파 전달 관점에서 균열이 발생한 보의 축-굽힘 방향 커플링을 고려한 고유진동수 예측

2016학년도

강 지 강

석사학위논문

파 전달 관점에서 균열이 발생한 보의 축-굽힘 방향 커플링을 고려한 고유진동수 예측

동아대학교 대학원

토 목 공 학 과

강 지 강

2 0 1 6 학 년 도

파 전달 관점에서 균열이 발생한 보의 축-굽힘 방향 커플링을 고려한 고유진동수 예측

지도교수 박 현 우

이 논문을 공학석사학위
청구논문으로 제출함

2016년 12월

동아대학교 대학원

토 목 공 학 과

강 지 강

강지강의 공학석사학위
청구논문을 인준함

2016년 12월

위 원 장 최 광규 (인)

부위원장 박 현우 (인)

위 원 강 원호 (인)

국문초록

파 전달 관점에서 균열이 발생한 보의 축-굽힘 방향 커플링을 고려한 고유진동수 예측

Predicting the Natural Frequencies of a Cracked Beam Considering Axial-bending Coupling from Wave Propagation Perspective.

토목공학과 강 지 강
지 도 교 수 박 현 우

이 논문에서는 파 전달 관점에서 균열이 발생한 보의 축-굽힘 방향 커플링을 고려하여 고유진동수를 예측 할 수 있는 기법을 제안한다. 미소 균열의 경우 고차 모드의 고유진동수에 민감하지만 기존의 연구들은 균열이 대부분 저차 모드의 고유진동수에 미치는 영향에 연구가 집중 되어 있다. 따라서 파 전달 관점에서 고차 모드의 고유진동수를 계산하는 특성방정식을 유도한다. 보의 동적거동을 나타낸 식에 포함된 미지수를 결정하기 위하여 힘/변위 경계조건, 적합조건, 평형조건을 고려하여 12개의 조건식을 얻는다. 특히 균열지점의 수평변위 및 처짐각의 적합조건에서 축-굽힘 커플링의 영향을 고려한다. 파 전달 관점에서 소멸파 모드에 해당하는 요소를 선택적으로 소거하여 정식화를 진행한다. 다양한 지점조건에 대해 정식화를 진행한 결과, 매개변수화를 통해 지점 조건에 관계없이 동일한 형태의 단일 특성방정식으로 정리되었다. 뉴턴-랩슨 방법을 이용하여 특성방정식으로부터 고유진동수를 계산한다. 제안된 기법을 검증하기 위해 특성방정식의 해를

ABAQUS를 이용한 유한요소해석 결과와 비교한다. 이 때 순수 굽힘만을 고려한 결과를 추가하여 축-굽힘 방향 커플링을 고려한 효과도 확인하였다. 결론적으로 축-굽힘 커플링을 고려한 결과에서 균열비가 증가하거나, 관심 고유 모드가 고차로 올라갈수록 굽힘만을 고려한 경우보다 균열에 의한 고유진동수의 감소를 더 정확하게 예측하였다.

주요어 : 파 전달, 균열, 축−굽힘 커플링, 고유진동수, 특성방정식, 보

목 차

표 목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 서 론

구조물에 발생한 횡 방향 균열에 대한 고유진동수를 예측하는 것은 매우 중요하다. 보에 발생한 균열이 보의 대표적 진동특성인 고유진동수를 감소시키기 때문이다. 균열이 발생하지 않은 상태에서의 구조물의 고유진동수와, 균열과 같은 손상이 발생했을 때의 구조물의 고유진동수의 변화를 확인하여 손상 유무를 판단할 수 있기 때문이다. 이미 고유진동수의 변화로부터 손상을 찾아내는 연구들이 진행되고 있다 (Dimarogonas 1996)

균열을 연성을 가지는 일종의 스프링으로 치환하고 균열지점에서 발생하는 처짐각에 대한 적합조건을 고려함으로써 균열의 깊이와 위치에 대한 고유진동수의 변화를 예측한다 (Dimarogonas 1996). 구조물 손상 식별을 위한 비파괴 연구 및 실험이 존재하였지만,(Owolabi 2003) 대부분 저차 모드(1-3차)의 고유진동수에 미치는 영향에 집중되어 있다(Ostachowicz and Krawczuk 1991, Kim et al. 2003, Vestroni and Capecchi 2000, Chinchalkar 2001, Kim and Stubbs 2003, Zheng and Kessissoglou 2004, Silva and Gomes 1990). 그러나 미소 균열의 경우 저차 모드의 고유진동수보다 고차 모드의 고유진동수에 민감하다고 알려져 있다 (Salawu 1997). 따라서 균열 손상 진단의 관점에서 균열이 고차 모드의 고유진동수에 미치는 영향을 예측하는 것이 매우 중요하다.

기존의 연구들은 균열의 깊이에 관계없이 균열이 보의 고유진동수에 미치는 영향을 보의 굽힘 거동만을 고려하여 모사하였다 (Lee 2009, Rizos et al 1990, Narkis 1994). 그러나 보의 높이 대비 균열의 깊이가 증가함에 따라 보의 굽힘 거동뿐만 아니라 보의 축 방향 거동도 동시에 영향을 주는 축-굽힘 커플링 효과가 발생하게 된다 (Rice and Levy 1972). 따라서 균열에 따른 고유진동수의 변화를 정확하게 예측하기 위해서는 축-굽힘 커플링 효과를 고려해야 한다.

진동론 관점에서 유도된 특성방정식은 대부분 해석해 형태로 표현되지 않고 특성방정식 행렬형태로 표현된다. 따라서 특성방정식을 만족시키는 고유진동수를 구하는 과정이 복잡할 뿐만 아니라 해의 수렴성이 보장되지 않는 경우가 발생할 수 있다. 이를 극복하기 위해 근사적인 해법을 사용하여 간

략식 형태로 고유진동수를 계산하는 방법이 제시되기도 하였다 (Fernandez-Saez et al. 1999)

이 연구에서는 보의 균열이 고차 모드의 고유진동수에 미치는 영향을 정량화 할 수 있는 단순화된 식을 축-굽힘 방향 커플링을 고려하여 파 전달 관점에서 제시하고, 오일러-베르누이 보 이론을 이용하여 고차 모드에서 고유진동수의 변화를 정식화한다.

균열보를 모델링하고 파 동적거동을 이용하여 변위를 식으로 표현한다 (Rice and Levy 1972, Palacz and Krawczuk 2002). 힘 / 변위 경계조건식, 적합조건식, 평형방정식을 이용해 식을 풀어 Closed-form 형태의 단일 특성방정식 제시한다. 파 전달 관점에서 가정을 도입하여 소멸파 모드에 해당하는 미지수를 선택적으로 소거하여 식을 유도한다. 적합성을 검증하기 위해 뉴턴-랩슨 방법을 적용하여 특성방정식의 해를 구하고, ABAQUS를 이용한 유한요소해석 결과를 비교 검증용으로 사용한다. 커플링을 고려한 효과를 확인하기 위해 굽힘만을 고려했을 때의 결과를 추가하여 결과를 비교한다.

Ⅱ. 균열보 모델링

2.1 보에 발생한 횡 방향 균열 모델링

그림 2.1과 같이 횡 방향 균열이 발생한 보는 균열로 인해 균열지점에서 적합조건이 발생한다. 그림 2.2는 횡 방향 균열이 발생한 지점에서 발생하는 적합조건(Rice and Levy 1972) 에서 제시된 균열지점에서의 적합조건이다. 균열 좌측의 변위 u_L과 균열 우측의 변위 u_R은 크기가 같아야 하지만 균열로 인해 두 변위 사이에 차이가 발생한다. 균열 좌측의 처짐각 θ_L과 균열 우측의 처짐각 θ_R 또한 크기가 같아야 하지만 균열로 인해 두 처짐각 사이에 차이가 발생한다. 이 논문에서는 축-굽힘 방향 커플링을 고려하여 연구를 진행하기 때문에 위 적합조건식에서 커플링을 고려할 수 있는 추가적인 요소가 더 해진다.

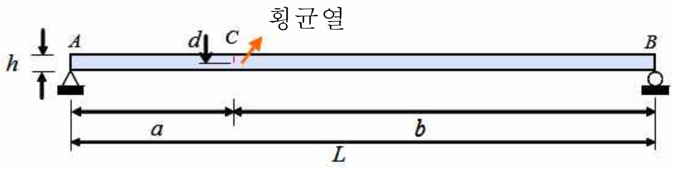
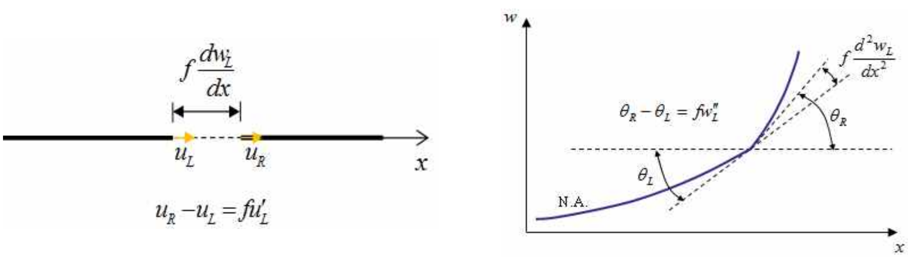


그림 2.1 횡 균열이 발생한 단순지지보



(a) 축 변형 적합조건 (b) 처짐각의 적합조건

그림 2.2 횡 방향 균열이 발생한 지점에서 발생하는 적합조건

$$u_R - u_L = (f_{AA}L)u'_L + f_{FA}w''_L \qquad (2.1\text{-a})$$

$$\theta_R - \theta_L = (f_{FF}L)w''_L + f_{FA}u''_L \qquad (2.1\text{-b})$$

식 (2.1)은 각각 균열지점의 적합조건식에 축-굽힘 방향 커플링을 고려할 수 있는 요소를 더해준 식으로, 커플링을 고려한 균열지점에서의 적합조건으로 정식화에 사용한다. 여기서 f_{AA}는 축 변형에 기여하는 유연도 (Flexibility) 이고, f_{FF}는 굽힘 방향 변형에 기여하는 유연도 이다. f_{FA}는 축-굽힘 모드가 서로에게 영향을 미치는 커플링 효과를 적용할 수 있게 하는 유연도 이다.

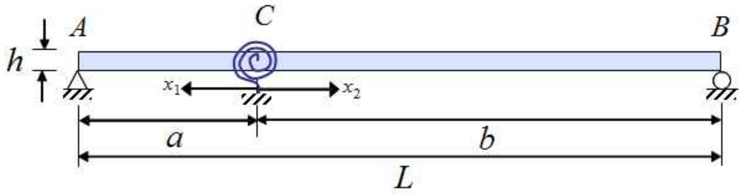


그림 2.3 균열보의 모델링

2.2 횡 방향 균열이 발생한 단순보의 동적거동

그림 2.5와 같이 파를 미지수로 하여 동적거동을 식으로 표현할 수 있다.

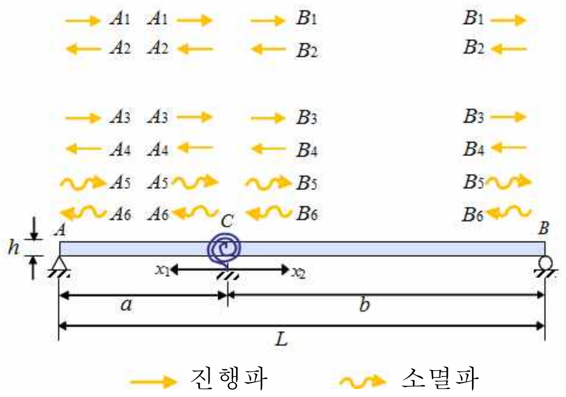


그림 2.4 횡 방향 균열이 발생한 단순보의 동적거동

A_1 부터 A_6 까지는 균열 좌측의 파의 움직임을 나타내고, B_1 부터 B_6 까지는 균열 우측의 파의 움직임을 나타낸다. 아래첨자 1~2는 보의 축 거동에 관련된 미지수를 나타내고, 아래첨자 3~6은 보의 굽힘 방향 거동과 관련된 미지수를 나타낸다. 이 미지수를 이용해 아래의 식으로 축 방향 변위와 굽힘 방향 변위로 표현될 수 있다.(Palacz and Krawczuk 2002)

$$u_L(x_1) = A_1 e^{ikx_1} + A_2 e^{-ikx_1} \tag{2.2-a}$$

$$u_R(x_2) = B_1 e^{-ikx_2} + B_2 e^{ikx_2} \tag{2.2-b}$$

$$w_L(x_1) = A_3 e^{i\bar{k}x_1} + A_4 e^{-i\bar{k}x_1} + A_5 e^{\bar{k}x_1} + A_6 e^{-\bar{k}x_1} \tag{2.3-a}$$

$$w_R(x_2) = B_3 e^{-i\bar{k}x_2} + B_4 e^{i\bar{k}x_2} + B_5 e^{-\bar{k}x_2} + B_6 e^{\bar{k}x_2} \tag{2.3-b}$$

식 (2.2)는 각각 균열 좌측과 우측의 축 변위이고, 식 (2.3)은 각각 균열 좌측과 우측의 굽힘 방향 변위이다. e는 지수함수를, i는 $\sqrt{-1}$을 의미한다. k

는 축 방향 모드의 파수(wave number)로 다음과 같다.

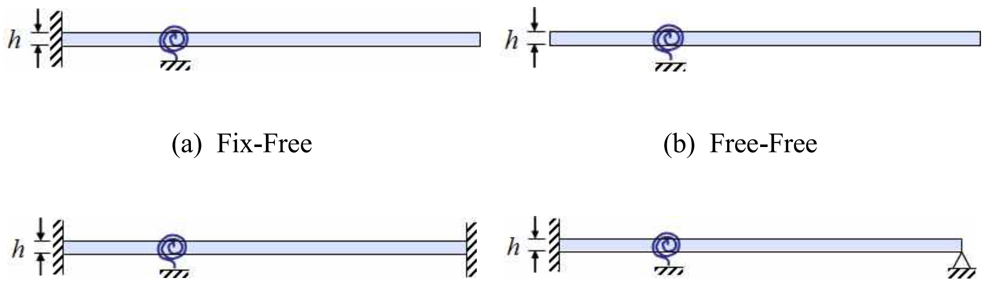
$$k = \sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega \tag{2.4}$$

$\bar{k}$는 굽힘 모드의 파수로 다음과 같이 나타낸다.

$$\bar{k} = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}\omega^2} \tag{2.5}$$

이와 같이 총 12개의 미지수로 횡 방향 균열이 발생했을 때의 단순보의 동적거동을 표현할 수 있다.

추가적으로 4개의 경계조건에 대해 모델링을 다음과 같이 진행했다.



(a) Fix-Free (b) Free-Free

(c) Fix-Fix (d) Fix-Hinge

그림 2.5 추가적인 경계조건 모델링

Ⅲ. 파 전달 관점에서의 고유진동수 정식화

3.1 미지수를 결정하기 위한 조건식

본문에서는 단순보의 예를 이용하여 정식화 과정을 설명하고 수치예제를 보여준다. 추가적인 경계조건에 대한 정식화 과정 및 수치예제 결과는 부록 (A-4) ~ (A-7) 로 첨부한다. 아래 그림과 같이 모델링 된 단순보가 있다. 식 (2.2)와 식 (2.3)의 미지수를 결정하기 위해서 12개의 조건식이 필요하다. 각 지점에서 얻을 수 있는 조건식을 표 3.1로 정리하였다.

