

ASK_01	Romaniak Hubert	Informatyka niestacjonarna III rok	Semestr zimowy 2024/25
--------	-----------------	---------------------------------------	---------------------------

## Wstęp teoretyczny

### Bramki logiczne

Bramki logiczne to podstawowe dyskretne elementy fizyczne systemów komputerowych. Operują one wyłącznie na logicznych stanach 1 (PRAWDA/WYSOKI) i 0 (FAŁSZ/NISKI). Stany te są reprezentowane przez wysokie i niskie napięcia na przewodnikach i pinach tych bramek. Realizują one proste funkcje logiczne za pomocą algebry Boole'a.

### Budowa bramek logicznych

Każda bramka logiczna składa się z (najczęściej) kilku tranzystorów połączonych ze sobą w odpowiedni sposób w celu realizowania zadanej funkcji logicznej. Tranzystory są więc elementami składowymi bramek logicznych, jednak w przeciwieństwie do nich, są elementami analogowymi, zatem nie operują na wartościach dyskretnych.

### Układy logiczne

Zespół odpowiednio połączonych ze sobą bramek logicznych tworzy układ logiczny. Jest to układ realizujący bardziej złożoną logikę. Układy takie mogą być kombinacyjne – działające czysto funkcyjnie, nie posiadające wewnętrznego stanu, lub sekwencyjne – mogą mieć wewnętrzny stan, a ich działanie zależy zarówno od ich obecnego, jak i poprzedniego stanu.

## Wykorzystane aksjomaty i definicje

- funkcja logiczna **NOT** (negacja)

$p$	$\bar{p}$ / NOT
0	1
1	0

Tabela 1 - tabela prawdy dla funkcji logicznej **NOT**

- funkcja logiczna **AND** (koniunkcja)

$p$	$q$	$p \cdot q$ / AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela 2 - tabela prawdy dla funkcji logicznej **AND**

- funkcja logiczna **OR** (alternatywa)

$p$	$q$	$p + q$ / OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela 3 - tabela prawdy dla funkcji logicznej **OR**

- funkcja logiczna **XOR** (alternatywa rozłączna)

$p$	$q$	$p + q$ / XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela 4 - tabela prawdy dla funkcji logicznej **XOR**

- funkcja logiczna **NAND** (dysjunkcja)

$p$	$q$	$\overline{p \cdot q}$ / NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela 5 - tabela prawdy dla funkcji logicznej **NAND**

- funkcja logiczna **NOR** (binegacja)

$p$	$q$	$\overline{p + q}$ / NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tabela 6 - tabela prawdy dla funkcji logicznej **NOR**

Definicja alternatywy rozłącznej:  $(p \cdot \bar{q}) + (\bar{p} \cdot q) \Leftrightarrow p \oplus q$

## Wykorzystane prawa i własności

- |   |                         |
|---|-------------------------|
| • $p + 0 \Leftrightarrow p$                                     | własność stałej         |
| • $p \cdot 0 \Leftrightarrow 0$                                 | własność stałej         |
| • $p \oplus 0 \Leftrightarrow p$                                | własność stałej         |
| • $p + 1 \Leftrightarrow 1$                                     | własność stałej         |
| • $p \cdot 1 \Leftrightarrow p$                                 | własność stałej         |
| • $p \oplus 1 \Leftrightarrow \bar{p}$                          | własność stałej         |
| • $p + p \Leftrightarrow p$                                     | prawo idempotentności   |
| • $p \cdot p \Leftrightarrow p$                                 | prawo idempotentności   |
| • $p \oplus p \Leftrightarrow 0$                                | własność tożsamości     |
| • $p + \bar{p} \Leftrightarrow 1$                               | własność negacji        |
| • $p \cdot \bar{p} \Leftrightarrow 0$                           | własność negacji        |
| • $p \oplus \bar{p} \Leftrightarrow 1$                          | własność negacji        |
| • $\overline{\overline{p + q}} \Leftrightarrow p + q$           | prawo podwójnej negacji |
| • $p + q \Leftrightarrow q + p$                                 | prawo przemienności     |
| • $p \cdot q \Leftrightarrow q \cdot p$                         | prawo przemienności     |
| • $p \oplus q \Leftrightarrow q \oplus p$                       | prawo przemienności     |
| • $p + (q + r) \Leftrightarrow (p + q) + r$                     | prawo łączności         |
| • $p \cdot (q \cdot r) \Leftrightarrow (p \cdot q) \cdot r$     | prawo łączności         |
| • $p \oplus (q \oplus r) \Leftrightarrow (p \oplus q) \oplus r$ | prawo łączności         |
| • $p + (q \cdot r) \Leftrightarrow (p + q) \cdot (p + r)$       | prawo rozdzielności     |

