

2D simulacija vrtložnog brzinomera metodom konačnih elemenata

2D Finite Element Method Simulation of Lorentz Force Velocimetry

Strahinja Nikolić¹, Tara Stepanović²

mentor: Daniel Silađi³

Apstrakt

U ovom radu je predstavljena numerička simulacija interakcije magnetnog dipola i beskonačnog tankog provodnika metodom konačnih elemenata (*Finite Element Method*). Finite Element Method je numerički način rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Zasniva se na deljenju početnog sistema na više delova (elemenata) koji su lakši za rešavanje. Ovaj problem je odabran kao pojednostavljen model vrtložnog brzinomera (*Lorentz Force Velocimetry-LFV*). LFV je metoda korišćena najčešće u metalurgiji za beskontaktno određivanje brzine provodnika. Zasniva se na izlaganju provodnika spoljašnjem magnetnom polju i merenjem sile koja deluje na izvor magnetnog polja. U slučaju ispitivanja zavisnosti sile od brzine, sila je razložena na tri komponente: x-komponenta (vučna sila), koja deluje u pravcu kretanja provodnika, y-komponenta (transverzalna sila) i z-komponenta (sila levitacije). Za vučnu silu se dobija da u određenom opsegu brzina linearno zavisi od brzine provodnika, dok se za veće brzine zavisnost menja. Dobijene vrednosti za transverzalnu silu su 2 do 3 reda veličine manje od vrednosti druge dve komponente, tako da se ona može zanemariti. Za silu levitacije dobijeno je da sporo raste pri malim brzinama, dok se za veće brzine ponaša nalik vučnoj sili. Takođe, pokazano je da je vučna sila obrnuto srazmerna trećem stepenu rastojanja između provodnika i dipola. Dobijene zavisnosti se kvalitativno poklapaju sa prethodno izvedenim eksperimentima i simulacijama koje zahtevaju 3D simuliranje ili ne uvode aproksimaciju tankog provodnika.

Abstract

We present a numerical Finite Element Method simulation of the interaction of a magnetic dipole and an infinite thin moving conductor. The Finite Element Method is a numerical method for solving partial differential equations. It is based on dividing the initial system into a large number of elements, where the problem is easier to solve.

¹ (2002), učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

² (2002), učenica 2. razreda Gimnazije „Vuk Karadžić“ u Loznici

³ IRIF, Université de Paris

This problem has been chosen as a simplified model of Lorentz Force Velocimetry (LFV). LFV is a method mostly used in metallurgy for contactless determination of the speed of the conductor. It is based on exposing the conductor to an external magnetic field and measuring the force that acts on the magnetic field source. To investigate the force-speed dependence, the force has been decomposed into three components: the x-component (drag force), the y-component (transversal force), and the z-component (levitation force). The obtained drag force depends linearly on speed for a certain range of speeds, but the dependence changes for higher speeds. The intensity of the transversal force is 2 to 3 orders of magnitude weaker than that of the other two components, so it can be neglected. The levitation force increases slowly at low speeds, whereas it behaves like the drag force at high speeds. Also, we obtained that the drag force is inversely proportional to the third power of the distance between the conductor and the dipole. The obtained results qualitatively coincide with previously performed experiments and simulations that demand a 3D setup or do not involve the thin conductor approximation.

Uvod

Vrtložni brzinomer (*Lorentz Force Velocimetry*, LFV) je tehnika primenjena u metalurgiji za beskontaktno određivanje brzine provodnika ili tečnih metala. Korišćenje magnetnih polja za određivanje brzine fluida datira od 1832. godine kada je Majkl Faradej pokušao da odredi brzinu reke Temze. Njegov metod je našao veliku primenu u hemijskoj industriji pri merenju brzine fluida koji su na sobnim temperaturama. Međutim, njegov metod zahteva kontakt sa tečnim fluidom što nije moguće u slučaju otopljenog metala koji je na znatno višim temperaturama od sobne. Umesto toga LFV bazira svoj rad na sledećem principu: provodnik se dovede u blizinu magnetnog polja, kao posledica relativnog kretanja magneta i provodnika a po Faradejevom zakonu, u provodniku se indukuju struje. Usled interakcije tih struja (poznatijih kao vrtložne stuje) sa spoljašnjim magnetnim poljem stvara se Lorencova sila koja usporava provodnik. Indukovane struje takođe poseduju svoje magnetno polje koje interaguje sa magnetom delujući silom na isti. Merenjem te sile moguće je odrediti brzinu provodnika. Takođe jedna od primena ove tehnike jeste određivanje oštećenja u materijalu: oštećenje utiče na tok vrtložnih struja pa samim tim i na silu kojom provodnik deluje na magnet; merenjem razlike te sile sa onom u slučaju bez oštećenja može se dobiti njegova lokacija.

