

# 《数字图像处理》期末速通教程

## 4. 图像的正交变换

### 4.1 图像变换概述

#### [定义 4.1.1]

(1) 为有效和快速地对图像进行处理, 常需将原定义在图像空间的图像以某种形式转换到另外的空间, 并利用在这些空间的性质方便地进行一定的加工, 最后再转换回图像空间以得到所需的效果, 这些转换方法称为**图像变换技术**.

(2) 变换是双向的, 或者说需要双向的变换. 在图像处理中, 一般将从图像空间向其他空间的变换称为**正变换**, 将从其他空间向图像空间的变换称为**反变换**或**逆变换**.

(3) 图像变换使图像在视觉上失去了原有图像的形态. 尽管视觉上不同, 但保留了很多本质特征.

(4) 一般变换后的图像的大部分能量都分布于**低频**谱段, 高频能量很少或为零, 利于图像的压缩和传输.

#### [定义 4.1.2] 可分离图像变换如下:

(1) 正变换:  $T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot h(x, u)$  ( $u = 0, 1, \dots, N-1$ ), 其中  $h(x, u)$  称为**正向变换核**.

(2) 反变换:  $f(u) = \sum_{x=0}^{N-1} T(u) \cdot k(x, u)$  ( $x = 0, 1, \dots, N-1$ ), 其中  $k(x, u)$  称为**反向变换核**.

[注] 变换核与原始函数和变换后的函数都无关.

#### [例 4.1.1] Fourier 变换是一种可分离图像变换:

(1) 正变换:  $T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot h(x, y, u, v)$ .

(2) 反变换:  $f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) \cdot k(x, y, u, v)$ .

(3) Fourier 变换的核函数有**可分离性**, 即一个 2D 变换可分解为两个 1D 变换.

$$\text{具体地, } h(x, y, u, v) = h_1(x, u) \cdot h_2(y, v), \text{ 则 } \begin{cases} T(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot h_2(y, v) \\ T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} T(x, v) \cdot h_1(x, u) \end{cases}.$$

(4) Fourier 变换的核函数有**对称性**, 即  $h(x, y, u, v) = h_1(x, u) \cdot h_2(y, v)$ .

又因函数  $h_1$  和  $h_2$  的形式相同, 则  $h(x, y, u, v) = h_1(x, u) \cdot h_1(y, v)$ .

**[定义 4.1.3]**

- (1) **正交变换**将图像在空域和频域间变换.
- (2) 正交变换的应用: 图像增强、图像复原、图像特征提取、图像编码.
- (3) 常用的正交变换: 离散 Fourier 变换、离散余弦变换、K-L 变换、Radon 变换、离散小波变换.

## 4.2 离散 Fourier 变换

### 4.2.1 离散 Fourier 变换概述

**[定义 4.2.1.1]**

(1) **离散 Fourier 变换** (Discrete Fourier Transform, DFT) 是直接处理离散时间信号的 Fourier 变换, 描述了离散信号的时域表示与频域表示的关系.

- (2) Fourier 变换将函数基于频率分为不同部分, 使得能通过频率成分分析一个函数.

### 4.2.2 一维 DFT

**[定义 4.2.2.1]** 设有限长的数字序列  $\{f(x); x = 0, 1, \dots, N-1\}$ , 则**一维 DFT**:

$$(1) \text{ 正变换: } F\{f(x)\} = F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot \exp\left\{-j \cdot \frac{2\pi ux}{N}\right\} \quad (u = 0, 1, \dots, N-1).$$

$$(2) \text{ 反变换: } F^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot \exp\left\{j \cdot \frac{2\pi ux}{N}\right\} \quad (x = 0, 1, \dots, N-1).$$

$$(3) \text{ 设 } W = \exp\left\{-j \cdot \frac{2\pi}{N}\right\}, \text{ 则一维 DFT 表示为 } \begin{cases} F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot W^{ux} & (u = 0, 1, \dots, N-1) \\ f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot W^{-ux} & (x = 0, 1, \dots, N-1) \end{cases}, \text{ 该}$$

式称为一维 DFT 的**变换对公式**.

- (4)  $f(x)$  和  $F(u)$  称为**离散 Fourier 变换对**, 记作  $\mathcal{F}[f(x)] = F(u)$  或  $f(x) \Leftrightarrow F(u)$ .

- (5) **频谱(幅度, 幅值)**  $F(u) = R(u) + j \cdot I(u) = |F(u)| \cdot \exp\{j \cdot \phi(u)\}$ , 其中

$|F(u)| = \{[R(u)]^2 + [I(u)]^2\}^{\frac{1}{2}}$  是  $f(x)$  的 **Fourier 谱**,  $\phi(u) = \arctan \frac{I(u)}{R(u)}$  是  $f(x)$  的**相位谱**.