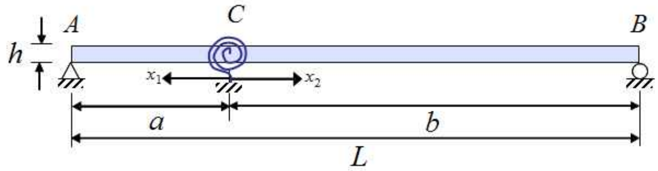


그림 3.1 횡 방향 균열이 발생한 단순지지보 모델링

표 3.1 미지수를 결정하기 위한 조건식

지 점	A	B	C (균열지점)	
종 류	힘 / 변위 경계조건		적합조건식	평형방정식
조건식	$w=0$	$w=0$	$w_L = w_R$	$V_L = V_R$
	$u=0$	$F_x=0$	$u_R - u_L = \phi_u(u_L', w_L'')$	$F_L = F_R$
	$M=0$	$M=0$	$\theta_R - \theta_L = \phi_\theta(u_L', w_L'')$	$M_L = M_R$

균열지점에서 축 변위 적합조건을 사용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$u_R(0) - u_L(0) = (f_{AA}L)\underbrace{u_L'(0)}_{-\left.\frac{du_L}{dx_1}\right|_{x1=0}} + \frac{h^2}{12} f_{FA} w_L''(0)$$

$$\Rightarrow B_1 + B_2 - A_1 - A_2 = -if_{AA}Lk(A_1 - A_2) - \frac{h^2\bar{k}^2}{12} f_{FA}(A_3 + A_4 - A_5 - A_6) \qquad (3.1)$$

$$\Rightarrow (1 - if_{AA}Lk)A_1 + (1 + if_{AA}Lk)A_2 - \frac{h^2\bar{k}^2}{12} f_{FA}(A_3 + A_4 - A_5 - A_6)$$
$$- B_1 - B_2 = 0$$

균열지점에서 처짐각 적합조건을 사용하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\theta_R(0)-\theta_L(0)=(f_{FF}L)w''_L(0)+f_{FA}u'_L(0)\\
&\Rightarrow w'_R(0)-w'_L(0)=(f_{FF}L)w''_L(0)+f_{FA}u'_L(0)\\
&\Rightarrow if_{FA}k(A_1-A_2)+(i\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2)A_3-(i\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2)A_4\\
&+(\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2)A_5-(\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2)A_6-i\bar{k}B_3+i\bar{k}B_4-\bar{k}B_5+\bar{k}B_6=0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

균열지점에서 횡 변위 적합조건을 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다..

$$
\begin{aligned}
&w_L(0)=w_R(0)\\
&\Rightarrow A_3+A_4+A_5+A_6=B_3+B_4+B_5+B_6\\
&\Rightarrow A_3+A_4+A_5+A_6-B_3-B_4-B_5-B_6=0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

균열지점에서 축력의 평형조건을 사용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&-EA\underbrace{u'_L(0)}_{-\left.\frac{du_L}{dx_1}\right|_{x1=0}}+EAu'_R(0)=0\\
&\Rightarrow (ik)A_1+(-ik)A_2+(-ik)B_1+(ik)B_2=0\\
&\Rightarrow A_1-A_2-B_1+B_2=0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

균열지점에서 전단력 평형조건을 사용하면 다음과 같이 표현 가능하다.

$$
\begin{aligned}
&-\underbrace{EIw'''_L(0)}_{-\left.\frac{d^3w_L}{dx_1^3}\right|_{x1=0}}+EIw'''_R(0)=0\\
&\Rightarrow(-i\bar{k}^3)A_3+(i\bar{k}^3)A_4+(\bar{k}^3)A_5+(-\bar{k}^3)A_6+(i\bar{k}^3)B_3+(-i\bar{k}^3)B_4\\
&+(-\bar{k}^3)B_5+(\bar{k}^3)B_6=0\\
&\Rightarrow -iA_3+iA_4+A_5-A_6+iB_3-iB_4-B_5+B_6=0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

균열지점에서 모멘트 평형조건을 사용하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& EIw_L''(0) = EIw_R''(0) \\
& \Rightarrow EI\{(-\bar{k}^2)A_3 + (-\bar{k}^2)A_4 + (\bar{k}^2)A_5 + (\bar{k}^2)A_6\} \\
& \quad = EI\{(-\bar{k}^2)B_3 + (-\bar{k}^2)B_4 + (\bar{k}^2)B_5 + (\bar{k}^2)B_6\} \\
& \Rightarrow -A_3 - A_4 + A_5 + A_6 + B_3 + B_4 - B_5 - B_6 = 0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

A지점에서 축 변위 경계조건을 사용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& u_L(a) = 0 \\
& \Rightarrow A_1 e^{ika} + A_2 e^{-ika} = 0 \\
& \Rightarrow A_2 = -A_1 e^{2ika}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

A지점에서 횡 변위 경계조건을 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& w_L(a) = 0 \\
& \Rightarrow A_3 e^{i\bar{k}a} + A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} + A_6 e^{-\bar{k}a} = 0
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

A지점에서 모멘트 경계조건을 사용하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& EIw_L''(a) = 0 \\
& \Rightarrow (-\bar{k}^2)A_3 e^{i\bar{k}a} + (-\bar{k}^2)A_4 e^{-i\bar{k}a} + (\bar{k}^2)A_5 e^{\bar{k}a} + (\bar{k}^2)A_6 e^{-\bar{k}a} = 0 \\
& \Rightarrow -A_3 e^{i\bar{k}a} - A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} + A_6 e^{-\bar{k}a} = 0
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

B지점에서 횡 변위 경계조건을 사용하면 다음과 같이 정리된다.

$$
\begin{aligned}
& w_R(b) = 0 \\
& \Rightarrow B_3 e^{-i\bar{k}b} + B_4 e^{i\bar{k}b} + B_5 e^{-\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} = 0
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

B지점에서 축력의 경계조건을 사용하면 다음과 같이 표현 가능하다.

$$
\begin{aligned}
& EAu_R'(b) = 0 \\
& \Rightarrow (-ik)B_1 e^{-ikb} + (i\bar{k})B_2 e^{ikb} = 0 \\
& \Rightarrow B_1 e^{-ikb} - B_2 e^{ikb} = 0 \\
& \Rightarrow B_2 = B_1 e^{-2ikb}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

B지점에서 모멘트 경계조건을 사용하면 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$EIw_R''(b) = 0$$
$$\Rightarrow (-\bar{k}^2)B_3 e^{-i\bar{k}b} + (-\bar{k}^2)B_4 e^{i\bar{k}b} + (\bar{k}^2)B_5 e^{-\bar{k}b} + (\bar{k}^2)B_6 e^{\bar{k}b} = 0 \tag{3.12}$$
$$\Rightarrow -B_3 e^{-i\bar{k}b} - B_4 e^{i\bar{k}b} + B_5 e^{-\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} = 0$$

식 (3.1)부터 식 (3.11)까지를 행렬 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} 1-if_{AA}Lk & 1+if_{AA}Lk & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & \frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & \frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ if_{FA}k & -if_{FA}k & i\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2 & -(i\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2) & (\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2) & -(\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & 0 & -i\bar{k} & i\bar{k} & -\bar{k} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & 1 & -1 & 0 & 0 & i & -i & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ e^{2ika} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & e^{-\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\bar{k}b} & e^{i\bar{k}b} & e^{-\bar{k}b} & e^{\bar{k}b} \\ 0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & -e^{\bar{k}a} & -e^{-\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2ikb} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-i\bar{k}b} & -e^{i\bar{k}b} & e^{-\bar{k}b} & e^{\bar{k}b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

(3.13)

3.2 파 전달 관점에서의 특성방정식 정식화

기존의 고유진동수와 관련된 연구에서는 다음과 같은 식을 사용하기 위해 식 (3.13)의 determinant를 0으로 만드는 값을 찾아 고유진동수를 계산하는 것으로 끝났다.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\bar{k}_n^2 \tag{3.14}$$

하지만 이 연구에서는 파 전달 관점을 도입하여 정식화를 진행한다. 파 전달 관점에서 정식화를 진행하게 되면, '고주파 대역에서 소멸파는 반사된 지점의 반대쪽으로 전달되지 않고 소멸한다' 는 가정이 들어가게 된다. 굽힘 거동에 관여하는 미지수만을 생각할 때, 아래 그림에서 A지점을 기준으로 할 때 A_2는 A지점으로 전달되지 못하고 소멸한다. C점에서 좌측을 볼 때, A_3는 C점으로 전달되지 못하고 소멸한다. C점에서 우측을 볼 때, B_2는 C점으로 전달되지 못하고 소멸한다. B지점을 기준으로 할 때 B_3는 B지점으로 전달되지 못하고 소멸한다.

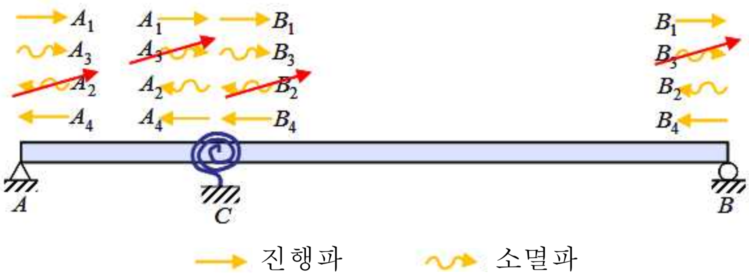


그림 3.2 파 전달 관점에서의 가정

소멸파 모드에 해당하는 요소를 선택하여 식 (3.13)에서 소거하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$
\begin{bmatrix}
1-if_{AA}Lk & 1+if_{AA}Lk & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & \cancelto{0}{\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA}} & \frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
if_{FA}k & -if_{FA}k & i\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2 & -(i\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2) & \cancelto{0}{(\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2)} & -(\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & 0 & -i\bar{k} & i\bar{k} & -\bar{k} & \cancelto{0}{\bar{k}} \\
0 & 0 & 1 & 1 & \cancelto{0}{1} & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \cancelto{0}{-1} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & i & \cancelto{0}{1} & -1 & 0 & 0 & i & -i & -1 & \cancelto{0}{1} \\
0 & 0 & -1 & -1 & \cancelto{0}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \cancelto{0}{-1} \\
e^{2ika} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & \cancelto{0}{e^{-\bar{k}a}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\bar{k}b} & e^{i\bar{k}b} & \cancelto{0}{e^{-\bar{k}b}} & e^{\bar{k}b} \\
0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & -e^{\bar{k}a} & \cancelto{0}{-e^{-\bar{k}a}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2ikb} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-i\bar{k}b} & -e^{i\bar{k}b} & \cancelto{0}{e^{-\bar{k}b}} & e^{\bar{k}b}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}
\tag{3.15}
$$

식 (3.15)와 같은 과정을 거치면 식 (3.13)은 아래와 같이 쓸 수 있다. 이후의 정식화 과정은 소멸파 모드에 해당하는 요소를 소거한 상태로 진행한다.

$$
\begin{bmatrix}
1-if_{AA}Lk & 1+if_{AA}Lk & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & 0 & \frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
if_{FA}k & -if_{FA}k & i\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2 & -(i\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & -(\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & 0 & -i\bar{k} & i\bar{k} & -\bar{k} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & i & 0 & -1 & 0 & 0 & i & -i & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
e^{2ika} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\bar{k}b} & e^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b} \\
0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & -e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2ikb} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-i\bar{k}b} & -e^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}
\tag{3.16}
$$

식 (3.8)과 식 (3.9)를 더하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
& A_3 e^{i\bar{k}a} + A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} - A_3 e^{i\bar{k}a} - A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} = 0 \\
& \Rightarrow A_5 e^{\bar{k}a} = 0 \\
& \Rightarrow A_5 = 0
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

식 (3.10)과 식 (3.12)을 더하면 다음과 같이 정리된다.

$$
\begin{aligned}
&B_3e^{-i\bar{k}b}+B_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}a}-B_3e^{-i\bar{k}b}-B_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}b}=0\\
&\Rightarrow B_6e^{\bar{k}a}=0\\
&\Rightarrow B_6=0
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

식 (3.8)에 식 (3.17)을 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&A_3=-e^{-2i\bar{k}a}A_4\\
&\text{or } A_4=-e^{2i\bar{k}a}A_3
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

식 (3.10)에 식 (3.18)을 대입하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&B_4=-e^{-2i\bar{k}b}B_3\\
&\text{or } B_3=-e^{2i\bar{k}b}B_4
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

식 (3.3)과 식 (3.6)을 더하면 다음과 같이 표현 가능하다.

$$
\begin{aligned}
&A_3+A_4+A_6-B_3-B_4-B_5-A_3-A_4+A_6+B_3+B_4-B_5=0\\
&\Rightarrow B_5=A_6
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

식 (3.5)에 식 (3.19)~(3.21)까지의 결과를 대입하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&-iA_3+iA_4-A_6+iB_3-iB_4-B_5=0\\
&\Rightarrow -iA_3+i(-e^{2i\bar{k}a})A_3-2A_6+iB_3-i(-e^{-2i\bar{k}b})B_3=0\\
&\Rightarrow A_6=-\frac{i}{2}(1+e^{2i\bar{k}a})A_3+\frac{i}{2}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

식 (3.1)에 식 (3.7), (3.11), (3.19), (3.22)를 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - if_{AA} Lk)}_{c_1} A_1 + \underbrace{(1 + if_{AA} Lk)}_{c_2} A_2 - \underbrace{\frac{h^2 \bar{k}^2}{12} f_{FA}}_{c_3} (A_3 + A_4 - A_6) - B_1$$

$$- B_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(c_1 - c_2 e^{2ika})}_{\bar{c}_1} A_1 + \underbrace{\{-c_3 (1 - e^{2i\bar{k}a} + \frac{i}{2}(1 + e^{2i\bar{k}a}))\}}_{\bar{c}_3} A_3 \tag{3.23}$$

$$+ \underbrace{c_3 \frac{i}{2}(1 + e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{d}_3} B_3 + \underbrace{(-1 - e^{-2ikb})}_{\bar{d}_1} B_1 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{c}_1 A_1 + \bar{d}_1 B_1 + \bar{c}_3 A_3 + \bar{d}_3 B_3 = 0$$

식 (3.2)에 식 (3.7), (3.19), (3.20), (3.22)를 대입하면 다음과 같다.

$$if_{FA} k (A_1 - A_2) + (i\bar{k} + f_{FF} L\bar{k}^2) A_3 - (i\bar{k} - f_{FF} L\bar{k}^2) A_4$$

$$-(\bar{k} + f_{FF} L\bar{k}^2) A_6 - i\bar{k} B_3 + i\bar{k} B_4 - \bar{k} B_5 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{if_{FA} k (1 + e^{2ika})}_{e_1} A_1$$

$$+ \underbrace{[2i\bar{k}(1 + e^{2i\bar{k}a}) + f_{FF} L\bar{k}^2 \{(1 - e^{2i\bar{k}a}) + \frac{i}{2}(1 + e^{2i\bar{k}a})\}]}_{\bar{e}_3} A_3 \tag{3.24}$$

$$\underbrace{- \{2i\bar{k}(1 + e^{-2i\bar{k}b}) + \frac{i}{2} f_{FF} L\bar{k}^2 (1 + e^{-2i\bar{k}b})\}}_{\bar{f}_3} B_3 = 0$$

식 (3.24)의 자세한 정식화 과정은 부록 A-1을 참고한다.

식 (3.4)에 식 (3.7), (3.11)을 대입하면 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned} & A_1 - (-A_1 e^{2ika}) - B_1 + (B_1 e^{-2ikb}) = 0 \\ & \Rightarrow (1 + e^{2ika}) A_1 - (1 - e^{-2ikb}) B_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

식 (3.3)에 식 (3.19)~(3.21)을 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&A_3+(-e^{2i\bar{k}a}A_3)+A_6-B_3-(-e^{-2i\bar{k}b}B_3)-A_6=0\\
&\Rightarrow(1-e^{2i\bar{k}a})A_3-(1-e^{-2i\bar{k}b})B_3=0
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

식 (3.23)과 식 (3.26)을 이용하여 A_3를 소거 시키면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&(1-e^{2i\bar{k}a})\times(\bar{c}_1A_1+\bar{d}_1B_1+\bar{c}_3A_3+\bar{d}_3B_3)-\bar{c}_3\times\{(1-e^{2i\bar{k}a})A_3\\
&-(1-e^{-2i\bar{k}b})B_3\}=0\\
&\Rightarrow\underbrace{(1-e^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1}_{p_1}A_1+\underbrace{(1-e^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1}_{q_1}B_1\\
&+\underbrace{\{(1-e^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3+(1-e^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3\}}_{q_3}B_3=0\\
&\Rightarrow p_1A_1+q_1B_1+q_3B_3=0
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

식 (3.24)과 식 (3.26)를 이용하여 A_3를 소거 시키면 다음과 같이 정리된다.

$$
\begin{aligned}
&(1-e^{2i\bar{k}a})\times(e_1A_1+\bar{e}_3A_3+\bar{f}_3B_3)\\
&-\bar{e}_3\times\{(1-e^{2i\bar{k}a})A_3-(1-e^{-2i\bar{k}b})B_3\}=0\\
&\Rightarrow\underbrace{(1-e^{2i\bar{k}a})e_1}_{r_1}A_1+\underbrace{\{(1-e^{2i\bar{k}a})\bar{f}_3+(1-e^{-2i\bar{k}b})\bar{e}_3\}}_{s_3}B_3=0\\
&\Rightarrow r_1A_1+s_3B_3=0
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

식 (3.27)과 식 (3.28)을 이용하여 B_3를 소거 시키면 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
&s_3(p_1A_1+q_1B_1+q_3B_3)-q_3(r_1A_1+s_3B_3)=0\\
&\Rightarrow\underbrace{(s_3p_1-q_3r_1)}_{\bar{r}_1}A_1+\underbrace{s_3q_1}_{\bar{s}_1}B_1=0\\
&\Rightarrow\bar{r}_1A_1+\bar{s}_1B_1=0
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

