数值分析 期末速通教程

3. 函数的最佳逼近

3.1 基本概念

[定义3.1.1] 设 B 是由 n 次多项式、有理函数或分段低次多项式等组成的简单函数类. 对一个经过点 $(x_i,y_i)\ \ (i=1,\cdots,n)$ 的函数 $f(x)$, 求函数 $s(x)\in B$ s.t. $s(x)$ 未必过所有点 $(x_i,y_i)\ \ (i=1,\cdots,n)$, 且 $s(x)$ 与 $f(x)$ 的误差在某种度量下最小, 该问题称为**最佳逼近问题**, 称 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的最佳逼近函数.

[定义3.1.2] 设数域 E . **范数** $||\cdot||$ 是映射 $E\rightarrow\mathbb{R}$, 满足如下三个性质:

(1) [**非负性**, **正定性**] $||x||\geq 0,||x||=0\Leftrightarrow x=0$.

(2) [**正齐性**] $||\alpha x||=|\alpha|\cdot||x||$.

(3) [**三角不等式**] $||x+y||\leq||x||+||y||$.

定义了范数的线性空间称为**赋范线性空间**.

[定义3.1.3] 在线性空间 $\mathbb{R}^n$ 上定义**欧式范数**如下. 对向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$:

(1) $||x||_1=\displaystyle\sum_{i=1}^n|x_i|$.

(2) $||x||_2=\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(3) $||x||_p=\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad(p\geq 1)$.

(4) $||x||_\infty=\displaystyle\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$.

[注] 下面将不再区分 $\overrightarrow{x}$ 和 x .

[定义3.1.4] 在线性空间 $C[a,b]$ 上定义范数如下. 对函数 $f(t)\in C[a,b]$:

(1) $||f(t)||_1=\displaystyle\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$.

(2) $||f(t)||_2=\sqrt{\displaystyle\int_a^b|f(t)|^2\mathrm{d}t}$.

(3) $||f(t)||_\infty=\displaystyle\max_{t\in[a,b]}|f(t)|$.

[定义3.1.5] 设数域 E . 内积 $(\cdot,\cdot)$ 是映射 $E\times E\to C(R)$, 满足如下三条性质:

(1) [**非负性**, **正定性**] $(x,x)\geq 0,(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$.

(2) [**共轭对称性**] $(x,y)=\overline{(y,x)}$, 此处取共轭是为了保证非负性.

(3) [**第一变元线性性**] $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$, $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

定义了内积的线性空间称为内积**空间**.

[**注**] 内积满足**第二变元共轭线性性**, 即 $(x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y)$, $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$.

[**证**] $(x,\alpha y)=\overline{(\alpha y,x)}=\overline{\alpha(y,x)}=\overline{\alpha}(x,y)$.

$(x,y+z)=\overline{(y+z,x)}=\overline{(y,x)+(z,x)}=(x,y)+(x,z)$.

[定义3.1.6]

(1) 在线性空间 $\mathbb{R}^n$ 上定义内积如下.

对向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,\cdots,y_n)^T$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, 定义内积 $(x,y)=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i$.

(2) 在线性空间 $\mathbb{C}^n$ 上定义内积如下.

对向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,\cdots,y_n)^T$, $x,y\in\mathbb{C}^n$, 定义内积 $(x,y)=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i$.

(3) 在线性空间 $\mathbb{C}^n$ 上定义**加权内积**如下. 设权重 $w_1,\cdots,w_n>0$.

对向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,\cdots,y_n)^T$, $x,y\in\mathbb{C}^n$, 定义加权内积 $(x,y)=\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i\cdot x_i\cdot y_i$.

特别地, $w_i=1\ \ (i=1,\cdots,n)$ 时, 加权内积即内积.

[定义3.1.7]

(1) 设 $[a,b]$ 为有限或无限区间, 若非负函数 $\rho(t)$ 满足如下两性质, 则称 $\rho(t)$ 是 $[a,b]$ 上的**权函数**:

① $\displaystyle\int_a^b t^k\cdot\rho(t)\mathrm{d}t\ \ (k=0,1,\cdots)$ 存在且有限.

② 对 $[a,b]$ 上的非负连续函数 $g(t)$, 若 $\displaystyle\int_a^b\rho(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t=0$, 则 $g(t)\equiv 0$.

(2) 在线性空间 $C[a,b]$ 上定义**加权内积**如下. 设权函数 $\rho(t)$.

对函数 $f(t),g(t)\in C[a,b]$, 定义加权内积 $(f(t),g(t))=\displaystyle\int_a^b\rho(t)\cdot f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t$.

特别地, $\rho(t)\equiv 1$ 时, 加权内积即内积.

[**定理3.1.1**] 设 E 是数域 K 上的内积空间.

(1) [**Cauchy-Schwarz 不等式**] $|(x,y)| \leq (x,x)^{\frac{1}{2}} \cdot (y,y)^{\frac{1}{2}}$.

