《概率论与数理统计》期末速通

3. 多维随机变量及其分布

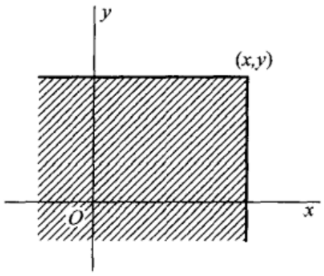
3.1 二维随机变量

3.1.1 二维随机变量

[**定义3.1.1**] 设随机试验 E 的样本空间 $S=\{e\}$. 设 $X=X(e),Y=Y(e)$ 都是 S 上的随机变量, 则称由它们构成的向量 (X,Y) 为**二维随机向量**或**二维随机变量**. 若 $X_1,\cdots,X_n$都是 S 上的随机变量, 则称由它们构成的向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为n**维随机变量**, 称 X_i 为第 i 个**分量**.

[**定义3.1.2**] 设 (X,Y) 是二维随机变量. 对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 称二元函数 $F(x,y)=P\{(X\leq x)\bigcap(Y\leq y)\}=P\{X\leq x,Y\leq y\}$ 为 (X,Y) 的(**联合**)**分布函数**.

[**注**] 联合分布函数的概率意义: 如下图, 将点 (X,Y) 视为平面上随机点的坐标, 则 $F(x,y)$ 在点 (x,y) 处的函数值是点 (X,Y) 落在以点 (x,y) 为右上角的左下方的无界矩形区域内的概率.



[**定理3.1.1**] [**分布函数的性质**] 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$.

(1) [**单调性**] $F(x,y)$ 是分别关于 x 和 y 的不减函数, 即:

① 对固定的 y , 若 $x_2>x_1$, 则 $F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$.

② 对固定的 x , 若 $y_2>y_1$, 则 $F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$.

(2) [**有界性**] $0\leq F(x,y)\leq 1$.

(3) ① 对固定的 y , 有$F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$.

② 对固定的 x , 有 $F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$.

③ $F(-\infty,-\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to-\infty}}F(x,y)=0,F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=1$.

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y),\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$ 都无法确定.

(4) ① 对固定的 y, $F(x,y)$ 关于 x 右连续, 即 $F(x_0+0,y)=\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x,y)=F(x_0,y)$.

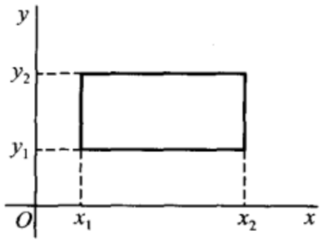
② 对固定的 x , $F(x,y)$ 关于 y 右连续, 即 $F(x,y_0+0)=\lim\limits_{y_0\to y_0^+}F(x,y)=F(x,y_0)$.

(5)对 $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 有
$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \ge 0$.

[**证**] (5) $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_2, Y \le y_1\} - P\{X \le x_1, Y \le y_2\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \ge 0 .$$



3.1.2 二维离散型随机变量

[**定义3.1.2**] 若二维随机变量 (X, Y) 所有可能的取值 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$ 是有限对或可列对, 则称 (X, Y) 为**二维离散型随机变量**, 称 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots)$ 为其(**联合**)**分布律**, 表格形式为:

$Y \setminus X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\ddots$

则 $p_{ij} \ge 0, \sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1 \ \ (i, j = 1, 2, \cdots)$.

[**注**] 随机变量 X 和 Y 的联合分布函数
$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum\limits_{x_i \le x} \sum\limits_{y_j \le y} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum\limits_{x_i \le x} \sum\limits_{y_j \le y} p_{ij}$, 形式繁琐, 故实际应用中对二维离散型随机变量几乎不用联合分布函数, 而用联合分布律.

[**例3.1.1**] 设随机变量 X 在 $1,2,3,4$ 这四个整数中等可能地取值, 随机变量 Y 在 $[1,X]$ 中等可能地取整数值. 求二维随机变量 (X,Y) 的分布律.

[**解**] $P\{X=i\}=\dfrac{1}{4}\ (i=1,2,3,4)$.

由乘法公式: $P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}\cdot P\{X=i\}=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1}{4}\ (i=1,2,3,4;j\le i)$.

$Y\setminus X$	1	2	3	4
1	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{16}$
2	0	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{16}$
3	0	0	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{16}$
4	0	0	0	$\dfrac{1}{16}$

3.1.3 二维连续型随机变量

[**定义3.1.3**] 对二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$, 若 $\exists$ 非负函数 $f(x,y)\ s.t.\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 则称 (X,Y) 为**二维连续型随机变量**, 称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的(**联合)概率密度**, 记作 $(X,Y)\sim f(x,y)$.

[**定理3.1.2**] 二元函数 $f(x,y)$ 是二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度的充要条件为:

(1) $f(x,y)\ge 0$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

[**证**] (2)由 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=1$ 即证.

[**注**] (2)的几何意义: $z=f(x,y)$ 为一张空间曲面, 它与 xOy 平面间的空间区域的体积为 1 .

[**定理3.1.3**] 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 概率密度为 $f(x,y)$, 则:

(1) $F(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

(2) 在 $f(x,y)$ 的连续点处, 有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y)$.

(3) 对平面区域 G , 有 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

[**证**]

(1) 因 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可积, 则变上限二重积分 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 连续.