**[定理 4.2.2.1]** 一维 DFT 的因子  $W = \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi}{N} \right\}$  有如下性质:

$$(1) \text{ 周期性: } W^{u \pm kN} = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} (u \pm kN) \right\} = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} u \right\} \cdot \exp \{ \mp j 2\pi k \} \\ = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} u \right\} \cdot 1 = W^u \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(2) \text{ 对称性: } W^{u \pm \frac{N}{2}} = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} \left( u \pm \frac{N}{2} \right) \right\} = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} u \right\} \cdot \exp \{ \mp j \pi \} \\ = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} u \right\} \cdot (-1) = -W^u.$$

**[例 4.2.2.1]** 求长度  $N = 4$  的数字序列  $\{f(x); x = 0, 1, 2, 3\}$  的一维 DFT, 采用定义  $F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot W^{ux}$ .

$$\text{[解]} \quad F(u) = \sum_{x=0}^3 f(x) \cdot W^{ux} = f(0) \cdot W^0 + f(1) \cdot W^1 + f(2) \cdot W^2 + f(3) \cdot W^3.$$

$$\text{写成矩阵的形式: } \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

$$* W \text{ 因子的 } \begin{cases} \text{周期性: } W^4 = W^0, W^6 = W^2, W^9 = W^1 \\ \text{对称性: } W^2 = -W^0, W^3 = -W^1 \end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} f(0) + f(2) + [f(2) + f(3)] \\ f(0) - f(2) - j \cdot [f(1) - f(3)] \\ f(0) + f(2) - [f(1) + f(3)] \\ f(0) - f(2) + j \cdot [f(1) - f(3)] \end{bmatrix}.$$

(了解) p64 ~ 65 FFT 的过程.

### 4.2.3 二维 DFT

[定义 4.2.3.1] 设有限大的数字图像  $f(x, y)$  ( $x, y = 0, 1, \dots, N-1$ ), 则**二维 DFT**:

$$(1) \text{ 变换对公式 } \begin{cases} F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi(ux + vy)}{N} \right\} \\ f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot \exp \left\{ j \cdot \frac{2\pi(ux + vy)}{N} \right\} \end{cases}.$$

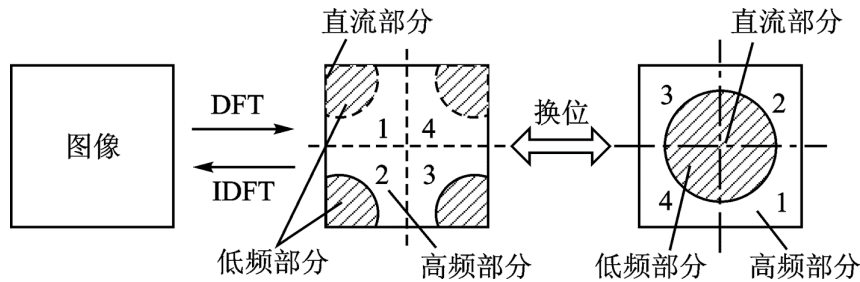
(2)  $F(u, v)$  称为  $f(x, y)$  的**频谱**, 其中  $u$ 、 $v$  为**频域采样值**.

(3)  $f(x, y)$  和  $F(u, v)$  称为**二维离散 Fourier 变换对**, 记作  $\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v)$  或  $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$ .

(4) **频谱(幅度, 幅值)**  $F(u, v) = R(u, v) + j \cdot I(u, v) = |F(u, v)| \cdot \exp\{j \cdot \phi(u, v)\}$ , 其中  $|F(u, v)| = \{[R(u, v)]^2 + [I(u, v)]^2\}^{\frac{1}{2}}$  是  $f(x, y)$  的**Fourier 谱**,  $\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$  是  $f(x, y)$  的**相位谱**.

(5)  $f(x, y)$  的**功率谱**是 Fourier 谱的平方, 即  $E(u, v) = |F(u, v)|^2 = [R(u, v)]^2 + [I(u, v)]^2$ .

[注 1] 经 DFT 后, 图像的低频部分集中在图像的四个角, 中间为高频部分, 如下图所示.

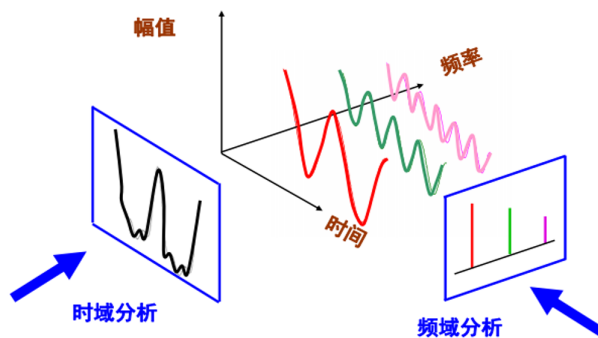


[注 2] 二维 DFT:

(1) 正变换: 空域(或称 "时域")  $\Rightarrow$  频域.

(2) 反变换: 频域  $\Rightarrow$  空域(或称 "时域").

如下图, 信号的频谱代表信号在不同频率的分量的大小, 提供比时域信号波形更直观和丰富的信息.



[注 3] 图像信号的**频率**是单位长度内亮度(即灰度)变化的次数, 是图像中灰度变化剧烈程度的指标, 可视为灰度在平面空间上的梯度.