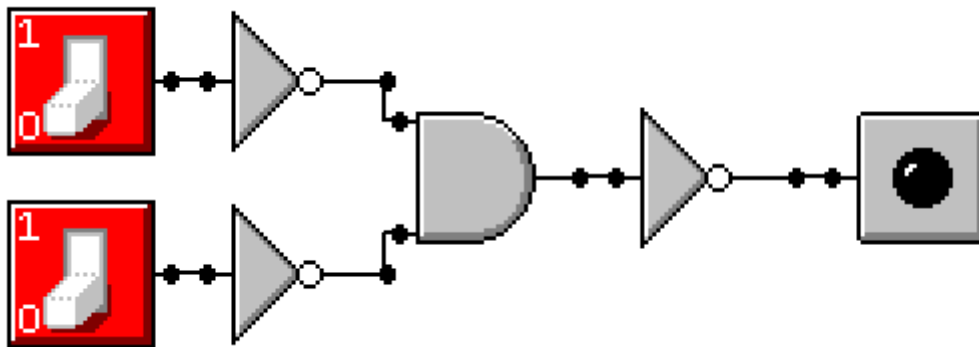
- $p + (q \oplus r) \Leftrightarrow (p + q) \oplus (p + r)$  prawo rozdzielności
- $p \cdot (q + r) \Leftrightarrow (p \cdot q) + (p \cdot r)$  prawo rozdzielności
- $p \cdot (q \oplus r) \Leftrightarrow (p \cdot q) \oplus (p \cdot r)$  prawo rozdzielności
- $\overline{p + q} \Leftrightarrow \bar{p} \cdot \bar{q}$  prawo de Morgana
- $\overline{p \cdot q} \Leftrightarrow \bar{p} + \bar{q}$  prawo de Morgana

## Zadania

Wykorzystywane prawa są zapisywane ponad znakami równoważności.

### 1. Budowa bramki OR za pomocą bramek AND i NOT

$$p + q \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \overline{\overline{p + q}} \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$$



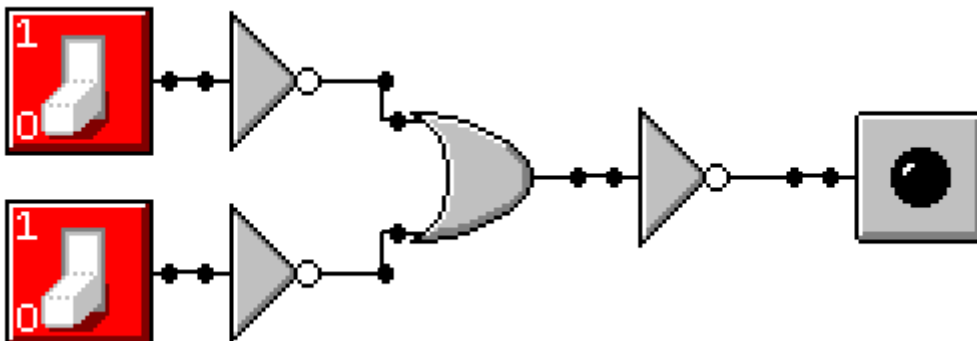
Rysunek 1 - schemat logiczny bramki OR za pomocą bramek AND i NOT

$p$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$	$p + q / \text{OR}$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Tabela 7 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej OR za pomocą funkcji logicznych AND i NOT

### 2. Budowa bramki AND za pomocą bramek OR i NOT

$$p \cdot q \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \overline{\overline{p \cdot q}} \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{\bar{p} + \bar{q}}$$



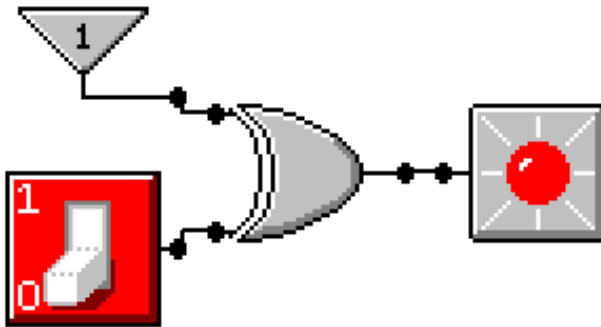
Rysunek 2 - schemat logiczny bramki AND za pomocą bramek OR i NOT

$p$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} + \bar{q}$	$\overline{\bar{p} + \bar{q}}$	$p \cdot q$ / AND
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1

Tabela 8 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **AND** za pomocą funkcji logicznych **OR** i **NOT**

### 3. Budowa bramki NOT za pomocą bramki XOR

$$\bar{p} \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} p \oplus 1$$



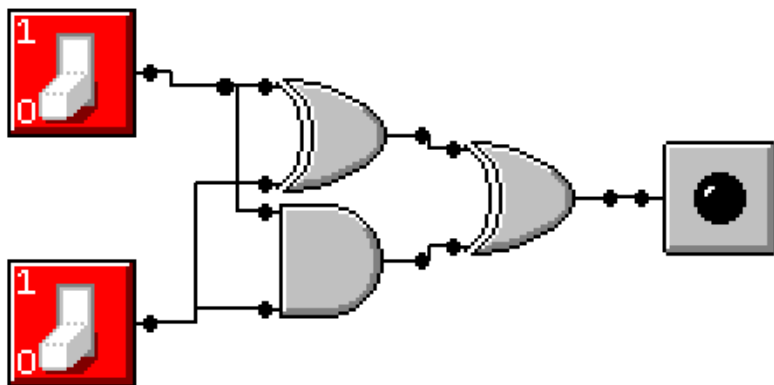
Rysunek 3 - schemat logiczny bramki **NOT** za pomocą bramki **XOR**

$p$	1	$p \oplus 1$	$\bar{p}$ / NOT
0	1	1	1
1	1	0	0

Tabela 9 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NOT** za pomocą funkcji logicznej **XOR**