식 (3.25)와 식 (3.29)를 이용하여 B_1을 소거 시키면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
&\bar{s}_1\{(1+e^{2ika})A_1-(1-e^{-2ikb})B_1\}+(1-e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1+\bar{s}_1B_1)=0\\
&\Rightarrow\{(1+e^{2ika})\bar{s}_1+(1-e^{-2ikb})\bar{r}_1\}A_1=0\\
&\Rightarrow(1+e^{2ika})\bar{s}_1+(1-e^{-2ikb})\bar{r}_1=0
\end{aligned}\tag{3.30}$$

식 (3.30)은 미지수가 모두 소거된 특성방정식이 된다. 식 (3.29)에서 임시변수인 $\bar{s}_1$과 $\bar{r}_1$를 대입하여 식 (3.30)을 다시 전개하면 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\bar{s}_1\{(1+e^{2ika})A_1-(1-e^{-2ikb})B_1\}+(1-e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1+\bar{s}_1B_1)=0\\
&\Rightarrow\{\bar{s}_1(1+e^{2ika})+\bar{r}_1(1-e^{-2ikb})\}A_1=0\\
&\Rightarrow\bar{s}_1(1+e^{2ika})+\bar{r}_1(1-e^{-2ikb})=0\\
&\Rightarrow s_3q_1\underbrace{(1+e^{2ika})}_{t_a}+(s_3p_1-q_3r_1)\underbrace{(1-e^{-2ikb})}_{t_b}=0\\
&\Rightarrow t_as_3q_1+t_b(s_3p_1-q_3r_1)=0
\end{aligned}\tag{3.31}$$

여기서 얻을 수 있은 $1+e^{2ika}$를 t_a로 놓고, $1-e^{-2ikb}$를 t_b로 놓는다. 식 (3.28)에서 임시변수 s_3를 대입하여 다시 정리하면 아래 식과 같이 표현 가능하다. s_3에서 얻을 수 있은 $1-e^{2i\bar{k}a}$를 $\bar{t}_a$로 놓고, $1-e^{-2i\bar{k}b}$를 $\bar{t}_b$로 놓는다.

$$\begin{aligned}
&t_a\{\underbrace{(1-e^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3+\underbrace{(1-e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}q_1+t_b\{\underbrace{(1-e^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3+\underbrace{(1-e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}p_1\\
&-t_bq_3r_1=0\\
&\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1+t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1+t_b\bar{t}_a\bar{f}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1)+t_b\bar{t}_b\bar{e}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1)\\
&-t_b(\bar{t}_a\bar{d}_3+\bar{t}_b\bar{c}_3)(\bar{t}_ae_1)=0\\
&\Rightarrow\underbrace{t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1}_{\Pi_1}+\underbrace{t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1}_{\Pi_2}+\underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{f}_3\bar{c}_1}_{\Pi_3}+\underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{e}_3\bar{c}_1}_{\Pi_4}-\underbrace{t_b\bar{t}_a^2e_1\bar{d}_3}_{\Pi_5}-\underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_be_1\bar{c}_3}_{\Pi_6}=0\\
&\Rightarrow\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4-\Pi_5-\Pi_6=0
\end{aligned}\tag{3.32}$$

식 (3.32)를 정리하기 앞서, 정식화 과정에서 사용한 임시 변수들을 t_a, t_b, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$ 를 사용하여 다시 표현하면 다음과 같이 정리된다.

$$c_1 = (1 - if_{AA}Lk) = 1 - \underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}} f_{AA} = 1 - \alpha_{AA} f_{AA} \tag{3.33-a}$$

$$c_2 = (1 + if_{AA}Lk) = 1 + \alpha_{AA} f_{AA} \tag{3.33-b}$$

$$c_3 = \underbrace{\frac{h^2 \bar{k}^2}{12}}_{\bar{\alpha}_{FA}} f_{FA} = \bar{\alpha}_{FA} f_{FA} \tag{3.33-c}$$

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_2 e^{2ika} \tag{3.33-d}$$

$$\bar{c}_3 = -c_3 \{ \underbrace{\underbrace{1 - e^{2i\bar{k}a}}_{\bar{t}_a} + \frac{i}{2} \underbrace{(1 + e^{2i\bar{k}a})}_{(2-\bar{t}_a)}}_{\hat{c}_3 = \bar{t}_a + \frac{i}{2}(2-\bar{t}_a)} \} = -c_3 \hat{c}_3 \tag{3.33-e}$$

$$\bar{d}_1 = (-1 - e^{-2ikb}) = t_b - 2 \tag{3.33-f}$$

$$e_1 = if_{FA} k (1 + e^{2ika}) = \underbrace{it_a k}_{\alpha_{FA}} f_{FA} = \alpha_{FA} f_{FA} \tag{3.33-g}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_3 &= 2i\bar{k} (\underbrace{1 + e^{2i\bar{k}a}}_{2-\bar{t}_a}) + f_{FF} L\bar{k}^2 \{ (\underbrace{1 - e^{2i\bar{k}a}}_{\bar{t}_a}) + \frac{i}{2} \underbrace{(1 + e^{2i\bar{k}a})}_{2-\bar{t}_a} \} \\ &= \underbrace{2i\bar{k}(2 - \bar{t}_a)}_{\alpha_1} + \underbrace{\{ \bar{t}_a + \frac{i}{2}(2 - \bar{t}_a) \} L\bar{k}^2}_{\alpha_{FF}} f_{FF} \\ &= \alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF} \end{aligned} \tag{3.33-h}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_3 &= -\{ 2i\bar{k} (\underbrace{1 + e^{-2i\bar{k}b}}_{2-\bar{t}_b}) + \frac{i}{2} f_{FF} L\bar{k}^2 (1 + e^{-2i\bar{k}b}) \} \\ &= \underbrace{-2i\bar{k}(2 - \bar{t}_b)}_{\beta_1} + \underbrace{\{ -\frac{i}{2}(2 - \bar{t}_b) L\bar{k}^2 \}}_{\beta_{FF}} f_{FF} \\ &= \beta_1 + \beta_{FF} f_{FF} \end{aligned} \tag{3.33-i}$$

$$p_1 = (1 - e^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1 = \bar{t}_a \bar{c}_1 \qquad (3.33\text{-j})$$

$$q_1 = \underbrace{(1 - e^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{d}_1 = \bar{t}_a(t_b - 2) \qquad (3.33\text{-k})$$

$$q_3 = (1 - e^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + (1 - e^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3 = \bar{t}_a \bar{d}_3 + \bar{t}_b \bar{c}_3 \qquad (3.33\text{-l})$$

$$r_1 = (1 - e^{2i\bar{k}a})e_1 = \bar{t}_a e_1 \qquad (3.33\text{-m})$$

$$s_3 = \underbrace{(1 - e^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3 + (\underbrace{1 - e^{-2i\bar{k}b}}_{\bar{t}_b})\bar{e}_3 = \bar{t}_a \bar{f}_3 + \bar{t}_b \bar{e}_3 \qquad (3.33\text{-n})$$

$$\bar{r}_1 = (s_3 p_1 - q_3 r_1) \qquad (3.33\text{-o})$$

$$\bar{s}_1 = s_3 q_1 \qquad (3.33\text{-p})$$

식 (3.33)을 바탕으로 식 (3.32)의 Π_1부터 Π_6까지를 각각 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi_1 = t_a \bar{t}_a \bar{f}_3 q_1 = t_a \bar{t}_a(\beta_1 + \beta_{FF} f_{FF})q_1 = t_a \bar{t}_a \beta_1 q_1 + t_a \bar{t}_a q_1 \beta_{FF} f_{FF} \qquad (3.34\text{-a})$$

$$\Pi_2 = t_a \bar{t}_b \bar{e}_3 q_1 = t_a \bar{t}_b q_1(\alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}) = t_a \bar{t}_b q_1 \alpha_1 + t_a \bar{t}_b q_1 \alpha_{FF} f_{FF} \qquad (3.34\text{-b})$$

$$\begin{aligned}
\Pi_3 &= t_b \bar{t}_a^2 \bar{f}_3 \bar{c}_1 = t_b \bar{t}_a^2 \bar{f}_3(c_1 - c_2 e^{2ika}) \\
&= t_b \bar{t}_a^2(\beta_1 + \beta_{FF} f_{FF})\{(1 - \alpha_{AA} f_{AA}) - (1 + \alpha_{AA} f_{AA})(t_a - 1)\} \\
&= (t_b \bar{t}_a^2 \beta_1 + t_b \bar{t}_a^2 \beta_{FF} f_{FF})\{(2 - t_a) - t_a \alpha_{AA} f_{AA}\} \qquad (3.34\text{-c}) \\
&= (2 - t_a)t_b \bar{t}_a^2 \beta_1 - t_a t_b \bar{t}_a^2 \beta_1 \alpha_{AA} f_{AA} + (2 - t_a)t_b \bar{t}_a^2 \beta_{FF} f_{FF} \\
&\quad - t_a t_b \bar{t}_a^2 \alpha_{AA} \beta_{FF} f_{AA} f_{FF}
\end{aligned}$$

$$\Pi_4 = t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{e}_3\bar{c}_1 = t_b\bar{t}_a\bar{t}_b(\alpha_1+\alpha_{FF}f_{FF})(c_1-c_2e^{2ika})$$

$$= t_b\bar{t}_a\bar{t}_b(\alpha_1+\alpha_{FF}f_{FF})\{2-t_a-t_a\alpha_{AA}f_{AA}\}$$

$$\begin{aligned}&= t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\{\alpha_1(2-t_a)+(2-t_a)\alpha_{FF}f_{FF}-t_a\alpha_1\alpha_{AA}f_{AA}\\&-t_a\alpha_{AA}\alpha_{FF}f_{AA}f_{FF}\}\end{aligned} \tag{3.34-d}$$

$$\begin{aligned}&= (2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_1+(2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_{FF}f_{FF}-t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_1\alpha_{AA}f_{AA}\\&-t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_{AA}\alpha_{FF}f_{AA}f_{FF}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Pi_5 = t_be_1\bar{t}_a^2\bar{d}_3 = t_b\bar{t}_a^2e_1\bar{d}_3 = t_b\bar{t}_a^2(\alpha_{FA}f_{FA})(c_3\hat{d}_3)\\&= t_b\bar{t}_a^2\hat{d}_3(\alpha_{FA}f_{FA})(\overline{\alpha}_{FA}f_{FA}) = t_b\bar{t}_a^2\hat{d}_3\alpha_{FA}\overline{\alpha}_{FA}f_{FA}^2\end{aligned} \tag{3.34-e}$$

$$\begin{aligned}&\Pi_6 = t_b\bar{t}_a\bar{t}_be_1\bar{c}_3 = t_b\bar{t}_a\bar{t}_b(\alpha_{FA}f_{FA})(-c_3\hat{c}_3)\\&= -t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\hat{c}_3(\alpha_{FA}f_{FA})(\overline{\alpha}_{FA}f_{FA}) = -t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\hat{c}_3\alpha_{FA}\overline{\alpha}_{FA}f_{FA}^2\end{aligned} \tag{3.34-f}$$

식 (3.34) 결과를 바탕으로 식 (3.32)를 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4-\Pi_5-\Pi_6=0\\&\Rightarrow \underbrace{(t_a\bar{t}_a\beta_1q_1+t_a\bar{t}_bq_1\alpha_1+(2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\beta_1+(2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_1)}_{\Psi_0}\\&+\underbrace{\{-t_at_b\bar{t}_a(\bar{t}_a\beta_1+\bar{t}_b\alpha_1)\alpha_{AA}\}}_{\Psi_{AA}}f_{AA}\\&+\underbrace{\{t_a\bar{t}_aq_1\beta_{FF}+t_a\bar{t}_bq_1\alpha_{FF}+(2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\beta_{FF}+(2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_{FF}\}}_{\Psi_{FF}}f_{FF}\\&+\underbrace{t_b\bar{t}_a(-\bar{t}_a\hat{d}_3+\bar{t}_b\hat{c}_3)\alpha_{FA}\overline{\alpha}_{FA}}_{\Psi_{FA2}}f_{FA}^2\\&+\underbrace{\{-t_at_b\bar{t}_a(\bar{t}_a\beta_{FF}+\bar{t}_b\alpha_{FF})\alpha_{AA}\}}_{\Psi_{AAFF}}f_{AA}f_{FF}\\&=\Psi_0+\Psi_{AA}f_{AA}+\Psi_{FF}f_{FF}+\Psi_{FA2}f_{FA}^2+\Psi_{AAFF}f_{AA}f_{FF}=0\end{aligned} \tag{3.35}$$

Ψ_0의 항을 t_a, t_b, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\psi_{01} &= t_a\bar{t}_a\beta_1 q_1 = t_a\bar{t}_a\{-2i\bar{k}(2-\bar{t}_b)\}\{\bar{t}_a(t_b-2)\}\\ &= 2it_a(t_b-2)\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2)\bar{k}\end{aligned} \tag{3.36-a}$$

$$\begin{aligned}\psi_{02} &= t_a\bar{t}_b q_1\alpha_1 = t_a\bar{t}_b\{\bar{t}_a(t_b-2)\}\{2i\bar{k}(2-\bar{t}_a)\}\\ &= -2it_a(t_b-2)\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b\bar{k}\end{aligned} \tag{3.36-b}$$

$$\begin{aligned}\psi_{03} &= (2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\beta_1 = (2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\{-2i\bar{k}(2-\bar{t}_b)\}\\ &= -2i(t_a-2)t_b\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2)\bar{k}\end{aligned} \tag{3.36-c}$$

$$\begin{aligned}\psi_{04} &= (2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_1 = (2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\{2i\bar{k}(2-\bar{t}_a)\}\\ &= 2i(t_a-2)t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b\bar{k}\end{aligned} \tag{3.36-d}$$

식 (3.36)을 정리하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \underbrace{t_a\bar{t}_a\beta_1 q_1}_{\psi_{01}} + \underbrace{t_a\bar{t}_b q_1\alpha_1}_{\psi_{02}} + \underbrace{(2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\beta_1}_{\psi_{03}} + \underbrace{(2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_1}_{\psi_{04}}\\ &= 8i(t_a-t_b)\bar{t}_a(\bar{t}_a-\bar{t}_b)\bar{k}\end{aligned} \tag{3.37}$$

식 (3.37)의 자세한 정식화 과정은 부록 A-2를 참고한다.

Ψ_{AA} 값을 t_a, t_b, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$를 사용하면 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned}\Psi_{AA} &= \{-t_a t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a\beta_1 + \bar{t}_b\alpha_1)\alpha_{AA}\}\\ &= [-t_a t_b\bar{t}_a\{\bar{t}_a(-2i\bar{k}(2-\bar{t}_b)) + \bar{t}_b(2i\bar{k}(2-\bar{t}_a))\}(iLk)]\\ &= 2i\bar{k}(iLk)t_a t_b\bar{t}_a[(-\bar{t}_a\bar{t}_b + 2\bar{t}_a) + (\bar{t}_a\bar{t}_b - 2\bar{t}_b)]\\ &= -2Lk\bar{k}t_a t_b\bar{t}_a(2\bar{t}_a - 2\bar{t}_b) = -4Lk\bar{k}t_a t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b)\end{aligned} \tag{3.38}$$

Ψ_{FF} 값을 t_a, t_b, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$를 사용하여 표현하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}\Psi_{FF} &= t_a\bar{t}_a q_1\beta_{FF} + t_a\bar{t}_b q_1\alpha_{FF} + (2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\beta_{FF} + (2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_{FF} \\ &= 2i\bar{t}_a(t_a - t_b)[\bar{t}_a - \bar{t}_b + i\bar{t}_a\bar{t}_b]L\bar{k}^2\end{aligned} \tag{3.39}$$

식 (3.39)의 자세한 정식화 과정은 부록 A-3을 참고한다.