(2) 因 $f(x,y)$ 连续, 则变上限二重积分 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 可导(存在二阶偏导数),

其先对 x 求偏导、再对 y 求偏导的结果为 $f(x,y)$.

[**推论**] 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$. 若 $F(x,y)$ 可导, 则 (X,Y) 是二维连续型随机变量, 且 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ 是它的一个概率密度.

[**例3.1.2**] 设二维随机变量 (X,Y) 有密度 $f(x,y)=\begin{cases} c\cdot \mathrm{e}^{-(2x+y)}, x>0, y>0 \\ 0, otherwise\end{cases}$. 求:

(1) 常数 c .

(2) 联合分布函数 $F(x,y)$.

(3) 概率 $P\{Y\leq X\}$.

[**解**]

(1) 因 $f(x,y)\geq 0$, 则 $c\geq 0$.

因 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} c\cdot \mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

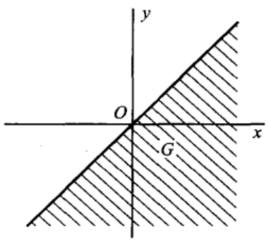
$=c\cdot\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\right)=\dfrac{c}{2}$, 解得: $c=2$.

(2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2u+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, x>0, y>0 \\ 0, otherwise\end{cases}=\begin{cases}\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-y}\right), x>0, y>0 \\ 0, otherwise\end{cases}$.

(3) 将 (X,Y) 视为平面上的随机点, 则事件 $\{Y\leq X\}=\{(X,Y)\in G\}$,

其中 G 为平面上直线 $y=x$下方的区域, 如下图阴影部分所示:



注意到 $f(x,y)$ 只在区域 $D=(0,+\infty)\times(0,x)$ 上非零,

则 $P\{Y\leq X\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}y$

$=2\cdot\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)=\dfrac{1}{3}$.

3.1.4 n 维随机变量

[**定义3.1.4**] 设随机试验 E 的样本空间 $S=\{e\}$, 且 $X_1=X_1(e),\cdots,X_n=X_n(e)$ 是 S 上的随机变量, 由它们构成的 n 维向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 称为 n **维随机向量**或 n **维随机变量**. 对 $\forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, 称 n 元函数 $F(x_1,\cdots,x_n)=P\{X_1\leq x_1,\cdots,X_n\leq x_n\}$ 为 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的**联合分布函数**.

[**注**] n 维随机变量的联合分布函数类似于二维随机变量的联合分布函数.

3.2 边缘分布

3.2.1 边缘分布函数

[**定义3.2.1**] 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 其中 X 和 Y 都是一维随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 分别称它们为 (X,Y) 关于 X 和 Y 的**边缘分布函数**.

[**定理3.2.1**]

(1) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 则:

① 关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$.

② 关于 Y 的边缘分布函数 $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$.

(2) 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 则:

① 关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

② 关于 Y 的边缘分布函数 $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$.

[**证**]

(1) ① $F_X(x)=P\{X\leq x\}=P\{X\leq x,Y<+\infty\}=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$.

② $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{x<+\infty,Y\leq y\}=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$.

[**例3.2.1**] 设二维随机变量有分布函数 $F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-x-y},x>0,y>0\\0,otherwise\end{cases}$. 求其边缘分布函数.

[**解**]

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-x-y}\right),x>0\\\lim\limits_{y\to+\infty}0,x\leq 0\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x},x>0\\0,x\leq 0\end{cases}.$$

由 $F(x,y)$ 的对称性: $F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y},y>0\\0,y\leq 0\end{cases}$.

[**定义3.2.2**] 考察二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律. 注意到事件 $\{X=x_i\}$ 为事件 $\{X=x_i,Y=y_1\},\cdots,\{X=x_i,Y=y_n\},\cdots$ 的和事件, 且后者两两互斥, 由可列可加性:

$P\{X=x_i\}=P\{X=X_i,Y=y_1\}+\cdots+P\{X=X_i,Y=y_n\}+\cdots=p_{i1}+\cdots+p_{in}+\cdots=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$.

记 $p_{i\cdot}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$, 则 $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}\ \ (i=1,2,\cdots)$. 同理记 $p_{\cdot j}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}p_{ij}$, 则 $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}\ \ (j=1,2,\cdots)$. 分别称 $p_{i\cdot}\ \ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\cdot j}\ \ (j=1,2,\cdots)$为 (X,Y) 关于 X 和 Y 的**边缘分布律**, 表格形式为:

X	x_1	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	$p_{1\cdot}$	$\cdots$	$p_{n\cdot}$	$\cdots$

Y	y_1	$\cdots$	y_n	$\cdots$
p_j	$p_{\cdot 1}$	$\cdots$	$p_{\cdot n}$	$\cdots$

[**例3.2.2**] 设整数 N 等可能地在 $1,\cdots,10$ 中取值, 设 $D=D(N)$ 为能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$ 为能整除 N 的素数的个数. 求 D 和 F 的边缘分布律和联合分布律.

[**解**] E 的样本空间和 D 、F 的取值情况如下:

样本点 N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

(1) 直接求边缘边缘分布律.

① D 所有可能的取值为 $1,2,3,4$, 其分布律:

D	1	2	3	4
p_k	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

② F 所有可能的取值为 $0,1,2$, 其分布律:

F	0	1	2
p_k	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{2}{10}$

(2) 先求联合分布律, 再求边缘分布律.