### 4. Budowa bramki OR za pomocą bramek XOR i AND

$$\begin{aligned}
 p + q &\xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \overline{\overline{p + q}} \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} + 0 \xleftrightarrow{\text{własność negacji}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} (\bar{p} \cdot \bar{q}) + (\bar{p} \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} \bar{p} \cdot (\bar{q} + \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \bar{p} + (\bar{q} + p) \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} p + (\bar{q} + p) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} p + (\bar{q} \cdot \bar{p}) \\
 &\xleftrightarrow{\text{własność stałej}} p + (q \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} (p \cdot 1) + (q \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} (p \cdot (\bar{q} + 1)) + (q \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{własność stałej}} ((p \cdot \bar{q}) + (p \cdot 1)) + (q \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} ((p \cdot \bar{q}) + p) + (q \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} ((p \cdot \bar{q}) + (p \cdot p)) + (q \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} (p \cdot (\bar{q} + p)) + (q \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo łączności}} (p \cdot (\bar{q} + p)) + (q \cdot (\bar{p} \cdot \bar{p})) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (p \cdot (\bar{q} + p)) + ((q \cdot \bar{p}) \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} (p \cdot (\bar{q} + p)) + ((q \cdot \bar{p}) \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} (p \cdot (\bar{q} \cdot \bar{p})) + ((q \cdot \bar{p}) \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo łączności}} (p \cdot (\bar{q} \cdot \bar{p})) + ((q \cdot \bar{p}) \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{prawo łączności}} (p \cdot (\bar{q} \cdot \bar{p})) + (\bar{p} \cdot (q \cdot \bar{p})) \xleftrightarrow{\text{definicja alternatywy rozłącznej}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{własność stałej}} p \oplus (q \cdot \bar{p}) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} p \oplus (q \cdot (p \oplus 1)) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} p \oplus ((q \cdot p) \oplus (q \cdot 1)) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} p \oplus ((q \cdot p) \oplus q) \xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} p \oplus (q \oplus (q \cdot p)) \xleftrightarrow{\text{prawo łączności}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} (p \oplus q) \oplus (q \cdot p) \xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} (p \oplus q) \oplus (p \cdot q)
 \end{aligned}$$



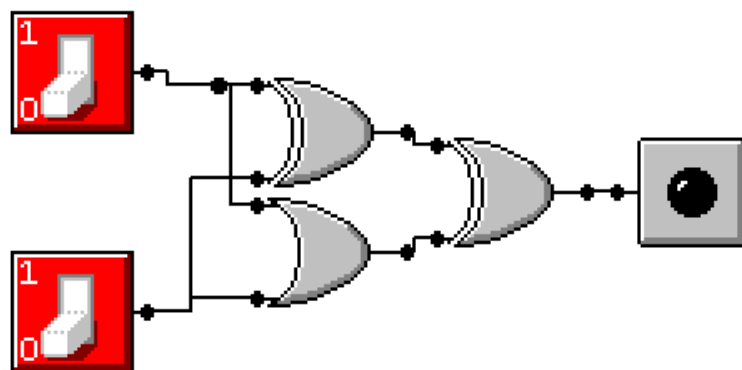
Rysunek 4 - schemat logiczny bramki OR za pomocą bramek XOR i AND

$p$	$q$	$p \oplus q$	$p \cdot q$	$(p \oplus q) \oplus (p \cdot q)$	$p + q / \text{OR}$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

Tabela 10 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej OR za pomocą funkcji logicznych XOR i AND

## 5. Budowa bramki AND za pomocą bramek XOR i OR

$$\begin{aligned}
 p \cdot q &\xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} q \cdot p \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} 0 \oplus (q \cdot p) \xleftrightarrow{\text{własność tożsamości}} \\
 (p \oplus p) \oplus (q \cdot p) &\xleftrightarrow{\text{prawo łączności}} p \oplus (p \oplus (q \cdot p)) \xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} \\
 p \oplus ((q \cdot p) \oplus p) &\xleftrightarrow{\text{własność stałej}} p \oplus ((q \cdot p) \oplus (1 \cdot p)) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} \\
 p \oplus ((q \oplus 1) \cdot p) &\xleftrightarrow{\text{własność stałej}} p \oplus (\bar{q} \cdot p) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} p \oplus ((\bar{q} \cdot p) + 0) \xleftrightarrow{\text{własność negacji}} \\
 p \oplus ((\bar{q} \cdot p) + (\bar{q} \cdot q)) &\xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} p \oplus (\bar{q} \cdot (p + q)) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} \\
 p \oplus (0 + \bar{q} \cdot (p + q)) &\xleftrightarrow{\text{własność stałej}} p \oplus ((0 \cdot p) + \bar{q} \cdot (p + q)) \xleftrightarrow{\text{własność negacji}} \\
 p \oplus (((q \cdot \bar{q}) \cdot p) + \bar{q} \cdot (p + q)) &\xleftrightarrow{\text{prawo łączności}} p \oplus ((q \cdot (\bar{q} \cdot \bar{p})) + \bar{q} \cdot (p + q)) \xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} \\
 p \oplus ((q \cdot (\bar{p} \cdot \bar{q})) + \bar{q} \cdot (p + q)) &\xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \\
 p \oplus ((q \cdot \overline{(p + q)}) + \bar{q} \cdot (p + q)) &\xleftrightarrow{\text{definicja alternatywy rozłącznej}} \\
 p \oplus (q \oplus (p + q)) &\xleftrightarrow{\text{prawo łączności}} (p \oplus q) \oplus (p + q)
 \end{aligned}$$