Ψ_{FA2} 값을 t_a, t_b, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$를 사용하면 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned}\Psi_{FA2} &= t_b\bar{t}_a(-\bar{t}_a\hat{d}_3 + \bar{t}_b\hat{c}_3)\alpha_{FA}\overline{\alpha}_{FA} \\ &= t_b\bar{t}_a[-\bar{t}_a\frac{i}{2}(2-\bar{t}_b) + \bar{t}_b\{\bar{t}_a + \frac{i}{2}(2-\bar{t}_a)\}](it_a k)(\frac{h^2\bar{k}^2}{12}) \\ &= \frac{ih^2}{12}t_a t_b\bar{t}_a[\frac{i}{2}(\bar{t}_a\bar{t}_b - 2\bar{t}_a) + \bar{t}_a\bar{t}_b - \frac{i}{2}(\bar{t}_a\bar{t}_b - 2\bar{t}_b)]k\bar{k}^2 \\ &= \frac{ih^2}{12}t_a t_b\bar{t}_a[\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)]k\bar{k}^2\end{aligned} \tag{3.40}$$

Ψ_{AAFF} 값을 t_a, t_b, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$를 사용하면 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Psi_{AAFF} &= -t_a t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a\beta_{FF} + \bar{t}_b\alpha_{FF})\alpha_{AA} \\ &= -t_a t_b\bar{t}_a[\bar{t}_a\{-\frac{i}{2}(2-\bar{t}_b)L\bar{k}^2\} + \bar{t}_b\{\bar{t}_a + \frac{i}{2}(2-\bar{t}_a)\}L\bar{k}^2](iLk) \\ &= -iL^2 t_a t_b\bar{t}_a[\bar{t}_a\{\frac{i}{2}(\bar{t}_b - 2)\} + \bar{t}_b\{\bar{t}_a - \frac{i}{2}(\bar{t}_a - 2)\}]k\bar{k}^2 \\ &= -iL^2 t_a t_b\bar{t}_a[\frac{i}{2}(\bar{t}_a\bar{t}_b - 2\bar{t}_a) + \bar{t}_a\bar{t}_b - \frac{i}{2}(\bar{t}_a\bar{t}_b - 2\bar{t}_b)]k\bar{k}^2 \\ &= -iL^2 t_a t_b\bar{t}_a[\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)]k\bar{k}^2\end{aligned} \tag{3.41}$$

단순보의 예를 제외한 나머지 네 가지 지점조건에 대한 결과는 부록으로 첨부하였다. 그 결과, t_a, t_b, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$ 네 가지 요소만 지점조건에 따라 달리하여 매개변수화 시켜주면, 모든 지점조건에 대하여 아래와 같은 동일한 형태의 특성방정식으로 정리되었다.

$$\Psi_0 + \Psi_{AA}f_{AA} + \Psi_{FF}f_{FF} + \Psi_{FA2}f_{FA}^2 + \Psi_{AAFF}f_{AA}f_{FF} = 0 \tag{3.42}$$

지점조건에 따른 매개변수는 다음과 같이 정리 할 수 있다.

표 3.2 지점조건에 따른 매개변수

	t_a	t_b	$\bar{t}_a$	$\bar{t}_b$
Hinge-Roller	$1+e^{2ika}$	$1-e^{-2ikb}$	$1-e^{2i\bar{k}a}$	$1-e^{-2i\bar{k}b}$
Fix-Free	$1+e^{2ika}$	$1-e^{-2ikb}$	$1+ie^{2i\bar{k}a}$	$1-ie^{-2i\bar{k}b}$
Free-Free	$1-e^{2ika}$	$1-e^{-2ikb}$	$1+ie^{2i\bar{k}a}$	$1-ie^{-2i\bar{k}b}$
Fix-Fix	$1+e^{2ika}$	$1+e^{-2ikb}$	$1+ie^{2i\bar{k}a}$	$1-ie^{-2i\bar{k}b}$
Fix-Hinge	$1+e^{2ika}$	$1+e^{-2ikb}$	$1+ie^{2i\bar{k}a}$	$1-e^{-2i\bar{k}b}$

3.3 뉴턴-랩슨 방법을 적용한 특성방정식 풀이

특성방정식의 비선형 해석을 위하여 뉴턴-랩슨 방법 활용한다. 식은 다음과 같다.

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{y(\omega_i)}{y'(\omega_i)} \tag{3.43}$$

2.1절에서 언급했던 유연도 f_{AA}, f_{FF}, f_{FA}는 단일 값이 아닌 보의 특성과 관련된 함수이다. 유연도를 계산하기 위해서 컴플라이언스 계수가 필요하다. 식은 다음과 같다.

$$\alpha_{\lambda\mu} = \xi^2 \sum_{n=0}^{8} C_{\lambda\mu}^{(n)} \xi^n \tag{3.44}$$

이때 ξ는 균열비를 의미하고 $C_{\lambda\mu}^{(n)}$는 식 (3.44)를 계산하기 위한 계수이다. $C_{\lambda\mu}^{(n)}$값은 다음과 같이 정리될 수 있다.

표 3.3 μ와 λ에 따른 계수 C값(Rice and Levy 1972)

n	$C_{\mu\mu}^{(n)}$	$C_{\mu\lambda}^{(n)}$	$C_{\lambda\lambda}^{(n)}$
0	1.98	1.98	1.98
1	-0.54	-1.91	-3.28
2	18.65	16.01	14.43
3	-33.70	-34.84	-31.26
4	99.26	83.93	63.56
5	-221.90	-153.65	-103.36
6	436.84	256.72	147.52
7	-460.48	-244.67	-127.69
8	289.98	133.55	61.50

유연도를 계산하는 식은 다음과 같이 정리 될 수 있다.

$$f_{AA} = \frac{2(1-\nu^2)h}{L}\alpha_{AA} \tag{3.45-a}$$

$$f_{FA} = -12(1-\nu^2)\alpha_{FA} \tag{3.45-b}$$

$$f_{FF} = \frac{6(1-\nu^2)h}{L}\alpha_{FF} \tag{3.45-c}$$

ν는 푸아송 비, L은 보의 길이, h는 보의 두께를 의미한다.(Rice and Levy 1972)

식 (3.43)의 y는 정식화 했던 특성방정식으로, 다음과 같이 나타낸다.

$$y(\omega) = \Psi_0 + \Psi_{AA} f_{AA} + \Psi_{FF} f_{FF} + \Psi_{FA2} f_{FA}^2 + \Psi_{AAFF} f_{AA} f_{FF} \tag{3.46}$$

식 (3.43)의 y'은 식 (3.46)를 미분한 형태로 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$y'(\omega) = \frac{dy}{d\omega}$$

$$= \frac{d\Psi_0}{d\omega} + f_{AA}\frac{d\Psi_{AA}}{d\omega} + f_{FF}\frac{d\Psi_{FF}}{d\omega} + f_{FA}^2\frac{d\Psi_{FA2}}{d\omega} + f_{AA} f_{FF}\frac{d\Psi_{AAFF}}{d\omega} \tag{3.47}$$

$$= \Psi_0' + \Psi_{AA}' f_{AA} + \Psi_{FF}' f_{FF} + \Psi_{FA2}' f_{FA}^2 + \Psi_{AAFF}' f_{AA} f_{FF}$$

식 (3.47)을 계산하기 위해 필요한 항을 정리한다. t_a'은 다음과 같다.

$$t_a' = \frac{dt_a}{d\omega} = 2iae^{2ika}\frac{dk}{d\omega} = 2i\sqrt{\frac{\rho}{E}}ae^{2ika} \tag{3.48}$$

t_b'은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$t_b' = \frac{dt_b}{d\omega} = 2ibe^{-2ikb}\frac{dk}{d\omega} = 2i\sqrt{\frac{\rho}{E}}be^{-2ikL} \tag{3.49}$$

$\bar{t}_a'$은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{t}_a' = \frac{d\bar{t}_a}{d\omega} = -2iae^{2i\bar{k}a}\frac{d\bar{k}}{d\omega} = -2iae^{2i\bar{k}a}\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI\omega^2}}\right) = -i\sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI\omega^2}}ae^{2i\bar{k}a} \tag{3.50}$$

$\bar{t}_b'$은 다음과 같이 정리된다.

$$\bar{t}_b' = \frac{d\bar{t}_b}{d\omega} = 2ibe^{-2i\bar{k}b}\frac{d\bar{k}}{d\omega} = 2ibe^{-2i\bar{k}b}\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI\omega^2}}\right) = i\sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI\omega^2}}be^{-2i\bar{k}b} \qquad (3.51)$$

k' 은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$k' = \frac{dk}{d\omega} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \qquad (3.52)$$

$\bar{k}'$ 은 다음과 같이 정리된다.

$$\bar{k}' = \frac{d\bar{k}}{d\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho A}{EI}\right)^{\frac{1}{4}}\omega^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI\omega^2}} \qquad (3.53)$$

Ψ_0' 은 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Psi_0' &= \frac{d\Psi_0}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}[8i(t_a - t_b)\bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b)\bar{k}] \\ &= 8i[(t_a' - t_b')\bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b)\bar{k} + (t_a - t_b)\bar{t}_a'(\bar{t}_a - \bar{t}_b)\bar{k} + (t_a - t_b)\bar{t}_a(\bar{t}_a' - \bar{t}_b')\bar{k} \\ &+ (t_a - t_b)\bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b)\bar{k}']\end{aligned} \qquad (3.54)$$

Ψ_{AA}' 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Psi_{AA}' &= \frac{d\Psi_{AA}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}[-4Lk\bar{k}t_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b)] \\ &= -4[k'\bar{k}t_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b) + k\bar{k}' t_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b) + k\bar{k}t_a' t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b) \\ &+ k\bar{k}t_a t_b' \bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b) + k\bar{k}t_a t_b \bar{t}_a'(\bar{t}_a - \bar{t}_b) + k\bar{k}t_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a' - \bar{t}_b')]\end{aligned} \qquad (3.55)$$

Ψ_{FF}' 은 다음과 같이 정리된다.

$$\Psi'_{FF} = \frac{d\Psi_{FF}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}[2i\bar{t}_a(t_a - t_b)[\bar{t}_a - \bar{t}_b + i\bar{t}_a\bar{t}_b]L\bar{k}^2]$$

$$= 2iL[\bar{t}'_a(t_a - t_b)[\bar{t}_a - \bar{t}_b + i\bar{t}_a\bar{t}_b]\bar{k}^2 + \bar{t}_a(t'_a - t'_b)[\bar{t}_a - \bar{t}_b + i\bar{t}_a\bar{t}_b]\bar{k}^2 \tag{3.56}$$

$$+ \bar{t}_a(t_a - t_b)[\bar{t}'_a - \bar{t}'_b + i\bar{t}'_a\bar{t}_b + i\bar{t}_a\bar{t}'_b]\bar{k}^2 + 2\bar{t}_a(t_a - t_b)[\bar{t}_a - \bar{t}_b + i\bar{t}_a\bar{t}_b]\bar{k}\bar{k}']$$

Ψ'_{FA2} 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi'_{FA2} = \frac{d\Psi_{FA2}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}[\frac{ih^2}{12}t_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)k\bar{k}^2]$$

$$= \frac{ih^2}{12}[t'_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)k\bar{k}^2 + t_a t'_b \bar{t}_a(\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)k\bar{k}^2 \tag{3.57}$$

$$+ t_a t_b \bar{t}'_a(\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)k\bar{k}^2 + t_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}'_a\bar{t}_b + \bar{t}_a\bar{t}'_b - i\bar{t}'_a + i\bar{t}'_b)k\bar{k}^2$$

$$+ t_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)k'\bar{k}^2 + 2t_a t_b \bar{t}_a(\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)k\bar{k}\bar{k}']$$

Ψ'_{AAFF} 은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\Psi'_{AAFF} = \frac{d\Psi_{AAFF}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}[-iL^2 t_a t_b \bar{t}_a[\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)]k\bar{k}]$$

$$= -iL^2[t'_a\ t_b \bar{t}_a[\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)]k\bar{k} + t_a t'_b \bar{t}_a[\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)]k\bar{k} \tag{3.58}$$

$$+ t_a t_b \bar{t}'_a[\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)]k\bar{k} + t_a t_b \bar{t}_a[\bar{t}'_a\bar{t}_b + \bar{t}_a\bar{t}'_b - i\bar{t}'_a + i\bar{t}'_b)]k\bar{k}$$

$$+ t_a t_b \bar{t}_a[\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)]k'\bar{k} + t_a t_b \bar{t}_a[\bar{t}_a\bar{t}_b - i\bar{t}_a + i\bar{t}_b)]k\bar{k}']$$

위 정리된 내용을 바탕으로 특성방정식을 푼다. 뉴턴-랩슨 방법을 사용하여 올바른 수렴값을 찾기 위해서는 초기치를 잘 설정하는 것이 중요하다. 예제의 경우 확실하게 알 수 있는 초기값은, 보에 균열이 발생하기 전인 온전한 상태에서 값을 가져 올 수 있다. 식 (3.42)에서 온전한 상태의 보를 구

현 하려면 f_{AA}, f_{FF}, f_{FA}를 모두 0으로 두고 그에 해당하는 항을 모두 0으로 만들어준다. 남은 항은 다음과 같다.

$$\Psi_0 = 8i(t_a - t_b)\bar{t}_a(\bar{t}_a - \bar{t}_b)\bar{k} = 0 \tag{3.59}$$

식 (3.59)가 성립 하려면 $t_a = t_b$ 혹은 $\bar{t}_a = \bar{t}_b$ 라는 조건을 만족시키면 된다. $t_a = t_b$라는 조건을 보면 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& t_a = t_b \\
& \Rightarrow 1 + e^{2ika} = 1 - e^{-2ikb} \\
& \Rightarrow e^{2ikL} + 1 = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{\cos(2kL) + 1}_{0} + i\underbrace{\sin(2kL)}_{0} = 0 \\
& \Rightarrow k = \frac{\pi}{2L}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$\bar{t}_a = \bar{t}_b$라는 조건을 보면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \bar{t}_a = \bar{t}_b \\
& \Rightarrow 1 - e^{2i\bar{k}a} = 1 - e^{-2i\bar{k}b} \\
& \Rightarrow e^{2i\bar{k}L} - 1 = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{\cos(2\bar{k}L) - 1}_{0} + i\underbrace{\sin(2\bar{k}L)}_{0} = 0 \\
& \Rightarrow k = \frac{\pi}{L}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

축 방향 모드의 초기치는 식 (3.60)을 따르고, 굽힘 모드의 초기치는 식 (3.61)을 따른다.

Ⅳ. 수치예제

4.1 수치예제

그림 4.1은 특성방정식 검증을 위한 수치예제이다. 보의 제원은 표 4.1과 같다.

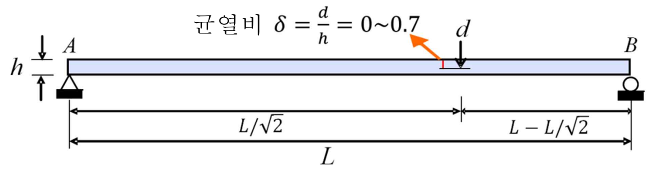


그림 4.1 균열위치 및 균열비를 가정한 수치예제

표 4.1 수치예제 (보의 제원)

Length (mm)	Thickness (mm)	Elastic modulus (GPa)	Poisson ratio	Density (kg/m^3)
198	3	70	0.33	2700

특성방정식을 풀기 위해 뉴턴-랩슨 방법을 적용한다. 비교 검증용으로 ABAQUS를 이용한 유한요소해석 결과를 사용한다. 축-굽힘 방향 커플링을 고려한 효과를 확인하기 위해 굽힘만을 고려했을 때의 결과를 추가하여 비교한다.

4.2 ABAQUS를 이용한 유한요소해석

프로그램은 KISTI supercomputing center의 ABAQUS 6.14/standard를 이용 하였다. 정확한 균열 모델링을 위해서 0.3 × 0.3 mm 크기의 8절점 평면응력 등매개 감소적분 요소 (CPS8R) 6,600개를 사용하였다.

균열면을 따라 중복절점을 정의하고 중복절점끼리 연결 되지 않도록 함으로써 균열을 모사하였다. ABAQUS에서 지원되는 고유치해석을 이용하여 1차부터 15차 모드까지 균열비는 0부터 0.7까지 0.1간격으로 고유진동수를 계산하고 각각의 기저 고유진동수로 기준화 하였다.

4.3 결과 비교

저차 모드 (1-4차)에서 균열에 대한 정규화 고유진동수는 다음과 같다..

