数值分析 期末速通教程

4. 数值积分与数值微分

4.1 插值型求积公式

[例4.1.1] 求求积公式 $\displaystyle\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}\cdot f(-h)+A_0\cdot f(0)+A_1\cdot f(h)$ 中的待定系数, s.t. 代数精度尽量高, 并指出其代数精度.

[解] 分别带入 $f(x)=1,x,x^2$ 得: $\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -h\cdot A_{-1}+h\cdot A_1=0 \\ h^2\cdot A_{-1}+h^2\cdot A_1=\dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} A_{-1}=\dfrac{h}{3} \\ A_0=\dfrac{4}{3}h \\ A_1=\dfrac{h}{3} \end{cases}$, 故代数精度 ≥ 2 .

因 $\displaystyle\int_{-h}^{h} x^3\mathrm{d}x=0=\frac{h}{3}(-h)^3+\frac{h}{3}h^3$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}h^5\neq\frac{h}{3}(-h)^3 4+\frac{h}{3}h^4$, 故代数精度 $=3$.

[定理4.1.1] 给定 $(n+1)$ 个相异节点, 可唯一确定一个至少有 n 次代数精度的求积公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^{n} A_i\cdot f(x_i)$.

[证] 设该求积公式至少有 m 次代数精度. 分别带入 $f(x)=x^k\ \ (k=0,1,\cdots,m)$ 得:

$\begin{cases} A_0+A_1+\cdots+A_n=C_0 \\ A_0x_0+A_1x_1+\cdots+A_nx_n=C_1 \\ A_0x_0^2+A_1x_1^2+\cdots+A_nx_n^2=C_2 \\ \cdots \\ A_0x_0^m+A_1x_1^m+\cdots+A_nx_n^m=C_m \end{cases}$, 其中 $\displaystyle C_k=\int_a^b \rho(x)\cdot x^k\mathrm{d}x\ \ (k=0,1,\cdots,m)$.

$m=n$ 且 $x_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$ 互异时, 上述方程有唯一解 $A_0,A_1,\cdots,A_n$.

[**定理4.1.2**] [**插值型求积公式**] $\int_a^b \rho(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^n A_i\cdot f(x_i)$, 积分余项 $E_n(f)=\int_a^b \rho(x)\cdot R_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\mathrm{d}x$, 其中 $A_i=\int_a^b \rho(x)\cdot l_i(x)\mathrm{d}x\ \ (i=0,1,\cdots,n)$, $l_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$ 为 Lagrange 插值基函数.

[**注**] $\rho(x)=1$ 时, 有 $\int_a^b x^m\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^n A_i x^m\ \ (0\le m\le n)$. 取 $x=1$ 得: $\sum_{i=0}^n A_i=b-a$.

[**例4.1.2**] 求区间 $[0,1]$ 上以 3 个节点 $x_0=\dfrac{1}{4}$, $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{3}{4}$ 为求积节点的插值型求积公式.

[**解**] $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^2 A_i\cdot f(x_i)$, 其中:

① $A_0=\int_0^1 l_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$.

② $A_1=\int_0^1 l_1(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}$.

③ $A_2=\int_0^1 l_2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$.

故 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

[**定理4.1.3**] 求积公式 $I_n(f)=\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ 至少有 n 次代数精度 iff 它是插值型的.

[**定义4.1.2**] 若求积公式 $I_n(f)=\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ s.t. $\lim\limits_{\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}}\sum_{i=0}^n A_i\cdot f(x_i)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 则称该求积公式**收敛**.

[**定理4.1.4**] [**求积公式收敛的充分条件**] 若求积公式 $I_n(f)=\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ 中 $A_k>0\ \ (k=0,1,\cdots,n)$, 则该求积公式收敛.

4.2 Newton-Cotes 公式

[**定理4.2.1**] [**Newton-Cotes 公式**] 将区间 $[a,b]$ n 等分, 取步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$, 等距节点 $x_i=a+i\cdot h\ \ (i=0,1,\cdots,n)$, 权函数 $\rho(x)=1$. 令 $x=a+t\cdot h$, 则插值型求积公式的求积系数 $A_i=\displaystyle\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x=\dfrac{(-1)^{n-i}h}{i!(n-i)!}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^n(t-j)\mathrm{d}t\ \ (i=0,1,\cdots,n)$. 称求积公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(b-a)\sum_{i=0}^n C_i^{(n)}\cdot f(x_i)$ 为 n 阶 **Newton-Cotes 公式**, 其中 $C_i^{(n)}=\dfrac{A_i}{b-a}$ 称为 **Cotes 系数**.

[**注1**] Cotes 系数与 $f(x)$ 和 $[a,b]$ 无关, 只与 n 和 i 有关.

[**注2**] 代入 $f(x)=1$ 得: $\displaystyle\sum_{i=0}^n C_i^{(n)}=1$.

[**注3**] Newton-Cotes 公式 $I_n(f)$ 的代数精度:

① n 为偶数时, $I_n(f)$ 有 $(n+1)$ 阶代数精度.

② n 为奇数时, $I_n(f)$ 有 n 阶代数精度.