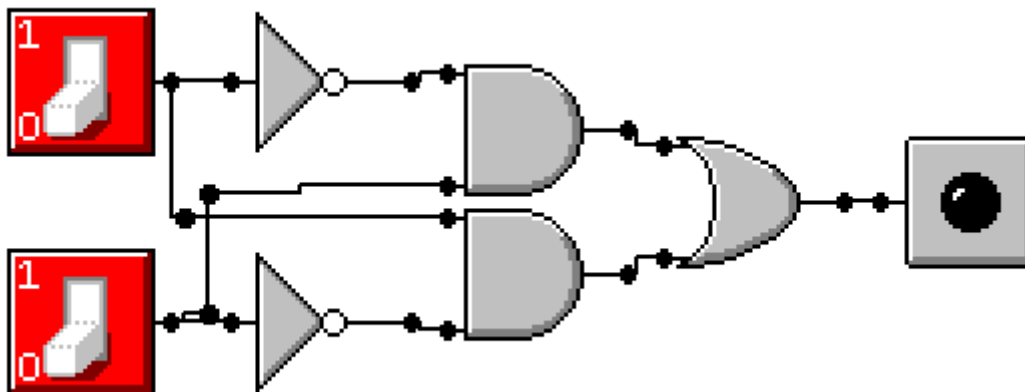
Rysunek 5 - schemat logiczny bramki AND za pomocą bramek XOR i OR

$p$	$q$	$p \oplus q$	$p + q$	$(p \oplus q) \oplus (p + q)$	$p \cdot q / \text{AND}$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1

Tabela 11 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **AND** za pomocą funkcji logicznych **XOR** i **OR**

## 6. Budowa bramki XOR za pomocą bramek AND, OR i NOT

$$p \oplus q \xleftrightarrow{\text{definicja alternatywy rozłącznej}} (p \cdot \bar{q}) + (\bar{p} \cdot q)$$



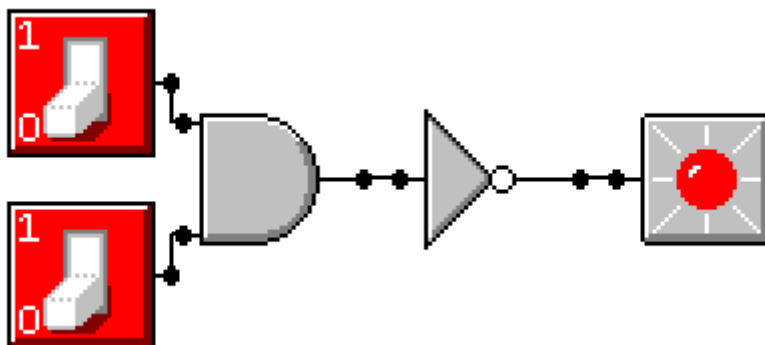
Rysunek 6 - schemat logiczny bramki **AND** za pomocą bramek **XOR** i **OR**

$p$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \cdot \bar{q}$	$\bar{p} \cdot q$	$(p \cdot \bar{q}) + (\bar{p} \cdot q)$	$p \oplus q / \text{XOR}$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

Tabela 12 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **XOR** za pomocą funkcji logicznych **AND**, **OR** i **NOT**

## 7. Budowa bramki NAND za pomocą bramek AND i NOT

$\bar{p} \cdot \bar{q}$  - z definicji funkcji logicznej **NAND**, żadne przekształcenia nie są wymagane



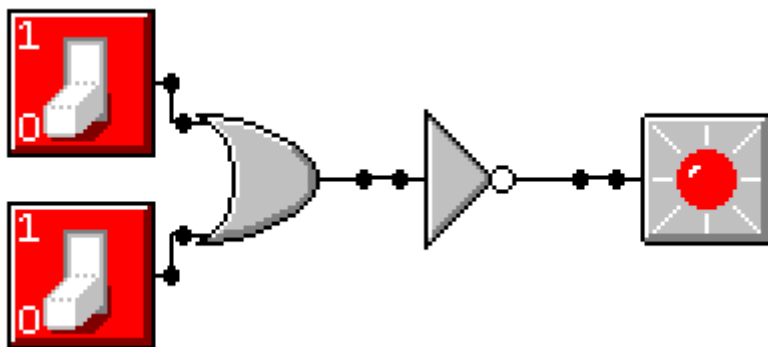
Rysunek 7 - schemat logiczny bramki **NAND** za pomocą bramek **AND** i **NOT**

$p$	$q$	$p \cdot q$	$\overline{p \cdot q} / \text{NAND}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabela 13 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NAND** za pomocą funkcji logicznych **AND** i **NOT**

## 8. Budowa bramki **NOR** za pomocą bramek **OR** i **NOT**

$\overline{p + q}$  - z definicji funkcji logicznej **NOR**, żadne przekształcenia nie są wymagane



