《概率论与数理统计》期末速通

2. 随机变量及其分布

2.1 随机变量

[**例2.1.1**] 将一枚硬币抛三次, 观察出现正反面的情况. 设 X 为三次抛掷得到的正面 H 的数量.

对 $\forall$ 样本点 $e \in$ 样本空间 S , X 都有一个数与之对应, 即 X 是 S 上的一个实值单值函数.

X 的定义域为 S , 值域为 $\{0,1,2,3\}$, 记作 $X=X(e)=\begin{cases}3 & e=HHH \\ 2 & e=HHT,HTH,THH \\ 1 & e=HTT,THT,TTH \\ 0 & e=TTT\end{cases}$.

$P\{X=0\}=P\{TTT\}=\dfrac{1}{8}$.

[**例2.1.2**] 在一袋中装有编号分别为 $1,2,3$ 的 3 个球. 从袋中任取一球, 记录其号码后放回. 再任取一球, 记录其号码.

该试验的样本空间 $S=\{e\}=\{(i,j)\mid i,j=1,2,3\}$, 其中 i,j 分别为第一、二次取到的球的号码.

设 X 为两次取到的球的号码之和, 则 $X=X(e)=X((i,j))=i+j\ \ (i,j=1,2,3)$.

[**定义2.1.1**] 设随机试验的样本空间 $S=\{e\}$. 若 $X=X(e)$ 是定义在 S 上的实值单值函数, 则称其为**随机变量**.

[**注1**] 一般用大写英文字母 $X,Y,Z,W,\cdots$ 表示随机变量, 用小写英文字母 $x,y,z,w,\cdots$ 表示实数.

[**注2**] 随机变量 X 本质是对事件的描述, 其取值随试验的结果而定. 而试验的各个结果以一定的概率出现, 则随机变量的取值有一定概率, 值随机而定的变量.

[**注3**] 随机变量 X 取值为 c 记作 $\{X=c\}$. 一般用 $\{X=c\},\{X<c\},\{X\geq c\}$ 等表示事件.

2.2 离散型随机变量及其分布

[**定义2.2.1**] 取值有限个或可列个的随机变量称为**离散型随机变量**.

[**定义2.2.2**] 设离散型随机变量 X 的取值为 $x_k\ \ (k=1,2,\cdots)$, 且 X 取值 x_k 的概率 $P\{X=x_k\}=p_k\ \ (k=1,2,\cdots)$, 则称其为离散型随机变量 X 的**分布律**.

[**注**] 分布律可写成表格的形式:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

[**定理2.2.1**] 设离散型随机变量 X 取值 x_k 的概率 $P\{X=x_k\}=p_k\ \ (k=1,2,\cdots)$, 则:

(1) $p_k\geq 0\ \ (k=1,2,\cdots)$.

(2) $\displaystyle\sum_k p_k=1$.

[**证**] (2) 因 $S=\displaystyle\bigcup_k\{X=x_k\}$, 且事件 $\{X=x_1\},\cdots,\{X=x_k\},\cdots$ 两两互斥.

由可列可加性: $1=P(S)=\displaystyle\sum_k P\{X=x_k\}=\sum_k p_k$.

[**注**] 可以证明: 若一个数列满足(1)和(2), 可以证明它是某个随机变量的分布律.

这表明: (1)和(2)是一个数列是分布律的充要条件.

[**例2.2.1**] 设一汽车在开往目的地的路上需经过 4 组信号灯, 每组信号灯以 $\dfrac{1}{2}$ 的概率允许或禁止汽车通过. 设 X 为汽车首次停下时通过的信号灯的组数, 设各组信号灯的工作相互独立. 求 X 的分布律.

[**解**] 设 p 为每组信号灯禁止汽车通过的概率.

X 的分布列:

X	0	1	2	3	4
p_k	$p=0.5$	$(1-p)p=0.25$	$(1-p)^2p=0.125$	$(1-p)^3p=0.0625$	$(1-p)^4=0.0625$

2.2.1 (0-1)分布

[**定义2.2.3**] 设随机变量 X 可能的取值只有 0 和 1 , 且 X 取 1 的概率为 $p\ \ (0<p<1)$, 则称 X 服从参数为 p的**(0-1)分布**或**两点分布**.

(1) 分布律: $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\ \ (k=0,1)$.

(2) 分布列:

X	0	1
p_k	$1-p$	p

[**定理2.2.2**] 若随机试验的样本空间 S 只包含两个元素 e_1,e_2 , 则可在其上定义一个服从(0-1)分布的随机变量 $X=X(e)=\begin{cases}0 & e=e_1\\ 1 & e=e_2\end{cases}$.

2.2.2 Bernoulli试验与二项分布

[**定义2.2.4**] 若随机试验 E 只有两个结果 A 和 $\overline{A}$, 则称其为**Bernoulli试验**. 设 $P(A)=p\in(0,1)$. 将 E 独立重复地进行 n 次, 称这一串重复的独立试验为 n **重Bernoulli试验**, 其中"重复"指每次试验中 $P(A)=p$ 不变, "独立"指每次试验的结果互不影响.