联合分布律:

$F \setminus D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$\dfrac{1}{10}$	0	0	0	$\dfrac{1}{10}$
1	0	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{7}{10}$
2	0	0	0	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{2}{10}$
$P\{D=i\}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	1

[**注**] 二维离散型随机变量的联合分布律可唯一确定两个边缘分布律, 而两个边缘分布律无法唯一确定联合分布律. 如:

$Y \setminus X$	0	1	$P\{Y=j\}$
2	0.3	0.2	0.5
3	0.2	0.3	0.5
$P\{X=i\}$	0.5	0.5	1

$Y \setminus X$	0	1	$P\{Y=j\}$
2	0.2	0.3	0.5
3	0.3	0.2	0.5
$P\{X=i\}$	0.5	0.5	1

上述两个二维离散型随机变量的联合分布律不同, 但它们的边缘分布律相同.

3.2.2 边缘概率密度

[**定义3.2.3**] 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 其中 X 和 Y 都是一维随机变量, 它们的概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 分别称它们为 (X,Y) 关于 X 和 Y 的**边缘概率密度**.

[**定理3.2.2**] 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 则:

(1) 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(2) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$.

[**证**] 因 $F(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续,

(1) $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}v$.

注意到 X 的概率密度 $f_X(x)$ 满足 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)\mathrm{d}x$,

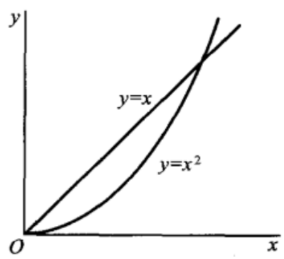
则 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

[**注1**] 二维连续型随机变量的联合概率密度可唯一确定两个边缘概率密度, 而两个边缘概率密度无法唯一确定联合概率密度, 如二维正态分布.

[**注2**] ①求 $f_X(x)$ 对 y 积分, 积分区域为 X 型区域; ②求 $f_Y(y)$ 对 x 积分, 积分区域为 Y 型区域.

[**例3.2.3**] 设随机变量 X 和 Y 有联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}6, x^2\leq y\leq x\\0, otherwise\end{cases}$. 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

[**解**] $f(x,y)$ 取非零值的区域为曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围成的区域, 如下图所示:



(1) X 型区域 $D=[0,1]\times[x^2,x]$.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y, 0\leq x\leq 1\\0, otherwise\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2), 0\leq x\leq 1\\0, otherwise\end{cases}.$$

(2) Y 型区域 $D=\left[y,\sqrt{y}\right]\times[0,1]$.

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6\mathrm{d}x, 0\leq y\leq 1\\0, otherwise\end{cases}=\begin{cases}6\left(\sqrt{y}-y\right), 0\leq y\leq 1\\0, otherwise\end{cases}.$$

3.3 条件分布

3.3.1 条件分布律

[**定义3.3.1**] 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ \ (i,j=1,2,\cdots)$, 关于 X 的边缘分布律 $P\{X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_i\}=p_{i\cdot}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\ \ (i=1,2,\cdots)$, 关于 Y 的边缘分布律 $P\{Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\ \ (i=1,2,\cdots)$.

(1) 对固定的 j , 若 $P\{Y=y_j\}>0$, 则称 $P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\ \ (i=1,2,\cdots)$ 为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的**条件分布律**.

(2) 对固定的 i , 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称 $P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\ \ (j=1,2,\cdots)$ 为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的**条件分布律**.

[**注1**] 条件分布律的分子为联合分布, 分母为边缘分布, 而边缘分布可由联合分布唯一确定, 故条件分布由联合分布唯一确定.

[**注2**] 对二维连续型随机变量 (X,Y) 和常数 $x_i,y_j\in\mathbb{R}$, 有 $P\{X=x_i\}=P\{Y=y_j\}=0$, 故无法用上述方法定义条件分布.

[**例3.3.1**] 某工厂中汽车有两道工序, 第一个是固定3只螺丝, 第二个是焊接 2 个点. 设工人固定螺丝不良的个数为 X , 焊接点不良的个数为 Y . 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律如下:

$Y\setminus X$	0	1	2	3
0	0.840	0.030	0.020	0.010
1	0.060	0.010	0.080	0.002
2	0.010	0.005	0.004	0.001

求在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律.

[**解**] 先求边缘分布律:

$Y\setminus X$	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.080	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1

Y 所有可能的取值为 $0,1,2$.

① $P\{Y=0\mid X=1\}=\dfrac{P\{X=1,\ Y=0\}}{P\{X=1\}}=\dfrac{0.030}{0.045}=\dfrac{6}{9}$.

② $P\{Y=1\mid X=1\}=\dfrac{P\{X=1,\ Y=1\}}{P\{X=1\}}=\dfrac{0.010}{0.045}=\dfrac{2}{9}$.

③ $P\{Y=2\mid X=1\}=\dfrac{P\{X=1,\ Y=2\}}{P\{X=1\}}=\dfrac{0.005}{0.045}=\dfrac{1}{9}$.

故在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律:

Y	0	1	2
$P\{Y=j\mid X=i\}$	$\dfrac{6}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$

[**例3.3.2**] 某人进行射击, 击中目标的概率为 $p \ (0<p<1)$, 射击至击中目标两次时停止. 设 X 为首次击中目标所进行的射击次数, Y 为总射击次数. 求:

(1) X 和 Y 的联合分布律.