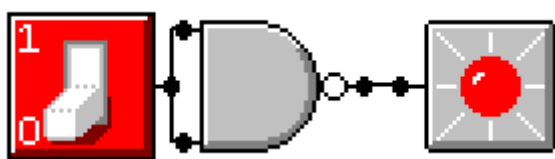
Rysunek 8 - schemat logiczny bramki **NOR** za pomocą bramek **OR** i **NOT**

$p$	$q$	$p + q$	$\overline{p + q} / \text{NOR}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Tabela 14 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NOR** za pomocą funkcji logicznych **OR** i **NOT**

## 9. Budowa bramki logicznej **NOT** za pomocą bramki **NAND**

prawo idempotentności  
 $\overline{p} \iff \overline{p \cdot p}$



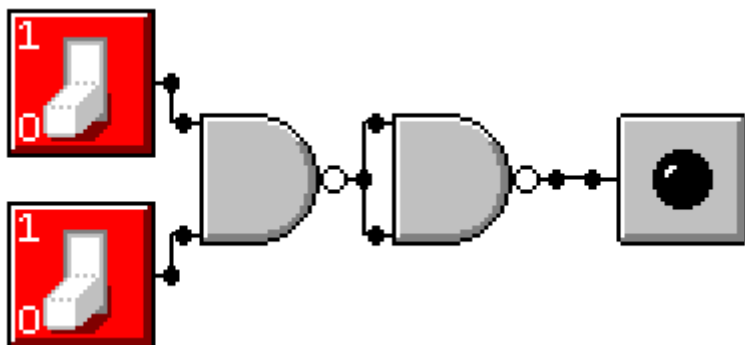
Rysunek 9 - schemat logiczny bramki **NOT** za pomocą bramki **NAND**

$p$	$p \cdot p$	$\overline{p \cdot p}$	$\overline{p} / \text{NOT}$
0	0	1	1
1	1	0	0

Tabela 15 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NOT** za pomocą funkcji logicznej **NAND**

## 10. Budowa bramki logicznej **AND** za pomocą bramek **NAND**

prawo idempotentności      prawo de Morgana  
 $p \cdot q \iff (p \cdot q) + (p \cdot q) \iff \overline{\overline{(p \cdot q)} \cdot \overline{(p \cdot q)}}$



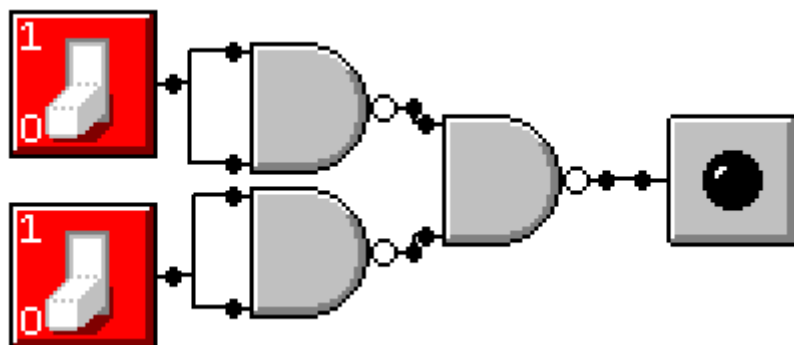
Rysunek 10 - schemat logiczny bramki **AND** za pomocą bramek **NAND**

$p$	$q$	$p \cdot q$	$\overline{p \cdot q}$	$\overline{(p \cdot q) \cdot (p \cdot q)}$	$\overline{(p \cdot q) \cdot (p \cdot q)}$	$p \cdot q / \text{AND}$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Tabela 16 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **AND** za pomocą funkcji logicznych **NAND**

### 11. Budowa bramki **OR** za pomocą bramek **NAND**

$$p + q \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}$$



Rysunek 11 - schemat logiczny bramki **OR** za pomocą bramek **NAND**

$p$	$q$	$p \cdot p$	$q \cdot q$	$\overline{p \cdot p}$	$\overline{q \cdot q}$	$\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}$	$\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}$	$p + q / \text{OR}$
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Tabela 17 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **OR** za pomocą funkcji logicznych **NAND**

### 12. Budowa bramki **NOT** za pomocą bramki **NOR**

$$\overline{p} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{p + p}$$





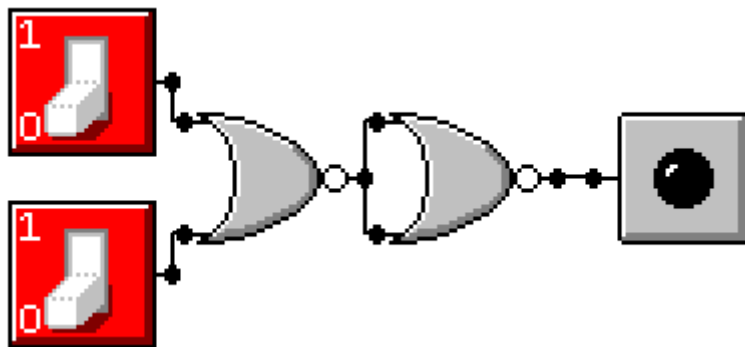
Rysunek 12 - schemat logiczny bramki **NOT** za pomocą bramki **NOR**

$p$	$p + p$	$\overline{p + p}$	$\overline{p} / \text{NOT}$
0	0	1	1
1	1	0	0

Tabela 18 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NOT** za pomocą funkcji logicznej **NOR**