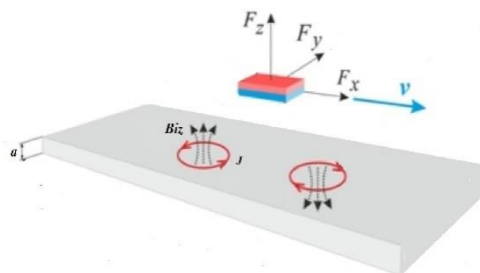
Dosadašnja analiza LFV-a se zasnivala na analitičkim izvođenjima koja su ili dosta pojednostavljena [3] ili zahtevaju opsežan račun [4]. Pored njih postoji par numeričkih metoda za opisivanje LFV-a ([2], [5]), međutim u njima nije dat jasan opis uticaja brzine provodnika i njegove udaljenosti od magneta, na silu koju on proizvodi na magnet. Shodno tome naš cilj je da pojednostavljenim 2D modelom dobijemo rezultate za gore navedene zavisnosti koristeći metod konačnih elemenata.

Metod konačnih elemenata, odnosno *Finite Element Method* (FEM) je način numeričkog rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina. FEM je našao veliku primenu u raznim granama inženjerstva; zasniva se na diskretizaciji, odnosno deljenju početnog sistema na veliki broj delova koji su jednostavniji za rešavanje– tako izdijeljen sistem naziva se *mesh*. Delovi su najčešće u vidu trouglova za 2D probleme.

Metod

Teorijski deo

Po uzoru na rad [1] vrtložni brzinomer je modelovan beskonačnom provodnom pločom debljine a , električne provodnosti σ i magnetnim dipolom na visini h iznad ploče koji se kreće brzinom $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x v$ (Slika 1).



Slika 1 – model vrtložnog brzinoera

Zbog relativnog kretanja provodne ploče kroz linije magnetnog polja dipola, indukuje se struja u ploči. Kako je ploča tanka možemo pretpostaviti da struja ne teče u z-smeru tj. da je $J_z = 0$ (podebljana slova označavaju vektore). Dalje se izraz za površinsku gustinu struje:

$$\mathbf{K} = \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{J}(x, y, z) dz$$

može zameniti izrazom

$$\mathbf{K} = a\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

koristeći činjenicu da je gustina struje data kao

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1),$$

gde su \mathbf{E} i \mathbf{B} ukupno električno i magnetno polje, respektivno, a \mathbf{v} je brzina kretanja ploče. Električno polje se može izraziti preko skalarnog potencijala [1]

$$\mathbf{E} = -\nabla_t \phi \quad (2)$$

gde je ∇_t tangencijalni gradijent u xy ravni. Magnetno polje je kombinacija polja koje potiče od dipola (\mathbf{B}_0) i polja indukovano od strane vrtložnih struja (\mathbf{B}_i). Polje dipola ima analitički oblik

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$$

gde je \mathbf{r} vektor položaja tačke u kojoj se određuje indukcija polja u odnosu na dipol ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), a \mathbf{m} magnetni moment dipola.

Indukovano polje može se izračunati preko Bio-Savarovog zakona znajući površinsku gustinu struje \mathbf{K} . Primenu Bio-Savarovog zakona ćemo označiti operatorom \mathcal{B} :

$$\mathcal{B}\{\mathbf{K}(x, y)\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(x', y') \times [(x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y]}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{3/2}} dS'$$

pri čemu $[(x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y]$ predstavlja vektor položaja od posmatrane tačke do elementa dS' , a dS' predstavlja površinski element i μ_0 je magnetna permeabilnost vakuuma.

Koristeći se ovom oznakom indukovano polje se može izračunati po formuli: (indukovano polje ima samo z komponentu zato što površinska gustina struje ima samo x i y komponente)

$$\mathbf{B}_i(x, y) = \mathbf{e}_z B_{iz}(x, y) = \mathcal{B}\{\mathbf{K}(x, y)\} \quad (3)$$

Kako je struja \mathbf{K} bezizvorna (*source-free*) važi relacija $\nabla \cdot \mathbf{K} = 0$ koja se koristeći (1) i (2) može zapisati kao:

$$\nabla \cdot (-\nabla_t \phi + \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z (B_{iz} + B_{0z})) = 0 \quad (4)$$

U prvom, aproksimativnom slučaju koji se ponekad koristi u literaturi [6] možemo zanemariti intezitet indukovano polja (pri malim brzinama ono ima minimalan doprinos). Tada se (4) svodi na Poasonovu jednačinu:

$$-\nabla \cdot \nabla_t \phi = v \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \quad (5)$$

Naš model takođe rešava „pravi“ slučaj koji uračunava doprinos indukovano polja. U tom slučaju jednačina (4) ima sledeći oblik:

$$-\nabla \cdot \nabla_t \phi = v \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} + v \frac{\partial B_{iz}}{\partial y} \quad (6)$$

Da bi se izračunalo indukovano polje potrebno je raspisati izraz (3), koristeći linearnost operatora \mathcal{B} dobija se (\mathbf{K} je zamenjeno izrazom iz (1)):

$$\mathbf{e}_z B_{iz} + a\sigma\mathcal{B}\{\mathbf{e}_y v_x B_{iz}\} = a\sigma\mathcal{B}\{-\nabla_t \phi - \mathbf{e}_y v_x B_{0z}\} \quad (7)$$

Jedan od ciljeva rada jeste izračunavanje sile kojom magnet deluje na ploču (ova sila je jednaka po intezitetu a suprotna po smeru sili kojom ploča deluje na magnet [5]). Mogući način da se ta sila odredi jeste primena formule za Lorencovu silu $\mathbf{F} = \iiint \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$, s tim što se u našem slučaju ovaj integral može svesti na

$$\mathbf{F} = a \iint \mathbf{J} \times \mathbf{B} dx dy \quad (8).$$

Numerički deo

Sve jednačine su rešavane u okviru MatLab PdeToolbox-a. U postavci problema je navedeno da je provodnik koji se kreće ispod dipola beskonačan. Ovakva postavka nije pogodna za numeričko rešavanje te je ploča predstavljena kao kružni provodnik iznad čijeg centra se nalazi magnetni dipol a za poluprečnik je uzeta vrednost $R = 0.5m$. Na ovakvoj ploči je formiran trougaoni mesh. Pri rešavanju jednačine (6) potrebno je zadati granične uslove za ϕ . Ovde je postavljen uslov $\phi = 0$ po obodu kruga koji predstavlja provodnik.

