

《概率论与数理统计》期末速通

8. 假设检验

8.1 假设检验

8.1.1 假设检验的思想和方法

[定理8.1.1] [实际推断原理] 小概率事件在一次试验中几乎不发生.

[注] 由实际推断原理: 对一个假设检验问题, 需借助某个统计量构造一个事件 A , 使得若假设 H_0 为真, 则 A 发生的概率很小; 若 H_0 不真, 则 A 发生的概率显著增大. 根据样本观察值确定 A 是否发生, 若发生, 则拒绝 H_0 ; 否则接受 H_0 .

[例8.1.1] 葡萄糖用某机器包装. 每袋糖的重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 机器正常时, 其均值为 0.5, 标准差为 0.015. 某日为检验机器是否正常, 随机抽取它包装的 9 袋糖, 测得重量分别为 0.497, 0.506, 0.518, 0.524, 0.498, 0.511, 0.520, 0.515, 0.512. 判断机器是否正常.

[解] 因长期实践时标准差较稳定, 不妨设 $\sigma = 0.015$, 则 $X \sim N(\mu, 0.015)$.

问题转化为判断 μ 是否为 0.5. 对此提出两个对立的假设: $H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$.

因 \bar{X} 是 μ 的无偏估计, 若 H_0 为真, 则 $|\bar{X} - \mu_0|$ 应较小, 拒绝 H_0 应满足 $|\bar{X} - \mu_0|$ 较大.

设随机变量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$, 称其为**检验统计量**.

可认为 Z 的观察值较大, 即小概率事件发生时, 可作出拒绝 H_0 的结论.

下面求一个 $k > 0$ s. t. $\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > k$ 时可拒绝 H_0 .



令 $P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = P\left\{\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > k\right\} = \alpha$. 由上图, 解得: $k = z_{\frac{\alpha}{2}}$.

综上:

(1) 若检验统计量的观察值 $|z| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$, 则拒绝 H_0 .

$W = \left\{ |z| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = (-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$ 称为**拒绝域**, 其边界点 $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ 和 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 称为**临界点**.

(2) 若 $|z| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$, 则接受 H_0 .

具体地, 取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 则上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点 $z_{0.025} = 1.96$.

因样本均值 $\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 0.511$, $n = 9$, $\sigma = 0.015$, $\mu_0 = 0.5$,

则 Z 的观察值 $|z| = 2.22 > 1.96$, 故拒绝 H_0 , 即认为机器工作不正常.

[注1] 假设检验问题的概念:

(1) 两个对立的假设:

① 机器正常: $H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$, 称为**原假设**.

② 机器不正常: $H_1: \mu \neq \mu_0$, 称为**备择假设**.

(2) 根据有限的样本值判断 H_0 是否成立时, 不可避免地会发生如下两类错误:

① 第一类错误: $\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\}$, 称为**弃真错误**.

② 第二类错误: $\{H_0 \text{ 为假, 接受 } H_0\}$, 称为**取伪错误**.

(3) 显著性检验: 因(2)中的两类错误无法排除, 则只能控制犯错的概率, 此处只考虑控制犯第一类错误的概率, 称为**显著性检验**, 即令 $P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} \leq \alpha$, 其中很小的数 α 称为**显著性水平**.

[注2] 假设检验问题的步骤:

(1) 根据实际问题, 提出原假设和备择假设.

(2) 根据实际问题, 构造检验统计量, 在 H_0 成立的条件下确定其分布.

(3) 给定显著性水平 α , 在 H_0 成立的条件下由 $P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} \leq \alpha$ 求得拒绝域和临界点.

(4) 用样本值求得检验统计量的观察值, 若观察值落入拒绝域, 则拒绝 H_0 ; 否则接受 H_0 .

8.1.2 假设检验的概念

[定义8.1.1]

(1) 考察**假设检验问题**: 在显著性水平 α 下, 检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$, 其中 H_0 称为**原假设**或**零假设**, H_1 称为**备选假设**.

(2) 假设检验问题的任务: 根据样本, 用检验方法选择接受 H_0 或接受 H_1 .