### 13. Budowa bramki **OR** za pomocą bramek **NOR**

$$p + q \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} (p + q) \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{\overline{(p + q)} + \overline{(p + q)}}$$



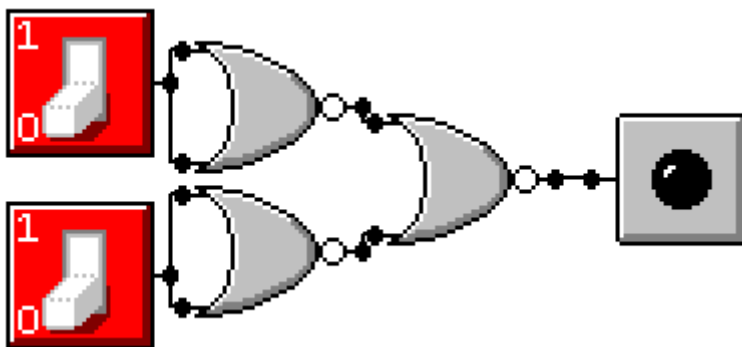
Rysunek 13 - schemat logiczny bramki **OR** za pomocą bramek **NOR**

$p$	$q$	$p + q$	$\overline{(p + q)}$	$\overline{(p + q)} + \overline{(p + q)}$	$\overline{\overline{(p + q)} + \overline{(p + q)}}$	$p + q / \text{OR}$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

Tabela 19 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **OR** za pomocą funkcji logicznych **NOR**

### 14. Budowa bramki **AND** za pomocą bramek **NOR**

$$p \cdot q \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{\overline{p} + \overline{q}} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{(p + p) + (q + q)} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{(p + p) + (q + q)}$$



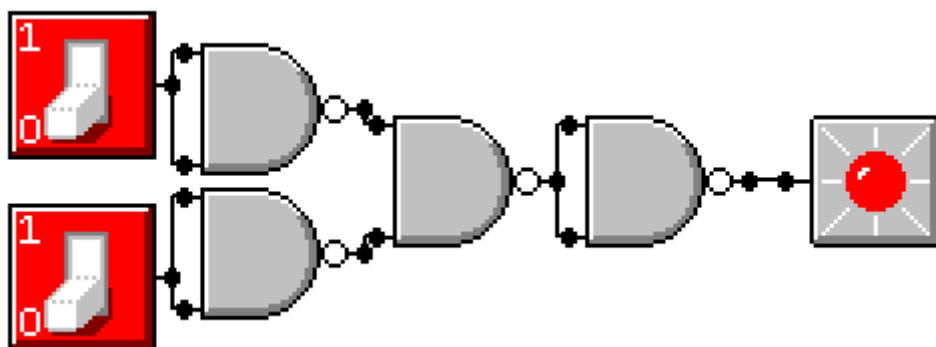
Rysunek 14 - schemat logiczny bramki **AND** za pomocą bramek **NOR**

$p$	$q$	$p + p$	$q + q$	$\overline{p + p}$	$\overline{q + q}$	$\overline{(p + p) + (q + q)}$	$\overline{\overline{(p + p) + (q + q)}}$	$p \cdot q / \text{AND}$
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Tabela 20 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **AND** za pomocą funkcji logicznych **NOR**

## 15. Budowa bramki **NOR** za pomocą bramek **NAND**

$$\begin{aligned}
 p + q &\xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{\overline{p + q}} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{\overline{p + q}} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \overline{\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{((p \cdot p) \cdot (q \cdot q))}
 \end{aligned}$$



Rysunek 15 - schemat logiczny bramki **NOR** za pomocą bramek **NAND**

$p$	$q$	$p \cdot p$	$q \cdot q$	$\overline{p \cdot p}$	$\overline{q \cdot q}$	$\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}$	$\overline{\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}}$
0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1

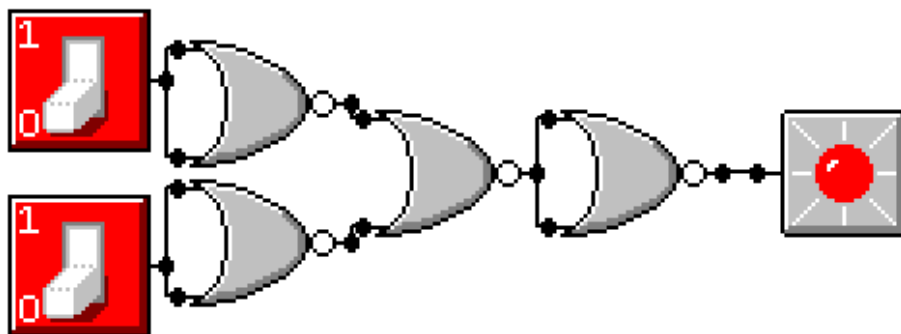
Tabela 21.1 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NOR** za pomocą funkcji logicznych **NAND** (część 1)

$\overline{\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}} \cdot \overline{\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}}$	$\overline{\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}} \cdot \overline{\overline{(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)}}$	$\overline{p + q} / \text{NOR}$
0	1	1
1	0	0
1	0	0
1	0	0

Tabela 221.2 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NOR** za pomocą funkcji logicznych **NAND** (część 2)