Ceo problem se rešava u okviru FEM diskretizacije tako da je na površini ploče formiran trougaoni mesh. Označimo broj noda (čvorova) sa n i broj trouglova sa m . Takođe za svaki trougao obeležimo koordinate njegovog težišta sa (χ_l, ψ_l) a površinu sa S_l a koordinate k -te node sa (x_k, y_k) . Da bi se odredili koeficijenti u jednačini potrebno je rešiti jednačinu (7) a za to je potreban operator \mathcal{B} . Pretpostavljajući da je na jednom trougaonom elementu površinska gustina struje \mathbf{K}^l konstanta, prethodno definisani \mathcal{B} operator možemo raspisati u obliku pogodnijem za numeričko računanje [1]:

$$\mathbf{e}_z B_{iz}(x_k, y_k) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=1}^m \frac{\mathbf{K}^l \times [(x_k - \chi_l)\mathbf{e}_x + (y_k - \psi_l)\mathbf{e}_y]}{[(x_k - \chi_l)^2 + (y_k - \psi_l)^2]^{3/2}} S_l \quad (9)$$

Koristeći prethodnu jednakost zajedno sa (7) može se uspostaviti sistem od n linearnih jednačina na sledeći način:

1. $\mathcal{B}\{e_y v_x B_{iz}^k\}$ se predstavi kao linearna kombinacija po svim nodama:

$$\mathcal{B}\{e_y v_x B_{iz}^k\} = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} B_{iz}^j;$$

2. Jednačina (7) se napiše za k-tu nodu, s tim što je desna strana poznata pa će biti označena matricom (D):

$$B_{iz}^k + a\sigma \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} B_{iz}^j = D_{k1} \quad (9.1);$$

3. $\mathcal{B}\{e_y v_x B_{iz}^k\}$ se izrazi preko (9) uz upotrebu sledećih oznaka

$$dx_k = (x_k - \chi_l)$$

$$dl_k = [(x_k - \chi_l)^2 + (y_k - \psi_l)^2]^{3/2}$$

$$\mathcal{B}\{e_y v_x B_{iz}^k\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=1}^m \frac{-v \frac{B_{iz}^{l0} + B_{iz}^{l1} + B_{iz}^{l2}}{3} dx_k}{dl_k} S_l \quad (9.2);$$

4. Suma iz (9.2) se pretvori u sumu po nodama da bi se dobili koeficijenti α_{kj} :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{kj} B_{iz}^j = \frac{\mu_0 v}{12\pi} \sum_{j=1}^n B_{iz}^j \sum_q \frac{dx_k S_l}{dl_k} \quad (9.3),$$

gde q označava one trouglove koji sadrže nodu j;

5. Iz (9.3) se očitaju koeficijenti $\alpha_{kj} = \frac{\mu_0 v}{12\pi} \sum_q \frac{dx_k S_l}{dl_k}$ (9.4), s tim što iz (9.1) sledi da koeficijentima na dijagonali treba dodati 1;

6. Na kraju, jednačina (9) se u matičnom obliku može zapisati kao

$$(\alpha)(B_{iz}) = (D) \quad (10);$$

Jednačina (10) predstavlja sistem n linearnih jednačina sa n nepoznatih. Vrednosti dobijene za B_{iz} na ovaj način zavise od $\nabla_t \phi$ (njegove vrednosti ulaze u matricu (D)). One se mogu zameniti u jednačinu (6), međutim tako dobijene vrednosti za B_{iz} se menjaju pri svakoj iteraciji komande pdsolve. Iz tog razloga potrebno je “ručno” dodati iteracije gde se pri svakoj iteraciji update-uju vrednosti B_{iz} .

MatLab PdeToolbox ima mogućnost rešavanja jednačina oblika:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

gde su u našem slučaju (jednačina (6)) koeficijenti m, d i a svi jednaki nuli, a koeficijent f predstavlja desna strana jednačine (6). Ceo program se može predstaviti sledećim pseudokodom:

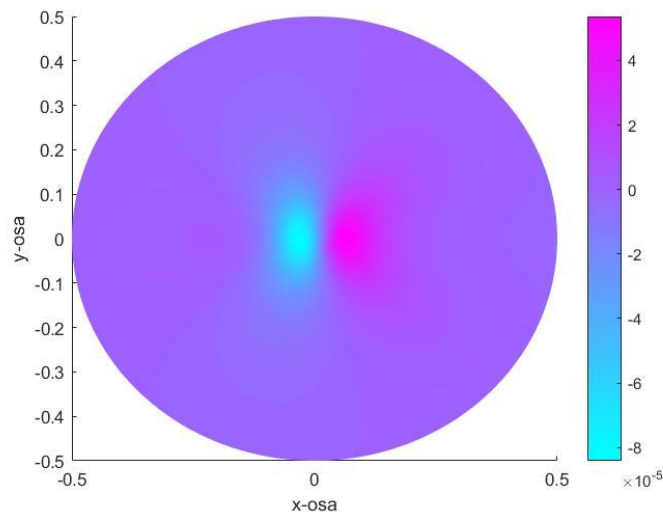
```
for i=1:BrojIteracija
    PravljenjeGeometrije('Krug poluprečnika 0.5m');
    KreiranjeMesha(veličina_mesha);
    PostavljanjeGraničnihUslova('fi',0);
```

```

f=DesnaStrana(6);%u prvoj iteraciji ovo je jednako desnoj
strani jednačine (5), pri svakoj sledećoj iteraciji update-
uju se vrednosti Biz
ZadavanjeKoeficijenata(m,'0',d,'0',a,'0',c,'1',f,'f');
model=NapraviModel(geometrija,mesh,granični_uslovi,koficij
enti);
fi(i)=RešavanjePDE(model);
Alpha=ResenjeJednačine(9.4);
D(i)=BioSavar( $-\nabla_t \cdot fi(i) - e_y v_x B_{0z}$ );%primena Bio-Savarovog
zakona opisanog jednačinom (9)
Biz(i)=Alpha\D(i);%rešavanje jednačine (10)
IndukovanoPolje=InterpoliranjePoProstoru(Biz(i));
dBizdy(i)=RačunanjeIzvoda(IndukovanoPolje,'y');%izvod Biz
po y je potreban za rešavanje jednačine (6), računa se u
skladu sa FEM aproksimacijom. Biz je predstavljen kao
linearna funkcija na okviru jednog elementa  $Biz^l=ax+by+c$ .
Tada važi jednostavna relacija  $\frac{\partial Biz^l}{\partial y}=b$ .
f =DesnaStrana(6)-dBizdy(i);
ZadavanjeKoeficijenata(m,'0',d,'0',a,'0',c,'1',f,'f');
fi(i+1)=RešavanjePDE(model);
end
F=a*PovršinskiIntegral(J,B);