对图像作二维 DFT 得到的频谱图是图像梯度的分布图, 其上明暗不一的亮点实际上是图像上某点像素值与其邻域点的差异的强弱, 即梯度的大小, 亦即该点处频率的大小. 图像中的低频部分指梯度小的点, 高频部分指梯度大的点.

图像灰度变化缓慢的部分对应变换后的低频部分; 图像的细节和轮廓边缘都是灰度突变的区域, 对应变换后的高频部分.

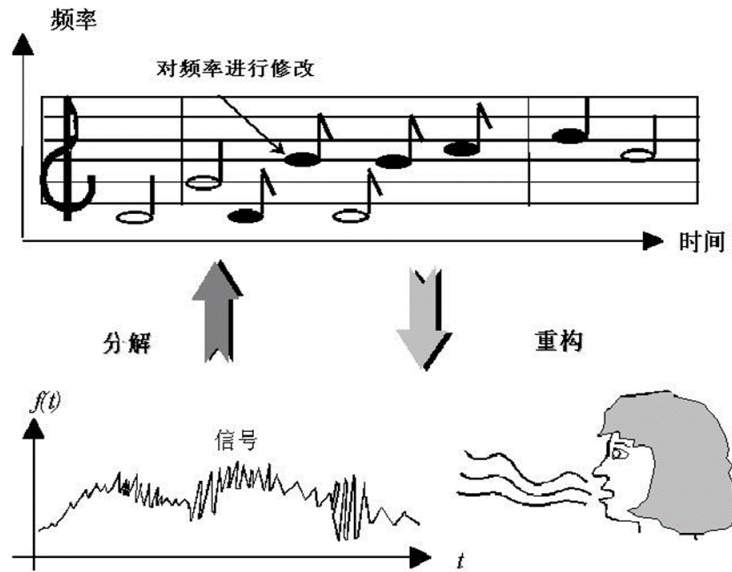
[注 4] DFT 的参数都是复数, 数据量是实数参数的两倍. 为减小数据量, 提出了 DCT.

## [注 5] Fourier 变换的优缺点:

(1) 优点: 频率定位好. 分析信号的频率可得到信号包含的频率成分, 即频谱.

(2) 缺点: 频谱是按从负无穷大到正无穷大的叠加, 故无法判断某一给定频率的时间定位, 也不能判断某一时间段内的频率成分. 即: Fourier 变换只提供信号在整个时域上的频率信息, 不提供在某个局部时间段上的频率信息.

小波变换克服了 Fourier 变换的缺点. 以歌声为例, 信号变换到小波域后, 小波不仅能检测到高音和低音, 还能将高音和低音的发生位置与原始信号对应.



[定理 4.2.3.1] [可分性] 设有限大的数字图像  $f(x, y)$  ( $x, y = 0, 1, \dots, N-1$ ). 二维的 DFT 的正变换

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi(ux + vy)}{N} \right\} \text{ 可分解为}$$

$$\begin{cases} F(x, v) = N \cdot \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi vy}{N} \right\} \\ F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \cdot \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi ux}{N} \right\} \end{cases}.$$

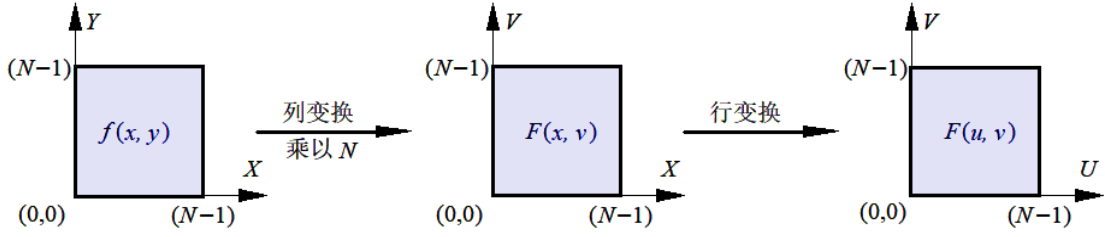
$$[\text{证}] F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -j2\pi \cdot \frac{xu}{M} \right\} \cdot \exp \left\{ -j2\pi \cdot \frac{yv}{N} \right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N-1} \left[ \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -j2\pi \cdot \frac{yv}{N} \right\} \right] \cdot \exp \left\{ -j2\pi \cdot \frac{xu}{M} \right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N-1} \mathcal{F}_y[f(x, y)] \cdot \exp \left\{ -j2\pi \cdot \frac{xu}{M} \right\} = \mathcal{F}_x\{\mathcal{F}_y[f(x, y)]\}.$$

[注] 这表明: 二维 DFT 有**可分性**, 即将一次二维的 DFT 分解为两次一维的 DFT, 时间复杂度由  $O(N^4)$  优化为  $O(N^2)$ .

具体地, 先对  $f(x, y)$  的每列作一维 DFT 得到  $\mathcal{F}_y[f(x, y)]$ , 再对结果的每一行作一维 DFT 得到  $F(u, v)$ . 过程如下图所示.



反过来, 先行后列也可行.