(2) 关于 X 和 Y 的条件分布律.

[**解**]

(1) Y 所有可能的取值为 $n=2,3,\cdots$; X 所有可能的取值为 $m=1,\cdots,n-1$.

因射击至击中目标两次时停止, 则 $X=m,Y=n$ 时, 第 m 次和第 n 次射击击中目标, 其余射击未击中目标.

故 X 和 Y 的联合分布律 $P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2} \ \ (n=1,2,\cdots;m=1,\cdots,n-1)$.

(2) $P\{X=m\}=\displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{+\infty}p^2(1-p)^{n-2}$

$$=p^2\cdot\sum_{n=m+1}^{+\infty}(1-p)^{n-2}=p^2\cdot\frac{(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1} \ \ (m=1,2,\cdots),$$

其中等比级数 $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty}(1-p)^{n-2}$ 的公比 $1-p<1$, 则收敛, 其首项为 $(1-p)^{m-1}$.

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

① 关于 X 的条件分布律:

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}=\frac{1}{n-1} \ \ (m=1,\cdots,n-1).$$

② 关于 Y 的条件分布律:

$$P\{Y=n\mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}=p(1-p)^{n-m-1} \ \ (n=m+1,m+2,\cdots).$$

3.3.2 条件概率密度与条件分布函数

[**定义3.3.2**] 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 关于 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 关于 Y 的概率密度为 $f_Y(y)$.

(1) 对固定的 y , 若 $f_Y(y)>0$, 则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 条件下随机变量 X 的**条件概率密度**, 记作 $f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$. 在 $Y=y$ 的条件下 X 的**条件分布函数** $F_{X|Y}(x\mid y)=P\{X\le x\mid Y=y\}=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x$.

(2) 对固定的 x , 若 $f_X(x)>0$, 则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为在 $X=x$ 条件下随机变量 Y 的**条件概率密度**, 记作 $f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$. 在 $X=x$ 条件下 X 的**条件分布函数** $F_{Y|X}(y\mid x)=P\{Y\le y\mid X=x\}=\displaystyle\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y$.

[**定义3.3.3**] 设平面有界区域 G 的面积为 A . 若二维随机变量 (X,Y) 有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A},(x,y)\in G\\0,otherwise\end{cases}$, 则称 (X,Y) 在 G 上服从(**二维**)**均匀分布**.

[**例3.3.3**] 设二维随机变量 (X,Y) 在圆域 $x^2+y^2\leq 1$ 上服从均匀分布. 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

[**解**] 圆域面积为 π , 则概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi},x^2+y^2\leq 1\\0,otherwise\end{cases}$.

Y 型区域 $D=\left[-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}\right]\times[-1,1]$.

关于 Y 的边缘概率密度:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\pi},-1\leq y\leq 1\\0,otherwise\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi},-1\leq y\leq 1\\0,otherwise\end{cases}.$$

因 $-1<y<1$ 时, $f_Y(y)>0$, 此时 $f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{1}{\pi}}{\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}},-\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}\\0,otherwise\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}},-\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}\\0,otherwise\end{cases}.$$

[**注**] $y=0$ 时, 在 $Y=0$ 条件下 X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y=0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},-1\leq x\leq 1\\0,otherwise\end{cases}$.

[**例3.3.4**] 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上等概率地随机取值. 观察到 $X=x\ \ (0<x<1)$ 时, 数 Y 在区间 $(x,1)$ 上等概率地随机取值. 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

[**解**] 因 $X\sim U(0,1)$, 则 $f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,otherwise\end{cases}$.

在 $X=x$ 的条件下, $Y\sim U(x,1)$, 则 $f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x},x<y<1\\0,otherwise\end{cases}$.

联合概率密度 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x},0<x<1,x<y<1\\0,otherwise\end{cases}$.

Y 型区域 $D=[0,y]\times[0,1]$,

则 $f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{1-x},0<y<1\\0,otherwise\end{cases}=\begin{cases}-\ln(1-y),0<y<1\\0,otherwise\end{cases}$.

3.4 随机变量的独立性

3.4.1 二维随机变量的独立性

[**定义3.4.1**] 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 两个边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 若对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 都有 $P\{X\leq x,Y\leq y\}=P\{X\leq x\}\cdot P\{Y\leq y\}$, 即 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$, 则称随机变量 X 与随机变量 Y **相互独立**.

(1) 对二维离散型随机变量 (X,Y) , 称随机变量 X 与随机变量 Y **相互独立**, 如果对 (X,Y) 的所有取值 $(x_i,y_j)\ \ (1\leq i\leq n,1\leq j\leq m)$, 都有 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$.

(2) 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 两个边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$. 称随机变量 X 与随机变量 Y **相互独立**, 如果 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上几乎处处成立(不成立的点构成零测集).

[**注**] 若二维离散型随机变量的两个分量相互独立, 则:

(1) 联合分布律等于两个边缘分布律之积.

(2) 若 X 所有可能的取值为 $x_1,\cdots,x_n$, Y 所有可能的取值为 $y_1,\cdots,y_m$, 则需验证 nm 个等式.

[**例3.4.1**] 设二维离散型随机变量 (X,Y) 有如下的联合分布律.

