数值分析 期末速通教程

6. 线性方程组的迭代解法

6.1 Jocabi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法

[**例6.1.1**] 分别写出用 Jocabi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组 $\begin{cases} 8x_1-3x_2+2x_3=20 \\ 4x_1+11x_2-x_3=33 \\ 6x_1+3x_2+12x_3=36 \end{cases}$ 的迭代形式.

[**解**]

整理得	Jocabi 迭代法	Gauss-Seidel 迭代法
$\begin{cases} x_1=\dfrac{3x_2-2x_3+20}{8} \\ x_2=\dfrac{-4x_1+x_3+33}{11} \\ x_3=\dfrac{-6x_1-3x_2+36}{12} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+20}{8} \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}+33}{11} \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{-6x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}+36}{12} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+20}{8} \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{-4x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}+33}{11} \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{-6x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k+1)}+36}{12} \end{cases}$

[**注**] Gauss-Seidel 迭代法是 Jocabi 迭代法的改进, 但两者的敛散性、收敛速度、迭代矩阵的谱半径都无必然关系.

[**例6.1.2**] 写出用 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组 $\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12 \\ -x_1+4x_2+2x_3=20 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3 \end{cases}$ 的迭代矩阵.

[**解**] $A=D+L+U=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$, $D+L=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$(D+L)^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{5} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{20} & \dfrac{1}{4} & 0 \\ -\dfrac{1}{40} & \dfrac{3}{40} & \dfrac{1}{10} \end{bmatrix}$, $B_{\mathrm{GS}}=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{5} \\ 0 & -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{11}{20} \\ 0 & \dfrac{1}{20} & -\dfrac{1}{8} \end{bmatrix}$.

[**注**] Jocabi 迭代法的迭代矩阵 $B_{\mathrm{J}}=-D^{-1}(L+U)$.

[**例6.1.3**] 分别判断用 Jocabi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+0.4x_2+0.4x_3=1 \\ 0.4x_1+x_2+0.8x_3=2 \\ 0.4x_1+0.8x_2+x_3=3 \end{cases}$ 的收敛性.

[**解**]

(1) Jocabi 迭代法: $B_J=\begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}$.

$|\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & \lambda & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & \lambda \end{vmatrix}=0$, 解得: $\rho(B_J)=\max\limits_i |\lambda_i| \approx 1.09>1$, 故不收敛.

(2) Gauss-Seidel 迭代法: $|\lambda I-B_S|=\begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4\lambda & \lambda & 0.8 \\ 0.4\lambda & 0.8\lambda & \lambda \end{vmatrix}=0$,

解得 $\rho(B_S)=\max\limits_i |\lambda_i|=\dfrac{8\sqrt{11}+52}{125}<1$, 故收敛.

[**例6.1.4**] 分别用 Jocabi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} (a_{11},a_{22}\neq 0)$.

(1) 求证: 两迭代法同敛散.

(2) 比较两迭代法的收敛速度.

[**解**]

(1) Jocabi 迭代矩阵 $B_{\text{J}}=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}$, 特征值 $\lambda_{\text{J}}=\pm\sqrt{\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|}$, $\rho(B_{\text{J}})=\sqrt{\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|}<1$ 时收敛.

G-S 迭代矩阵 $B_{\text{GS}}=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & -\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix}$, 特征值 $\lambda_{\text{GS}}=0,\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$, $\rho(B_{\text{GS}})=\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$ 时收敛.

注意到 $\sqrt{\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|}<1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$ 即证.

(2) Jocabi 迭代法的收敛速度 $-\ln\rho(B_{\text{J}})=-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|$.

G-S 迭代法的收敛速度 $-\ln\rho(B_{\text{GS}})=-\ln\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|$. 两迭代法的收敛速度之比为 $1:2$.

6.2 SOR 迭代

[**例6.2.1**] 写出用 SOR 迭代法解线性方程组 $\begin{cases}4x_1-x_2=1\\-x_1+4x_2-x_3=4\\-x_2+4x_3=-3\end{cases}$ 的迭代形式, 取松弛因子为 ω .

[**解**] $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\omega\dfrac{1-4x_1^{(k)}+x_2^{(k)}}{4}\\x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\omega\dfrac{4+x_1^{(k+1)}-4x_2^{(k)}+x_3^{(k)}}{4}\\x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\omega\dfrac{-3+x_2^{(k+1)}-4x_3^{(k)}}{4}\end{cases}$.

6.3 迭代法的收敛性

6.3.1 充要条件

[**定理6.3.1.1**] 迭代形式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 收敛 iff $\lim\limits_{k\to\infty}B^{k+1}=0$.

[**定理6.3.1.2**]

(1) 迭代形式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛 iff 迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)<1$.

(2) 迭代法的收敛速度完全取决于迭代矩阵的谱半径.

① 谱半径越小, 收敛越快; 谱半径越接近 1 , 收敛越慢.

② 谱半径 ≥ 1 , 发散.

6.3.2 充分非必要条件

[**定理6.3.2.1**]

(1) 若迭代矩阵 B 的任一范数 $||B||<1$, 则迭代形式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 和 f 都收敛.

(2) $||B||$ 越小于 1 , 收敛越快; $||B||$ 越接近 1 , 收敛越慢.

6.3.3 特殊结论

[**定义6.3.3.1**] 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\ \ (i=1,\cdots,n)$, 则称 A 为**行严格对角占优矩阵**.

[**定理6.3.3.1**] 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 行严格对角占优, 则 A 可逆.

[**定理6.3.3.2**] 若线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 行严格对角占优, 则 Jocabi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法都收敛.

[**例6.3.3.1**] 判断分别用 Jocabi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法解线性方程组 $\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\-x_1+4x_2+2x_3=20\\2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$ 的收敛性.

[**解**] 因系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}5&2&1\\-1&4&2\\2&-3&10\end{bmatrix}$ 行严格对角占优, 故两迭代法都收敛.

[**定理6.3.3.3**] 若线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 对称正定, 则:

(1) Jocabi 迭代法收敛 iff $(2D-A)$ 正定.

(2) Gauss-Seidel 迭代法收敛.

[**定理6.3.3.4**] 若线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的对角元素 $a_{ii}\neq 0\ \ (i=1,\cdots,n)$, 则 SOR 迭代法收敛的必要条件为: $0<\omega<2$.

[**定理6.3.3.5**] 若线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 对称正定, 则 $0<\omega<2$ 时, SOR 迭代法收敛.

[**定理6.3.3.6**] 若线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 严格对角占优, 则 $0<\omega\leq 1$ 时, SOR 迭代法收敛.

---

7. 非线性方程与非线性方程组的数值解法

[**例7.1.1**] 用 Newton 法解方程 $x^3-a=0$, 推导求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式, 并讨论其收敛性.

[**解**] $f(x)=x^3-a$, $f'(x)=3x^2$.

迭代公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\dfrac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\dfrac{2x_k^3+a}{3x_k^2}\ \ (k=0,1,2,\cdots)$.

(1) $a=0$ 时, 迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k\to 0$, 收敛.

(2) $a\neq 0$ 时, 因 $\sqrt[3]{a}$ 是 $f(x)=0$ 的单根, 则收敛.