(3) 根据题设和条件确定一个统计量 Z 并在 H_0 成立的条件下确定其分布, 称 Z 为**检验统计量**.

(4) Z 取某区域 C 中的值时拒绝 H_0 , 称 C 为**拒绝域**, 拒绝域的边界点称为**临界点**.

(5) 根据有限的样本值判断 H_0 是否成立时, 不可避免地会发生如下两类错误:

① 第一类错误: $\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\}$, 称为**弃真错误**.

② 第二类错误: $\{H_0 \text{ 为假, 接受 } H_0\}$, 称为**取伪错误**.

(6) 上述错误无法排除, 只能控制犯错的概率, 此处只考虑控制犯第一类错误的概率, 称为**显著性检验**, 即令 $P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} \leq \alpha$, 其中很小的数 α 称为**显著性水平**.

(7) 根据假设的形式, 假设检验分为三类:

① 假设形如 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ 的假设检验称为**双边检验**.

② 假设形如 $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ 的假设检验称为**右边检验**.

③ 假设形如 $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 的假设检验称为**左边检验**.

左边检验和右边检验统称**单边检验**.

[注1] 根据假设是否关于参数, 假设检验分为两类:

① 参数检验: 总体分布已知, 检验关于未知参数.

② 非参数检验: 假设不关于总体的参数.

[注2] 原假设和备选假设的选取原则:

① 将大众普遍认为成立的命题作为原假设, 因为原假设不能轻易拒绝, 除非有足够的证据证明它不真.

② 将想证否的命题作为原假设, 将想证真的命题作为备择假设.

[注3] 样本容量固定时, 若犯第一类错误的概率降低, 则犯第二类错误的概率增大; 反之亦然.

为降低两类错误的概率, 应增大样本容量.

一般增大样本容量使得犯第一类错误的概率不超过某个给定的数.

8.1.3 单边检验的拒绝域

[定理8.1.2] 设 X_1, \dots, X_n 是取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一组样本, 其中 μ 未知, σ 已知. 取显著性水平为 α , 则:

(1) 右边检验问题 $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ 的拒绝域为 $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_\alpha$.

(2) 左边检验问题 $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 的拒绝域为 $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -z_\alpha$.

[证] 只证(1), (2) 同理.

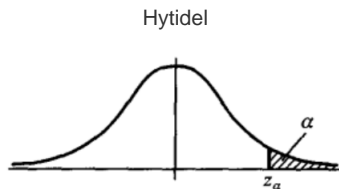
因 \bar{X} 是 μ 的无偏估计, σ 已知, 取检验统计量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

因 H_0 中的 μ 都比 H_1 中的 μ 小, 则 H_1 为真时, 样本均值的观察值 \bar{x} 的值偏大.

故取拒绝域形如 $\bar{x} \geq k$, 其中 k 是某一正常数. 下面求 k .

$$\begin{aligned} P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} &= P_{\mu \in H_0} \{\bar{X} \geq k\} = P_{\mu \leq \mu_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right\} \\ &\leq P_{\mu \leq \mu_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right\} * H_0 \text{ 为真时, } \mu \leq \mu_0, \text{ 则 } -\mu \geq -\mu_0, \text{ 进而 } \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}. \end{aligned}$$

$$\text{欲使得 } P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} \leq \alpha, \text{ 只需令 } P_{\mu \leq \mu_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right\} = \alpha.$$



因 $Z \sim N(0, 1)$, 由上图, 解得: $\frac{k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_\alpha$, 即 $k = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$. 故拒绝域为 $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_\alpha$.

[例8.1.2] 为检验生产商是否在牛奶中掺水, 可测定牛奶的冰点. 设牛奶的冰点温度服从均值 $\mu_0 = -0.545$ 、标准差 $\sigma = 0.008$ 的正态分布, 牛奶掺水会使得冰点温度升高至约 0. 现测得 5 批牛奶的冰点温度, 其均值 $\bar{x} = -0.535$. 取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 问是否可认为牛奶掺水.