$Y\setminus X$	0	1
1	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{6}$
2	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{6}$

求证: 随机变量 X 与随机变量 Y 相互独立.

[**证**] 两个边缘分布律如下.

$Y\setminus X$	0	1	$P\{Y=j\}$
1	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{6}$	$\dfrac{3}{6}$
2	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{6}$	$\dfrac{3}{6}$
$P\{X=i\}$	$\dfrac{2}{6}$	$\dfrac{4}{6}$	1

因 $\begin{cases}P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{1}{6}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\}\\P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{1}{6}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=2\}\\P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{2}{6}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}\\P\{X=1,Y=2\}=\dfrac{2}{6}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=2\}\end{cases}$, 则 X 与 Y 相互独立.

[**例3.4.2**] 设二维离散型随机变量 (X,Y) 有联合分布律 $P\{X=x,Y=y\}=p^2(1-p)^{x+y-2}\ \ (0<p<1;x,y\in\mathbb{Z}^+)$. 判断随机变量 X 与随机变量 Y 是否相互独立.

[**解**] $P\{X=x\}=\sum\limits_{y=1}^{+\infty}P\{X=x,Y=y\}=p^2(1-p)^{x-2}\cdot\sum\limits_{y=1}^{+\infty}(1-p)^y$

$=p^2(1-p)^{x-2}\cdot\dfrac{1-p}{p}=p(1-p)^{x-1}\ \ (x=1,2,\cdots)$.

同理 $P\{Y=y\}=p(1-p)^{y-1}\ \ (y=1,2,\cdots)$.

因 $P\{X=x,Y=y\}=p^2(1-p)^{x+y-2}=P\{X=x\}\cdot P\{Y=y\}$, 则 X 与 Y 相互独立.

[**例3.4.3**] 设二维连续型随机变量 (X,Y) 有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)};x,y>0\\0;otherwise\end{cases}$. 求证: 随机变量 X 与随机变量 Y 相互独立.

[**解**] X 型区域 $D_X=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$,

则 $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}y;x>0\\0;otherwise\end{cases}=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x};x>0\\0;otherwise\end{cases}$,

其中 $\displaystyle\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^{-2x}\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^{-2x}\cdot\left(-\mathrm{e}^{-y}\right)\Big|_0^{+\infty}=2\mathrm{e}^{-2x}$.

同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y};y>0\\0;otherwise\end{cases}$, 则 $f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)};x,y>0\\0;otherwise\end{cases}=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 故证.

[**例3.4.3**] 设二维连续型随机变量 (X,Y) 有分布函数 $F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-ax})y,x\ge0,0\le y\le1\\1-\mathrm{e}^{-ax},x\ge0,y>1\\0,otherwise\end{cases}\ \ (a>0)$. 求证: 随机变量 X 与随机变量 Y 相互独立.

[**解**] 边缘分布函数 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}\lim\limits_{y\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-ax}),x\ge0\\0,otherwise\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-ax},x\ge0\\0,otherwise\end{cases}$.

$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-2ax}),0\le y\le1\\\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-ax}),y>1\\0,otherwise\end{cases}=\begin{cases}y,0\le y\le1\\1,y>1\\0,otherwise\end{cases}$.

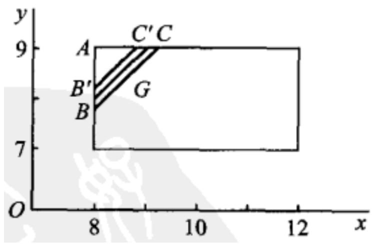
因 $F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-ax})y,x\ge0,0\le y\le1\\1-\mathrm{e}^{-ax},x\ge0,y>1\\0,otherwise\end{cases}=F_X(x)\cdot F_Y(y)\ \ (a>0)$, 故证.

[例3.4.4] A到达办公室的时间在 $08 \sim 12$ 时均匀分布, B到达办公室的时间在 $07 \sim 09$ 时均匀分布, 设A与B的到达时间相互独立. 求A与B到达办公室的时间相差不超过 $5\ \mathrm{min}$ 的概率.

[解] 设A和B分别于 X 时刻、Y 时刻到达办公室, 则 $X \sim U(8,12), Y \sim U(7,9)$,

进而 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},8<x<12\\0,otherwise\end{cases},f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},7<y<9\\0,otherwise\end{cases}$.

因 X 与 Y 独立, 则 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8},8<x<12,7<y<9\\0,otherwise\end{cases}$, 其非零区域为下图所示的矩形域:



设平面区域 $G=\left\{(x,y)\middle||x-y|\le\dfrac{1}{12}\right\}$, 则 $P\left\{|X-Y|\le\dfrac{1}{12}\right\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

因 $|x-y|\le\dfrac{1}{2}$, 则 $\begin{cases}l_{BC}:y\ge x-\dfrac{1}{12}\\l_{B'C'}:y\le x+\dfrac{1}{12}\end{cases}$, 进而 G 为上图所示的四边形区域 $BB'C'C$.

故 $P\left\{|X-Y|\le\dfrac{1}{12}\right\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{8}\cdot S_G=\dfrac{1}{8}\left[\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{13}{12}\right)^2-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{11}{12}\right)^2\right]=\dfrac{1}{48}$.