(2) [**内积可诱导范数**]

① 在线性空间 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 上, 有 $||x|| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i \cdot |x_i|^2}$.

② 在线性空间 $C[a,b]$ 上, 有 $||f(t)|| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$.

(3) [**平行四边形公式**] $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

(4) 内积关于两个变量连续.

[**证**]

(1) 对 $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in K$, 有 $(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$, 即 $(x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + |\lambda|^2(y,y) \geq 0$.

$y=0$ 时, 结论显成立. 下面讨论 $y \neq 0$ 的情况.

取 $\lambda = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$, 则上式化为: $(x,x) - \dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0$, 则 $|(x,y)|^2 \leq (x,x) \cdot (y,y)$.

[**定义3.1.8**] 设 M 是内积空间 U 的线性子空间, $x \in U$. 若 $\exists\, x_0 \in M$, $x_1 \in M^\perp$ s.t. $x = x_0 + x_1 \quad (*)$, 则称 x_0 为 x 在 M 上的**正交投影**, $(*)$ 式称为 x 关于 M 的**正交分解**.

[**定理3.1.2**] 设 M 是内积空间 U 中的完备线性子空间. 对 $\forall x \in U$, $\exists$ 唯一的 $x_0 \in M$, $x_1 \in M^\perp$ s.t. $x = x_0 + x_1$.

[**定理3.1.3**] [**最佳逼近**] 设 U 是内积空间, $M \subset U$ 是线性子空间. 若 x_0 是 $x \in U$ 在子空间 M 上的投影, 则 $||x - x_0|| = \inf_{y \in M} ||x-y|| \quad (*)$, 且 x_0 是 M 中 s.t. $(*)$ 式成立的唯一点. $(*)$ 式表明: x_0 是 M 中逼近 x 的**最佳元**.

[**注**]

(1) 在内积空间中, 当逼近的线性子空间是有限维时, 线性子空间完备, 此时最佳逼近元等价于投影.

(2) 在数值逼近中, 选取的子空间如正交多项式子空间、三角多项式子空间、有限元子空间、边界元子空间等都是有限维的, 则求最佳逼近元等价于求投影.

(3) 子空间的构造不同和范数的选取构成不同的数值逼近方法.

3.2 最佳逼近元

不重要.

3.3 最佳平方逼近

[例3.3.1] 求函数 $f(x)=x^3+3x+2$ 在区间 $[0,1]$ 上关于 $\rho(x)=1$ 的最佳平方逼近多项式.

(1) 取 $\varPhi=\mathrm{span}\{1,x\}$.

(2) 取 $\varPhi=\mathrm{span}\{1,x,x^2\}$.

[解]

(1) $\varPhi=\mathrm{span}\{1,x\}=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1\}$.

$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1$, $(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$, $(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$,

$(f,\varphi_0)=\int_0^1 1\cdot(x^2+3x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{23}{6}$, $(f,\varphi_1)=\int_0^1 x\cdot(x^2+3x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{9}{4}$.

法方程 $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{23}{6}\\ \frac{9}{4}\end{bmatrix}$, 解得: $\begin{cases}a_0=\dfrac{11}{6}\\ a_1=4\end{cases}$. 故 $s_1(x)=\dfrac{11}{6}+4x$.

(2) $\varPhi=\mathrm{span}\{1,x,x^2\}=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\}$.

$(\varphi_2,\varphi_2)=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}$, $(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_1)=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$,

$(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_0)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$, $(f,\varphi_2)=\int_0^1 x^2\cdot(x^2+3x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{97}{60}$.

法方程 $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{23}{6}\\ \frac{9}{4}\\ \frac{97}{60}\end{bmatrix}$, 解得: $\begin{cases}a_0=2\\ a_1=3\\ a_2=1\end{cases}$. 故 $s_2(x)=2+3x+x^2$.

3.4 Legendre 多项式

[定义3.4.1] 在区间 $[-1,1]$ 上定义的多项式序列 $P_0(x)=1$, $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]\ \ (n=1,2,\cdots)$ 称为 **Legendre 多项式**, 其首项(最高项 x^n)系数 $a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}$, 则首项系数为 1 的 Legendre 多项式为 $\widetilde{P}_0(x)=1$, $\widetilde{P}_n(x)=\dfrac{n!}{(2n)!}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]\ \ (n=1,2,\cdots)$.

[定理3.4.1] [**Legendre 多项式的性质**] 设区间 $[-1,1]$ 上的 Legendre 多项式 $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$.

(1) [**正交性**] $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ 在 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=1$ 正交.

(2) [**奇偶性**] $P_n(-x)=(-1)^n\cdot P_n(x)$, 则: ① n 为奇数时, $P_n(x)$ 是奇函数; ② n 为偶数时, $P_n(x)$ 是偶函数.

