数值分析 期末速通教程

5. 线性方程组的直接解法

5.1 Gauss 列主元消元法

[**例5.1.1**] 用 Gauss 列主元消元法解线性方程组 $\begin{cases} 12x_1-3x_2+3x_3=15 \\ -18x_1+3x_2-x_3=-15 \\ x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$.

[**解**] 每次取每一列的绝对值最大的数作主元.

$$
\begin{bmatrix} A & \overrightarrow{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3+\frac{1}{18}r_1]{r_2+\frac{2}{3}r_1} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \dfrac{7}{3} & 5 \\ 0 & \dfrac{7}{6} & \dfrac{17}{18} & \dfrac{31}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \dfrac{7}{6} & \dfrac{17}{18} & \dfrac{31}{6} \\ 0 & -1 & \dfrac{7}{3} & 5 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_3+\frac{6}{7}r_2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \dfrac{7}{6} & \dfrac{17}{18} & \dfrac{31}{6} \\ 0 & 0 & \dfrac{22}{7} & \dfrac{66}{7} \end{bmatrix}
$$

, 解得: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$.

5.2 LU 分解

[**定义5.2.1**]

(1) [**Doolittle 分解**, LU **分解**] 将矩阵 A 分解为 $A=LU$, 其中 L 是单位下三角矩阵, U 是上三角矩阵.

(2) 用 LU 分解解线性方程组 $Ax=b$, 即 $LUx=b$, 分解为两个方程组: ① $Ly=b$; ② $Ux=y$.

[**定理5.2.1**] 若矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的各阶顺序主子式 $D_i\neq 0\ \ (i=1,\cdots,n)$ (即正定), 则 A 的 LU 分解存在且唯一.

[**例5.2.1**] 用 LU 分解解线性方程组 $\begin{cases}\dfrac{1}{4}x_1+\dfrac{1}{5}x_2+\dfrac{1}{6}x_3=9\\ \dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{1}{4}x_2+\dfrac{1}{5}x_3=8\\ \dfrac{1}{2}x_1+x_2+2x_3=8\end{cases}$.

[**解**] $A=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{6}\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5}\\ \dfrac{1}{2} & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{4}{3}r_1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{6}\\ 0 & -\dfrac{1}{60} & -\dfrac{1}{45}\\ 0 & \dfrac{3}{5} & \dfrac{5}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+36r_2}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{6}\\ 0 & -\dfrac{1}{60} & -\dfrac{1}{45}\\ 0 & 0 & \dfrac{13}{15}\end{bmatrix}=U$.

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{3}\Big/\dfrac{1}{4} & 1 & 0\\ \dfrac{1}{2}\Big/\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{5}\Big/\left(-\dfrac{1}{60}\right) & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{4}{3} & 1 & 0\\ 2 & -36 & 1\end{bmatrix}.$$

解 $Ly=b$ 得: $y=(9,-4,-154)^T$. 解 $Ux=y$ 得: $x=(-177.69,476.92,-227.08)^T$.

5.3 LDL^T 分解、LL^T 分解

[**定义5.3.1**]

(1) [LDL^T **分解**] 若矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, 则 A 可唯一分解为 $A=LDL^T$, 其中 L 是单位下三角矩阵, D 是对角矩阵. 对 A 的 LU 分解 $A=LU$, D 的对角线元素与 U 相同.

(2) 用 LDL^T 分解解线性方程组 $Ax=b$, 即 $L(DL^T)x=b$, 分解为两个方程组: ① $Ly=b$; ② $(DL^T)x=y$, 即 $L^Tx=D^{-1}y$.

[**定义5.3.2**]

(1) 对对称正定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的 LDL^T 分解 $A=LDL^T$, 设 $D=\mathrm{diag}\{d_{11},\cdots,d_{nn}\}$. 因 A 正定, 则 $d_{ii}>0\ \ (i=1,\cdots,n)$. 记 $D^{\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}\left\{\sqrt{d_{11}},\cdots,\sqrt{d_{nn}}\right\}$.

(2) [LL^T **分解**] 对称正定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 可唯一分解为 $A=LL^T$, 其中 L 是主对角线元素都是正数的下三角矩阵. 对 A 的 LDL^T 分解 $A=L_1DL_1^T$, 有 $L=L_1D^{\frac{1}{2}}$.

(3) 用 LL^T 分解解线性方程组 $Ax=b$, 即 $LL^Tx=b$, 分解为两个方程组: ① $Ly=b$; ② $L^Tx=y$.

[**例5.3.1**] 分别用 LU 分解、LDL^T 分解、LL^T 分解解线性方程组 $\begin{bmatrix}2&4&2\\4&9&6\\2&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\23\\22\end{bmatrix}$.

[**解**] $(x_1,x_2,x_3)=(-25,15,-2)$.

(1) LU 分解: $A=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&2\\&1&2\\&&3\end{bmatrix}=LU$. 原方程组等价于 $\begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$.

(2) LDL^T 分解: $A=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\&1&2\\&&1\end{bmatrix}=LDT^T$. 原方程组等价于 $\begin{cases}Ly=b\\DL^Tx=y\end{cases}$.

(3) LL^T 分解: $A=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&&\\2\sqrt{2}&1&\\\sqrt{2}&2&\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&2\sqrt{2}&\sqrt{2}\\&1&2\\&&\sqrt{3}\end{bmatrix}=LL^T$. 原方程组等价于 $\begin{cases}Ly=b\\L^Tx=y\end{cases}$.

5.4 矩阵的范数、条件数、谱半径

[定义5.4.1] 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的范数:

(1) **[无穷范数, 行范数]** $||A||_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$.

(2) **[1 - 范数, 列范数]** $||A||_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n|a_{ij}|$.

(3) **[2 - 范数]** $||A||_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$.

(4) **[F - 范数]** $||A||_F=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

[注] 向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$ 的范数:

(1) **[无穷范数]** $||x||_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$.

(2) **[1 - 范数]** $||x||_1=\sum\limits_{i=1}^n|x_i|$.

(2) **[2 - 范数]** $||x||_2=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$.

(3) **[p - 范数]** $||x||_p=\sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^n x_i^p}\ (p\ge 1)$.

[定义5.4.2] 可逆矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的条件数 $\mathrm{cond}(A)_v=||A||_v||A^{-1}||_v$, 其中 $v=1,2,\infty$.

(1) $\mathrm{cond}(A)_\infty=||A||_\infty||A^{-1}||_\infty$.

(2) $\mathrm{cond}(A)_1=||A||_1||A^{-1}||_1$.

(3) $\mathrm{cond}(A)_2=||A||_2||A^{-1}||_2=\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}$.

若 A 对称, 则 $\mathrm{cond}(A)_2=\dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$, 其中 λ_1,λ_2 分别为 A 绝对值最大、最小的特征值.

[注] 若 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 可逆, 则 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$.

[定义5.4.3] 矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的谱半径 $\rho(A)=\max\limits_i|\lambda_i|$, 其中 λ_i 为 A 的特征值.