```

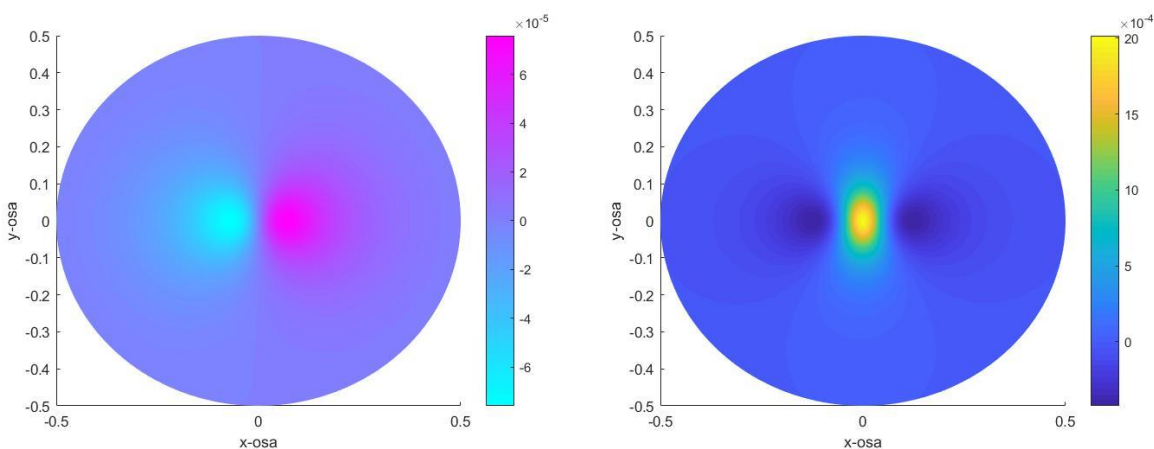
Rezultati i diskusija



Slika 2 – indukovano magnetno polje

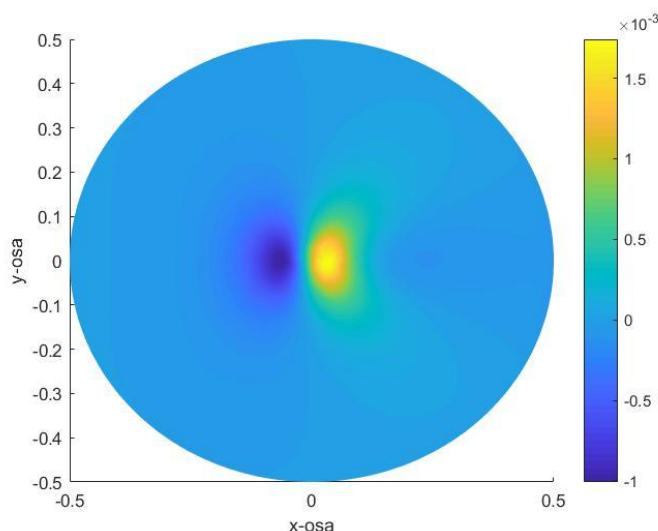
Pri prolasku ploče ispod magneta, vrtložne struje će se indukovati u dva smera. Ovo se objašnjava Lencovim zakonom: pošto se ploča kreće u pozitivnom smeru x ose, struje levo od dipola ($x < 0$) se indukuju u oblasti u kojoj raste magnetni fluks (približavaju se magnetu), stoga smer struja mora biti takav da teže da ponište porast fluksa. Struje desno od dipola ($x > 0$) se udaljavaju od njega, tj. magnetni fluks opada, pa se struje indukuju u takvom smeru da nadoknađuju opadanje fluksa. Kako je komponenta magnetnog polja dipola koja dovodi do indukovanja struja (z komponenta) istog smera za obe konture struja (levo i desno od dipola), ove struje će biti usmerene međusobno suprotno. Slika 2 demonstrira navedeno tvrđenje da indukovane struje teku u međusobno suprotnim smerovima, jer su njihova magnetna polja suprotnog smera – na grafiku je to prikazano pozitivnim i negativnim intenzitetom indukcije magnetnih polja strujnih kontura. Takođe, indukcija magnetnog polja struja levo od dipola je po apsolutnoj vrednosti većeg intenziteta nego indukcija polja koje potiče od struja sa desne strane dipola. Superpozicijom ta dva polja dobija se magnetno polje koje teži da poništi magnetno polje dipola, što dovodi do usporenja ploče. Grafik prikazan na Slici 2 dobijen je za brzinu 20 m/s.

Za vrednost magnetnog momenta je uzeta vrednost $m = 1Am^2$, mada ova vrednost može da se menja u zavisnosti od toga koliko jak magnet želimo da modeliramo. Shodno tome sve prikazane rezultate treba uzimati samo kvalitativno. Vrednost za električnu provodnost je $\sigma = 57 \cdot 10^6 S/m$ (ova vrednost odgovara bakru; kao i magnetni moment, ovaj parametar može da se menja).



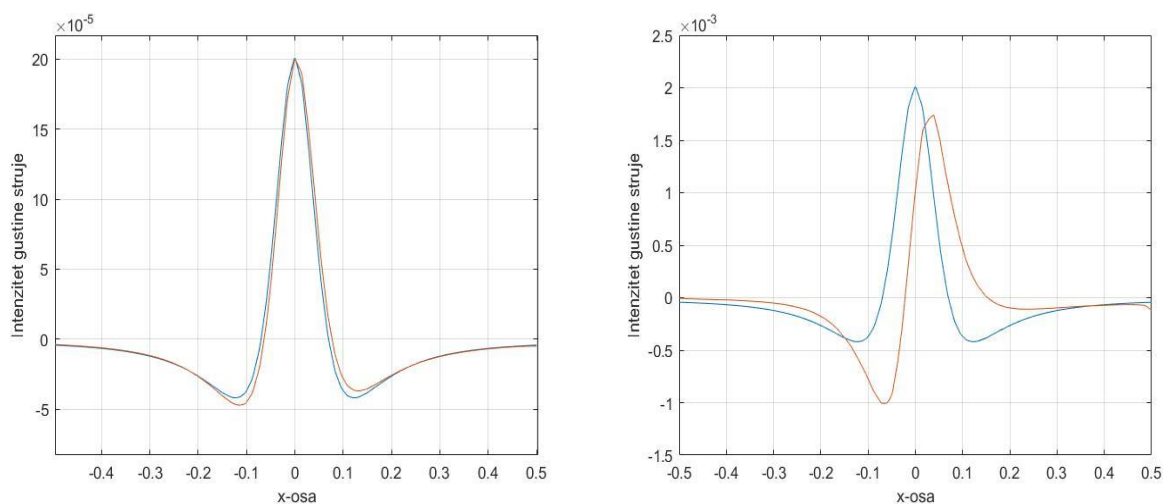
Slika 3 – 1) intenzitet električnog potencijala ϕ (levo); 2) y komponente električnog polja (desno)

Električno polje računa se kao gradijent potencijala ϕ . Prema jednačini (1.1), gustina indukovane struje dobija se superpozicijom ukupnog magnetnog i električnog polja. Grafik gustine indukovane struje prikazan je na Slici 4:



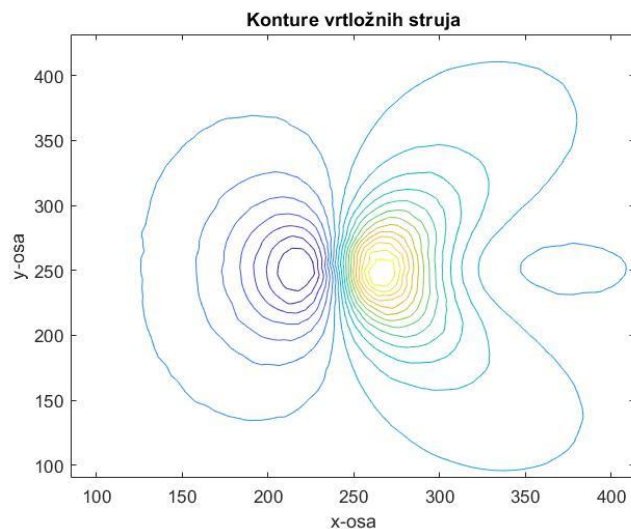
Slika 4 – intenzitet y komponente gustine indukovane struje

Presekom grafika sa Slike 4 ravni $y=0$ dobijaju se grafici prikazani na Slici 5. Grafik na Slici 4 dobijen je za brzinu od 20 m/s.