## 16. Budowa bramki **NAND** za pomocą bramek **NOR**

$$\begin{aligned}
 p \cdot q &\xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{\overline{p \cdot q}} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{\overline{p \cdot q}} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{(p + p) + (q + q)} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \overline{\overline{(p + p) + (q + q)}} \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} \overline{((p + p) + (q + q))}
 \end{aligned}$$



Rysunek 16 - schemat logiczny bramki **NAND** za pomocą bramek **NOR**

$p$	$q$	$p + p$	$q + q$	$\overline{p + p}$	$\overline{q + q}$	$\overline{(p + p)} + \overline{(q + q)}$	$\overline{\overline{(p + p)} + \overline{(q + q)}}$
0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

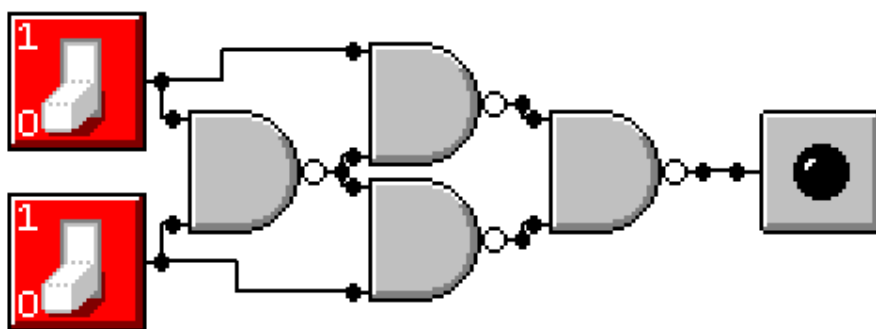
Tabela 232.1 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NAND** za pomocą funkcji logicznych **NOR** (część 1)

$\overline{\overline{(p + p)} + \overline{(q + q)}} + \overline{\overline{(p + p)} + \overline{(q + q)}}$	$\overline{\overline{(p + p)} + \overline{(q + q)} + \overline{(p + p)} + \overline{(q + q)}}$	$\overline{p \cdot q} / \text{NAND}$
0	1	1
0	1	1
0	1	1
1	0	0

Tabela 242.2 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **NAND** za pomocą funkcji logicznych **NOR** (część 2)

## 17. Budowa bramki **XOR** za pomocą bramek **NAND**

$$\begin{aligned}
 p \oplus q &\xleftrightarrow{\text{definicja alternatywy rozłącznej}} (p \cdot \bar{q}) + (\bar{p} \cdot q) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} \\
 &((p \cdot \bar{q}) + \bar{p}) \cdot ((p \cdot \bar{q}) + q) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} ((p + \bar{p}) \cdot (\bar{q} + \bar{p})) \cdot ((p + q) \cdot (\bar{q} + q)) \xleftrightarrow{\text{własność negacji}} \\
 &(1 \cdot (\bar{q} + \bar{p})) \cdot ((p + q) \cdot (\bar{q} + q)) \xleftrightarrow{\text{własność negacji}} (1 \cdot (\bar{q} + \bar{p})) \cdot ((p + q) \cdot 1) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} \\
 &(\bar{q} + \bar{p}) \cdot ((p + q) \cdot 1) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} (\bar{q} + \bar{p}) \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \\
 &\overline{(\bar{q} + \bar{p})} \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} (\bar{\bar{q}} \cdot \bar{\bar{p}}) \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \\
 &(\bar{q} \cdot \bar{p}) \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (\bar{q} \cdot \bar{p}) \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} \\
 &(\bar{p} \cdot q) \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} ((\bar{p} \cdot q) \cdot p) + ((\bar{p} \cdot q) \cdot q) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \\
 &\overline{((\bar{p} \cdot q) \cdot p) + ((\bar{p} \cdot q) \cdot q)} \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \overline{((\bar{p} \cdot q) \cdot p)} \cdot \overline{((\bar{p} \cdot q) \cdot q)}
 \end{aligned}$$



Rysunek 17 - schemat logiczny bramki **XOR** za pomocą bramek **NAND**

p	q	$p \cdot q$	$\overline{p \cdot q}$	$\overline{(p \cdot q)} \cdot p$	$\overline{(p \cdot q)} \cdot q$	$\overline{\overline{(p \cdot q)} \cdot p}$	$\overline{\overline{(p \cdot q)} \cdot q}$	$\overline{\overline{(p \cdot q)} \cdot p} \cdot \overline{\overline{(p \cdot q)} \cdot q}$
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1

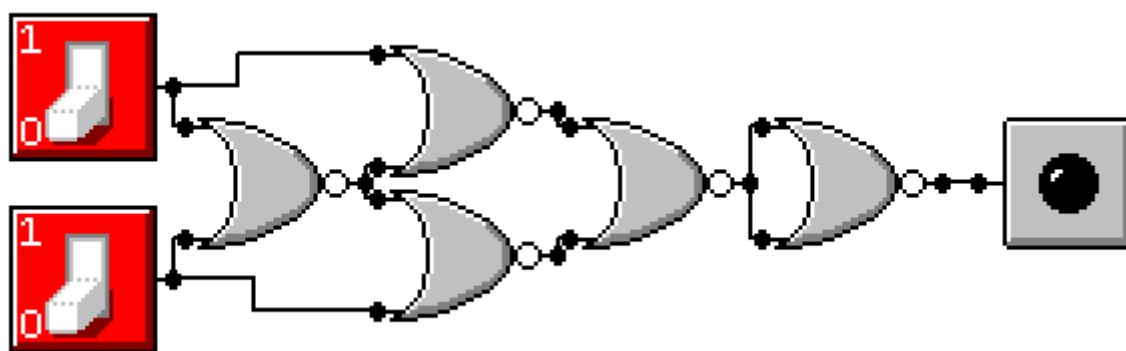
Tabela 253.1 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **XOR** za pomocą funkcji logicznych **NAND** (część 1)