(3) [**递推公式**] $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}\cdot x\cdot P_n(x)-\dfrac{n}{n+1}\cdot P_{n-1}(x)\ \ (n=1,2,\cdots)$.

[注1] 常用的低阶 Legendre 多项式: $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}$, $P_3(x)=\dfrac{5x^3-3x}{2}$.

[注2] $(P_i,P_i)=\dfrac{2}{2i+1}\ \ (i=0,1,\cdots)$.

[定理3.4.2] 区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)$ 按 Legendre 多项式展开的 n 阶最佳平方逼近多项式 $s_n(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^n\alpha_i\cdot P_i(x)$, 其中 $\alpha_i=\dfrac{(f_i,P_i)}{(P_i,P_i)}=\dfrac{2i+1}{2}(f,P_i)$.

[例3.4.1] 求函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ 在区间 $[-1,1]$ 上按 Legendre 多项式展开, 求三阶最佳平方逼近多项式.

[解] $P_0(x)=1$, $\alpha_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cdot 1\right]\mathrm{d}x=0$. * 或因 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\alpha_0=0$.

$P_1(x)=x$, $\alpha_1=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{-1}^1\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cdot x\right]\mathrm{d}x\approx 1.2$.

$P_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}$, $\alpha_2=\dfrac{5}{2}\displaystyle\int_{-1}^1\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cdot\dfrac{3x^2-1}{2}\right]\mathrm{d}x=0$. * 或因 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\alpha_3=0$.

$P_3(x)=\dfrac{5x^3-3x}{2}$, $\alpha_3=\dfrac{7}{2}\displaystyle\int_{-1}^1\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cdot\dfrac{5x^3-3x}{2}\right]\mathrm{d}x\approx -0.2$.

故 $s_3(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^3\alpha_i\cdot P_i(x)=\alpha_1\cdot P_1(x)+\alpha_3\cdot P_3(x)=1.6x-0.6x^3$.

[**例3.4.2**] 求函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[-1,1]$ 上关于 $\rho(x)=1$ 的最佳平方逼近多项式.

[**解**] 因 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 则取 Legendre 多项式 $\{P_0,P_1,P_2\}$ 作基函数.

$P_0(x)=1$, $(f,P_0)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3\cdot 1)\mathrm{d}x=0$, $\alpha_0=\dfrac{1}{2}(f,P_0)=0$.

$P_1(x)=x$, $(f,P_1)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3\cdot x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{5}$, $\alpha_1=\dfrac{3}{2}(f,P_1)=\dfrac{3}{5}$.

$P_2(2)=\dfrac{3x^2-1}{2}$, $(f,P_2)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3\cdot\dfrac{3x^2-1}{2}\right)\mathrm{d}x=0$, $\alpha_2=\dfrac{5}{2}(f,P_2)=0$.

故 $s_2(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{2}\alpha_i\cdot P_i(x)=\dfrac{3}{5}x$.

[**例3.4.3**] 设区间 $[-1,1]$ 上的 Legendre 多项式 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. 求 $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_3(x)\cdot(x^2-7x+9)$.

[**解1**] $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_3(x)\cdot(x^2-7x+9)=\int_{-1}^{1}\left[P_3(x)\cdot x^2-P_3(x)\cdot 7x+P_3(x)\cdot 9\right]$,

其中:

① $P_3(x)\cdot x^2$ 、$P_3(x)\cdot 9$ 是奇函数, 在 $[-1,1]$ 上的积分为 0 .

② $P_3(x)$ 与 $x=P_1(x)$ 正交, $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_3(x)\cdot P_1(x)\mathrm{d}x=0$.

故 $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_3(x)\cdot(x^2-7x+9)=0$.

[**解2**] 因 $P_3(x)$ 与 $P_2(x),P_1(x),P_0(x)$ 正交, 则 $P_3(x)$ 与 $P_2(x),P_1(x),P_0(x)$ 的线性组合正交.

因任意二次多项式可表示为 $P_2(x),P_1(x),P_0(x)$ 的线性组合, 则 $P_3(x)$ 与任意二次多项式正交.

3.5 Chebyshev 多项式

[**定义3.5.1**] 在区间 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式族 $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)\ \ (-1\le x\le 1)$ 称为 **Chebyshev 多项式**.

[**定理3.5.1**] [**Chebyshev 多项式的性质**] 设在区间 $[-1,1]$ 上的 Chebyshev 多项式为 $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)\ \ (-1\le x\le 1)$.

(1) [**递推公式**] $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $T_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x)\ \ (n=2,3.\cdots)$.

(2) [**正交性**] $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 在 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交, 且 $(T_0,T_0)=\pi$, $(T_n,T_n)=\dfrac{\pi}{2}\ \ (n\ge 1)$.

(3) [**奇偶性**] $T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$, 则: ① n 为奇数时, $T_n(x)$ 是奇函数; ② n 为偶数时, $T_n(x)$ 是偶函数.