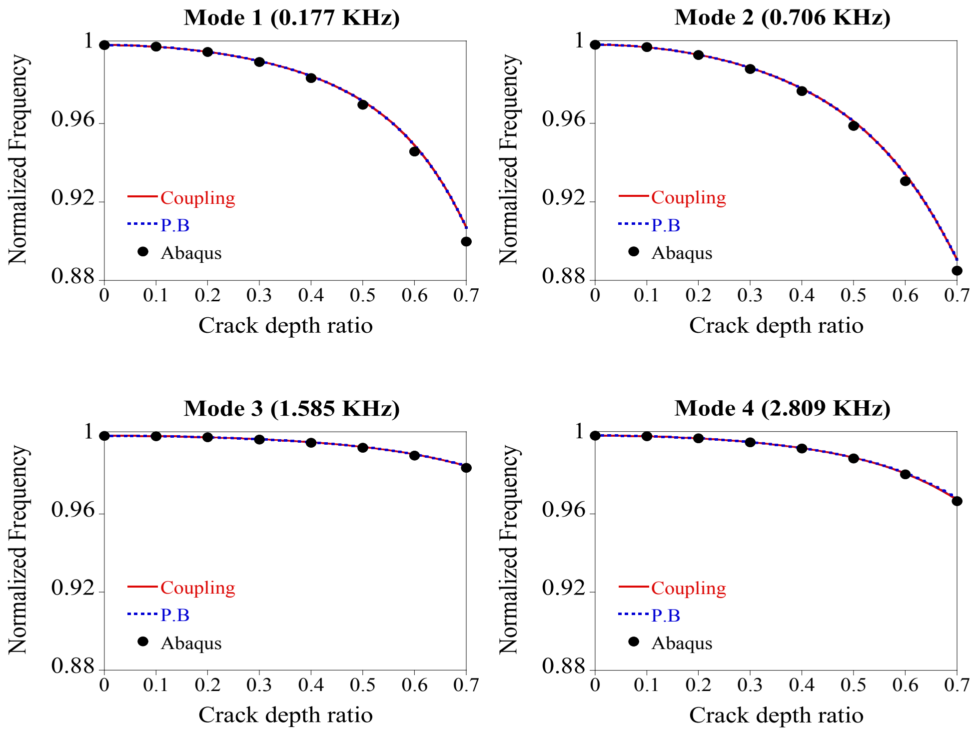


그림 4.2 단순보에서 정규화 고유진동수 변화(1-4차)

그래프의 실선으로 표시된 Coupling은 정식화한 특성방정식의 해를 기저 고유진동수로 기준화 한 값이다. 점선으로 표시된 P.B는 순수 굽힘만을 고려하여 계산한 고유진동수를 기준화 한 값이다. 점으로 표시된 Abaqus는 유한요소해석 결과를 기준화 한 값이다. 그래프의 가로축은 균열비를 나타내고, 세로축은 비손상 상태의 고유진동수로 기준화 시킨 정규화 고유진동수 (Normalize Frequency)를 나타낸다. 각 그래프의 제목은 Mode번호를 나타내고, 괄호안의 값은 비손상 상태의 고유진동수를 나타낸다.

1차 – 3차 모드에서 특성방정식을 푼 결과와 유한요소해석 결과가 차이가 발생하고 4차 모드부터 결과의 차이가 줄어들게 되는데, 이는 초기에 예상

했던 오차이다. 그 원인은 파 전달 관점에서 소멸파가 전달되지 않는다는 가정에서 발생한다. 1차 모드의 경우 한 파장의 길이가 부재 전체 길이 L과 같기 때문에, 반대 지점으로 전달되는 영향을 무시할 수 없게 된다.

고차 모드 (5-15차)에서 균열에 대한 정규화 고유진동수 변화는 다음과 같이 정리 할 수 있다.

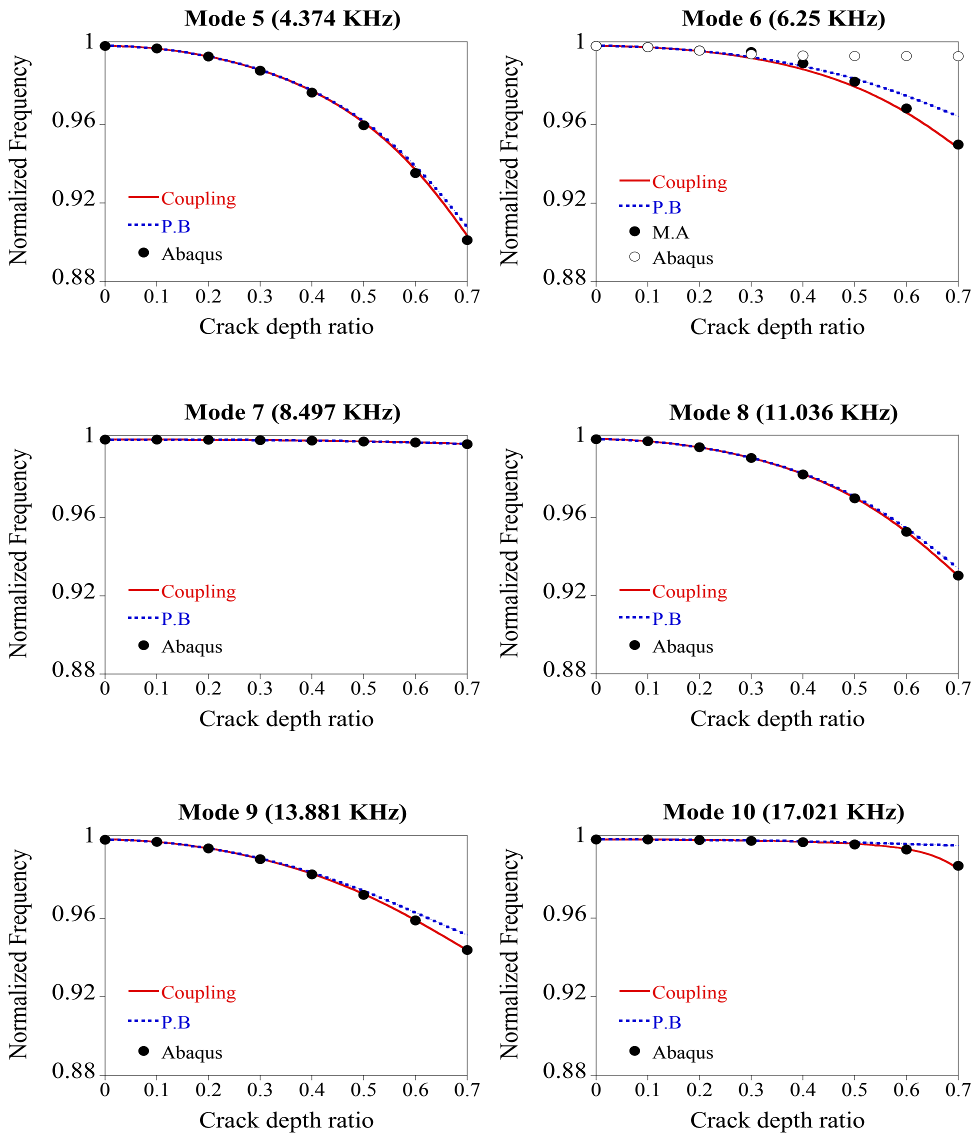


그림 4.3 단순보에서 정규화 고유진동수 변화(5-10차)

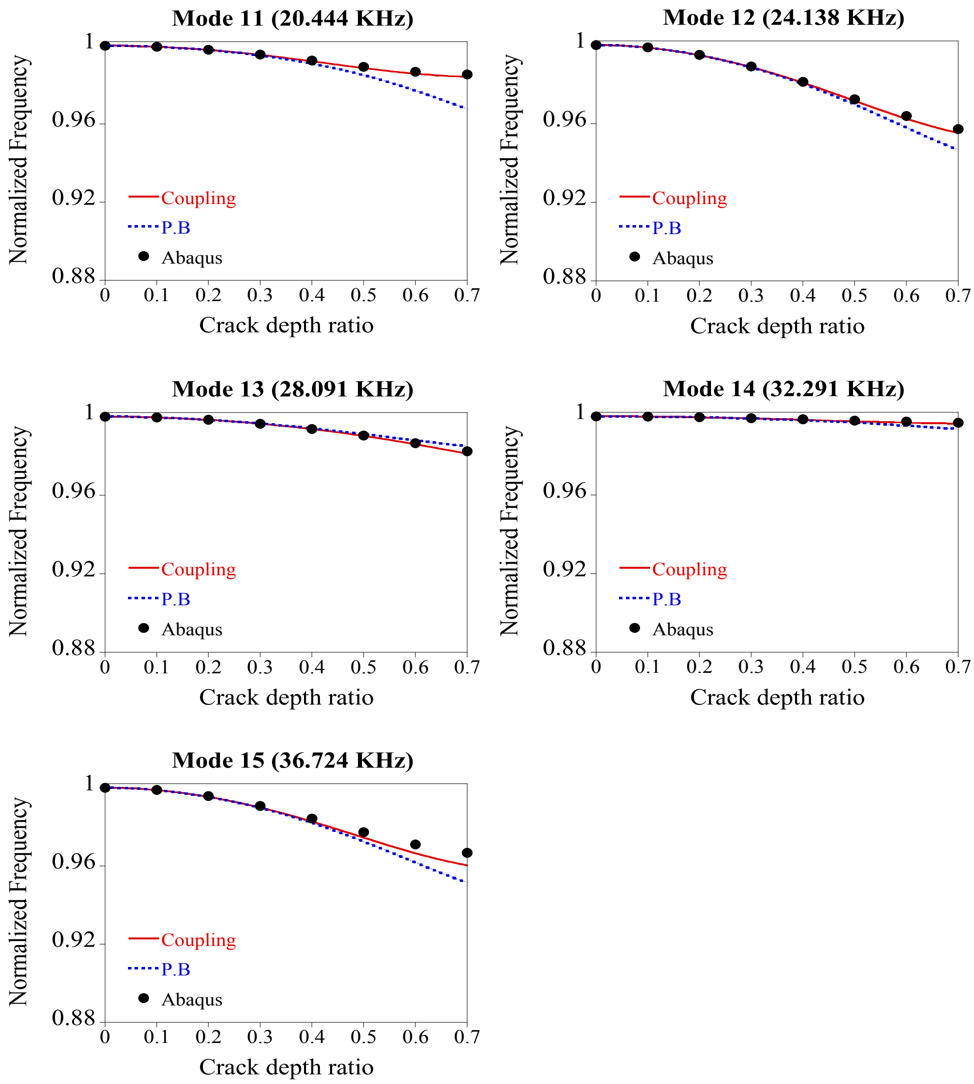


그림 4.4 단순보에서 정규화 고유진동수 변화(11-15차)

6차 모드의 M.A는 ABAQUS에서 축 방향 모드와 굽힘 모드가 교차할 때 생기는 잘못된 해석결과를 모드 교차를 고려해 수정한 값이다. 4차 이상의 모드부터 정식화 방법으로부터 계산된 결과가 유한요소해석 결과와 일치함을 확인할 수 있다. 5차 이상의 모드부터는 굽힘만을 고려했을 때 보다 커플링을 고려한 결과가 더 정확함을 확인 할 수 있다. 특성방정식을 이용한 해는 4차-15차 사이에서 보의 고유진동수를 정확히 계산해내며, 커플링을 반영한 효과는 균열비가 증가할수록 잘 드러남을 확인할 수 있다.

4.4 다른 경계조건에서의 정규화 고유진동수 변화

4.4.1 **Fix-Free** 경계조건

Fix-Free 경계조건에서 균열에 대한 정규화 고유진동수 변화는 다음이 표현된다.

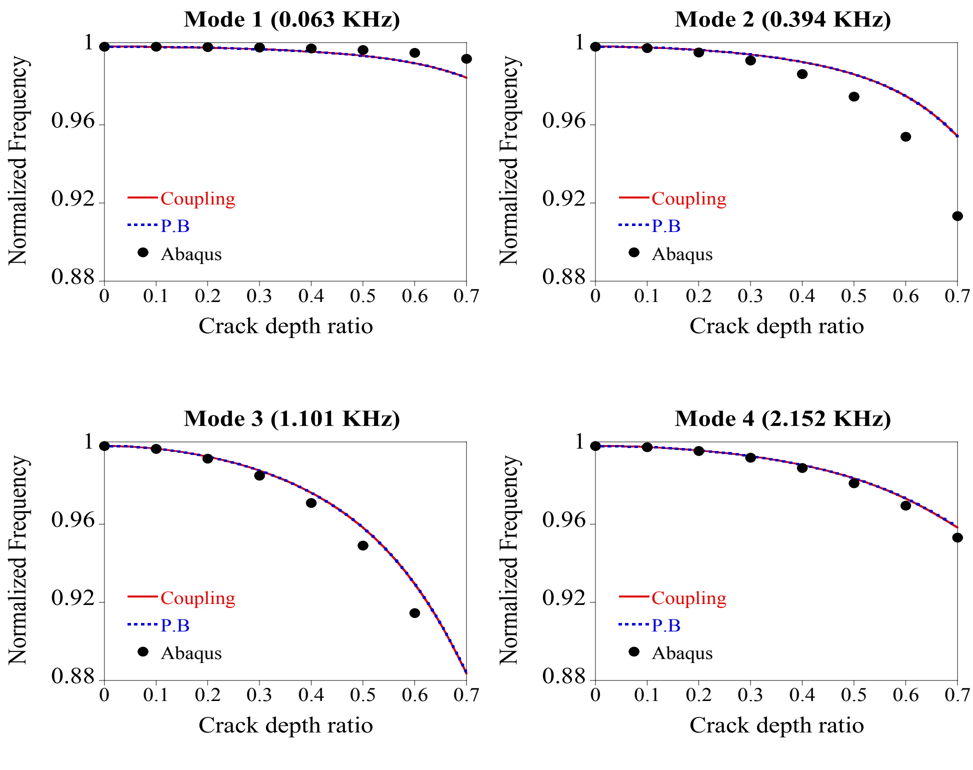


그림 4.5 Fix-Free 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(1-4차)

Fix-Free 경계조건에서 저차 모드에서 발견 할 수 있는 오차의 원인은 단순보의 경우와 동일하다. 4차 이상의 고차모드로 갈수록 파 전달 관점에서 정식화를 진행한데서 오는 오차가 사라짐을 확인 할 수 있다.

고차 모드(5-15차)에서 균열에 대한 정규화 고유진동수 변화는 다음과 같이 정리 할 수 있다.

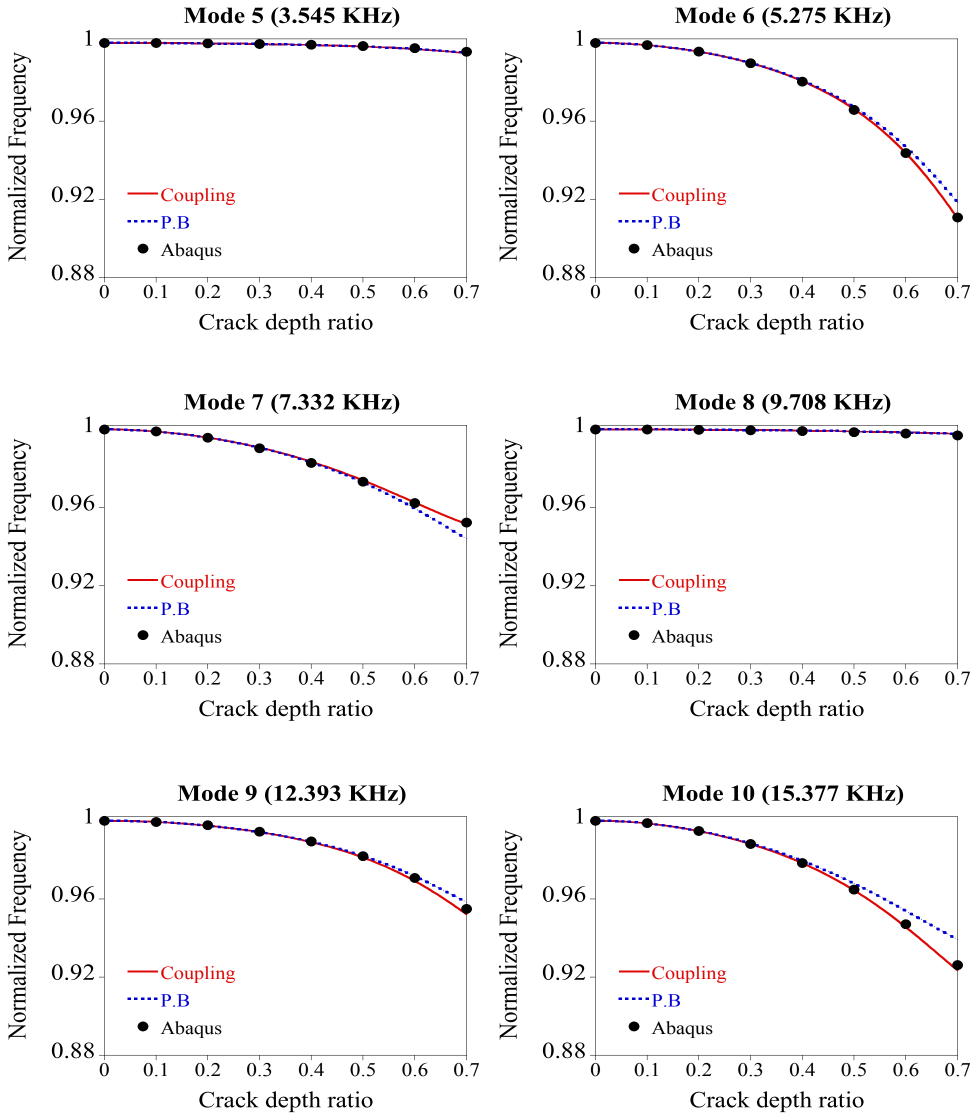


그림 4.6 Fix-Free 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(5-10차)

5차 모드 이상의 고차 모드 영역에서는 저차 모드에서 발생하는 오차가 사라지고 정식화를 통한 결과와 유한요소해석 결과가 잘 일치함을 확인 할 수 있다.