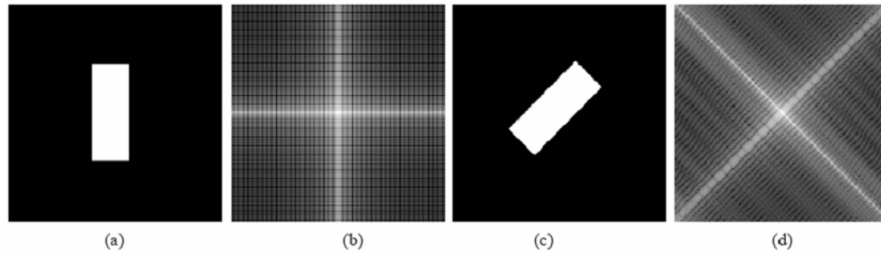
**[定理 4.2.3.2] [平移定理]** 设图像  $f(x, y)$  的频谱为  $F(u, v)$ , 即  $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$ .

- (1)  $f(x - a, y - b) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot \exp \left\{ -j2\pi \frac{au + bv}{N} \right\}$ , 即图像在空域的平移等价于其频谱乘一个指数项.
- (2)  $F(u - c, v - d) \Leftrightarrow f(x, y) \cdot \exp \left\{ j2\pi \frac{cx + dy}{N} \right\}$ , 即图像在空域乘一个指数项等价于其频谱在频域的平移.

**[推论]** 图像的平移不影响其 Fourier 变换的幅值.

**[定理 4.2.3.3] [旋转定理]** 设图像  $f(x, y)$  的频谱为  $F(u, v)$ , 即  $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$ . 令  $\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$ , 将图像  $f(x, y)$  转化为  $f(r, \theta)$ . 令  $\begin{cases} u = w \cdot \cos \phi \\ v = w \cdot \sin \phi \end{cases}$ , 将  $f(x, y)$  的频谱  $F(u, v)$  转化为  $F(w, \phi)$ . 则  $f(x, y)$  旋转一个角度时,  $F(u, v)$  也旋转相同角度, 即  $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0)$ .

**[例 4.2.3.1]** 二维 DFT 的旋转定理示例.



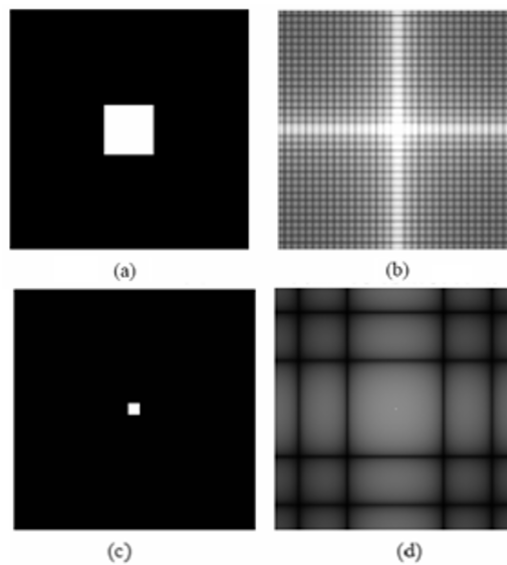
**[定理 4.2.3.4] [尺度定理]** 设图像  $f(x, y)$  的频谱为  $F(u, v)$ , 即  $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$ . 则:

- (1)  $f(x, y)$  在幅度上的放缩会导致  $F(u, v)$  在幅度上相同尺度的放缩. 具体地,  $a \cdot f(x, y) \Leftrightarrow a \cdot F(u, v)$ .
- (2)  $f(x, y)$  在空间尺度上的放缩会导致  $F(u, v)$  在频域尺度上相反尺度的放缩. 具体地,  

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right).$$

**[推论]**  $f(x, y)$  收缩 ( $a, b > 1$ ) 时,  $F(u, v)$  的空间膨胀,  $F(u, v)$  的幅值减小.

[例 4.2.3.2] 二维 DFT 的尺度定理示例. 图像中的正方形收缩时, 其频谱网络在频谱空间中增大.



[定理 4.2.3.5] [卷积定理]

(1) 设图像  $f(x)$  和  $g(x)$  的频谱分别为  $F(u)$  和  $G(u)$ , 即  $f(x) \Leftrightarrow F(u)$ ,  $g(x) \Leftrightarrow G(u)$ .

一维卷积  $f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) \cdot g(x-p) dp$ . 则:

$$\textcircled{1} f(x) * g(x) \Leftrightarrow F(u) \cdot G(u).$$

$$\textcircled{2} f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow F(u) * G(u).$$

(2) 设图像  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  的频谱分别为  $F(u, v)$  和  $G(u, v)$ , 即  $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$ ,  $g(x, y) \Leftrightarrow G(u, v)$ .

二维卷积  $f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p, q) \cdot g(x-p, y-q) dp dq$ .

$$\textcircled{1} f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v).$$

$$\textcircled{2} f(x, y) \cdot g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v).$$

[注] 这表明: Fourier 变换实现了卷积运算与乘积运算的相互转换.

(了解) p67 ~ 70 二维 DFT 的其它性质.