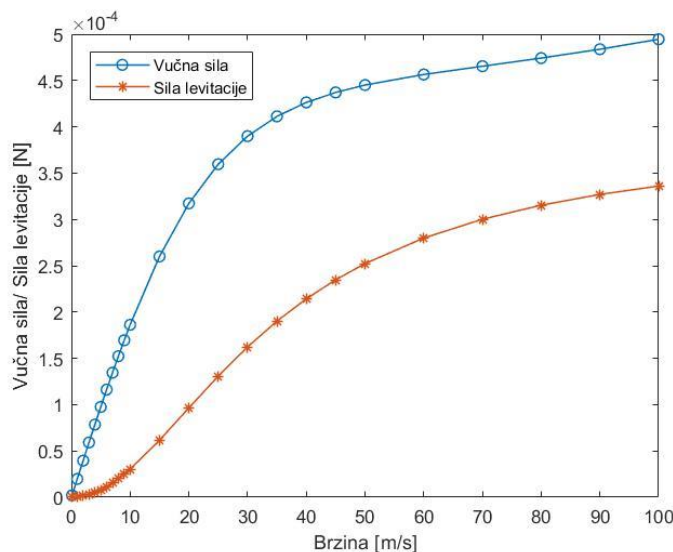
Slika 5 – y komponente gustine struje za $y=0$ za brzine 2m/s (levo) i 20 m/s (desno) (plavo – aproksimativni slučaj; crveno – realni slučaj)

Sa Slike 5 može se zaključiti da je efekat vrtložnih struja, odnosno odstupanje aproksimativnog od realnog slučaja, veći ukoliko je brzina ploče veća.



Slika 6 – konture indukovane struje u ploči

Na Slici 6 uočava se simetrija u odnosu na x osu, što je ispravno, zbog simetrije problema po toj osi. Asimetrija po y osi objašnjava se međusobnom interakcijom kontura indukovanih struja (objašnjenje vezano za Sliku 2).



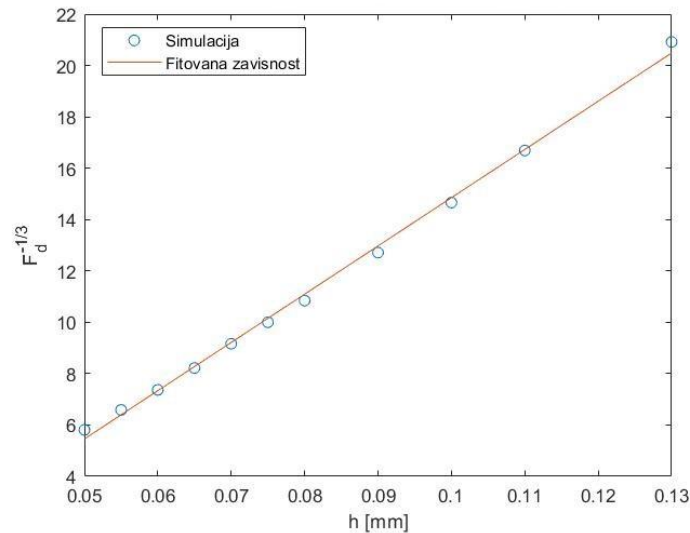
Slika 7 – vučna sila (plavo) i sila levitacije (crveno) u zavisnosti od brzine

Iz jednačine (8) vidimo da će Lorencova sila imati tri komponente:

1. Vučna sila (*drag force*; x-komponenta), deluje na magnet u smeru kretanja ploče (usporava ploču)
2. Sila levitacije (*lift force*; z-komponenta), deluje u smeru z-ose.

3. Transvezalna sila (y-komponenta), u idealnom slučaju je jednaka nuli zbog simetrije problema

Na Slici 7 su prikazane dve od tri komponente (vučna i levitaciona). Za transverzalnu komponentu je dobijeno da je 2-3 reda veličine manja od gore navedenih, što bi i trebalo da bude slučaj s obzirom na simetriju problema (zbog greške numeričkog računa njena vrednost nikada neće biti jednaka nuli, ali možemo se zadovoljiti time da je manja od 1% ukupne sile). Za vučnu silu dobijamo da raste sa porastom brzine, što je očekivano. Takođe vidimo da se može aproksimirati linearnom funkcijom za određeni opseg brzina (brzine do 15 m/s), kao što je slučaj u nekim primerima iz literature [3,6]. Za silu levitacije vidimo da sporo raste pri malim brzinama dok nakon toga nastavlja rastom približnim kao i vučna sila.