[**定义2.2.5**] 若随机变量 X 的分布律有形式 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ \ (k=0,1,\cdots,n)$, 则称 X 服从参数为 n,p 的**二项分布**, 记作 $X\sim b(n,p)$.

[**注1**] $n=1$ 时, 二项分布退化为(0-1)分布.

[**注2**] 随 k 的增加, $P\{X=k\}$ 先随之单调增大, 达到最大值后单调减小.

[**例2.2.2**] 已知一大批产品中一级品率为 0.2 , 现从中任取 20 个产品, 求其中恰有 $k\ \ (0\le k\le 20)$ 个一级品的概率.

[**解**] 这是不放回抽样, 但因产品数量多, 而抽取的产品相对于产品数量很小, 故可视为放回抽样,

进而抽取 20 个产品等价于进行 20 重Bernoulli试验 E .

设事件 A : 某产品是一级品, 则 $P(A)=0.2$,

且 20 个产品中的一级品数 X 等于 20 重Bernoulli试验中 A 发生的次数, 则 $X\sim b(20,0.2)$.

故 $P\{X=k\}=C_{20}^k(0.2)^k(0.8)^{20-k}\ \ (0\le k\le 20)$.

[**例2.2.3**] 某人进行射击, 每次射击的命中率为 0.02 . 现独立射击 400 次, 求至少命中 2 次的概率.

[**解**] 设随机试验 E : 进行一次射击, 事件 A : 射击命中. 设独立射击 400 次中命中 X 次, 则 $X\sim b(400,0.02)$.

$P\{X\ge 2\}=1-P\{X<2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=0.9972$.

[**注**]

① $P\{X\ge 2\}$ 接近 1 , 这表明: 一个事件尽管在一次试验中发生的概率很小, 但独立试验次数足够多时, 该事件几乎必然发生.

② 若某人在 400 次独立射击中命中次数 <2 , 由实际推断原理: 他每次射击的命中率为 0.02 的假设的错误的.

[**例2.2.4**] 设有 80 个设备, 各设备工作相互独立, 发生故障的概率都为 0.01 , 且一个设备的故障只能由一个人处理. 现有如下两种配备维修工人的方法: ①由 4 个人维护, 每人负责 20 个设备; ② 80 个设备由 3 个人共同维护. 比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率.

[**解**]

① 设第 1 个人维护的 20 个设备同一时刻有 X 个发生故障, 则 $X\sim b(20,0.01)$.

设事件 $A_i\ \ (i=1,2,3)$: 第 i 个人维护的 20 个设备发生故障且不能及时维修.

80 个设备发生故障且不能及时维修的概率:

$$P(A_1\bigcup A_2\bigcup A_3\bigcup A_4)\ge P(A_1)=P\{X\ge 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=0.0169 .$$

② 设 80 个设备同一时刻有 Y 个发生故障, 则 $Y\sim b(80,0.01)$.

80 个设备发生故障且不能及时维修的概率: $P\{Y\ge 4\}=1-\sum\limits_{i=1}^{3}P\{Y=i\}\approx 0.0087$.

[**注**] 方法②与方法①相比, 每个人的任务重了, 但效率提高了.

2.2.3 Poisson分布

[**定义2.2.6**] 若随机变量 X 可能的取值为 $0,1,2,\cdots$, 且分布律 $P\{X=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\ \ (k=0,1,2,\cdots)$, 其中 $\lambda>0$ 是常数, 则称 X 服从参数为 λ 的Poisson分布, 记作 $X\sim\pi(\lambda)$ 或 $X\sim P(\lambda)$.

[**证**] 下证 $P\{X=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\ \ (k=0,1,2,\cdots)$ 是某个离散型随机变量的分布律.

① 因 $k\in\mathbb{N},\lambda>0$, 则 $P\{X=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\geq 0$.

② $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=1$.

[**定理2.2.3**] 设 $\lambda>0$ 是常数, $n\in\mathbb{N}^*$, 且 $np_n=\lambda$, 则对 $\forall$ 固定的整数 $k\geq 0$, 有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}C_n^kp_n^k(1-p_n)^{1-k}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

[**注**] 本定理表明: 二项分布 $b(n,p)$ 当 $n\to\infty$ 时为Poisson分布 $P(\lambda)$.

[**推论**] 设 $np=\lambda$, 则 n 很大($n\geq 20$), p 很小($p\leq 0.05$)时, 有近似式: $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\approx\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

[**例2.2.5**] 某公司制造的产品的次品率为 0.1% , 每个产品称为次品相互独立. 求 1000 个产品中至少有 2 个次品的概率.

[**解**] 设 1000 个产品中有 X 个次品, 则 $X\sim b(1000,0.001)$.