**[定理 4.2.3.6]** 对  $N \times N$  ( $N = 4$ ) 的图像  $f$  作二维 DFT 得到频谱  $F$ , 则:

(1) 正变换:  $F = TfT$ .

(2) 反变换:  $f = \frac{1}{N^2} T' F T' = \frac{1}{16} T' F T'$ .

其中变换矩阵  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$ , 矩阵  $T' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$  不是  $T$  的逆.

**[证]** DFT 是线性变换, 对  $n$  阶变换矩阵为  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^1 & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$ ,

其中  $\omega_n = \exp \left\{ j \frac{2\pi}{n} \right\}$  是  $n$  次单位根之一, 即有  $\omega_n^n = 1$ .

(1) DFT:  $n = 4$  时, 4 次单位根  $\omega_4 = -\exp \left\{ j \frac{\pi}{2} \right\} = -\left( \cos \frac{\pi}{2} + j \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) = -j$ ,

$$\text{则 } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}.$$

(2) IDFT: 只需在  $F = TfT$  两边同时左乘和右乘  $T$  的逆矩阵  $T^{-1}$ .

$$\text{注意到 } T^{-1} \text{ 是 } T \text{ 的每个元素取倒数再除以 } n, \text{ 即 } T^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } f = T^{-1} F T^{-1} = \frac{1}{n^2} T' F T'.$$

**[注]** 一般考 4 阶图像的 DFT, 因为方便计算  $\omega_4$ .

**[Python 代码]**

```
1 def mul(n, mat1, mat2):
2     mat3 = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
3     for i in range(n):
4         for j in range(n):
5             for k in range(n):
6                 mat3[i][j] += mat1[i][k] * mat2[k][j]
7     return mat3
8
9
10 T = [
11     [1, 1, 1, 1],
12     [1, complex(0, -1), -1, complex(0, 1)],
13     [1, -1, 1, -1],
14     [1, complex(0, 1), -1, complex(0, -1)]
```



```

15 ]
16
17 TPi = [
18     [1, 1, 1, 1],
19     [1, complex(0, 1), -1, complex(0, -1)],
20     [1, -1, 1, -1],
21     [1, complex(0, -1), -1, complex(0, 1)]
22 ]
23
24
25 def DFT(n, f):
26     return mul(n, mul(n, TPi, f), TPi)
27
28
29 def IDFT(n, F):
30     res = mul(n, mul(n, TPi, F), TPi)
31     for i in range(n):
32         for j in range(n):
33             res[i][j] /= n * n
34     return res
35
36 n = int(input())
37 f = [list(map(complex, input().split())) for i in range(n)]
38
39 F = DFT(n, f)
40 for i in range(n):
41     print(*F[i])
42
43 print()
44
45 ff = IDFT(n, F)
46 for i in range(n):
47     print(*ff[i])
48

```

[输入]

```

1 4
2 1 0 2 1
3 0 3 1 2
4 3 1 0 2
5 2 3 1 0

```

[输出]

```

1 (22+0j) (2-2j) (-2+0j) (2+2j)
2 (-2+0j) (-2+2j) (2+4j) (-6+2j)
3 (-2+0j) (2+6j) (6+0j) (2-6j)
4 (-2+0j) (-6-2j) (2-4j) (-2-2j)
5
6 (1+0j) 0j (2+0j) (1+0j)
7 0j (3+0j) (1+0j) (2+0j)
8 (3+0j) (1+0j) 0j (2+0j)
9 (2+0j) (3+0j) (1+0j) 0j

```

[例 4.2.3.3] 对图像  $f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  作二维 DFT.

[解 1] 直接用  $F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi(ux + vy)}{N} \right\}$  求  $F(u, v)$  ( $u, v = 0, 1, 2, 3$ ).

$$F(u, v) = \begin{bmatrix} 22 & 2-2j & -2 & 2+2j \\ -2 & -2+2j & 2+4j & -6+2j \\ -2 & 2+6j & 6 & 2-6j \\ -2 & -6-2j & 2-4j & -2-2j \end{bmatrix}.$$

[解 2] 
$$\begin{cases} F(x, v) = N \cdot \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi vy}{N} \right\} \\ F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \cdot \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi ux}{N} \right\} \end{cases} . N = 4.$$

(1) 先用  $F(x, v) = \sum_{y=0}^3 f(x, y) \cdot \exp \left\{ -j2\pi \cdot \frac{vy}{4} \right\}$  求  $F(x, v)$  ( $x, v = 0, 1, 2, 3$ ).

(2) 再用  $F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \cdot \exp \left\{ -j \cdot \frac{2\pi ux}{N} \right\}$  求  $F(u, v)$  ( $u, v = 0, 1, 2, 3$ ).

