=0.01,P(A\mid B_3)=0.03$.

(1) 由因求果, 由全概率公式: $P(A)=\sum_{i=1}^n P(A\mid B_i)P(B_i)=0.0125$.

(2) 由果求因, 由Bayes公式: $P(B_1\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_1)P(B_1)}{P(A)}=0.24,P(B_2\mid A)=0.64,P(B_3\mid A)=0.12$.

[例1.6.6] 若患癌概率为 0.1% , 人群中有 20% 的吸烟者, 他们患癌的概率为 0.4% . 求不吸烟者患癌的概率.

[解] 设事件 A : 患癌, 事件 B : 吸烟.

已知 $P(A)=0.001,P(B)=0.2,P\left(\overline{B}\right)=0.8,P(A\mid B)=0.004$, 求 $P\left(A\mid\overline{B}\right)$.

由全概率公式: $P(A)=P(A\mid B)P(B)+P\left(A\mid\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)$,

即 $0.001=0.8\times P\left(A\mid\overline{B}\right)+0.2\times 0.004$, 解得: $P\left(A\mid\overline{B}\right)=0.00025$.

[例1.6.7] 机器调整良好时, 产品合格率为 98% . 机器故障时, 产品合格率为 55% . 每日开动机器时, 机器调整良好的概率为 95% . 若已知某日第一件产品合格, 求机器调整良好的概率.

[解] 设事件 A : 产品合格, 事件 B : 机器良好.

已知 $P(B)=0.95,P\left(\overline{B}\right)=0.05,P(A\mid B)=0.98,P\left(A\mid\overline{B}\right)=0.55$.

由全概率公式: $P(A)=P(A\mid B)P(B)+P\left(A\mid\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)$.

由Bayes公式: $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\mid B)P(B)}{P(A)}=0.97$.

[注] 概率 0.95 由以往的数据分析得到, 称为**先验概率**; 概率 0.97 是已知信息的条件下求得的概率, 称为**后验概率**.

[例1.6.8] 设事件 A : 试验反应阳性. 事件 C : 患者患有癌症. 某诊断癌症的试验有如下效果: $P(A \mid C)=P\left(\overline{A} \mid \overline{C}\right)=0.95$. 现对患者进行普查, 被试验人患癌概率 $P(C)=0.005$. 求 $P(C \mid A)$.

[解] 已知 $P(C)=0.005, P\left(\overline{C}\right)=0.995, P(A \mid C)=0.95, P\left(A \mid \overline{C}\right)=0.05$.

由Bayes公式: $P(C \mid A)=\dfrac{P(A \mid C)P(C)}{P(A \mid C)P(C)+P\left(A \mid \overline{C}\right)P\left(\overline{C}\right)}=0.087$.

1.7 独立性

[例1.7.1] 设试验 E : 抛甲、乙两个硬币, 观察它们正反面出现的情况. 设事件 A : 甲币出现 H , 事件 B : 乙币出现 H . 求 $P(A), P(B), P(AB), P(B \mid A), P(A \mid B)$.

[解] 样本空间 $S=\{HH, HT, TH, TT\}$, $A=\{HH, HT\}, B=\{HH, TH\}, AB=\{HH\}$.

易得 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}, P(AB)=\dfrac{1}{4}$.

$P(B \mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}=P(B), P(A \mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1}{2}=P(A)$.

[定义1.7.1] **[独立性的描述性定义]** 设 A 和 B 是两个事件, 且 $P(A), P\left(\overline{A}\right), P(B), P\left(\overline{B}\right)>0$. 若两个事件中任一事件发生的概率不受另一事件发生与否的影响, 即 $P(B \mid A)=P\left(B \mid \overline{A}\right)=P(B), P(A \mid B)=P\left(A \mid \overline{B}\right)=P(A)$, 则称 A 与 B **相互独立**.

[定义1.7.2] **[独立性的数学定义]** 设 A 和 B 是两个事件. 若 $P(AB)=P(A)P(B)$, 则称 A 与 B **相互独立**, 简称**独立**.

[注1] 事件的独立性无法通过Venn图表示.

[注2] 事件独立性的判定:

(1) 直观判定:

① 若试验独立, 则其结果相互独立.

② 根据事件的实际意义判断.

(2) 用定义或下面的定理判断.

[定理1.7.1] 设 A 和 B 是两个相互独立的事件, 且 $P(A)>0$, 则 $P(B \mid A)=P(B)$.

[证] $P(B \mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$.

[定理1.7.2] 设 A 和 B 是两个事件, 且 $P(A), P(B)>0$, 则 A 与 B 独立、 A 与 B 互斥不能同时成立.

[证] 由独立性: $P(AB)=P(A)P(B)>0$. 由互斥: $P(AB)=P(\varnothing)=0$, 矛盾.

[**定理1.7.3**] 必然事件、不可能事件与任意事件相互独立.

[**证**]

(1) 因 $P(AS)=P(A)=P(A)\cdot 1=P(A)P(S)$, 则 S 与 A 相互独立.

(2) 因 $P(\varnothing A)=P(\varnothing)=0=P(\varnothing)P(A)$, 则 $\varnothing$ 与 A 相互独立.

[**定理1.7.4**] 若事件 A 与事件 B 相互独立, 则将任一部分事件替换为各自的对立事件所得的事件组也相互独立, 如: ① A 与 $\overline{B}$; ② $\overline{A}$ 与 B ; ③ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$.