(1) 二项分布:

$$
\begin{aligned}
P\{X\geq 2\}&=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-(0.999)^{1000}-C_{1000}^1(0.999)^{999}(0.001)\\
&\approx 0.2642411 .
\end{aligned}
$$

(2) Poisson定理: $n=1000,p=0.001,\lambda=np=1$.

$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}\approx 0.2642411 .$$

2.3 随机变量的分布函数

[**定义2.3.1**] 对随机变量 X 和 $\forall x\in\mathbb{R}$, 称函数 $F(x)=P\{X\leq x\}$ 为 X 的**分布函数**.

[**注1**] $F(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 、值域为 $[0,1]$ 的函数.

[**注2**] 用分布函数可求随机变量在任一区间上取值的概率, 如
$P\{x_1<X\leq x_2\}=P\{X\leq x_2\}-P\{X\leq x_1\}=F(x_2)-F(x_1)$,
$P\{x_1\leq X\leq x_2\}=P\{X\leq x_2\}-P\{X\leq x_1\}+P\{X=x_1\}$.

[**注3**] 几何表示: 将 X 视为数轴上随机点的坐标, 则分布函数 $F(x)$ 在 x 处的函数值表示 X 落在区间 $(-\infty,x]$ 上的概率.

[**注4**] 分布函数对离散型连续变量和连续性随机变量都适用.

[**定理2.3.1**] 对随机变量 X , $F(x)$ 是 X 的分布函数的充要条件为如下三条性质: ① $F(x)$ 单调不减; ② $0 \le F(x) \le 1$, 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$; ③ $F(x)$ 是右连续的, 即对 $\forall x$, 都有 $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.

[**例2.3.1**] 设随机变量 X 的分布律如下:

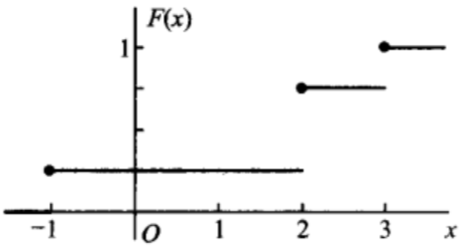
X	-1	2	3
p_k	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

(1) 求 X 的分布函数.

(2) 求 $P\left\{X \le \dfrac{1}{2}\right\}, P\left\{\dfrac{3}{2} \le X \le \dfrac{5}{2}\right\}, P\{2 \le X \le 3\}$.

[**解**]

(1) $F(x) = \begin{cases} 0 \quad x < -1 \\ P\{X=-1\} = \dfrac{1}{4} \quad -1 \le x < 2 \\ P\{X=-1\} + P\{X=2\} = \dfrac{3}{4} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 \quad x \ge 3 \end{cases}$, 其图象如下图所示:



(2) $P\left\{X \le \dfrac{1}{2}\right\} = P\{X=-1\} = \dfrac{1}{4}$. 另解: $P\left\{X \le \dfrac{1}{2}\right\} = F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

$P\left\{\dfrac{3}{2} < x \le \dfrac{5}{2}\right\} = F\left(\dfrac{5}{2}\right) - F\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$P\{2 \le x \le 3\} = P\{X=2\} + P\{2 < X \le 3\} = P\{X=2\} + F(3) - F(2) = \dfrac{3}{4}$.

[**定理2.3.2**] 设离散型随机变量 X 的分布律 $P\{X = x_k\} = p_k \ \ (k=1,2,\cdots)$, 则其分布函数 $F(x) = \sum\limits_{x_k \le x} p_k$.

[**注1**] 离散型随机变量的分布函数是分段函数, 其中分段区间除 $(-\infty, x_0)$ 外都是左闭右开的, 且图象是一条阶梯型曲线.

[**注2**] $F(x)$ 在 $x = x_k \ \ (k=1,2,\cdots)$ 处有跳跃, 跳跃值为 $p_k = P\{X = x_k\}$.

[例2.3.2] 已知离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ 0.3 & -2\le x<1\\ 0.6 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$. 求 X 的分布律.

[解] $P\{X=-2\}=0.3-0=0.3, P\{X=1\}=0.6-0.3=0.3, P\{X=2\}=1-0.6=0.4$.

X	-2	1	2
p_k	0.3	0.3	0.4

2.4 连续型随机变量及其概率密度

2.4.1 连续型随机变量

[例2.4.1] 设靶子是一个半径为 2 的圆盘, 击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比. 若射击都能中靶, 设弹着点与圆心的距离为 X. 求随机变量 X 的分布函数 $F(x)$.

[解] ① $x<0$ 时, 因 $\{X=k\}$ 是不可能事件, 则 $F(x)=P(\varnothing)=0$.

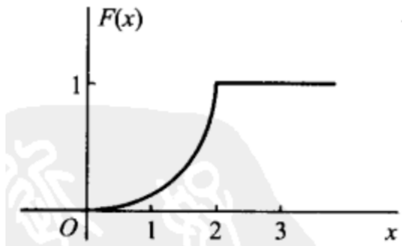
② $0\le x\le 2$ 时, 设 $P\{0\le X\le x\}=kx^2$, 其中 k 是常数.