3.4.2 n维随机变量

[定义3.4.2] 定义 n 维随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的**联合分布函数** $F(x_1,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n\}$, 关于随机变量 $X_i\ \ (1\le i\le n)$ 的**边缘分布函数** $F_{X_i}(x_i)=F(+\infty,\cdots,+\infty,x_i,+\infty,\cdots,+\infty)$.

[定义3.4.3] 设 n 维随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1,\cdots,x_n)$. 若 $\exists$ 非负函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ $s.t.$ 对 $\forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, 都有 $F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$, 则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的**概率密度函数**, 简称**概率密度**, 关于随机变量 X_i 的**边缘概率密度** $f_{X_i}(x_i)=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-1)个}f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n$.

[定义3.4.4] 对 n 维随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$, 称随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ **相互独立**, 如果对 $\forall x_1,\cdots,x_n$, 都有 $F(x_1,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$.

3.4.3 二维正态分布

[定义3.4.5] 若二维随机变量 (X,Y) 有概率密度
$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\dfrac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$, 其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数, 且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$, 则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的**二维正态分布**, 记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

[定理3.4.1] 若二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则随机变量 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

[证] 因 $\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\rho^2\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$,

则 $f_X(x)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}\mathrm{d}y$

$=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ * 令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$.

$=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$. 同理 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\quad(-\infty<y<+\infty)$.

[注] 本定理表明: 二维随机变量的联合分布可唯一确定两个边缘分布, 但两个边缘分布不能唯一确定联合分布.

[定理3.4.2] 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则随机变量 X 与随机变量 Y 相互独立的充要条件是: $\rho=0$.

[证] 因 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 则 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$.

(充) $\rho=0$ 时, $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

(必) 因 X 与 Y 相互独立, 则 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

令 $x=\mu_1,y=\mu_2$, 则 $\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$, 解得: $\rho=0$.

3.5 两个随机变量的函数的分布

3.5.1 两个离散型随机变量的函数

[例3.5.1] 设二维离散型随机变量 (X, Y) 有如下的联合分布律.

$X \setminus Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$

求:

(1)随机变量 $Z_1 = X + Y$ 的分布律.

(2)随机变量 $Z_2 = X \cdot Y$ 的分布律.

(3)随机变量 $Z_3 = \dfrac{X}{Y}$ 的分布律.

(4)随机变量 $Z_4 = \max\{X, Y\}$ 的分布律.

(5)随机变量 $Z_5 = \min\{X, Y\}$ 的分布律.

[解]

(X, Y)	$(-1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, -1)$	$(0, 1)$	$(1, -1)$	$(1, 1)$
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$Z_1 = X + Y$	-2	0	-1	1	0	2
$Z_2 = X \cdot Y$	1	-1	0	0	-1	1
$Z_3 = \frac{X}{Y}$	1	-1	0	0	-1	1
$Z_4 = \max\{X, Y\}$	-1	1	0	1	1	1
$Z_5 = \min\{X, Y\}$	-1	-1	-1	0	-1	1

(1)

$Z_1 = X + Y$	-2	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(2)

$Z_2=X\cdot Y$	-1	0	1
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(3)

$Z_3=\frac{X}{Y}$	-1	0	1
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(4)

$Z_4=\max\{X,Y\}$	-1	0	1
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

(5)

$Z_5=\min\{X,Y\}$	-1	0	1
p	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.5.2 $Z=X+Y$的分布

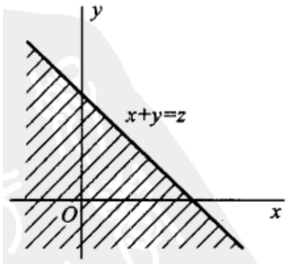
[**定理3.5.1**] 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 随机变量 $Z=g(X,Y)$. 若可从函数 $z=g(x,y)$ 中解出 $y=h(x,z)$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,h(x,z))\cdot\left|\frac{\partial h(x,z)}{\partial z}\right|\mathrm{d}x$.

[**定理3.5.2**] 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 则 $Z=X+Y$ 是连续型随机变量, 其概率密度 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$ 或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$. 若随机变量 X 与随机变量 Y 独立, 设 (X,Y) 的两个边缘分布分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x$ 或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y$, 其中 $f_X*f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y$ 称为 f_X 与 f_Y 的**卷积公式**.

[**证1**] 以证明 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$ 为例.

(1) 因 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le Z\}=P\{(x,y)\in G\}$,

其中 G 为平面上直线 $x+y=z$ 的下方的区域, 如下图所示:



Y 型区域 $G=(-\infty,z-y]\times(-\infty,+\infty)$,

则 $F_Z(z)=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

因 $f_Z(z)$ 中需出现从 $-\infty$ 到 z 上的积分, 令 $\begin{cases}x=u-y\\y=y\end{cases}$, 则 $J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial y}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{vmatrix}=1$,

且 $x\to-\infty$ 时, $u\to-\infty$; $x=z-y$ 时, $u=z$.

$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z}f(u-y,y)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{z}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)\mathrm{d}y$,

则 Z 的概率密度 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$.

(2) X 与 Y 独立时, 有 $f(z-y,y)=f_X(z-y)\cdot f_Y(y)$.

[**证2**] 设函数 $z=g(x,y)=x+y$, 则 $y=h(x,z)=z-x$, 此时 $\left|\dfrac{\partial h(x,z)}{\partial z}\right|=1$.

由**定理3.5.1**: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\cdot 1\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$.