[解 3]

(1) DFT: 变换矩阵  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}.$

$$\begin{aligned} F &= T f T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 & 5 \\ -2+2j & -1 & 2 & -1-2j \\ 2 & -5 & 0 & 1 \\ -2-2j & -1 & 2 & -1+2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 2-2j & -2 & 2+2j \\ -2 & -2+2j & 2+4j & -6+2j \\ -2 & 2+6j & 6 & 2-6j \\ -2 & -6-2j & 2-4j & -2-2j \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ IDFT : 矩阵 } T' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}.$$

$$f = \frac{1}{16} T' F T'$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 & 2-2j & -2 & 2+2j \\ -2 & -2+2j & 2+4j & -6+2j \\ -2 & 2+6j & 6 & 2-6j \\ -2 & -6-2j & 2-4j & -2-2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & -4+4j & 8 & -4-4j \\ 24 & -4-4j & -16 & -4+4j \\ 24 & 12+4j & 0 & 12-4j \\ 24 & 4-12j & 0 & 4+12j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 32 & 16 \\ 0 & 48 & 32 & 32 \\ 48 & 16 & 0 & 32 \\ 32 & 48 & 16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 4.2.4 DFT 在图像处理中的应用

(了解) p70 DFT 在图像处理中的应用.

## 4.3 离散余弦变换

### 4.3.1 一维 DCT

**[定义 4.3.1.1]** 对有限长的数字序列  $\{f(x); x = 0, 1, \dots, N-1\}$ , **一维离散余弦变换** (Discrete Cosine Transform, DCT):

$$(1) \text{ 正变换: } C(u) = a(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad (u = 0, 1, \dots, N-1).$$

$$(2) \text{ 反变换: } f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u) \cdot C(u) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad (x = 0, 1, \dots, N-1).$$

$$\text{其中 } a(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & u = 1, \dots, N-1 \end{cases}.$$

**[注]** 在 Fourier 展开式中, 若被展开的函数是实偶函数, 则其 Fourier 级数只包含余弦项, 得到**余弦变换**, 将其离散化即为 DCT. 注意到余弦项即复数的实部, 则余弦变换是 Fourier 变换的实数部分组成的变换.

**[定理 4.3.1.1]** 对有限长的数字序列  $\{f(x); x = 0, 1, \dots, N-1\}$ , 一维 DCT 可表示为矩阵形式:

(1) 正变换:  $F = Af$ .

(2) 反变换:  $f = A^T F$ .

$$\text{其中变换矩阵 } A = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{1}{2N} \pi & \cos \frac{3}{2N} \pi & \cdots & \cos \frac{2N-1}{2N} \pi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos \frac{N-1}{2N} \pi & \cos \frac{3(N-1)}{2N} \pi & \cdots & \cos \frac{(2N-1)(N-1)}{2N} \pi \end{bmatrix} \quad \text{是正交矩阵, 即}$$

有  $A^{-1} = A^T$ .

**[推论]** 长度  $n = 4$  的数字序列  $\{f(0), f(1), f(2), f(3)\}$  的一维 DCT 的正变换的变换矩阵

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{1}{8} \pi & \cos \frac{3}{8} \pi & \cos \frac{5}{8} \pi & \cos \frac{7}{8} \pi \\ \cos \frac{2}{8} \pi & \cos \frac{6}{8} \pi & \cos \frac{10}{8} \pi & \cos \frac{14}{8} \pi \\ \cos \frac{3}{8} \pi & \cos \frac{9}{8} \pi & \cos \frac{15}{8} \pi & \cos \frac{21}{8} \pi \end{bmatrix}.$$

**[定理 4.3.1.2]** 一维 DCT 是一种可分、正交、对称的变换.

## 4.3.2 二维 DCT

**[定义 4.3.2.1]** 对二维图像  $f(x, y)$  ( $x, y = 0, 1, \dots, N-1$ ), **二维离散余弦变换**:

$$(1) \text{ 正变换: } C(u, v) = a(u) \cdot a(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

( $u, v = 0, 1, \dots, N-1$ ).

$$(2) \text{ 反变换: } f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} a(u) \cdot a(v) \cdot C(u, v) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

( $x, y = 0, 1, \dots, N-1$ ).

$$\text{其中 } a(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & u = 1, \dots, N-1 \end{cases}, \quad a(v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & v = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & v = 1, \dots, N-1 \end{cases}.$$

**[注 1]** 二维 DCT 会让信息变集中. 具体地, 对图像作二维 DCT 得到的频谱中, 左上角低频的幅值大, 右下角高频的幅值小.

**[注 2]** 二维 DCT 主要用于图像的有损压缩, 如 JPEG. 与二维 DFT 类似, 高频部分压缩多, 低频部分压缩少.

**[注 3]** 二维 DCT 还可用于给图像加水印.

在 DCT 变换域中, 图像被分解为直流 (DC) 分量和交流 (AC) 分量.

在健壮性上, 在保证水印不可见的前提下, DC 分量比 AC 分量更适合嵌入水印的原因:

- ① DC 系数比 AC 系数的绝对振幅大, 感觉容量大.
- ② 处理过程对 AC 分量的影响比对 DC 分量的影响大.

也可将水印同时嵌入 DC 分量和 AC 分量, 作用:

- ① AC 分量可加强嵌入的秘密性.
- ② DC 分量可加大嵌入的数据量.

DCT 变换域中的 AC 系数分为高频系数和低频系数.

- ① 将水印嵌入高频系数: 较好的不可见性, 较差的健壮性.
- ② 将水印嵌入的低频系数: 较好的健壮性, 较差的不可见性.