因 $x=2$ 时, 有 $P\{0\le X\le 2\}=4k=1$, 则 $k=\dfrac{1}{4}$.

故 $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}=0+\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{x^2}{4}$.

③ $x\ge 2$ 时, 因射击都能中靶, 则 $F(x)=P\{X\le x\}=1$.

综上, $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$.



[注1] 因 $F(x)$ 的图象是一条连续曲线而非阶梯型曲线, 故 X 非离散型随机变量. 事实上, 它是连续型随机变量.

[注2] 可以证明 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2}, 0<t<2\\ 0, otherwise\end{cases}$ 是非负函数.

[定义2.4.1] 若对随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负可积的函数 $f(x)$ $s.t.$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, 则称 X 为**连续型随机变量**, 称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数, 简称**概率密度**.

[注] 概率密度 $f(x)$ 在个别点处的函数值不影响分布函数 $F(x)$ 的值.

[**定理2.4.1**] 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$, 则:

(1) $f(x)\geq 0$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

(3) $P\{x_1<X\leq x_2\}=P\{X\leq x_2\}-P\{X\leq x_1\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$.

(4) 若 $f(x)$ 可积, 则 $F(x)$ 连续.

(5) 若 $f(x)$ 连续, 则 $F(x)$ 可导, 且 $F'(x_0)=f(x_0)$.

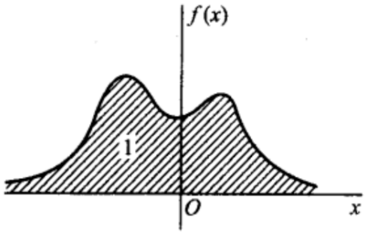
[**证**]

(2) 因 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$,

则 $1=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$.

(3) $P\{x_1<X\leq x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{-\infty}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{x_1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$.

[**注1**] (2)的几何意义: 介于 $y=f(x)$ 与 x 轴间的无界区域的面积为 1 , 如下图所示:



[**注2**] (3)的几何意义: X 落在区间 $(x_1,x_2]$ 的概率等于区间 $(x_1,x_2]$ 上介于 $y=f(x)$ 与 x 轴间的曲边梯形的面积.

[**注3**] 可以证明: 若函数 $f(x)$ 有性质(1)和(2), 则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 是某一随机变量 X 的分布函数, $f(x)$ 是 X 的概率密度.

[**定理2.4.2**] 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$, 则:

(1) $F(x)$ 连续.

(2) 若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 则 $F'(x_0)=f(x_0)$.

(3) 对 $\forall$ 常数 $a\in\mathbb{R}$, 有 $P\{X=a\}=0$.

(4)

$$P\{a<X<b\}=P\{a\leq X<b\}=P\{a<X\leq b\}=P\{a\leq X\leq b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\ .$$

[**证**] (3) 取 $\Delta x>0$, 因 $\{X=a\}\subset\{a-\Delta x<X\leq a\}$, 则 $P\{X=a\}\leq P\{a-\Delta x<X\leq a\}$.

因 $P\{x=a\}\geq 0$, 且 $P\{a-\Delta x<X\leq a\}=F(a)-F(a-\Delta x)\to 0\ \ (\Delta x\to 0)$, 由夹逼定理即证.

[**注**] (3)表明: 若 A 是不可能事件, 则 $P(A)=0$; 但若 $P(A)=0$, 则 A 未必是不可能事件.

[**例2.4.2**] 设随机变量 X 有概率密度 $f(x)=\begin{cases} kx,0\leq x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2},3\leq x\leq 4 \\ 0,otherwise \end{cases}$. 求:

(1) 常数 k .

(2) X 的分布函数 $F(x)$.

(3) $P\left\{1<X\leq\dfrac{7}{2}\right\}$.

[**解**]

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 kx\mathrm{d}x+\int_3^4\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=1$, 解得: $k=\dfrac{1}{6}$.

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{6},0\leq x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2},3\leq x\leq 4 \\ 0,otherwise \end{cases}$,

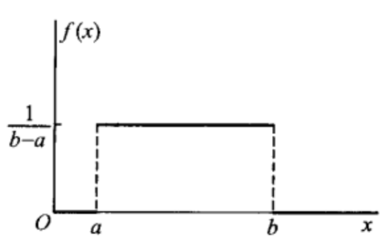
则 $F(x)=\begin{cases} 0,x<0 \\ \displaystyle\int_0^x\frac{t}{6}\mathrm{d}t,0\leq x<3 \\ \displaystyle\int_0^3\frac{t}{6}\mathrm{d}x+\int_3^x\left(2-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t,3\leq x<4 \\ 1,x\geq 4 \end{cases}=\begin{cases} 0,x<0 \\ \dfrac{x^2}{12},0\leq x<3 \\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4},3\leq x<4 \\ 1,x\geq 4 \end{cases}$.