[**例3.5.2**] 设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$, 且 X 与 Y 相互独立. 求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

[**解**] 因 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$, 且 X 与 Y 相互独立,

则 $f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{z^2-2xz+x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2+xz}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{z^2}{4}\right\}\mathrm{d}x$$ * 配凑为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2\right\}\mathrm{d}x$$ * 令 $t=x-\dfrac{z}{2}$.

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}\exp\left\{-\frac{(z-0)^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}\right\}$$, 即 $Z\sim N(0,2)$.

[**推广**]

(1) n 个独立的、服从正态分布的随机变量之和也服从正态分布.

设 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)\ \ (1\le i\le n)$, 且 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 则 $X_1+\cdots+X_n\sim N\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n\mu_i,\sum_{i=1}^n\sigma_i^2\right)$.

(2) n 个独立的、服从正态分布的随机变量的线性组合也服从正态分布.

[例3.5.3] 设某电路中两电阻 R_1 和 R_2 串联. 设随机变量 R_1 与随机变量 R_2 相互独立, 且它们的概率密度都为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50},0\leq x\leq 10\\0,otherwise\end{cases}$. 求总电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

[解] 因 $f_{R_1}(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50},0\leq x\leq 10\\0,otherwise\end{cases}, f_{R_2}(y)=\begin{cases}\dfrac{10-y}{50},0\leq y\leq 10\\0,otherwise\end{cases}$,

则 $f_R(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{R_1}(x)\cdot f_{R_2}(z-x)\mathrm{d}x$.

因 $s.t.\ f_{R_1}(x),f_{R_2}(z-x)$ 同时非零的区间满足 $\begin{cases}0<x<10\\0<z-x<10\end{cases}$,

即 $\begin{cases}0<x<10\\z-10<x<z\end{cases}$, 下面讨论该不等式组的解集何时非空.

下面讨论 z 的取值范围, 分段点满足 $z-10=0,z-10=10,z=0,z=10$, 即 $z=0,10,20$.

① $z<0$ 时, 区间 $(z-10,z)$ 与区间 $(0,10)$ 不交, 即两密度函数不同时非零, 则 $f_R(z)=0$.

② $0\leq z<10$ 时, $(z-10,z)\bigcap(0,10)=(0,z)$,

此时 $f_R(z)=\displaystyle\int_0^z f_{R_1}(x)\cdot f_{R_2}(z-x)\mathrm{d}x=\frac{600z-60z^2+z^3}{15000}$.

③ $10\leq z<20$ 时, $(z-10,z)\bigcap(0,10)=(z-10,10)$,

此时 $f_R(z)=\displaystyle\int_{z-10}^{10}f_{R_1}(x)\cdot f_{R_2}(z-x)\mathrm{d}x=\frac{(20-z)^3}{15000}$.

④ $z\geq 20$ 时, 区间 $(z-10,z)$ 与区间 $(0,10)$ 不交, 则 $f_Z(z)=0$.

综上, $f_R(z)=\begin{cases}\dfrac{600z-60z^2+z^3}{15000},0\leq z<10\\\dfrac{(20-z)^3}{15000},10\leq z<20\\0,otherwise\end{cases}$.

3.5.3 $Z=\frac{X}{Y},Z=X\cdot Y$的分布

[定理3.5.3] 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 则 $Z=\dfrac{Y}{X}$ 是连续型随机变量, 其概率密度 $f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f(x,xz)\mathrm{d}x$. 若随机变量 X 与随机变量 Y 独立, 则 $f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f_X(x)\cdot f_Y(xz)\mathrm{d}x$.

[证] 设函数 $z=g(x,y)=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=h(x,z)=xz$, 此时 $\left|\dfrac{\partial h(x,z)}{\partial z}\right|=|x|$.

由**定理3.5.1**: $f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f(x,xz)\mathrm{d}x$.

[**定理3.5.4**] 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 则 $Z=X\cdot Y$ 是连续型随机变量, 其概率密度 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\cdot f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$. 若随机变量 X 与随机变量 Y 独立, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\cdot f_X(x)\cdot f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$.

[**证**] 设函数 $z=g(x,y)=xy$, 则 $y=h(x,z)=\frac{z}{x}$, 此时 $\left|\frac{\partial h(x,z)}{\partial z}\right|=\frac{1}{|x|}$.

由**定理3.5.1**: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\cdot f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$.

[**例3.5.4**] 设随机变量 Y 的概率密度 $f(y)=\begin{cases}\frac{y}{25}\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}},y>0\\0,otherwise\end{cases}$, 随机变量 X 的概率密度 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}},x>0\\0,otherwise\end{cases}$, 且 X 与 Y 相互独立. 求随机变量 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度.

[**解**] 因 X 与 Y 相互独立, 则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f(x,xz)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f_X(x)\cdot f_Y(xz)\mathrm{d}x$.

上式的被积函数非零时, 有 $\begin{cases}x\neq 0\\f_X(x)\neq 0\\f_Y(xz)\neq 0\end{cases}$, 则 $\begin{cases}x>0\\xz>0\end{cases}$, 进而 $z>0$.

① $z\leq 0$ 时, $f_Z(z)=0$.