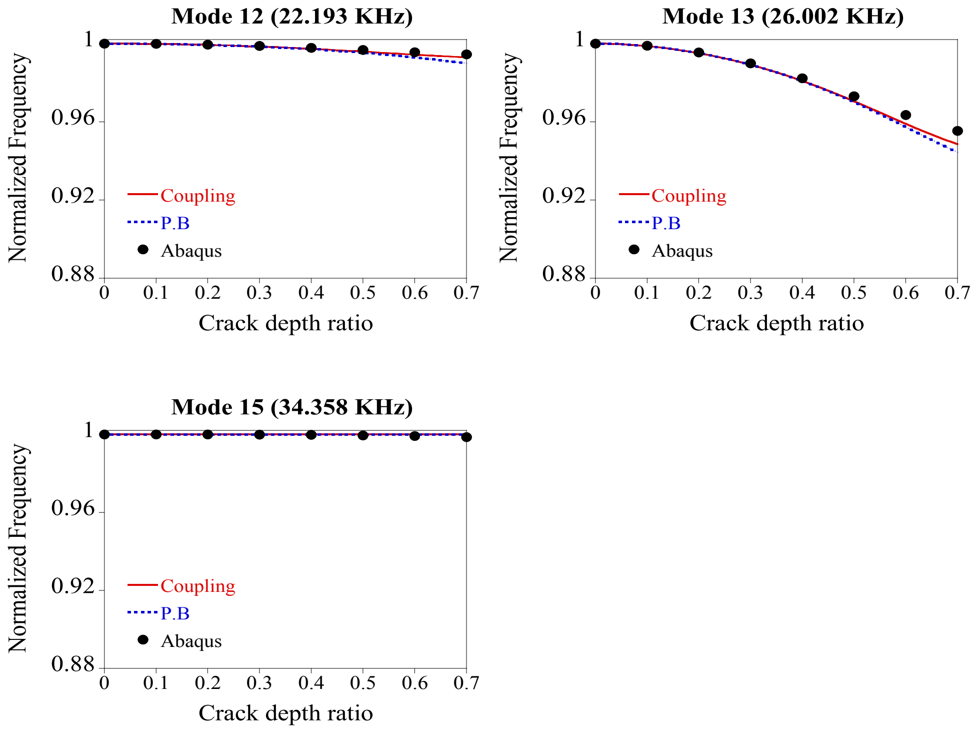


그림 4.7 Fix-Free 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(12-15차)

11차 모드와 14차 모드는 정식화를 통한 해를 구할 수 없었다. 프로그램을 통하여 뉴턴-랩슨 방법 알고리즘에 따라 결과를 계산하면 축 모드와 굽힘 모드가 교차하는 부분이 생기게 된다. 이 때 프로그램은 모드가 교차하는 지점에서 다른 모드의 계산 결과를 따라가게 되는 오류가 발생하게 된다. 이런 오류를 잡기 위해 추가적인 시도를 하였지만 11차, 14차 모드의 정식화를 통한 해석 결과는 구할 수 없었다.

12차 모드를 넘어가면서 해석결과에는 오차가 생기게 되는데, 이 오차는 오일러-베르누이 보 이론의 사용한 모델링의 한계로 판단된다. 하지만 순수 굽힘만을 고려했을 때 보다 더 정확한 결과를 가져온다.

4.4.2 **Fix-Fix** 경계조건

Fix-Fix 경계조건에서 균열에 대한 정규화 고유진동수 변화는 다음이 표현된다.

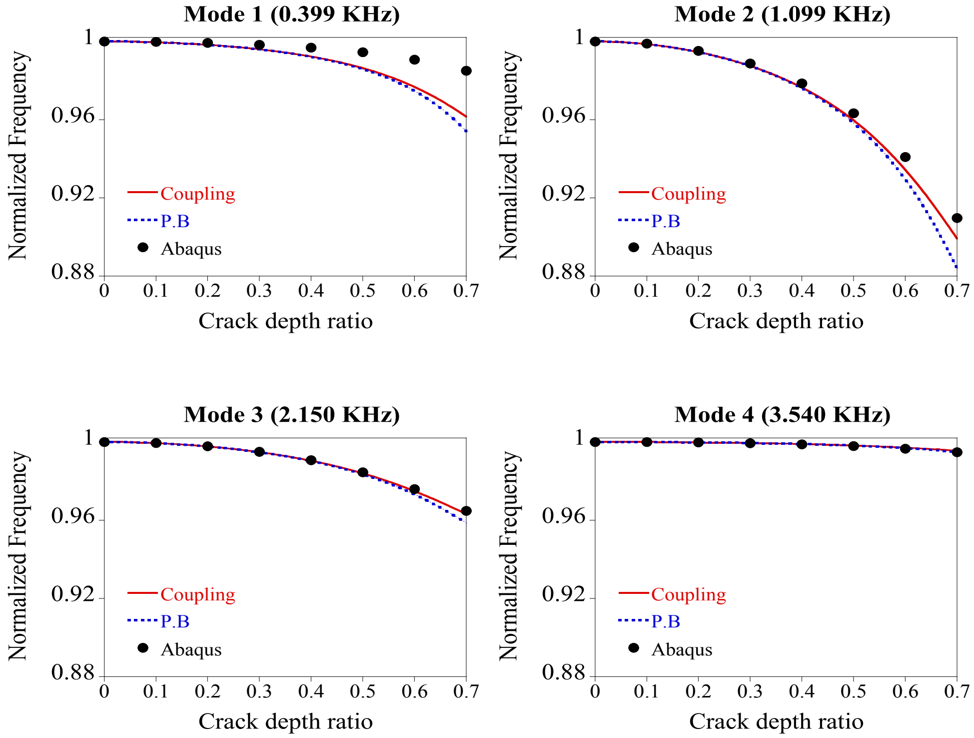


그림 4.8 Fix-Fix 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(1-4차)

저차 모드에서 발생하는 오차는 예상된 오차이며, 그 원인은 다른 경계조건과 동일하다.

고차 모드(5-15차)에서 균열에 대한 정규화 고유진동수 변화는 다음과 같이 정리 할 수 있다.

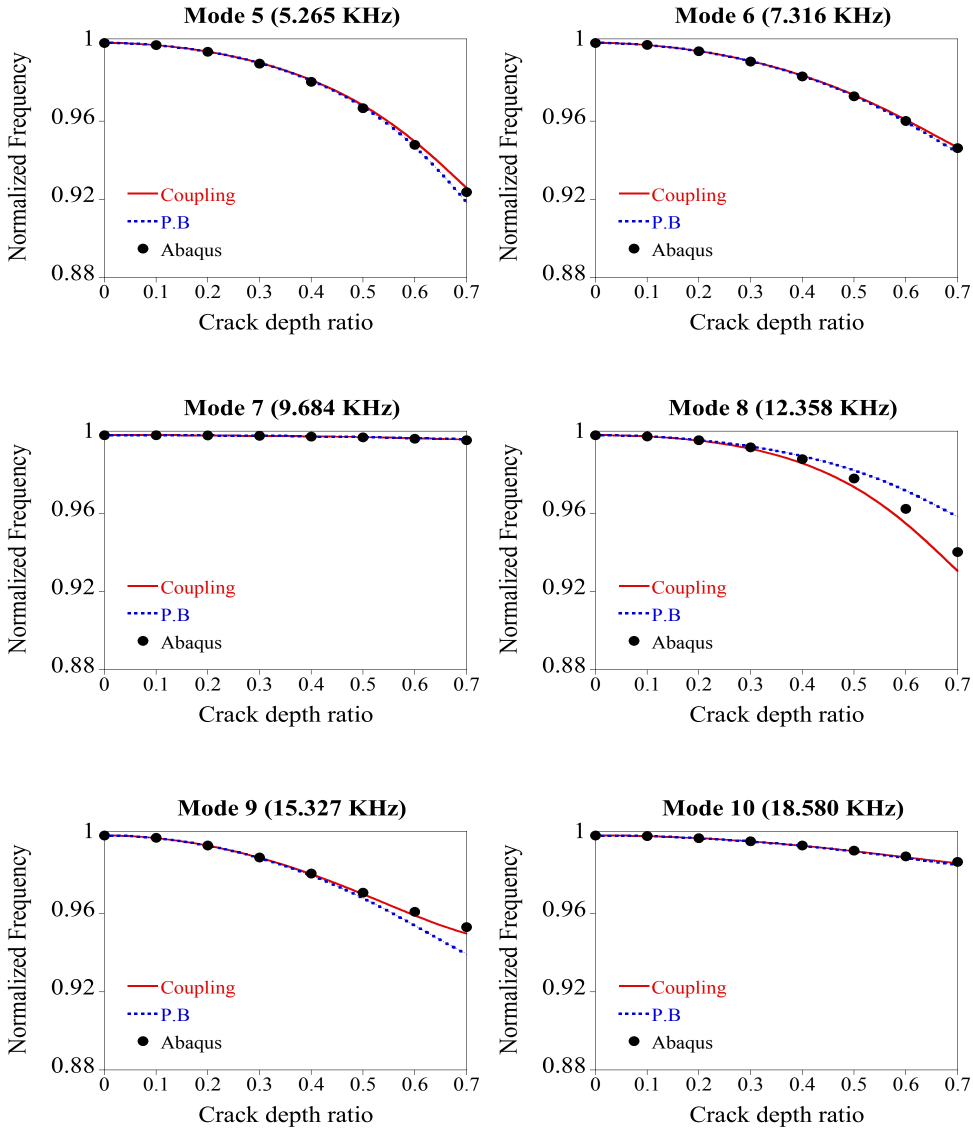


그림 4.9 Fix-Fix 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(5-10차)

Fix-Fix 경계조건인 경우 8차 모드에서 큰 오차를 확인 할 수 있다. 원인은 추후 지속적인 연구를 통해 규명해야한다. 특성방정식의 해는 순수 굽힘만을 고려했을 때보다 유한요소 해석에 가까우며 값이 변화하는 흐름을 유사

하게 따라간다.

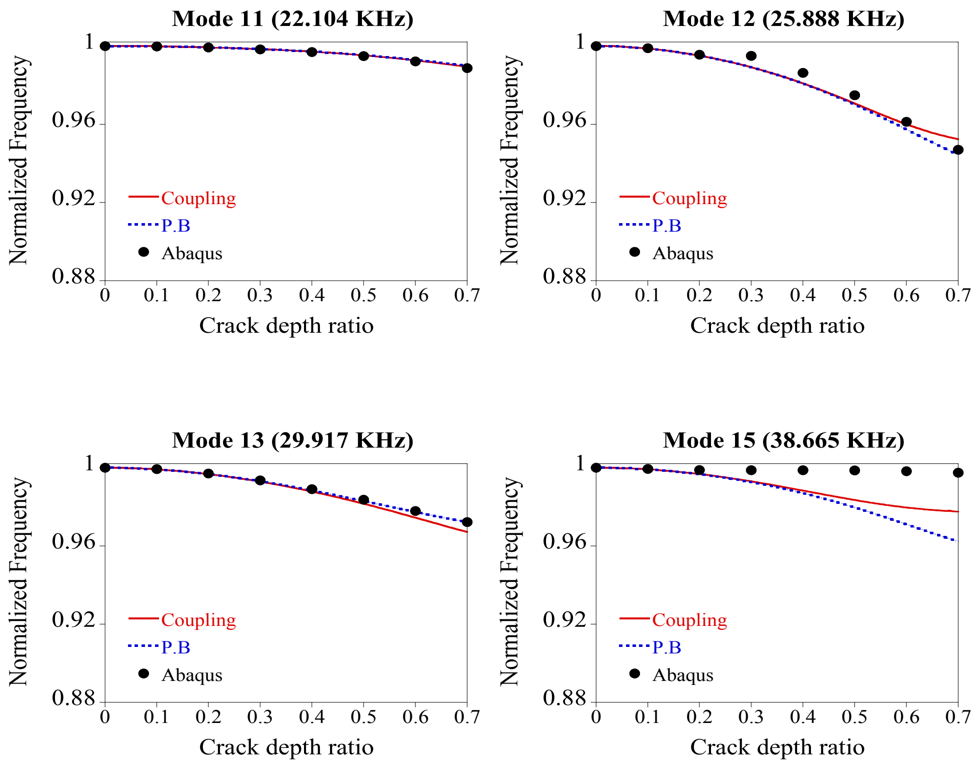


그림 4.10 Fix-Fix 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(11-15차)

14차 모드는 정식화를 통한 해를 구할 수 없었다. 원인은 Fix-Free 경계조건의 경우와 동일하다. 12차 모드에서는 다른 모드에 비해 눈에 띄는 오차를 보인다. 13차 모드에서는 순수 굽힘만을 고려했을 때의 값이 더 정확하게 보이는 것으로 관찰된다. 15차 모드에서는 다른 모드에 비해 큰 오차를 보인다. 세 가지 모드에서 관찰되는 오차의 원인은 찾아내지 못했다. 추후 발전된 형태의 연구로 원인을 규명해야 한다.

4.4.3 **Free-Free** 경계조건

Free-Free 경계조건에서 균열에 대한 정규화 고유진동수 변화는 다음이 표현된다.

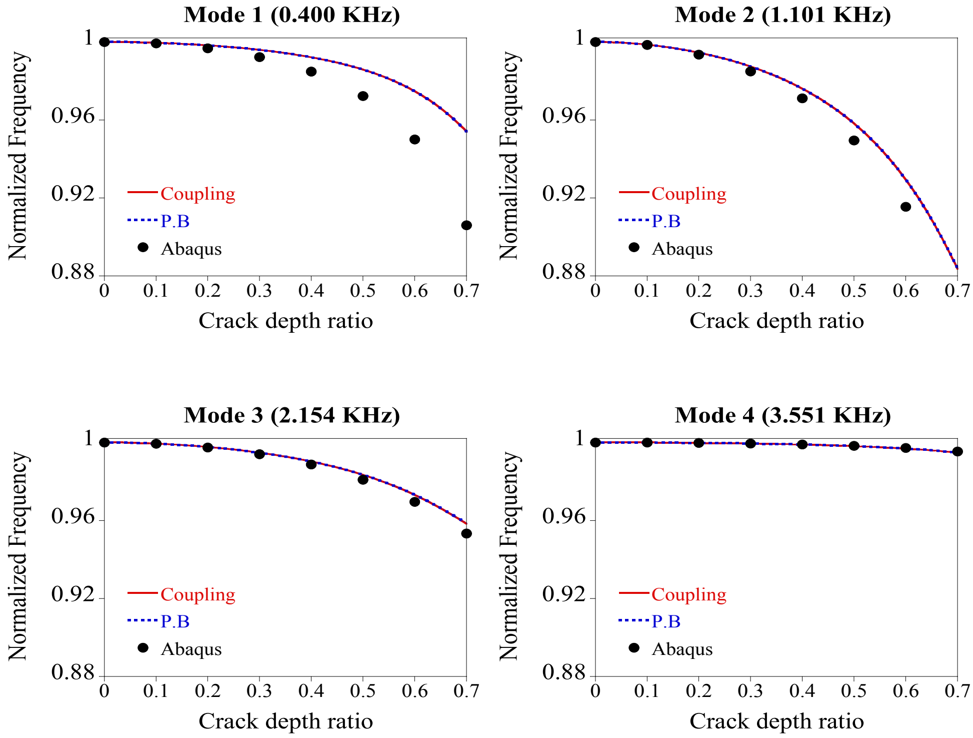


그림 4.11 Free-Free 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(1-4차)

저차 모드에서 발생하는 오차는 예상된 오차이며, 그 원인은 다른 경계조건과 동일하다.