Slika 8 – Linearizovan grafik zavisnosti vučne sile od rastojanja magnetnog dipola i provodnika; crvena linija predstavlja linearni fit

Pošto je zavisnost $F_d^{-1/3}(h)$ linearna, vučna sila zavisi od h kao $F_d \propto h^{-3}$. Ista zavisnost dobijena je analitičkim izvođenjem u radu [3]. Odstupanja koja postoje na grafiku možemo pripisati tome što su rezultati dobijeni pod različitim pretpostavkama, kao i greški numeričke simulacije. Kako sila brzo opada sa porastom h zaključujemo da je potrebno magnet što više približiti provodniku radi lakšeg registrovanja sile. Minimalno rastojanje h je u praksi najčešće ograničeno zbog potrebe da se mere brzine tečnih metala koje su na velikim temperaturama, pa dolazi do efekta Kirijeve temperature (magneti gube svojstvo namagnetisanosti pri visokim temperaturama).

Zbog proizvoljnog broja iteracija potrebno je utvrditi konvergentnost rešenja. To je postignuto oduzimanjem vrednosti gustine struje u svakom čvoru za dve susedne iteracije i traženjem maksimalne vrednosti u tako dobijenom nizu. Pokazalo se da u početku rešenje veoma brzo konvergira, te se nakon 4 iteracije stabilizuje. Svi prethodni rezultati dobijeni su za 10 iteracija, pa se može smatrati da su dovoljno precizni.

Zaključak

U ovom radu predstavljen je jednostavan 2D model vrtložnog brzina. Model čine magnetni dipol i tanka provodna ploča koja se kreće ispod njega. Dobijene su zavisnosti sve tri komponente sile koja deluje na magnetni dipol, kao i zavisnost te sile od rastojanja između dipola i ploče. Pokazalo se da vučna sila u opsegu brzina 0-15m/s zavisi linearno od brzine provodnika, dok se za veće brzine zavisnost menja. Dobijene vrednosti za transversalnu silu su nekoliko redova veličine manje od intenziteta ostalih komponenti, pa se mogu zanemariti, što je u skladu sa simetrijom modela. Sila levitacije raste približno isto kao vučna sila, ali ovaj rezultat treba verifikovati eksperimentalno. Sila koja deluje na magnet je obrnuto srazmerna trećem stepenu rastojanja između dipola i ploče. Svi rezultati, osim za silu levitacije, poklapaju se sa rezultatima eksperimenata i jednostavnijim analitičkim izvođenjima. Model se dalje može nadograditi tako da se umesto dipola uvede stalni magnet konačnih dimenzija. Još jedna od mogućih nadogradnji za model jeste uvođenje oštećenja u provodnik po uzoru na rad [2]. Glavna promena u kodu bi bila ta da se promeni geometrija modela, ostatak koda i jednačine koje opisuju sistem bi ostali slični. Dalji rad na projektu bi zahtevao eksperimentalnu potvrdu datog modela.

Zahvalnost

Zahvaljujemo se svim saradnicima seminara fizike u Istraživačkoj stanici Petnici, a posebno mentoru, Danielu Siladiju, na ukazanoj pomoći i podršci u realizaciji ovog projekta.

Reference

[1] Bilicz, S. (2015) "Approximate and Proper Electromagnetic Modelling in Moving Conductors", *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science*, 59(2), pp. 43-47. doi: <https://doi.org/10.3311/PPee.8202>.

[2] Brauer, Hartmut & Ziolkowski, Marek. (2008). Eddy current testing of metallic sheets with defects using force measurements. *SERBIAN JOURNAL OF ELECTRICAL ENGINEERING*. 5. 11-20. 10.2298/SJEE0801011B.

- [3]Thess, A & Votyakov, Evgeny & Kolesnikov, Yurii. (2006). Lorentz Force Velocimetry. Physical review letters. 96. 164501. 10.1103/PhysRevLett.96.164501.
- [4]Votyakov, Evgeny & Thess, Andre. (2011). Interaction of a magnetic dipole with a slowly moving electricallyconducting plate. Journal of Engineering Mathematics. 77. 147-161. 10.1007/s10665-012-9545-1.
- [5]Zec, Mladen & Uhlig, Robert & Ziolkowski, Marek & Brauer, Hartmut. (2011). LORENTZ FORCE EDDY CURRENT TESTING: TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL STUDY). Proceedings of Electrotechnical Institute. 55-66.
- [6] Wiederick, Harvey & Gauthier, Noël & Campbell, Dwight & Rochon, Paul. (1987). Magnetic braking: Simple theory and experiment. American Journal of Physics - AMER J PHYS. 55. 500-503. 10.1119/1.15103.

Summary

Lorentz force velocimetry works on the principle of electromagnetic induction: the conductor is put into the magnetic field, and as a consequence of the relative motion of the magnet and the conductor, according to Faraday's law, currents are induced in the conductor. Due to the interaction of these currents (eddy currents) with an external magnetic field, a Lorentz force is created, which, according to Lenz's law, slows down the conductor. The induced currents also have their magnetic fields that interact with the magnet by acting on it. It is possible to determine the speed of the conductor by measuring the force that acts on the magnet. This way, we can determine the location of damage in material: the damage affects the flow of eddy currents, and therefore the force exerted by the conductor on the magnet. The location of the damage can be determined by measuring the difference of that force with that of the non-damaged case.

Finite Element Method (FEM) is a numerical way of solving partial differential equations. FEM is based on discretization, i.e. dividing the initial system into a large number of parts (mesh) that are easier to solve.