实践中, 一般将水印嵌入中低频系数, 因为人眼的感觉主要集中在该频段, 攻击者在破坏水印的过程中, 不可避免地损失图片质量, 且一般的图像处理不改变该部分数据.

**[定理 4.3.2.1]** 二维 DCT 是一种可分离的、对称的图像变换. 若正变换记为

$$C(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot h(x, y, u, v), \text{ 则:}$$

- (1) 可分离:  $h(x, y, u, v) = h_1(x, u) \cdot h_2(y, v)$ .
- (2) 对称: 函数  $h_1$  与函数  $h_2$  形式相同, 则  $h(x, y, u, v) = h_1(x, u) \cdot h_1(y, v)$ .

**[定理 4.3.2.1]** 对二维图像  $f(x, y)$  ( $x, y = 0, 1, \dots, N-1$ ) 的二维 DCT 可表示为矩阵的形式:

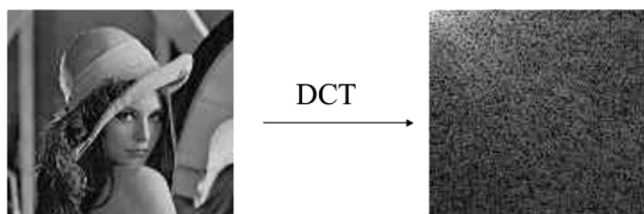
- (1) 正变换:  $C = A f A^T$ .
- (2) 反变换:  $f = A^T C A$ .

其中变换矩阵  $A$  是正交矩阵.

**[推论]**  $N \times N$  ( $N = 4$ ) 的图像的二维 DCT 的正变换的变换矩阵

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{1}{8}\pi & \cos \frac{3}{8}\pi & \cos \frac{5}{8}\pi & \cos \frac{7}{8}\pi \\ \cos \frac{2}{8}\pi & \cos \frac{6}{8}\pi & \cos \frac{10}{8}\pi & \cos \frac{14}{8}\pi \\ \cos \frac{3}{8}\pi & \cos \frac{9}{8}\pi & \cos \frac{15}{8}\pi & \cos \frac{21}{8}\pi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix}.$$

**[例 4.3.2.1]** 对图像作二维 DCT 后, 能量集中于频率平面的左上角.



[例 4.3.2.2] 对图像  $f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  作二维 DCT.

[解]  $C = AfA^T$

$$\begin{aligned} & \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.653 & 0.5 & 0.271 \\ 0.5 & 0.271 & -0.5 & -0.653 \\ 0.5 & -0.271 & -0.5 & 0.653 \\ 0.5 & -0.653 & 0.5 & -0.271 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.653 & 0.5 & 0.271 \\ 0.5 & 0.271 & -0.5 & -0.653 \\ 0.5 & -0.271 & -0.5 & 0.653 \\ 0.5 & -0.653 & 0.5 & -0.271 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1.848 & 0 & 0.764 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 4.4 图像 K-L 变换

可参考: <https://www.bilibili.com/video/BV1E5411E71z/>

(看一眼) p76 ~ 78 K-L 变换的原理、离散 K-L 变换、K-L 变换的性质.

[定义 4.4.1] 二维数据的**主成分分析** (Principal Component Analysis, PCA).

(1) 白数据:  $x$  和  $y$  都服从标准正态分布, 且  $x$  与  $y$  不相关.

实测数据:  $x$  和  $y$  都服从正态分布, 但未必标准, 且  $x$  与  $y$  可能相关.

(2) 实测数据可由白数据得到.

具体地, 白数据  $D$  经拉伸变换  $S = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ , 再经旋转变换  $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ,

得到实测数据  $D' = RSD$ .

反过来, 实测数据  $D'$  经旋转逆变换  $R^{-1}$  和拉伸逆变换  $S^{-1}$  得到白数据  $D = S^{-1}R^{-1}D'$ .

$S$  是对角阵, 则  $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$ .  $R$  是正交阵, 则  $R^{-1} = R^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
 (3) D \text{ 的协方差矩阵 } \Sigma &= \begin{bmatrix} \text{Cov}(x, x) & \text{Cov}(x, y) \\ \text{Cov}(y, x) & \text{Cov}(y, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n-1} & \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n-1} \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n-1} & \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n-1} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n-1} DD^T.
 \end{aligned}$$

而  $D$  的  $x$  和  $y$  都服从标准正态分布, 则  $\frac{1}{n-1} DD^T = \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ .

$$\begin{aligned}
 D' \text{ 的协方差矩阵 } \Sigma' &= \frac{1}{n-1} D' D'^T = \frac{1}{n-1} (RSD)(RSD)^T \\
 &= \frac{1}{n-1} RSDD^T S^T R^T = RS \left( \frac{1}{n-1} DD^T \right) S^T R^T = RLR^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } L = SS^T = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

设  $\Sigma'$  的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  对应的特征向量分别为  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ,

则  $\Sigma' \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

写成矩阵的形式, 取  $R = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ , 则  $\Sigma' = RLR^{-1}$ , 进而  $L = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

$$n = 2 \text{ 时, } L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = SS^T = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

**[例 4.4.1]** 设向量集  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_1: (0 \ 0 \ 0)^T, (1 \ 0 \ 1)^T, (1 \ 0 \ 0)^T, (1 \ 1 \ 0)^T \\ \vec{\omega}_2: (0 \ 0 \ 1)^T, (0 \ 1 \ 1)^T, (0 \ 1 \ 0)^T, (1 \ 1 \ 1)^T \end{array} \right\}.$

[1] 求自相关矩阵  $\psi$ .