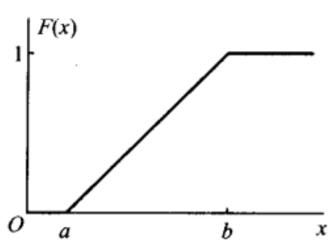
(3) $P\left\{1<X\leq\dfrac{7}{2}\right\}=F\left(\dfrac{7}{2}\right)-F(1)=\dfrac{41}{48}$.

2.4.2 均匀分布

[**定义2.4.2**] 若连续型随机变量 X 有概率密度 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a},a<x<b \\ 0,otherwise \end{cases}$, 则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**, 记作 $X\sim U(a,b)$, 其分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0,x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a},a\leq x<b \\ 1,x\geq b \end{cases}$.

[**注**] 服从均匀分布的连续型随机变量的概率密度 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$ 的图象如下图所示:





[**定理2.4.3**] 若连续型随机变量 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 则 X 落在 (a,b) 中任意等长的子区间内的可能性相同, 即它落在 (a,b) 中的子区间的概率只依赖于子区间的长度, 与子区间的位置无关.

[**证**] 对任一长度为 l 的子区间 $(c,c+l)\subset[a,b]$,

有 $\displaystyle P\{c<X\leq c+l\}=\int_c^{c+l}f(x)\mathrm{d}x=\int_c^{c+l}\frac{\mathrm{d}x}{b-a}=\frac{l}{b-a}$.

[**例2.4.3**] 设电阻值 R 是均匀分布在 $900\ \Omega \sim 1100\ \Omega$ 的随机变量. 求:

(1) R 的概率密度.

(2) R 落在 $950\ \Omega \sim 1050\ \Omega$ 的概率.

(3) R 落在 $750\ \Omega \sim 1050\ \Omega$ 的概率.

[**解**]

(1) $f(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{1100-900}=\dfrac{1}{200}, 900<r<1100 \\ 0, otherwise\end{cases}$.

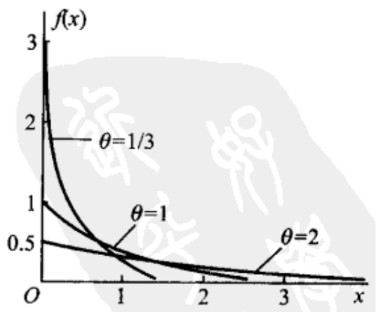
(2) $P\{950<R<1050\}=\displaystyle\int_{950}^{1050} f(r)\mathrm{d}r=\int_{950}^{1050}\frac{\mathrm{d}r}{200}=0.5$.

(3) $P\{750<R<1050\}=\displaystyle\int_{750}^{1050} f(r)\mathrm{d}r=\int_{900}^{1050} f(r)\mathrm{d}r=\frac{3}{4}$.

2.4.3 指数分布

[**定义2.4.3**] 若连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, x>0 \\ 0, x\leq 0\end{cases}$, 其中常数 $\theta>0$, 则称 X 服从参数为 θ 的**指数分布**, 记作 $X\sim Exp(\theta)$, 其分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, x\geq 0 \\ 0, x<0\end{cases}$.

[**注**] 服从参数为 θ 的指数分布的连续型随机变量的概率密度 $f(x)$ 的图象如下图所示:



[**定理2.4.4**] 若连续型随机变量 X 服从指数分布, 则它的概率分布有**无记忆性**, 即对 $\forall s,t>0$, 有 $P\{(X>s+t)|(X>s)\}=P\{X>t\}$.

[**证**] $P\{(X>s+t)|(X>s)\}=\dfrac{P\{(X>s+t)\bigcap(X>s)\}}{P\{X>s\}}=\dfrac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}$

$$=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{s+t}{\theta}}}{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}}}=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}}=P\{X>t\}.$$

[**注**] 设 X 为某元件的寿命, 则本定理表明: 已知该元件已使用了 s 小时, 则它总共能使用至少 $(s+t)$ 小时的条件概率与初始时它至少能使用 t 小时的概率相等, 即元件对它已使用过 s 小时无记忆.

[**例2.4.4**] 设顾客在银行窗口的等待时间 $X\ \ (\min)$ 服从指数分布, 其概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}},x>0\\0,otherwise\end{cases}$. 某顾客在窗口等待, 若等待时间超过 $10\ \min$ 则离开. 他一个月需到银行 5 次, 设他一个月内未等到服务而离开窗口 Y 次.

(1) 求 Y 的分布律.

(2) 求 $P\{Y\geq 1\}$.

[**解**] 设事件 A : 该顾客未等到服务而离开窗口, 则他去银行 5 次等价于进行了 5 重Bernoulli试验, 则 $Y\sim b(5,P(A))$.