[解] 因想证明牛奶掺水,

则检验假设 $H_0: \mu \leq \mu_0 = -0.545$ (牛奶未掺水), $H_1: \mu > \mu_0$ (牛奶掺水), 为右边检验.

$\alpha = 0.05$, 则上 α 分位点 $z_{0.05} = 1.645$.

取检验统计量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$, 其观察值 $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 2.7951 \geq 1.645$,

则在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 即认为牛奶掺水.

8.2 正态总体的均值的假设检验

8.2.1 单个正态总体的均值的假设检验

[定理8.2.1] 设 X_1, \dots, X_n 是取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一组样本, 其中总体均值 μ 未知. 取显著性水平为 α .

(1) 若总体方差 σ^2 已知, 则用 **Z 检验**, 即取检验统计量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$	$ z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
右边检验	$H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$	$z \geq z_\alpha$
左边检验	$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$	$z \leq -z_\alpha$

(2) 若 σ^2 未知, 则用 **t 检验**, 即取检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$	$ t \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
右边检验	$H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$	$t \geq t_\alpha(n-1)$
左边检验	$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$	$t \leq -t_\alpha(n-1)$

[证]

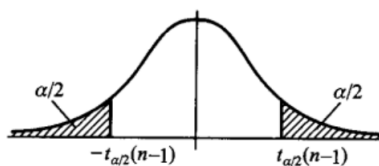
(1) 见定理8.1.2.

(2) 以证明检验问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 的拒绝域为 $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 为例.

若 H_0 为真, 则 $\mu = \mu_0$. 取检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$.

若 H_0 为真, 因样本均值 \bar{X} 是 μ 的无偏估计, 则 $|\bar{X} - \mu|$ 较小. 若 $|\bar{X} - \mu|$ 较大, 则拒绝 H_0 .

故拒绝域形如 $|t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq k$, 其中 k 是一个正常数. 下面求 k .



令 $P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} = P_{\mu_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq k \right\} = \alpha$. 由上图: 解得: $k = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

故拒绝域为 $|t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

[例8.2.1] 设某元件的寿命 $\sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中总体均值 μ 和总体方差 σ^2 都未知. 现测得 16 只元件的寿命如下: 159, 280, 101, 212, 224, 379, 179, 264, 222, 362, 168, 250, 149, 260, 485, 170. 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件下, 问是否能认为元件的平均寿命 > 225 .

[解] 检验假设: $H_0: \mu \leq \mu_0 = 225, H_1: \mu > \mu_0$, 为右边检验.

取检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$, 由定理8.2.1的(2): 拒绝域为 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq t_{\alpha}(n-1)$.

$n = 16$, 则上 α 分位点 $t_{0.05}(15) = 1.7531$.

样本均值 $\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 241.5$, 样本标准差 $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 98.7259$.

观察值 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = 0.6685 < 1.7531$,

则在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件下接受 H_0 , 即可认为元件的平均寿命 > 225 .

8.2.2 两个正态总体的均值的假设检验

[定理8.2.2] 设 X_1, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, \dots, Y_{n_2} 分别是取自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一组样本, 其中总体均值 μ_1 和 μ_2 、总体方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 都未知. 设这两个样本相互独立, 样本均值分别为 \bar{X} 和 \bar{Y} , 样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 . 取显著性水平为 α , 给定一个常数 δ , 用 **t 检验**, 即取检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \text{ 则检验问题和拒绝域如下:}$$

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$ t \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
右边检验	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$t \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
左边检验	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$	$t \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$

[证] 以证明检验问题 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$ 的拒绝域为 $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$ 为例.

若 H_0 为真, 则 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$.

取检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, 其中

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

类似于一个正态总体的均值的 t 检验,

易知拒绝域形如 $|t| = \frac{|\bar{x} - \bar{y} - \delta|}{s_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq k$, 其中 k 是一个正常数. 下面求 k .

$$\text{令 } P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} = P_{\mu_1 - \mu_2 = \delta} \left\{ \frac{|\bar{X} - \bar{Y} - \delta|}{S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq k \right\} = \alpha, \text{ 解得: } k = t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2).$$

故拒绝域为 $|t| = \frac{|\bar{x} - \bar{y} - \delta|}{s_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$.