[2] 求  $\psi$  的特征值和特征向量.

[3] 求  $\psi$  的一组相互正交的特征向量, 并将它们单位化.

[4] 作离散 K-L 变换.

**[解]**

$$\begin{aligned}
 [1] \psi &= E[XX^T] = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \vec{x}_i \cdot \vec{x}_i^T \\
 &= \frac{1}{8} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 0] + \cdots + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \right] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$[2] |\lambda I - \psi| = 0 \Leftrightarrow 4(1 - 4\lambda)^2(1 - \lambda) = 0, \text{解得: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}.$$

① 设特征值  $\lambda_1 = 1$  对应的特征向量  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ .

$$(I - \psi)\vec{\alpha} = \vec{0}, \text{解得: } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3.$$

② 设特征值  $\lambda_2 = \frac{1}{4}$  对应的特征向量  $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ .

$$\left(\frac{1}{4}I - \psi\right)\vec{\beta} = \vec{0}, \text{解得: } \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, -\beta_1 - \beta_2).$$

③ 同理设特征值  $\lambda_3 = \frac{1}{4}$  对应的特征向量  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_1 - \gamma_2)$ .

$$[3] \text{取 } \vec{\alpha} = (1, 1, 1)^T, \text{则 } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \equiv 0, \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} &= \beta_1 \cdot \gamma_1 + \beta_2 \cdot \gamma_2 + (\beta_1 + \beta_2)(\gamma_1 + \gamma_2) \\ &= \beta_1(2\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_2(\gamma_1 + 2\gamma_2) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{取 } \beta_1 = \beta_2 = 1, \text{则 } \vec{\beta} = (1, 1, -2), \text{且 } 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0, \text{解得: } \gamma_1 = -\gamma_2.$$

$$\text{取 } \gamma_1 = 1, \text{则 } \vec{\gamma} = (1, -1, 0).$$

$$\text{分别单位化得: } \vec{\alpha}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \vec{\beta}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T, \vec{\gamma}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T.$$

[4] 因  $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ , 故降至二维.

$$\text{取正交矩阵 } U = [\vec{\alpha}', \vec{\beta}'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

离散 K-L 变换  $A = U^T X$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{即降维后} &\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_1^*: (0, 0)^T, \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T, \\ \vec{\omega}_2^*: \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T, \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \left(\frac{3}{\sqrt{3}}, 0\right)^T \end{array} \right\}. \end{aligned}$$



[例 4.4.2] 设随机向量  $\vec{x}$  的一组样本为  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, (1 \ 1)^T, (-1 \ -1)^T \right\}$ .

[1] 求协方差矩阵  $\Sigma$ .

[2] 作离散 K-L 变换.

[解]

$$[1] \text{ 样本均值 } \vec{\mu} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \vec{x}_i = (0, 0)^T.$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= E \left[ \left( X - \vec{\mu} \right) \left( X - \vec{\mu} \right)^T \right] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \left( \vec{x}_i - \vec{\mu} \right) \left( \vec{x}_i - \vec{\mu} \right)^T = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \vec{x}_i \cdot \vec{x}_i^T \\ &= \frac{1}{4} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{5}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[2] (1) 求  $\Sigma$  的特征值和特征向量.

先求  $\Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  的特征值  $\lambda'_1$  和  $\lambda'_2$ , 则  $\Sigma$  的特征值为  $\lambda_1 = \frac{5}{8}\lambda'_1$ ,  $\lambda_2 = \frac{5}{8}\lambda'_2$ .

令  $|\lambda I - \Sigma'| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$ , 解得:  $\lambda'_1 = 0$ ,  $\lambda'_2 = 2$ , 则  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{5}{4}$ .

因只关注特征向量的方向, 故只需求  $\Sigma'$  的特征向量.

① 设特征值  $\lambda'_1 = 0$  对应的特征向量  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ .

$$(-\Sigma')\vec{\alpha} = \vec{0}, \text{ 解得: } \alpha_1 = -\alpha_2.$$

② 设特征值  $\lambda'_2 = 2$  对应的特征向量  $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$ .

$$(2I - \Sigma')\vec{\beta} = \vec{0}, \text{ 解得: } \beta_1 = \beta_2.$$

(2) 取  $\Sigma$  的一组相互正交的特征向量, 并单位化.

$$\text{显然可取 } \vec{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T, \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T.$$

(3) 作离散 K-L 变换.

$$\text{因 } \lambda_2 > \lambda_1, \text{ 降至一维. 取正交矩阵 } U = \begin{bmatrix} \vec{\beta} \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

离散 K-L 变换  $A = U^T X$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$