$P(A)=P\{X>10\}=1-P\{X\leq 10\}=1-F(10)=\mathrm{e}^{-2}$, 则 $Y\sim b(5,\mathrm{e}^{-2})$.

(1) $P\{Y=k\}=C_5^k(\mathrm{e}^{-2})^k(1-\mathrm{e}^{-2})^{5-k}\ \ (k=0,1,\cdots,5)$.

(2) $P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y<1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5$.

2.4.4 正态分布

[**定义2.4.4**] 若连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 其中 $\sigma>0,\mu$ 都是常数, 则称 X 服从参数为 μ,σ 的**正态分布**或**Gauss分布**, 记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其分布函数 $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$.

[**证**] 下证 $F(x)$ 是分布函数. 因 $\sigma>0$, 则 $f(x)\geq 0$. 下证 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

[**引理**] 概率积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi},\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$.

令 $t=\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=1$.

[**注**] 正态分布的分布函数无法用初等函数表示.

[**定理2.4.5**] 设服从正态分布的连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$. 对曲线 $y=f(x)$, 有:

(1) $y=f(x)$ 关于直线 $x=\mu$ 对称, 则对 $\forall h\in\mathbb{R}$, 有 $P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\}$.

(2) $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\mu]$ 上单调增, 在区间 $[\mu,+\infty)$ 上单调减.

(3) $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

(4) 等长度的区间离 $x=\mu$ 越远, X 落在该区间上的概率越小.

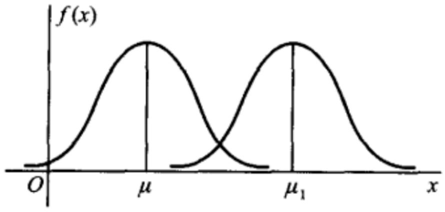
(5) $f(x)$ 只在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点.

(6) $y=f(x)$ 以 x 轴为水平渐近线.

[**证**] (5)令 $f''(x)=\dfrac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^5}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=0$, 则 $(x-\mu)^2=\sigma^2$, 解得: $x=\mu\pm\sigma$.

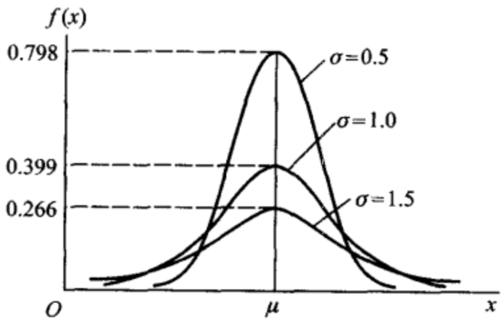
[**注1**] 考察服从参数为 μ,σ 的正态分布的连续型随机变量的概率密度 $f(x)$ 的图象.

(1) 固定 σ , 变化 μ 时, 图象沿 x 轴平移, 形状不变, 故 μ 称为正态分布的**位置参数**. 如下图为 $\mu_1>\mu$ 时的图象:



(2) 固定 μ , 变化 σ 时, 图象位置不变, 但 σ 越小, $f_{\max}=f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 越大, 即图象越尖.

如下图为 σ 分别取 $0.5,1.0,1.5$ 的图象. 由图象知: 固定 μ , σ 越小, X 落在区间 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 内的概率越大.

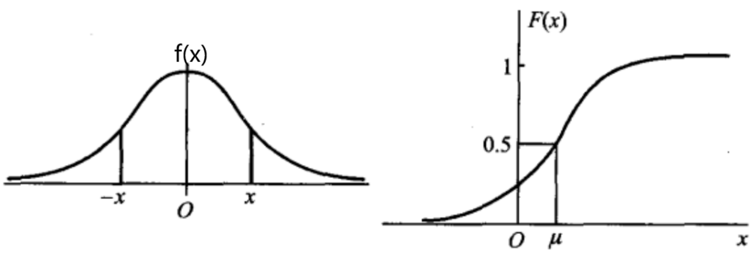


[**例2.4.5**] 设连续型随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$, 且 $P\{2<X<4\}=0.3$. 求 $P\{0<X<2\}$.

[**解**] 因 $y=\varphi(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称, 则 $P\{0<X<2\}=P\{2<X<4\}=0.3$.

[**定义2.4.5**] 对连续型随机变量 X , 若 $X\sim N(0,1)$, 则称 X 服从**标准正态分布**, 其概率密度 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, 分布函数 $\varPhi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

[**注**] $f(x)=\varphi(x)$ 和 $F(x)=\varPhi(x)$ 的图象如下图所示:



[**定理2.4.6**] 设连续型随机变量 X 服从标准正态分布, 其概率密度和分布函数分别为 $\varphi(x)$ 和 $\varPhi(x)$, 则:

(1) $\varPhi(-x)=1-\varPhi(x)$.

(2) $\varPhi(0)=\dfrac{1}{2}$.

[**证**] (1) $\varPhi(-x)+\varPhi(x)=P\{X\le -x\}+P\{X\le x\}=P\{X\le x\}+P\{X\ge x\}=1$.

