確率論レポート課題

提出日:2025 年 11 月 14 日

1

問題

概収束, 確率収束,p 次平均収束, 分布収束について, 定義をまとめよ.

概収束

(実数値) 確率変数列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と確率変数列 X に対して

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

となるとき, X_n は X に「概収束 (Almost sure Convergence)」するといい, $X_n \xrightarrow{a.s} X(n\to\infty)$ とかく.

確率収束

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon)$$

となるとき, X_n は X に「確率収束 (Convergence in Probability)」するといい,

$$P\lim_{n\to\infty} X_n = X$$

$$X_n \xrightarrow{P} X(n\to\infty)$$

とかく.

p 次平均収束

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X は各 $n\in\mathbb{N}$ に対してある $p > 0$ で $E[|X_n|^p] = 0$ とする. このとき,

$$\lim_{n\to 0} E[|X_n - X|^p] = 0$$

ならば, X_n は X に「p 次平均収束 (Convergence in L^p)」あるいは L^p 収束するといい,

$$X_n \xrightarrow{L^p} X(n\to\infty)$$

と表す.

分布収束

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X が $\mathbb{R}$ 上の任意の有界連続関数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[|f(X_n)|] = E[f(X)]$$

を満たすとき, X_n は X に「分布収束 (Convergence in Distribution)」または「法則収束 (Convergence in Law)」するといい,

$$X_n \xrightarrow{d} X(n\to\infty)$$
$$X_n \Rightarrow X(n\to\infty)$$

などと表す.

2

問題

上記で述べた，各種収束の関係性をその反例や証明を含めてまとめよ．必要に応じて図などを使用してもよい.

以下の表に, 各種収束の関係性をまとめる. 表中の記号は以下の通りである.

- ○: $A \Rightarrow B$ が収束することが成り立つ. (証明付き)
- ×: $A \Rightarrow B$ が収束しないことが成り立つ. (反例付き)
- △: $A \Rightarrow B$ が特殊な条件下で収束することが成り立つ. (条件付き証明付き)

表中の数字はそれぞれ, 前者から後者への収束に関する証明や反例の番号を示す.

B \ A	$a.s$	p	L^p	d
$a.s$		△		
p	○		○	
L^p				
d	○	○	○	

1. $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

仮定 $X_n \xrightarrow{a.s} X$ より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m\geq n} m \in \Omega ||X_m\omega - X\omega| \geq 0\right) = 0$$

が成り立つ. また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$m \in \Omega ||X_m\omega - X\omega| \geq 0 \subset \bigcup_{m\geq n} m \in \Omega ||X_m\omega - X\omega| \geq 0$$

が成り立つので単調性より,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) \\ &\leq P\left(\bigcup_{m\geq n} \omega \in \Omega ||X_m(\omega) - X(\omega)| \geq 0\right) \\ &\to 0 (n \to \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って $X_n \xrightarrow{p} X$ が成り立つ.

2. $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

任意の $\epsilon > 0$ に対して, マルコフの不等式及び仮定 $X_n \xrightarrow{L^p} X$ より,

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| \geq \epsilon) &= P(|X_n - X|^p \geq \epsilon^p) \\ &\leq \frac{E[|X_n - X|^p]}{\epsilon^p} \\ &\to 0 (n \to \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って $X_n \xrightarrow{p} X$ が成り立つ.

3. $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

$X_n \xrightarrow{p}$ より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 1 \\ \Leftrightarrow &\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \forall n \geq \mathbb{N}, [n \leq N \Rightarrow 1 - P(|X_n - X| \geq \epsilon) < \delta] \end{aligned}$$

であるから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,$n \geq N$ ならば $P(|X_n - X| \leq \epsilon) > 1 - \delta$ を満たす. したがって任意に F の連続点 $x \in \mathbb{R}$ をとると, 補題 1 より Y を X_n にすると,

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)| + \delta \quad (n \geq N)$$

が成り立ち,x は F の連続点であるから,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} |F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)| = 0$$

であり,δ は任意だったので,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

が成り立つ. 従って,$X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つ.

4. $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

3. より, $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$ が成り立ち, さらに $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つので, 連鎖律より, $X_n \xrightarrow{a.s} X$ ならば $X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つ.

5. $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

3. より, $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$ が成り立ち, さらに $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つので, 連鎖律より, $X_n \xrightarrow{L^p} X$ ならば $X_n \xrightarrow{d} X$ が成り立つ.