③ n 为偶数时, 若 $I_n(f)$ 需达到 $(n+1)$ 阶代数精度, 则需计算 $(n+1)$ 个系数和 $(n+1)$ 个函数值.

④ $(n+1)$ 为奇数时, 若 $I_{n+1}(f)$ 需达到 $(n+1)$ 阶代数精度, 则需计算 $(n+2)$ 个系数和 $(n+2)$ 个函数值.

故一般用 n 为偶数时的 Newton-Cotes 公式.

[**定理4.2.2**] [**常用的 Newton-Cotes 公式**]

(1) [**梯形公式**] $n=1$, 即 2 个节点时, Cotes 系数 $C_0^{(1)}=C_1^{(1)}=\dfrac{1}{2}$.

梯形公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\xlongequal{\Delta}T$, 有 1 次代数精度.

积分余项 $E_T(f)=-\dfrac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$, 其中 $f''(x)\in C[a,b]$, $\eta\in(a,b)$.

(2) [**Simpson 公式**] $n=2$, 即 3 个节点时, $C_0^{(2)}=\dfrac{1}{6}$, $C_1^{(2)}=\dfrac{4}{6}$, $C_2^{(2)}=\dfrac{1}{6}$.

Simpson 公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\xlongequal{\Delta}S$, 有 3 次代数精度.

积分余项 $E_S(f)=-\dfrac{b-a}{180}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$, 其中 $\eta\in(a,b)$.

[**例4.2.1**] 用梯形公式、Simpson 公式求积分 $I=\displaystyle\int_{0.5}^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

[**解**]

(1) $I\approx\dfrac{1-0.5}{2}\left(\sqrt{0.5}+\sqrt{1}\right)\approx 0.4268$.

(2) $I\approx\dfrac{1-0.5}{6}\left(\sqrt{0.5}+4\sqrt{\dfrac{0.5+1}{2}}+\sqrt{1}\right)\approx 0.4309$.

[例4.2.2] 用 Simpson 公式求积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, 并估计误差.

[解] $S=\dfrac{1-0}{6}\left(\mathrm{e}^{-0}+4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}+\mathrm{e}^{-1}\right)\approx 0.63$.

$|R_S(f)|=\left|-\dfrac{1-0}{180}\left(\dfrac{1-0}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)\right|\leq \dfrac{1}{180}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^0\approx 0.0003472$.

4.3 复化求积公式

[定理4.3.1] **[复化求积公式]**

(1) **[复化梯形公式]** $I\approx T_n(f)=\dfrac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$.

余项 $E_{T_n}(f)=-\dfrac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$, 其中 $\xi\in(a,b)$.

(2) **[复化 Simpson 公式]** $I\approx S_n(f)=\dfrac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$, 其中 $x_{k+\frac{1}{2}}=x_k+\dfrac{h}{2}$.

余项 $E_{S_n}(f)=-\dfrac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi)$, 其中 $\xi\in(a,b)$.

[例4.3.1] 分别用复化梯形公式、复化 Simpson 公式求积分 $\int_1^9\sqrt{x}\mathrm{d}x$, 取 $n=4$.

[解] $h=\dfrac{9-1}{4}=2$, $f(x)=\sqrt{x}$, $x_k=1+2k\ \ (k=1,2,3)$, $x_{k+\frac{1}{2}}=2+2k\ \ (k=0,1,2,3)$,

(1) $T_4(f)=\dfrac{h}{2}\left[f(1)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(9)\right]\approx 17.23$.

(2) $S_4=\dfrac{h}{6}\left[f(1)+4\sum_{k=0}^{3}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{3}f(x_k)+f(9)\right]\approx 17.33$.

[例4.3.2] 用复化梯形公式求积分 $\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, 应将区间 $[0,1]$ 划分为多少等份才能 s.t. 截断误差不超过 $\dfrac{1}{2}\times 10^{-5}$.

[解] $f(x)=\mathrm{e}^x$, $f''(x)=\mathrm{e}^x$. $h=\dfrac{1}{n}$.

$|R_T(f)|=\left|-\dfrac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right|\leq\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\mathrm{e}\leq\dfrac{1}{2}\times 10^{-5}$, 其中 $\eta\in(0,1)$.

解得: $n\geq 212.85$, 取 $n=213$ 即可.

4.4 数值微分

[**定理4.4.1**] [**插值型求导公式**] 用 n 阶 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 近似函数 $f(x)$ 时, 有 $f'(x) \approx L_n'(x)$.

(1) 误差 $f'(x) - L_n'(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega'(x) + \dfrac{\omega(x)}{(n+1)!}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n+1)}(\xi)\right]$.

(2) 求某节点 $x_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$ 处的导数值时, 误差 $f'(x) - L_n'(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega'(x_i)$.

[**定理4.4.2**] [**两点公式**] 设节点等距, 步长为 h . 函数 $f(x)$ 在两节点 x_0 , $x_1 = x_0 + h$ 处的函数值分别为 $f(x_0)$, $f(x_1)$, 则线性插值函数 $L_1(x) = \dfrac{x - x_1}{h}f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{h}f(x_1)$, 则 $L_1'(x) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$, 进而 $L_1'(x_0) = L_1'(x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$.