[**定理2.4.7**] 任一正态分布可经一线性变换转化为标准正态分布. 具体地, 设连续型随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则随机变量 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

[**证**] Z 的分布函数 $F_Z(x) = P\{Z \leq x\} = P\{X \leq \mu + \sigma x\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{u=\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \varPhi(x) .$$

[**定理2.4.8**] 设连续型随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则:

(1) $F(x) = \varPhi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

(2) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \varPhi\left(\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \varPhi\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$.

[**证**]

(1) $F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \varPhi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

(2) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \varPhi\left(\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \varPhi\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$.

[**例2.4.6**] 将一温度调节器放在储存某种液体的容器内, 调节器在 $d\ ^\circ\mathrm{C}$, 液体温度 $X\ \ (^\circ\mathrm{C})$ 是一个随机变量, 且 $X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若 $d = 90\ ^\circ\mathrm{C}$, 求 $X < 89\ ^\circ\mathrm{C}$ 的概率.

(2) 若要保持液体温度至少为 $80\ ^\circ\mathrm{C}$ 的概率不低于 0.99 , 求 d 的取值范围.

[**解**]

(1) $X \sim N(90, 0.5^2)$,

则 $P\{X < 89\} = \varPhi\left(\dfrac{89-90}{0.5}\right) = \varPhi(-2) = 1 - \varPhi(2) = 1 - 0.977 = 0.0228$.

(2) $0.99 \leq P\{X \geq 80\} = 1 - P\{X < 80\} = 1 - \varPhi\left(\dfrac{80-d}{0.5}\right)$, 则 $\varPhi\left(\dfrac{d-80}{0.5}\right) \geq 0.99 = \varPhi(2.327)$.

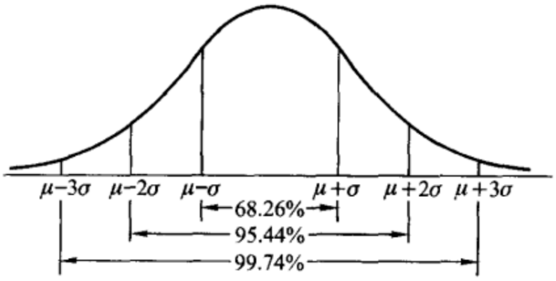
因 $\varPhi(x)$ 单调递增, 则 $\dfrac{d-80}{0.5} \geq 2.327$, 解得: $d > 81.1635$.

[**定理2.4.9**] [3σ**法则**] 若连续型随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma)$, 则 X 落在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 内几乎是必然的. 具体地, 有:

(1) $P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 68.25\%$.

(2) $P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 95.44\%$.

(3) $P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 99.74\%$.



2.5 随机变量的函数的分布

[**定义2.5.1**] 设 X 是随机变量. 对连续函数 $g(\cdot)$, 以 X 为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量, 称其为随机变量 X 的函数.

[**定义2.5.2**] 离散型随机变量的**概率分布**是指其分布律, 连续型随机变量的**概率分布**是指其概率密度.

2.5.1 离散型随机变量的函数

[**例2.5.1**] 设随机变量 X 的分布律如下. 求随机变量 $Y = (X-1)^2$ 的分布律.

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

[**解**] 下面的方法称为**矩阵法**或**逐点代入合并法**.

逐点代入:

p_k	0.2	0.3	0.1	0.4
X	-1	0	1	2
$Y = (X-1)^2$	4	1	0	1

合并:

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

2.5.2 连续型随机变量的函数

[**例2.5.2**] 设随机变量 X 有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8},0<x<4\\0,otherwise\end{cases}$. 求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度.

[**解**] 下面的方法称为**分布函数求导法**.

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{2X+8\leq Y\}=P\left\{X\leq\frac{y-8}{2}\right\}=F_X\left(\frac{y-8}{2}\right).$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[F_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\right]=f_X\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{y-8}{2},0<\dfrac{y-8}{2}<4\\0,otherwise\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32},8<y<16\\0,otherwise\end{cases}.$$

[**注**] 已知连续型随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)$ 和分布函数 $F_X(x)$, 用分布函数求导法求随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 和分布函数 $F_Y(y)$ 的步骤:

① 用分布函数的定义求 Y 的分布函数: $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}=\displaystyle\int_{g(X)\leq y}f_X(x)\mathrm{d}x$, 此处只需写出积分的形式, 无需计算. 若 $f_X(x)$ 是分段函数, 则将积分换为 X 的分布函数.

② 概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)$.

[**变限积分求导法则**] 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 函数 $u(x):(c,d)\rightarrow\mathbb{R},v(x):(c,d)\rightarrow\mathbb{R}$ 都可导, 且 $a\leq u(x),v(x)\leq b$, 则 $\left[\displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(u(x))u'(x)-f(v(x))v'(x)$.

