《数值分析》期末重点

1. 题型

填空: 只接受标准答案和它的化简形式

单选: 可能未必能在课本上找到原话, 如 "注意" 的部分

证明 x 1 : 简单

计算 x 4

附加题 x 2

---

2. 章节重点

2.1 第一章 误差

- 误差、误差限、绝对误差、相对误差、有效数字的定义

2.2 第二章 插值

2.2.1 插值多项式的存在性 (重点)

- 证明: 待定系数法(以单项式为基函数的插值多项式), 线性方程组存在唯一解)

2.2.2 Lagrange 插值 (重点)

- 计算
- 选填: $l_i(x_j) = [i = j]$.
- 插值余项: $\sum_{i=0}^{n} l_i(x_i) = 1$; $\sum_{i=0}^{n} x_i^m \cdot l(x_i) = x^m \ \ (0 \leq m \leq n)$ (余项为 0 时取等, 有课后习题)

2.2.3 Newton 插值

- 计算
- 差商: 差商的计算、差商与导数的关系 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.
- 插值余项

2.2.4 Hermit 插值

- 计算

2.3 第三章 最佳平方逼近

2.3.1 最佳平方逼近多项式

- 计算（3 阶）:
    - 若 $[a,b]=[-1,1]$, 则 $s(x)=\sum\limits_{i=0}^{3}\alpha_i\cdot P_i(x)$,
        - 其中 $\alpha_i=\dfrac{(f_i,P_i)}{(P_i,P_i)}=\dfrac{2i+1}{2}(f,P_i)$, $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ (记几个常用的系数).
        - 若 f 是偶函数, 则 $p_1(x)=p_3(x)\equiv 0$; 若 f 是奇函数, 则 $p_0(x)=p_2(x)\equiv 0$.
        - $P_n(x)$ 的正交性: $\int_{-1}^{1}P_3(x)\cdot(x^2-7x+9)=0$, 拆开考察各项的奇偶性,
            - 其中 $x=P_1(x)$, $P_3(x)$ 与 $P_1(x)$ 正交.
            - [**另解**] $P_3(x)$ 与 $P_2(x),P_1(x),P_0(x)$ 正交, 则与它们的线性组合正交.
            - 任意二次多项式可表示为 $P_2(x),P_1(x),P_0(x)$ 的线性组合, 则 $P_3(x)$ 与任意二次多项式正交.
        - Chebyshev 正交多项式: $T_n(x)$ 与 $l_n(x)$ 正交.
    - 若 $[a,b]\neq[-1,1]$, 需变换到 $[-1,1]$, 计算后变换回原区间.
- 内积
- 不考带权的最佳平方逼近多项式, 如用 Chebyshev 正交多项式构造.

2.4 第四章 数值积分

2.4.1 插值型求积公式

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum\limits_{i=0}^{n}A_i\cdot f(x_i)$, 其中 $A_i=\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x$, 余项 $E_n(x)=\int_a^b\dfrac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!}\cdot w_{n+1}(x)\mathrm{d}x$.
    - 证明: 已知 $(n+1)$ 个节点 x_i , 则至少有一个有 n 次代数精度的公式.
        - (待定系数法, 线性方程组解存在且唯一)
    - 计算:
        - 给节点, 确定系数 s.t. 代数精度尽量高.

          给插值多项式, 求代数精度.
    - $\int_a^b x^m\mathrm{d}x\approx\sum\limits_{i=0}^{n}A_ix^m$, 取 $x=1$, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n}A_i=1$.
- 求积公式的充分条件: $A_i>0\ \ (0\leq i\leq n)$.

2.4.2 节点均匀分布的 N-C 公式

- $(b-a)\sum\limits_{i=0}^{n}C_i^{(n)}\cdot f(x_i)$,$A_i=(b-a)\cdot C_i^{(n)}$.
    - $\sum\limits_{i=0}^{n}C_i^{(n)}=1$.
    - 代数精度的判定.

2.4.3 复化梯形法 (重点)

2.4.4 用 Lagrange 插值多项式近似 $f(x)$

2.4.5 用 Lagrange 插值多项式的导数近似 $f(x)$ 在节点处的导数

2.5 第五章 解线性方程组的直接法

2.5.1 Gauss 列主元消元法

2.5.2 LU 分解 (重点)

- 计算: 算一遍, 验算一遍.
- 选填
- 矩阵可 LU 分解的条件: 各阶顺序主子式非零.

2.5.3 LDL^T 分解、LL^T 分解

2.5.4 向量、矩阵的范数

- 向量的范数: 1 - 范数、2 - 范数、无穷范数
- 矩阵的范数: 无穷范数(行)、1 - 范数(列)、2 - 范数($||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$) 、
  - 条件数 $\mathrm{cond}(A) = ||A||_? \cdot ||A^{-1}||_?$, 其中 ? 为 $\infty, 1, 2$.
  - 谱半径 $\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i|$.

2.6 第六章 解线性方程组的迭代法

2.6.1 迭代收敛的条件

- 充要条件: $\rho < 1$.
- 充分非必要: 某范数 < 1 .
- 按行严格对角占优阵、对称正定阵时 3 种迭代方法的收敛性.

2.6.2 Jocabi 迭代

- 计算: 写迭代公式 (建议写分量的形式)

2.6.3 G-S 迭代

- 计算: 写迭代公式 (建议写分量的形式)

2.6.4 SOR 迭代

- 收敛条件

2.7 第七章

- 非线性方程组的 Newton 迭代 (选填)
