# 確率論レポート課題

提出日:2025 年 11 月 14 日

## 1

問題

概収束, 確率収束,p 次平均収束, 分布収束について, 定義をまとめよ.

### 概収束

(実数値) 確率変数列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と確率変数列 $X$ に対して

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

となるとき, $X_n$ は $X$ に「概収束 (Almost sure Convergence)」するといい, $X_n \xrightarrow{a.s} X(n \to \infty)$ とかく.

### 確率収束

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon)$$

となるとき, $X_n$ は $X$ に「確率収束 (Convergence in Probability)」するといい,

$$P \lim_{n\to\infty} X_n = X$$

$$X_n \xrightarrow{P} X(n \to \infty)$$

とかく.

### p 次平均収束

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対してある $p > 0$ で $E[|X_n|^p] = 0$ とする. このとき,

$$\lim_{n\to 0} E[|X_n - X|^p] = 0$$

ならば, $X_n$ は $X$ に「p 次平均収束 (Convergence in $L^p$)」あるいは $L^p$ 収束するといい,

$$X_n \xrightarrow{L^p} X(n \to \infty)$$

と表す.

## 分布収束

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X$ が $\mathbb{R}$ 上の任意の有界連続関数 $f$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[|f(X_n)|] = E[f(X)]$$

を満たすとき, $X_n$ は $X$ に「分布収束 (Convergence in Distribution)」または「法則収束 (Convergence in Law)」するといい,

$$X_n \xrightarrow{d} X(n \to \infty)$$
$$X_n \Rightarrow X(n \to \infty)$$

などと表す.

# 2

問題

上記で述べた，各種収束の関係性をその反例や証明を含めてまとめよ．必要に応じて図などを使用してもよい.

以下の表に, 各種収束の関係性をまとめる. 表中の記号は以下の通りである.

- ○: $A \Rightarrow B$ が収束することが成り立つ. (証明付き)
- ×: $A \Rightarrow B$ が収束しないことが成り立つ. (反例付き)

表中の数字はそれぞれ, 前者から後者への収束に関する証明や反例の番号を示す.

| B \ A | $a.s$ | $p$ | $L^p$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a.s$ | | ×* | × | × |
| $p$ | ○ | | ○ | × |
| $L^p$ | × | × | | × |
| $d$ | ○ | ○ | ○ | |

## 1. $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

仮定 $X_n \xrightarrow{a.s} X$ より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m\geq n} m \in \Omega||X_m\omega - X\omega| \geq 0\right) = 0$$

が成り立つ. また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$m \in \Omega||X_m\omega - X\omega| \geq 0 \subset \bigcup_{m\geq n} m \in \Omega||X_m\omega - X\omega| \geq 0$$

が成り立つので単調性より,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) \\
&\leq P\left(\bigcup_{m\geq n} \omega \in \Omega||X_m(\omega) - X(\omega)| \geq 0\right) \\
&\to 0 (n \to \infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って $X_n \xrightarrow{p} X$ が成り立つ.

## 2. $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

任意の $\epsilon > 0$ に対して, マルコフの不等式及び仮定 $X_n \xrightarrow{L^p} X$ より,

$$\begin{aligned}
P(|X_n - X| \geq \epsilon) &= P(|X_n - X|^p \geq \epsilon^p) \\
&\leq \frac{E[|X_n - X|^p]}{\epsilon^p} \\
&\to 0(n \to \infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って $X_n \xrightarrow{p} X$ が成り立つ.

## 3. $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

**補題 1**

任意の $\epsilon, \delta > 0$ に対して以下が成り立つ.

$$P(|X-Y| \leq \epsilon) \geq 1-\delta \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |F(x)-G(x)| \leq |F_X(x+\epsilon)-F_X(x-\epsilon)|+\delta$$

(Proof)

任意に $\epsilon, \delta > 0$ を取り, $\Omega$ の可測分割として

$$\Omega = \{\omega \in \Omega | |X(\omega)-Y(\omega)| \leq \epsilon\} \cup \{\omega \in \Omega | |X(\omega)-Y(\omega)| > \epsilon\}$$

を考える. ここで任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,"$Y \leq x$ かつ $|X-Y| \leq \epsilon$"ならば"$X \leq x+\epsilon$"を満たすので,

$$\begin{aligned}
G(x) &= P(Y \leq x) \\
&= P(Y \leq x, |X-Y| \leq \epsilon) + P(Y \leq x, |X-Y| > \epsilon) \\
&\leq P(X \leq x+\epsilon) + P(|X-Y| > \epsilon) \\
&\leq F(x+\epsilon) + \delta
\end{aligned}$$

が成り立つ.

同様に,X と Y の役割を交換して $x$ を $x-\epsilon$ に置き換えると,

$$F(x-\epsilon) = P(X \leq x-\epsilon) = G(x) + \delta$$

が成り立つことが示される. したがって,

$$F(x-\epsilon) - \delta \leq G(x) \leq F(x+\epsilon) + \delta$$

であり, 自明な不等式 $-F(x+\epsilon) \leq -F(x) \leq -F(x-\epsilon)$ から辺々を足し合わせると,

$$\begin{gathered}
F(x-\epsilon) - F(x+\epsilon) - \delta \leq G(x) - F(x) \leq F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon) + \delta \\
\Leftrightarrow -|F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)| - \delta \leq G(x) - F(x) \leq |F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)| + \delta \\
\Leftrightarrow |G(x) - F(x)| \leq |F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)| + \delta
\end{gathered}$$

が成り立つ.

$X_n \xrightarrow{p}$ より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \\
&\qquad\qquad \forall n \geq \mathbb{N}, [n \leq N \Rightarrow 1 - P(|X_n - X| \geq \epsilon) < \delta]
\end{aligned}$$

であるから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,$n \geq N$ ならば $P(|X_n - X| \leq \epsilon) > 1-\delta$ を満たす. したがって任意に $F$ の連続点 $x \in \mathbb{R}$ をとると, 補題 1 より $Y$ を $X_n$ にすると,

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)| + \delta \quad (n \geq N)$$

が成り立ち,x は $F$ の連続点であるから,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}|F(x+\epsilon)-F(x-\epsilon)|=0$$

であり,$\delta$ は任意だったので,

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$$

が成り立つ. 従って,$X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つ.

## 4. $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

3. より, $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$ が成り立ち, さらに $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つので, 連鎖律より, $X_n \xrightarrow{a.s} X$ ならば $X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つ.

## 5. $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

3. より, $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$ が成り立ち, さらに $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つので, 連鎖律より, $X_n \xrightarrow{L^p} X$ ならば $X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つ.