[**例2.5.3**] 设随机变量 X 有概率密度 $f_X(x)$. 求随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度.

[**解**] ① 因 $Y=X^2\geq 0$, 则 $y<0$ 时, 有 $F_Y(y)=0$.

② $y\geq 0$ 时, $F_Y(y)=P\{X^2\leq Y\}=P\left\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\right\}=F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)$.

综上, $F_Y(y)=\begin{cases}0,y<0\\F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right),y\geq 0\end{cases}$.

因改变 $F_Y(y)$ 在个别点处的函数值不改变 $f_Y(y)$, 则无需讨论分段点处的可导性, 只需分别对各段求导, 即:

则 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0,y<0\\f_X\left(\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{y}\right)'-f_X\left(-\sqrt{y}\right)\cdot\left(-\sqrt{y}\right)',y\geq 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}0,y<0\\\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right],y\geq 0\end{cases}.$$

[**定理2.5.1**] 设随机变量 X 有概率密度 $f_X(x)$. 若 $y=g(x)$ 是关于 x 的严格单调且可导的函数, 即恒有 $g'(x)>0$ 或 $g'(x)<0$, 则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\cdot|h'(y)|,\alpha<y<\beta\\0,otherwise\end{cases}$, 其中 $x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数, $\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\},\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$.

(1) $g'(x)>0$ 时, 有 $f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\cdot[h'(y)],\alpha<y<\beta\\0,otherwise\end{cases}$.

(2) $g'(x)<0$ 时, 有 $f_Y(y)=\begin{cases}f_X\cdot(h(y))\cdot[-h'(y)],\alpha<y<\beta\\0,otherwise\end{cases}$.

[证] 下证 $g'(x)>0$ 的情况, 此时 $\alpha=g(-\infty),\beta=g(+\infty),h'(y)>0$, 则 $h(y)$ 严格单调增.

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=P\{X\le h(y)\}$.

① $y\le\alpha$ 时, $\{g(X)\le y\}$ 是不可能事件, 则 $F_Y(y)=0$,

② $y\ge\beta$时, $\{g(X)\le y\}$是必然事件, 则 $F_Y(y)=1$.

③ $\alpha<y<\beta$ 时, $F_Y(y)=P\{X\le h(y)\}=F_X(h(y))$.

综上, $F_Y(y)=\begin{cases}0,y\le\alpha\\F_X(h(y)),\alpha<y<\beta\\1,y\ge\beta\end{cases}$, 则 $f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\cdot h'(y),\alpha<y<\beta\\0,otherwise\end{cases}$.

[推论] 在本定理的条件下, 若 $f_X(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 以外的其他点处为 0 , 且 $x\in[a,b]$ 时, 有 $g'(x)>0$ 或 $g'(x)<0$, 则 $f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\cdot|h'(y)|,\alpha<y<\beta\\0,otherwise\end{cases}$, 其中 $\alpha=\min\{g(a),g(b)\},\beta=\max\{g(a),g(b)\}$.

[注] 连续型随机变量的函数未必是连续型随机变量.

[例2.5.4] 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 求证: 随机变量 $Y=aX+b\ \ (a\neq 0)$ 服从正态分布.

[证] $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

$y=g(x)=ax+b$, 则 $g'(x)=a\neq 0$, 进而 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调.

因 $g(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,g(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$,

则 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}=-\infty,\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}=+\infty$.

$y=g(x)=ax+b$ 的反函数 $x=h(y)=\dfrac{y-b}{a}$, 则 $h'(y)=\dfrac{1}{a}$.

故 $f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|=\dfrac{1}{|a|}\cdot f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot|a|\cdot\sigma}\exp\left(-\dfrac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot(|a|\cdot\sigma)}\exp\left(-\dfrac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(|a|\cdot\sigma)^2}\right)$, 则 $Y\sim N(a\mu+b,(|a|\cdot\sigma)^2)$.

[例2.5.5] 设随机变量 $V=A\sin\theta$, 其中 A 是一个正常数, 随机变量 $\theta\sim U\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 求 V 的概率密度.

[解] 因 $V(\theta)'=A\cos\theta>0\ \ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $V(\theta)$ 严格单调增, 且 $V(\theta)\in(-A,A)$.

$V(\theta)=A\sin\theta$ 的反函数 $\theta=\arcsin\dfrac{V}{A}\overset{\Delta}{=\!=}h(V)$, 则 $h'(V)=\dfrac{1}{\sqrt{A^2-V^2}}$.

因 $\theta\sim U\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $f_\theta(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi},-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\0,otherwise\end{cases}$.

故 $f_V(V)=\begin{cases}f_\theta(h(V))\cdot|h'(V)|,-A<V<A\\0,otherwise\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{A^2-V^2}},-A<V<A\\0,otherwise\end{cases}$.

[注] 若 $\theta\sim U(0,\pi)$, 则 $V(\theta)$ 不单调, 只能用分布函数求导法求解.