$\overline{\overline{(p \cdot q)} \cdot p} \cdot \overline{\overline{(p \cdot q)} \cdot q}$	$p \oplus q$ / <b>XOR</b>
0	0
1	1
1	1
0	0

Tabela 263.2 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **XOR** za pomocą funkcji logicznych **NAND** (część 2)

## 18. Budowa bramki XOR za pomocą bramek NOR

$$\begin{aligned}
 p \oplus q &\xleftrightarrow{\text{definicja alternatywy rozłącznej}} (p \cdot \bar{q}) + (\bar{p} \cdot q) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} ((p \cdot \bar{q}) + \bar{p}) \cdot ((p \cdot \bar{q}) + q) \xleftrightarrow{\text{własność negacji}} ((p + \bar{p}) \cdot (\bar{q} + \bar{p})) \cdot ((p + q) \cdot (\bar{q} + q)) \\
 &\xleftrightarrow{\text{własność negacji}} (1 \cdot (\bar{q} + \bar{p})) \cdot ((p + q) \cdot (\bar{q} + q)) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} (1 \cdot (\bar{q} + \bar{p})) \cdot ((p + q) \cdot 1) \\
 &\xleftrightarrow{\text{własność stałej}} (\bar{q} + \bar{p}) \cdot ((p + q) \cdot 1) \xleftrightarrow{\text{własność stałej}} (\bar{q} + \bar{p}) \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo przemienności}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} (\bar{p} + \bar{q}) \cdot (p + q) \xleftrightarrow{\text{prawo rozdzielności}} (\bar{p} \cdot (p + q)) + (\bar{q} \cdot (p + q)) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (\bar{p} \cdot (p + q)) + (\bar{q} \cdot (p + q)) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (\bar{p} \cdot (p + q)) + (\bar{q} \cdot (p + q)) \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (\bar{p} + (p + q)) + (\bar{q} + (p + q)) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (\bar{p} + (p + q)) + (\bar{q} + (p + q)) \xleftrightarrow{\text{prawo de Morgana}} \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (p + (\bar{p} + q)) + (q + (\bar{q} + p)) \xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (p + (\bar{p} + q)) + (q + (\bar{q} + p)) \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo podwójnej negacji}} (p + (\bar{p} + q)) + (q + (\bar{q} + p)) \xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} (p + (\bar{p} + q)) + (q + (\bar{q} + p)) \\
 &\xleftrightarrow{\text{prawo idempotentności}} (p + (\bar{p} + q)) + (q + (\bar{q} + p)) + (p + (\bar{p} + q)) + (q + (\bar{q} + p))
 \end{aligned}$$



Rysunek 18 - schemat logiczny bramki **XOR** za pomocą bramek **NOR**

p	q	$p + q$	$\overline{p + q}$	$p + \overline{(p + q)}$	$q + \overline{(p + q)}$	$\overline{p + \overline{(p + q)}}$	$\overline{q + \overline{(p + q)}}$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0

Tabela 274.1 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **XOR** za pomocą funkcji logicznych **NOR** (część 1)

$\overline{\overline{(p + \overline{(p + q))} + (q + \overline{(p + q))})}$	$\overline{\overline{(p + \overline{(p + q))} + (q + \overline{(p + q))})}$
0	1
1	0
1	0
0	1

Tabela 284.2 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **XOR** za pomocą funkcji logicznych **NOR** (część 2)

$\overline{\overline{(p + \overline{(p + q))} + (q + \overline{(p + q))})} + \overline{\overline{(p + \overline{(p + q))} + (q + \overline{(p + q))})}$
1
0
0
1

Tabela 24.3 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **XOR** za pomocą funkcji logicznych **NOR** (część 3)

$\overline{\overline{(p + \overline{(p + q))} + (q + \overline{(p + q))})} + \overline{\overline{(p + \overline{(p + q))} + (q + \overline{(p + q))})}$	$p \oplus q / \text{XOR}$
0	0
1	1
1	1
0	0

Tabela 24.4 - sprawdzenie poprawności realizacji funkcji logicznej **XOR** za pomocą funkcji logicznych **NOR** (część 4)

## Wnioski

Para dowolnej bramki niebędącej bramką **NOT** z bramką **NOT** pozwala zbudować układ realizujący dowolną funkcję logiczną. Taka para bramek nazywana jest układem zupełnym.

Ponadto, za pomocą wyłącznie bramek **NAND** lub wyłącznie bramek **NOR** również jest możliwość zbudowania układu realizującego dowolną funkcję logiczną. Bramki te są nazywane funkcjonalnie pełnymi.

Używając praw i własności algebry Boole'a jest możliwość zbudowania za pomocą każdego układu zupełnego i każdej układu bramek funkcjonalnie pełnych układu realizującego funkcjonalność dowolnej bramki logicznej.