[注1] 常取 $\delta = 0$.

[注2] 若 σ_1^2 和 σ_2^2 都已知, 则用 **Z 检验**, 即取检验统计量 $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$ z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
右边检验	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$z \geq z_{\alpha}$
左边检验	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$	$z \leq -z_{\alpha}$

[例8.2.2] 用A和B两种方法分别测定水的融化热, 测得的数据如下:

方法A	79.98, 80.04, 80.02, 80.04, 80.03, 80.03, 80.04 79.97, 80.05, 80.03, 80.02, 80.00, 80.02
方法B	80.02, 79.94, 80.03, 80.02, 80.00, 80.02

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$, 其中总体均值 μ_1, μ_2 和总体方差 σ^2 都未知. 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件下检验假设 $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0, H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$.

[解] 对样本A: $n_1 = 13$, 样本均值 $\bar{x}_1 = 80.02$, 样本方差 $s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2 = 0.024^2$.

对样本B: $n_2 = 8$, 样本均值 $\bar{x}_2 = 79.97$, 样本方差 $s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2 = 0.03^2$.

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 0.0007178, S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

$$\text{取检验统计量 } t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

由定理8.2.2的右边检验: 拒绝域为 $t \geq t_{0.05}(13 + 8 - 2) = 1.7291$.

$$\text{观察值 } t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 3.33 > 1.7291,$$

则在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件拒绝 H_0 , 即认为方法A测得的融化热大于方法B测得的融化热.

8.3 正态总体的方差的假设检验

8.3.1 单个正态总体的方差的假设检验

[定理8.3.1] 设 X_1, \dots, X_n 是取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一组样本, 其中总体均值 μ 和总体方差 σ^2 都未知. 取显著性水平为 α . 用 χ^2 检验, 即取检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
右边检验	$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$
左边检验	$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

[证] 只证(1)和(2), (3)同理.

(1) 因 $E(S^2) = \sigma^2$, 则样本方差 S^2 是 σ^2 无偏估计.

若 H_0 为真, 则 $\sigma^2 = \sigma_0^2$. 取检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$.

因 S^2 是 σ^2 无偏估计, 若 H_0 为真, 则比值 $\frac{S^2}{\sigma_0^2}$ 在 1 附近摆动,

进而拒绝域形如 $\frac{S^2}{\sigma_0^2} \leq k'_1$ 或 $\frac{S^2}{\sigma_0^2} \geq k'_2$, 其中 k'_1 和 k'_2 是两个正常数.

两边同乘 $(n-1)$ 并令 $k_i = (n-1)k'_i$ ($i = 1, 2$) 得: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1$ 或 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2$.

下面求 k_1, k_2 .

$$\begin{aligned} \text{令 } P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} &= P_{\sigma_0^2} \left\{ \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \right) \cup \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right) \right\} \\ &= P_{\sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \right\} + P_{\sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right\} \quad * \text{ 两事件互斥.} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{为计算方便, 取 } P_{\sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \right\} = \frac{\alpha}{2}, P_{\sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

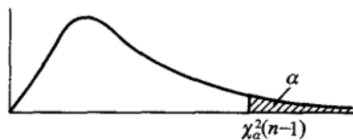
由 χ^2 分布的概率密度的图象, 解得: $k_1 = \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1), k_2 = \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$.

故拒绝域为 $\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$.

(2) H_0 中的 σ^2 都比 H_1 中的 σ^2 小, 则 H_1 为真时, S^2 的观察值 s^2 往往偏大,

故拒绝域形如 $S^2 \geq k$, 其中 k 是正常数. 下面求 k .

$$\begin{aligned} \text{令 } P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} &= P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} \{S^2 \geq k\} = P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} \right\} \\ &\leq P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} \right\} = \alpha \\ * \text{ 因 } H_0 \text{ 为真时, 有 } \frac{1}{\sigma^2} &\geq \frac{1}{\sigma_0^2}, \text{ 则 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{(n-1)k^2}{\sigma_0^2}. \end{aligned}$$



由上图, 有 $\frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} = \chi_{\alpha}^2(n-1)$, 解得: $k = \frac{\sigma_0^2}{n-1} \cdot \chi_{\alpha}^2(n-1)$.