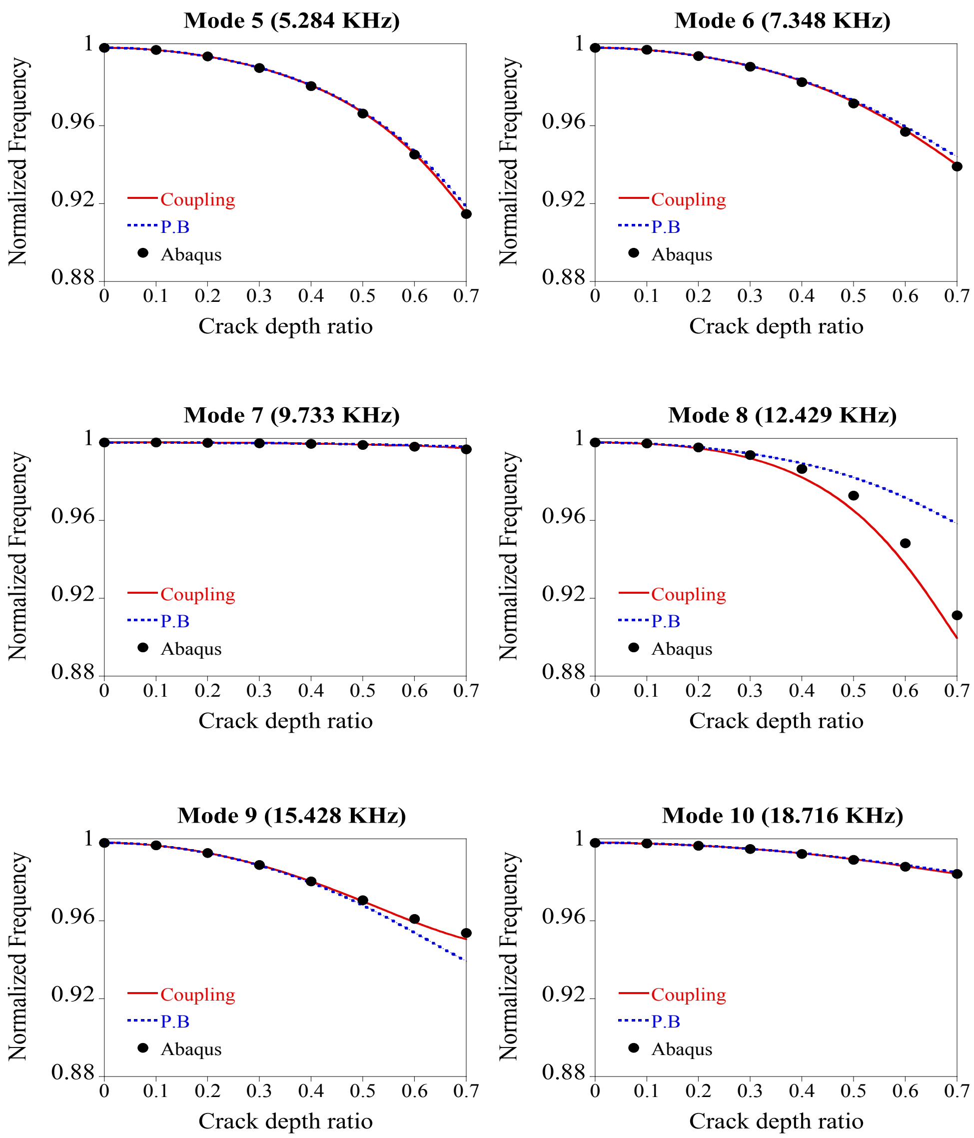


그림 4.12 Free-Free 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(5-10차)

다른 모드들은 결과를 잘 반영하지만, 8차 모드에서 오차를 관찰 할 수 있다. 특성방정식의 해는 순수 굽힘만을 고려했을 때보다 유한요소해석 결과에 가까우며, 값이 변화하는 흐름도 유사하게 관찰된다.

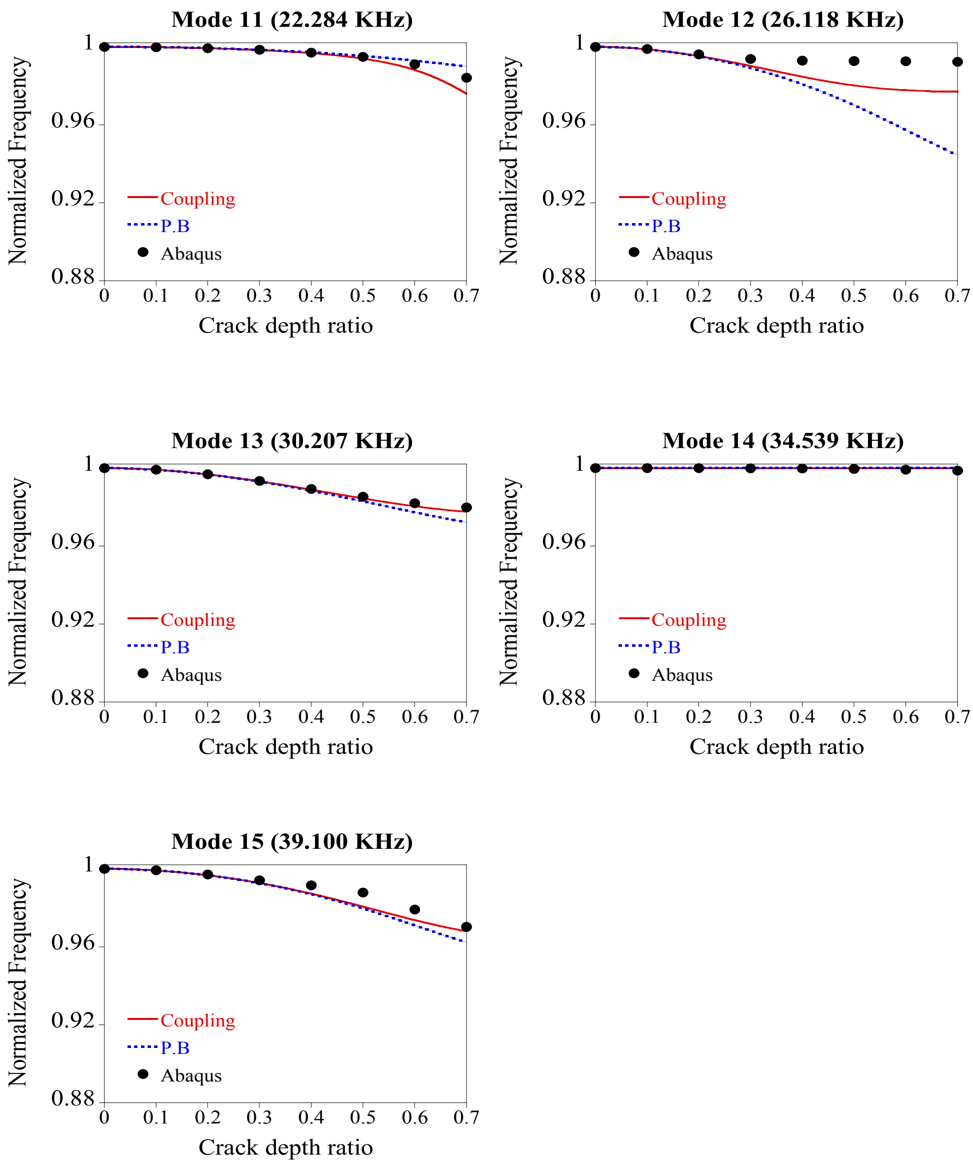


그림 4.13 Free-Free 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(11-15차)

11차 모드는 균열비가 커지면 오차가 다소 발생하지만, 값이 변화하는 흐름은 유사히 따라간다. 12차 모드에서 발생하는 오차는 추후 연구로 원인 규명이 필요하다. 15차 모드에서 보이는 오차는 오일러-베르누이 보 이론의 한계로 판단한다.

4.4.3 **Fix-Hinge 경계조건**

Fix-Hinge 경계조건에서 균열에 대한 정규화 고유진동수 변화는 다음이 표현된다.

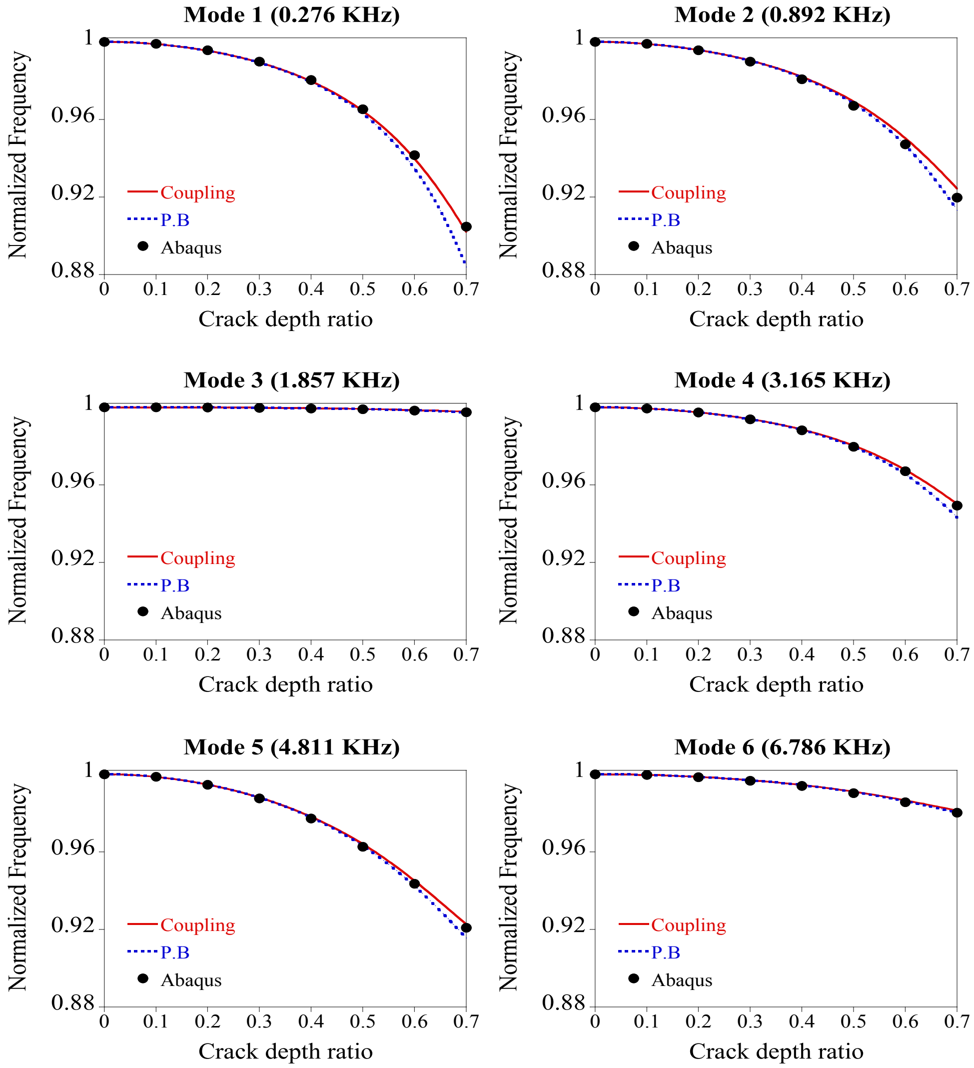


그림 4.14 Fix-Hinge 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(1-6차)

저차 모드에서 발생하는 오차는 예상된 오차이며, 그 원인은 다른 경계조건과 동일하다. Fix-Hinge 경계조건에서는 2차 모드를 제외하면 저차모드부터 결과가 잘 일치하는 것을 관찰 할 수 있다.

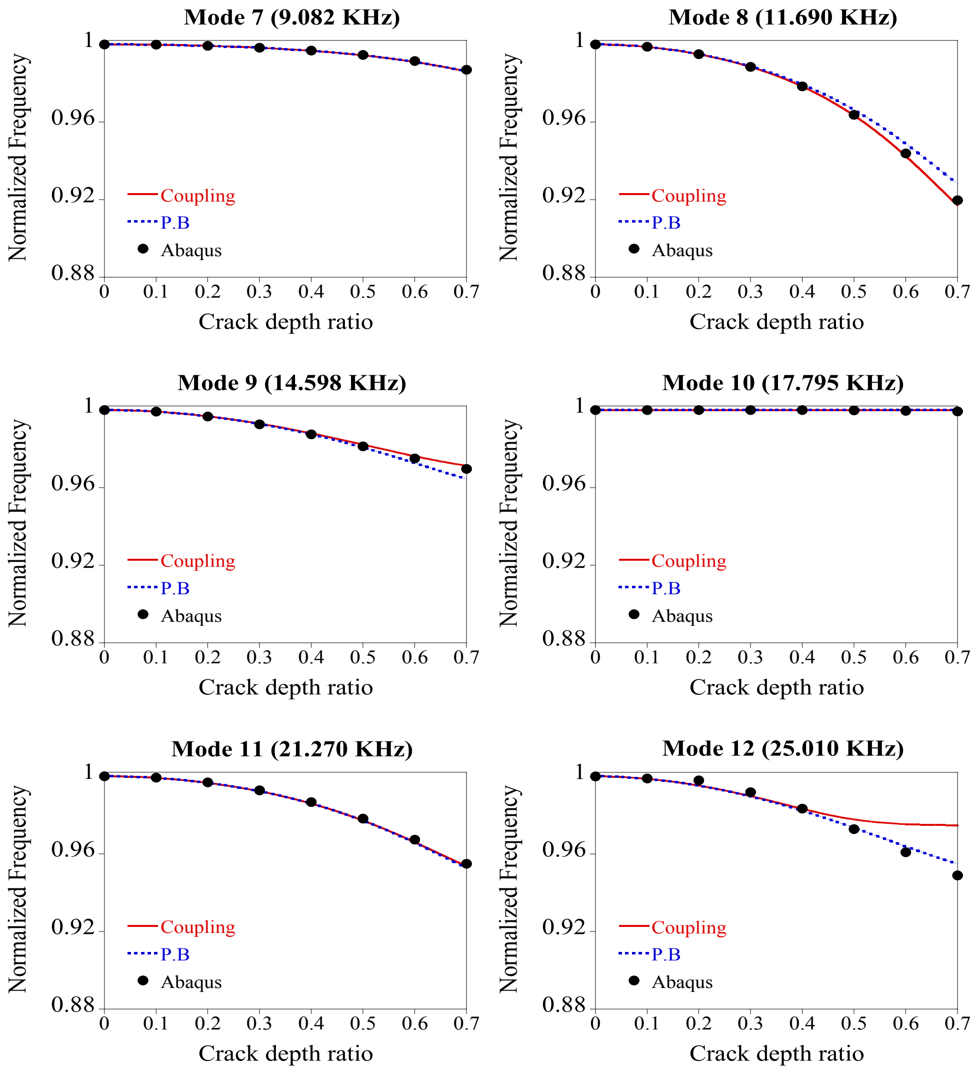


그림 4.15 Fix-Hinge 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(7-12차)

5차 모드를 지나면서 특성방정식의 해와 유한요소해석 결과가 잘 일치하는 것을 확인 할 수 있다.

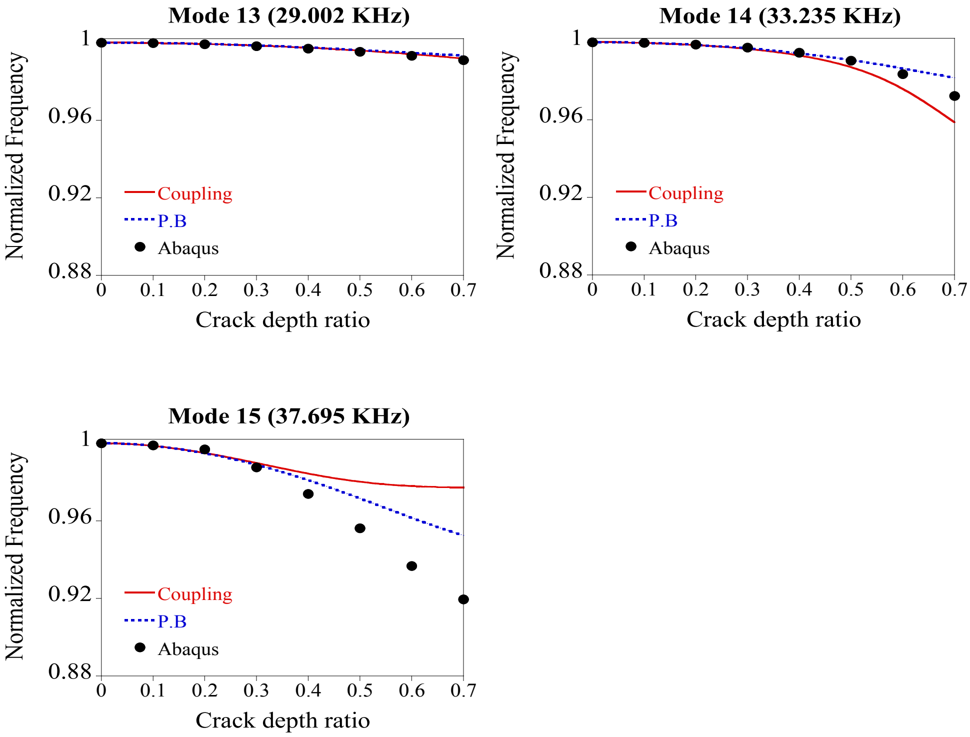


그림 4.16 Fix-Hinge 경계조건에서 정규화 고유진동수 변화(13-15차)

비손상 상태의 진동수를 기준으로 했을 때 특성방정식의 해와 유한요소해석의 결과의 상대오차를 계산했다. 모드 수가 증가할수록 상대오차가 커지는 것을 확인했다. 2차 모드부터 12차 모드까지는 상대오차가 5% 이하의 결과를 보였지만, 12차 모드부터는 상대오차의 증가폭이 커졌고 15차 모드에서는 약 10%의 오차가 발생하였다. 원인은 오일러-베르누이 보 이론으로 모델링한 한계에서 오는 것으로 판단된다. 고차 모드에서 민감한 미소균열 발생 시 고유진동수의 변화도 이러한 한계로 인해 특성방정식의 해와 굽힘만을 고려한 해의 차이를 알 수 없었다. 이러한 문제들을 해결하기 위해서는 티모셴코 보 이론을 적용하여 15차 모드 이상의 영역을 관찰하는 것으로 해결될 수 있다고 판단된다. Fix-Hinge 지점조건에서 12차, 14차, 15차 모드와 같이, 각 지점조건의 특정 모드에서 발생하는 큰 오차의 원인은 찾지 못했다. 추후 발전된 형태의 연구로 원인규명이 필요하다.