② $z>0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\cdot\frac{xz}{25}\mathrm{e}^{-\frac{xz}{5}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{z}{125}\cdot\int_0^{+\infty}x^2\cdot\exp\left\{-\left(\frac{1+z}{5}\right)x\right\}\mathrm{d}x\xlongequal{a=\frac{1+z}{5}}\frac{z}{125}\cdot\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{2z}{(1+z)^3}.$$

综上, $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2z}{(1+z)^3},z>0\\0,otherwise\end{cases}$.

3.5.4 $Z=\max\{X,Y\},Z=\min\{X,Y\}$的分布

[**定理3.5.5**] 设两相互独立的随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则:

(1) ① 随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数 $F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$.

② 若 X 与 Y 同分布, 设它们的分布函数都为 $F(x)$, 概率密度都为 $f(x)$, 则 $F_Z(z)=[F(x)]^2$, Z 的概率密度 $f_Z(z)=2\cdot F(z)\cdot f(z)$.

(2) ① 随机变量 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数 $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]$.

② 若 X 与 Y 同分布, 设它们的分布函数都为 $F(x)$, 概率密度都为 $f(x)$, 则 $F_Z(z)=1-[1-F_Z(z)]^2$, Z 的概率密度 $f_Z(z)=2\cdot[1-F(z)]\cdot f(z)$.

[**证**]

(1) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$=P\{X\le z\}\cdot P\{Y\le z\}=F_X(z)\cdot F_Y(z)$.

若 X 与 Y 同分布, 则 $F_Z(z)=[F(x)]^2$,

进而 $f_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[F_Z(z)]^2=2\cdot F_Z(z)\cdot[F(z)]'=2\cdot F_Z(z)\cdot f(z)$.

(2) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\min\{X,Y\}\le z\}=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}$

$=1-P\{X>z,Y>z\}=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$

$=1-(1-P\{X\le z\})\cdot(1-P\{Y\le z\})=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]$.

若 X 与 Y 同分布, 则 $F_Z(z)=1-[1-F(z)]^2$,

进而 $f_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{1-[1-F(z)]^2\}=-2\cdot[1-F(z)]\cdot[-f(z)]=2\cdot[1-F(z)]\cdot f(z)$.

[**推广**] 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 其中 $X_i\ \ (1\le i\le n)$ 的分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$.

(1) ① 随机变量 $Z=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的分布函数 $F_Z(z)=\prod\limits_{i=1}^n F_{X_i}(z)$.

② 若 $X_1,\cdots,X_n$ 同分布, 设它们的分布函数都为 $F(x)$, 则 $F_Z(z)=[F(z)]^n$.

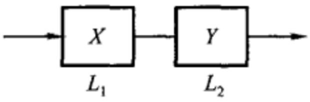
(2) ① 随机变量 $Z=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的分布函数 $F_Z(z)=1-\prod\limits_{i=1}^n[1-F_{X_i}(x_i)]$.

② 若 $X_1,\cdots,X_n$ 同分布, 设它们的分布函数都为 $F(x)$, 则 $F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n$.

[**例3.5.5**] 设系统 L 由两相互独立的子系统 L_1,L_2 连接而成, 连接方式为: (1)串联, (2)并联, (3)备用(L_1 损坏时 L_2 才开始工作), 如下图所示. 设 L_1,L_2 的寿命分别为 X,Y , 它们的概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x},x>0\\0,x\le 0\end{cases},f_Y(y)=\begin{cases}\beta\mathrm{e}^{-\beta x},y>0\\0,y\le 0\end{cases}$ $(\alpha,\beta>0,\alpha\neq\beta)$. 分别求各种连接方式下 L 寿命 Z 的概率密度.

[**解**] 边缘分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x},x>0\\0,x\le 0\end{cases},F_Y(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\beta y},y>0\\0,y\le 0\end{cases}$.

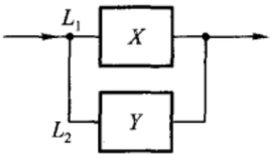
(1) 串联, 如下图所示, 此时有 $Z=\min\{X,Y\}$.



边缘分布函数 $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z},z>0\\0,z\le 0\end{cases}$,

则边缘概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z},z>0\\0,z\le 0\end{cases}$.

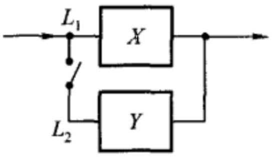
(2) 并联, 如下图所示, 此时有 $Z=\max\{X,Y\}$.



边缘分布函数 $F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}),z>0\\0,z\le 0\end{cases}$,

则边缘概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha z}+\beta\mathrm{e}^{-\beta z}-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z},z>0\\0,z\le 0\end{cases}$.

(3)备用, 如下图所示, 此时有 $Z=X+Y$, 则边缘概率密度 $f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x$.



上式的被积函数非零需满足 $\begin{cases}x>0\\z-x>0\end{cases}$, 则 $\begin{cases}x>0\\x<z\end{cases}$.

① $z<0$ 时, 区间 $(-\infty,z)$ 与区间 $(0,+\infty)$ 不交, 则 $f_Z(z)=0$.

② $z\ge 0$ 时, $(-\infty,z)\bigcap(0,+\infty)=(0,z)$,

则 $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^z\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\cdot\beta\mathrm{e}^{-\beta(z-x)}\mathrm{d}x=\alpha\beta\mathrm{e}^{-\beta z}\cdot\int_0^z\mathrm{e}^{-\alpha x+\beta x}\mathrm{d}x=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z})$.