故拒绝域为 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$.

[例8.3.1] 某电池的寿命长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000$ 的正态分布. 现有一批电池, 寿命的波动性可能有所改变. 现任取 26 只电池, 测得其寿命的样本方差 $s^2 = 9200$. 在显著性水平 $\alpha = 0.02$ 的条件下, 能否判断这批电池的寿命的波动性较以往有显著变化.

[解] 问题转化为: 在显著性水平 $\alpha = 0.02$ 的条件下, 检验假设 $H_0: \sigma^2 = 5000, H_1: \sigma^2 \neq 5000$.

$$n = 26. \text{ 取检验统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1).$$

由**定理8.3.1**的双边假设: 拒绝域为 $\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = 11.524$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = 44.314$.

观察值 $\chi^2 = 46 > 44.314$, 则在显著性水平 $\alpha = 0.02$ 的条件下拒绝 H_0 ,

即认为这批电池的寿命的波动性较以往有显著变化.

8.3.2 两个正态总体的方差的假设检验

[定理8.3.2] 设 X_1, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, \dots, Y_{n_2} 分别是取自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一组样本, 其中总体均值 μ_1, μ_2 和总体方差 σ_1^2, σ_2^2 都未知. 设这两个样本相互独立, 样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 . 取显著性水平为 α , 用 **F 检验**, 即取检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$
右边检验	$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F \geq F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$
左边检验	$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F \leq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

[证] 以证明(2)为例.

因 $E(S_i^2) = \sigma_i^2$ ($i = 1, 2$), 则 S_i^2 是 σ_i^2 的无偏估计. 取检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$.

若 H_0 为真, 则 $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, E(S_1^2) \leq E(S_2^2)$.

若 H_1 为真, 则 $E(S_1^2) > E(S_2^2)$, 进而 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 的观察值 $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ 往往偏大.

故拒绝域形如 $\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq k$, 其中 k 是一个正常数. 下面求 k .

$$\text{令 } P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} = P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2} \left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq k \right\}$$

$$\leq P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2} \left\{ \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \geq k \right\} \quad * \text{ 因 } H_0 \text{ 为真时, 有 } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1, \text{ 则 } \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \geq \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

$$= \alpha.$$

因 $\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$, 由 F 分布的概率密度的图象, 解得: $k = F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

故拒绝域 $F \geq F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

[注] 注意 F 检验的假设统计量不服从 F 分布.

[例8.3.2] 用A和B两种方法分别测定水的融化热, 测得的数据如下:

方法A	79.98, 80.04, 80.02, 80.04, 80.03, 80.03, 80.04 79.97, 80.05, 80.03, 80.02, 80.00, 80.02
方法B	80.02, 79.94, 80.03, 80.02, 80.00, 80.02

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 其中总体均值 μ_1, μ_2 和总体方差 σ^2 都未知. 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 的条件下检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, 并说明假设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的, 即两总体有**方差齐性**.

[解] 对样本A: $n_1 = 13$, 样本均值 $\bar{x}_1 = 80.02$, 样本方差 $s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2 = 0.024^2$.

对样本B: $n_2 = 8$, 样本均值 $\bar{x}_2 = 79.97$, 样本方差 $s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2 = 0.03^2$.

取检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, 由**定理8.3.2**的双边假设:

拒绝域为 $F \geq F_{0.005}(12, 7) = 8.18$ 或 $F \leq F_{0.995}(12, 7) = \frac{1}{F_{0.005}(7, 12)} = 0.18$.

观察值 $f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.60 \in (0.18, 8.18)$, 故在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 的条件下接受 H_0 ,

即认为两总体的方差相等.