[**证1**] 以证明①为例.

$$P\left(A\overline{B}\right)=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)[1-P(B)]=P(A)P\left(\overline{B}\right).$$

[**证2**] $P(A)=P\left[A\left(B\bigcup\overline{B}\right)\right]=P\left(AB\bigcup A\overline{B}\right)=P(AB)+P\left(A\overline{B}\right)=P(A)P(B)+P\left(A\overline{B}\right),$

故 $P\left(A\overline{B}\right)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P\left(\overline{B}\right)$.

[**定义1.7.3**] 设 A,B,C 是三个事件 .

(1) 若 $\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\end{cases}$, 则称 A,B,C **两两独立**.

(2) 若 $\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$, 则称 A,B,C **相互独立**.

[**例1.7.2**] [**两两独立但不相互独立**] 设有编号 $1,2,3,4$ 的四张卡片, 先从中任取一张. 设事件 A : 取到 1 或 2 , 事件 B : 取到 1 或 3 , 事件 C : 取到 1 或 4 . 求证: A,B,C 两两独立但不相互独立.

[**证**] 易证 $P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C)$.

因 $ABC=\{1\}$, 则 $P(ABC)=\dfrac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$.

[**定义1.7.4**] 设 $A_1,\cdots,A_n\ \ (n\geq 2)$ 是一列事件. 若其中的任意 $2,3,\cdots,n$ 个事件的积事件的概率都等于各事件概率之积, 则称 $A_1,\cdots,A_n$ **相互独立**.

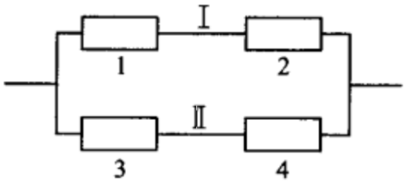
[**注**] 要证明 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立, 需证明 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式.

[**定理1.7.5**] 若事件 $A_1,\cdots,A_n\ \ (n\geq 2)$ 相互独立, 则:

(1) 任意 $k\ \ (2\leq k\leq n)$ 个事件的概率等于各事件的概率之积.

(2) 将一部分事件替换为各自的对立事件所得的事件组也相互独立.

[例1.7.3] 一个元件(或系统)能正常工作的概率称为其可靠性. 如下图为 4 个独立工作的元件组成的串并联系统, 其中元件 $i \ (1 \le i \le n)$ 的可靠性为 p_i . 求系统的可靠性.



[解] 设事件 A : 系统正常工作, 事件 $A_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$: 元件 i 正常工作, 且 A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立.

$$P(A) = P(A_1A_2 \bigcup A_3A_4) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) = p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4 .$$

[例1.7.4] 要验收一批 100 件的产品, 验收方案如下: 从这批产品中随机抽取 3 件进行测试, 设测试结果相互独立. 若这 3 件中至少有一件在测试中被认为是次品, 则拒收这批产品. 已知这 100 件产品中有 4 件次品, 一件次品被认为是次品的概率为 0.95 , 一件正品被误认为是次品的概率为 0.01 .求这批产品被接收的概率.

[解] 设事件 A : 这批产品被接收, 事件 $H_i \ (i = 0, 1, 2, 3)$: 任取的 3 件产品中恰有 i 件次品,

则 H_1, H_2, H_3, H_4 是样本空间 S 的一个划分.

已知这批产品中有 4 件次品和 96 件正品.

$$P(H_0) = \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}, P(A \mid H_0) = 0.99 \times 0.99 \times 0.99 .$$

$$P(H_1) = \frac{C_4^1C_{96}^2}{C_{100}^3}, P(A \mid H_1) = 0.99 \times 0.99 \times 0.05 .$$

$$P(H_2) = \frac{C_4^2C_{96}^1}{C_{100}^3}, P(A \mid H_2) = 0.99 \times 0.05 \times 0.05 .$$

$$P(H_3) = \frac{C_4^3}{C_{100}^3}, P(A \mid H_3) = 0.05 \times 0.05 \times 0.05 .$$

故 $P(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} P(A \mid H_i)P(H_i) = 0.8629$.

[例1.7.5] 甲、乙两人比赛, 每局甲胜的概率为 $p \ \left(p \ge \dfrac{1}{2}\right)$, 各局胜负相互独立. 问甲采用三局两胜制有利还是采用五局三胜制有利.

[解]

(1) 若采用三局两胜制, 则甲胜的情形有: ①甲甲; ②甲乙甲; ③乙甲甲. 显然它们互斥, 故 $p_1 = p^2 + 2p^2(1-p)$.

(2) 若采用五局三胜制, 则甲胜的情形有: ①甲甲甲; ②XXX甲, 且前 3 场中有 2 场甲胜; ③XXXX甲, 且前 4 场中有 2 场甲胜.

显然它们互斥, 则 $p_2 = p^3 + C_3^2p^2(1-p) \cdot p + C_4^2p^2(1-p)^2 \cdot p = p^3 + C_3^2p^3(1-p) + C_4^2p^3(1-p)^2$.

因 $p_2 - p_1 = 3p^2(2p^3 - 5p^2 + 4p - 1) = 3p^2(2p^3 - 2 - 5p^2 + 4p + 1)$

$= 3p^2[2(p^3-1) - (5p^2 - 4p - 1)] = 3p^2[2(p-1)(p^2+p+1)] = 2p^2(p-1)^2(2p-1)$,

则 $p > \dfrac{1}{2}$ 时, $p_2 > p_1$, 即五局三胜制对甲有利; $p = \dfrac{1}{2}$ 时, $p_2 = p_1$, 两种赛制甲获胜的概率相等.