So far, the analysis of LFV has been based on analytical derivations that are either too simplified [3] or demand an extensive calculation [4]. There are a few other numerical methods that describe LFV ([2], [5]), although it is not stated clearly there how the speed of the conductor and the distance between the magnet and the conductor influence the force that conductor exerts on the magnet. Therefore, we aim to obtain the results for the aforementioned dependences by using a simplified 2D model of LFV.

In this paper, LFV is modeled by an infinite conductive plate of thickness a and a magnetic dipole at a height h above the plate. The plate moves at a velocity v in the direction of the x-axis.

The main equation solved in the paper is:

$$-\nabla \cdot \nabla_t \cdot \phi = v \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} + v \frac{\partial B_{iz}}{\partial y}$$

Where ϕ stands for electric potential, B_{0z} is the z-component of the magnetic field of the dipole and B_{iz} is the z-component of the induced magnetic field.

The equation was solved in two cases: approximate (the influence of eddy currents is neglected, which is reasonable for low speeds – therefore the second term on the right is ignored) and real (the effect of eddy currents is taken into account). The equation was solved numerically in Matlab, using the *PDE toolbox* package.

The formula for the Lorentz force in the 2D case is:

$$\mathbf{F} = a \iint \mathbf{J} \times \mathbf{B} dx dy$$

where J is the density of induced current and B is the total magnetic field.

Results

The drag force is obtained as the x-component of the Lorentz force, while the lift force is obtained as the z-component. These components are shown in the graph in Figure 1.

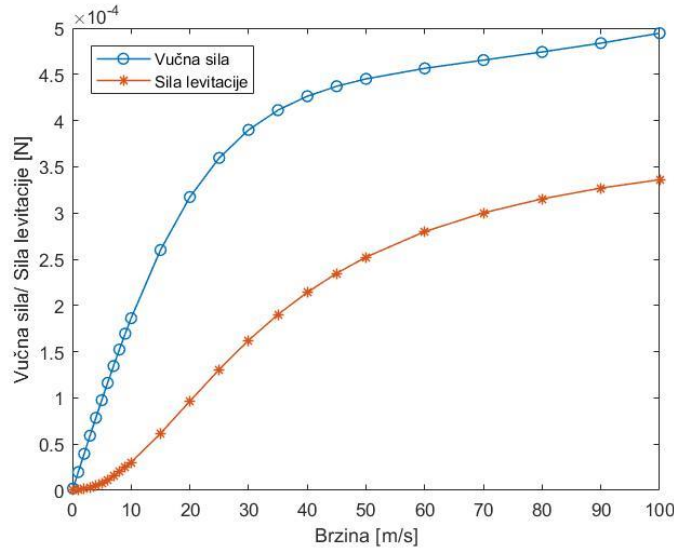


Figure 1. - The dependence of the drag force (blue) and the levitation force (red) on the velocity

From Figure 1. we can see that the drag force depends linearly on the velocity in the range 0-15 m / s, which can often be found in the literature. There is also a y-component of the Lorentz force, which is not represented in Figure 1 because ideally, its value is zero (due to the symmetry of the problem, the plate does not move along the y axis). Numerically obtained, the intensity of that component is 100 to 1000 times less than the intensity of the other two components, so it can be neglected. Due to the arbitrarily chosen intensity of the magnetic moment of the dipole (1 Am^2), these results should only be taken qualitatively.

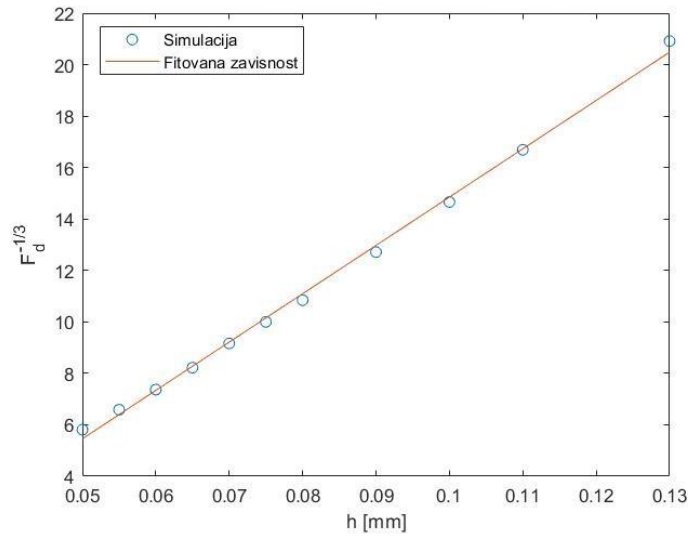


Figure 2 – linearised dependence of the drag force on the distance between the dipole and the conductor; the red line in the graph represents the linear fit

Since the dependence $F_d^{-1/3}(h)$ is linear, the drag force depends on the distance as $F_d \propto h^{-3}$. The same expression has been obtained analytically in paper [3]. The deviations that exist in the graph are the consequence of the fact that these results have been obtained under various approximations, as well as the numerical deviations. Since the force decreases with h , we conclude that it is necessary to bring the magnet as close to the conductor as possible, to register the force more easily. The minimum distance is usually defined by the need for measuring the speeds of high-temperature liquid metals, to avoid the Curie effect (the magnet would lose its magnetization due to the high temperature).