Ⅴ. 결론

기존의 진동론 관점을 벗어나 파 전달 관점에서 균열이 생긴 보의 축-굽힘 방향 커플링을 고려하여 고유진동수 감소를 예측 할 수 있는 새로운 방향의 정식화를 진행하였다. 정식화 결과 Closed-form 형태의 단일 특성방정식을 제시하였다. 매개변수화를 통해 다양한 지점 조건에서 동일한 형태로 사용이 가능하다. 제안된 특성방정식을 뉴턴-랩슨 방법을 적용하여 균열에 따른 기준화된 고유진동수를 예측하고 유한요소해석 결과와 비교하여 타당성을 검증하였다. 단순보의 경우 1-3차 저차모드에서 약간의 오차가 발생했으나 전반적으로 잘 일치하는 결과를 보였다. 이 오차는 파 전달 관점의 정식화에서 소멸파 모드를 무시함으로써 발생한다. 4차 이상의 고차모드에서는 소멸파 모드의 영향이 급속히 줄어들기 때문에 이로 인해 발생하는 오차가 사라졌다. 4-15차 고차모드에서는 특성방정식의 해와 유한요소해석 결과가 잘 일치함을 확인했다. 15차 이상의 고차모드에서 오일러-베르누이 보 이론의 한계로 인해 오차가 발생했다. 오일러-베르누이 보 이론의 한계에 의한 오차를 해결하기 위해 고차모드를 설명 할 수 있는 티모셴코 보 이론을 적용해야 할 것으로 판단된다. 추가적으로 Fix-Free, Fix-Fix, Free-Free, Fix-Hinge의 경계조건에서 검증을 실행한 결과 단순보의 결과와 유사한 경향을 보였다. 기존 연구의 1차-3차 저차모드 해석에서 벗어나 4차-15차 고차모드의 해석결과를 확인할 수 있었다. 결론적으로 축-굽힘 커플링을 고려한 결과에서 균열비가 증가하거나, 관심 고유 모드가 고차로 올라갈수록 굽힘만을 고려한 경우보다 균열에 의한 고유진동수의 감소를 더 정확하게 예측하였다.

참 고 문 헌

1) Rice, J. R., & Levy, N. (1972). The part-through surface crack in an elastic plate. Journal of Applied Mechanics, 39(1), 185-194.

2) Dimarogonas, A. D. (1996). Vibration of cracked structures: a state of the art review. Engineering fracture mechanics, 55(5), 831-857.

3) Palacz, M., & Krawczuk, M. (2002). Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method. Computers & structures, 80(24), 1809-1816.

4) Kim, J. T., Ryu, Y. S., Cho, H. M., & Stubbs, N. (2003). Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method. Engineering structures, 25(1), 57-67.

5) Salawu, O. S. (1997). Detection of structural damage through changes in frequency: a review. Engineering structures, 19(9), 718-723.

6) Ostachowicz, W. M., & Krawczuk, M. (1991). Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. Journal of sound and vibration, 150(2), 191-201.

7) Vestroni, F., & Capecchi, D. (2000). Damage detection in beam structures based on frequency measurements. Journal of Engineering Mechanics, 126(7), 761-768.

8) Chinchalkar, S. (2001). Determination of crack location in beams using

natural frequencies. Journal of Sound and vibration, 247(3), 417-429.

9) Silva, J. M. E., & Gomes, A. A. (1990). Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams. Experimental Mechanics, 30(1), 20-25.

10) Owolabi, G. M., Swamidas, A. S. J., & Seshadri, R. (2003). Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions. Journal of sound and vibration, 265(1), 1-22.

11) Kim, J. T., & Stubbs, N. (2003). Crack detection in beam-type structures using frequency data. Journal of Sound and Vibration, 259(1), 145-160.

12) Zheng, D. Y., & Kessissoglou, N. J. (2004). Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method. Journal of Sound and vibration, 273(3), 457-475

13) Lee, J. (2009). Identification of multiple cracks in a beam using natural frequencies. Journal of Sound and Vibration, 320(3), 482-490.

14) Rizos, P. F., Aspragathos, N., & Dimarogonas, A. D. (1990). Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. Journal of sound and vibration, 138(3), 381-388.

15) Narkis, Y. (1994). Identification of crack location in vibrating simply supported beams. Journal of sound and vibration, 172(4), 549-558.

16) Fernandez-Saez, J., Rubio, L., & Navarro, C. (1999). Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams. Journal of Sound and Vibration, 225(2), 345-352.

17) Zheng, D. Y., & Fan, S. C. (2001). Natural frequency changes of a cracked Timoshenko beam by modified Fourier series. Journal of Sound and Vibration, 246(2), 297-317.

부 록

부록 A-1 식 (3.24) 정식화 과정

$$if_{FA}k(A_1 - A_2) + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)A_4 - (\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_6$$
$$- i\bar{k}B_3 + i\bar{k}B_4 - \bar{k}\underbrace{B_5}_{A_6} = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1+e^{2ika})A_1 + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 + (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)(e^{2i\bar{k}a})A_3$$
$$-(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_6 - i\bar{k}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3 = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1+e^{2ika})A_1 + \{i\bar{k}(1+e^{2i\bar{k}a}) + f_{FF}L\bar{k}^2(1-e^{2i\bar{k}a})\}A_3 - i\bar{k}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3$$
$$-(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\{-\frac{i}{2}(1+e^{2i\bar{k}a})A_3 + \frac{i}{2}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1+e^{2ika})A_1 + \{i\bar{k}(1+e^{2i\bar{k}a}) + f_{FF}L\bar{k}^2(1-e^{2i\bar{k}a})\}A_3 - i\bar{k}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3$$
$$+ i(\bar{k} + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2)\{(1+e^{2i\bar{k}a})A_3 - (1+e^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1+e^{2ika})A_1 + \{i\bar{k}(1+e^{2i\bar{k}a}) + f_{FF}L\bar{k}^2(1-e^{2i\bar{k}a})\}A_3 - i\bar{k}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3$$
$$+ i\{(\bar{k} + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2)(1+e^{2i\bar{k}a})A_3 - (\bar{k} + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2)(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1+e^{2ika})A_1 + \{i\bar{k}(1+e^{2i\bar{k}a}) + f_{FF}L\bar{k}^2(1-e^{2i\bar{k}a})\}A_3 - i\bar{k}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3$$
$$+ i\{\bar{k}(1+e^{2i\bar{k}a})A_3 + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2(1+e^{2i\bar{k}a})A_3 - \bar{k}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3$$
$$-\frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{if_{FA}k(1+e^{2ika})}_{e_1}A_1 + \underbrace{[2i\bar{k}(1+e^{2i\bar{k}a}) + f_{FF}L\bar{k}^2\{(1-e^{2i\bar{k}a}) + \frac{i}{2}(1+e^{2i\bar{k}a})\}]}_{\bar{e}_3}A_3$$
$$\underbrace{-\{2i\bar{k}(1+e^{-2i\bar{k}b}) + \frac{i}{2}f_{FF}L\bar{k}^2(1+e^{-2i\bar{k}b})\}}_{\bar{f}_3}B_3 = 0$$

부록 A-2 단순보에서 Ψ_0 정식화 과정 - 식 (3.37)

$$\Psi_0 = \underbrace{t_a\bar{t}_a\beta_1 q_1}_{\psi_{01}} + \underbrace{t_a\bar{t}_b q_1\alpha_1}_{\psi_{02}} + \underbrace{(2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\beta_1}_{\psi_{03}} + \underbrace{(2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_1}_{\psi_{04}}$$

$$= \{2it_a(t_b-2)\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) - 2it_a(t_b-2)\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b$$
$$-2i(t_a-2)t_b\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) + 2i(t_a-2)t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b\}\bar{k}$$

$$= 2i[t_a(t_b-2)\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) - t_a(t_b-2)\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b$$
$$-(t_a-2)t_b\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) + (t_a-2)t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b]\bar{k}$$

$$= 2i[(t_at_b-2t_a)(\bar{t}_a^2\bar{t}_b-2\bar{t}_a^2) - (t_at_b-2t_a)(\bar{t}_a^2\bar{t}_b-2\bar{t}_a\bar{t}_b)$$
$$-(t_at_b-2t_b)(\bar{t}_a^2\bar{t}_b-2\bar{t}_a^2) + (t_at_b-2t_b)(\bar{t}_a^2\bar{t}_b-2\bar{t}_a\bar{t}_b)]\bar{k}$$

$$= 2i[(t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_at_b\bar{t}_a^2) - 2t_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 4t_a\bar{t}_a^2$$
$$-(t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b) + (2t_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 4t_a\bar{t}_a\bar{t}_b)$$
$$-(t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_at_b\bar{t}_a^2) + (2t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 4t_b\bar{t}_a^2)$$
$$+(t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b) - (2t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 4t_b\bar{t}_a\bar{t}_b)]\bar{k}$$

$$= 2i[t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_at_b\bar{t}_a^2 - 2t_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 4t_a\bar{t}_a^2$$
$$-t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 2t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b + 2t_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 4t_a\bar{t}_a\bar{t}_b$$
$$-t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 2t_at_b\bar{t}_a^2 + 2t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 4t_b\bar{t}_a^2$$
$$+t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b - 2t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 4t_b\bar{t}_a\bar{t}_b]\bar{k}$$

$$= 2i(4t_a\bar{t}_a^2 - 4t_a\bar{t}_a\bar{t}_b - 4t_b\bar{t}_a^2 + 4t_b\bar{t}_a\bar{t}_b)\bar{k}$$

$$= 8i\{t_a\bar{t}_a(\bar{t}_a-\bar{t}_b) - t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a-\bar{t}_b)\}\bar{k}$$

$$= 8i(t_a-t_b)\bar{t}_a(\bar{t}_a-\bar{t}_b)\bar{k}$$

부록 A-3 단순보에서 Ψ_{FF} 정식화 과정 - 식 (3.39)

$$\Psi_{FF} = t_a\bar{t}_a q_1\beta_{FF} + t_a\bar{t}_b q_1\alpha_{FF} + (2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\beta_{FF} + (2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_{FF}$$

$$= t_a\bar{t}_a\{\bar{t}_a(t_b-2)\}\{-\frac{i}{2}(2-\bar{t}_b)L\bar{k}^2\} + t_a\bar{t}_b\{\bar{t}_a(t_b-2)\}\{\bar{t}_a+\frac{i}{2}(2-\bar{t}_a)\}L\bar{k}^2$$

$$+(2-t_a)t_b\bar{t}_a^2\{-\frac{i}{2}(2-\bar{t}_b)L\bar{k}^2\} + (2-t_a)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\{\bar{t}_a+\frac{i}{2}(2-\bar{t}_a)\}L\bar{k}^2$$

$$=[\frac{i}{2}t_a(t_b-2)\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) + t_a(t_b-2)\bar{t}_a\bar{t}_b\{\bar{t}_a-\frac{i}{2}(\bar{t}_a-2)\}$$

$$-\frac{i}{2}(t_a-2)t_b\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) - (t_a-2)t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\{\bar{t}_a-\frac{i}{2}(\bar{t}_a-2)\}]L\bar{k}^2$$

$$=[\frac{i}{2}t_a(t_b-2)\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) + t_a(t_b-2)\bar{t}_a^2\bar{t}_b - \frac{i}{2}t_a(t_b-2)\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b$$

$$-\frac{i}{2}(t_a-2)t_b\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) - (t_a-2)t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + \frac{i}{2}(t_a-2)t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b]L\bar{k}^2$$

$$=\frac{i}{2}[t_a(t_b-2)\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) - 2it_a(t_b-2)\bar{t}_a^2\bar{t}_b - t_a(t_b-2)\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b$$

$$-(t_a-2)t_b\bar{t}_a^2(\bar{t}_b-2) + 2i(t_a-2)t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + (t_a-2)t_b\bar{t}_a(\bar{t}_a-2)\bar{t}_b]L\bar{k}^2$$

$$=\frac{i}{2}[(t_at_b\bar{t}_a^2 - 2t_a\bar{t}_a^2)(\bar{t}_b-2) - 2i(t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b) - (t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b - 2t_a\bar{t}_a\bar{t}_b)(\bar{t}_a-2)$$

$$-(t_at_b\bar{t}_a^2 - 2t_b\bar{t}_a^2)(\bar{t}_b-2) + 2i(t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b) + (t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b - 2t_b\bar{t}_a\bar{t}_b)(\bar{t}_a-2)]L\bar{k}^2$$

$$=\frac{i}{2}[t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_at_b\bar{t}_a^2 + 4t_a\bar{t}_a^2 - 2it_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 4it_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b$$

$$-t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 2t_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 2t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b - 4t_a\bar{t}_a\bar{t}_b$$

$$-t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 2t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b + 2t_at_b\bar{t}_a^2 - 4t_b\bar{t}_a^2 + 2it_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 4it_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b$$

$$+t_at_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b - 2t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b + 4t_b\bar{t}_a\bar{t}_b]L\bar{k}^2$$

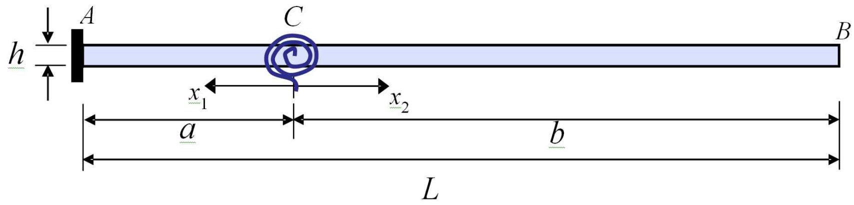
$$=\frac{i}{2}[4t_a\bar{t}_a^2+4it_a\bar{t}_a^2\bar{t}_b-4t_a\bar{t}_a\bar{t}_b-4t_b\bar{t}_a^2-4it_b\bar{t}_a^2\bar{t}_b+4t_b\bar{t}_a\bar{t}_b]L\bar{k}^2$$

$$=2i\bar{t}_a[t_a\bar{t}_a+it_a\bar{t}_a\bar{t}_b-t_a\bar{t}_b-t_b\bar{t}_a-it_b\bar{t}_a\bar{t}_b+t_b\bar{t}_b]L\bar{k}^2$$

$$=2i\bar{t}_a[\bar{t}_a(t_a-t_b)-\bar{t}_b(t_a-t_b)+i\bar{t}_a\bar{t}_b(t_a-t_b)]L\bar{k}^2$$

$$=2i\bar{t}_a(t_a-t_b)[\bar{t}_a-\bar{t}_b+i\bar{t}_a\bar{t}_b]L\bar{k}^2$$

부록 A-4 **Fix-Free** 지점조건에서 특성방정식 정식화



Fix-Free 모델링

축 방향 변위와 굽힘 방향 변위, 균열지점에서 적합조건식, 평형방정식은 단순보의 경우와 동일하다. 이 과정은 식 (3.1) ~ 식 (3.6)을 참고한다. 부록에는 이후 과정부터 첨부한다.

1. 변위 경계조건

(a) A점에서 축 방향 변위:

$$
\begin{aligned}
& u_L(a) = 0 \\
& \Rightarrow A_1 e^{ika} + A_2 e^{-ika} = 0 \\
& \Rightarrow A_2 = -A_1 e^{2ika}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(b) A점에서 굽힘 방향 변위:

$$
\begin{aligned}
& w_L(a) = 0 \\
& \Rightarrow A_3 e^{i\bar{k}a} + A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(c) A점에서 처짐각:

$$
\begin{aligned}
& w_L'(a) = 0 \\
& \Rightarrow (i\bar{k}) A_3 e^{i\bar{k}a} + (-i\bar{k}) A_4 e^{-i\bar{k}a} + \bar{k} A_5 e^{\bar{k}a} = 0 \\
& \Rightarrow iA_3 e^{i\bar{k}a} - iA_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

2. 힘의 경계조건

(a) B점에서 축력:

$$\begin{aligned} & EA\,u_R'(b)=0 \\ & \Rightarrow (-ik)B_1e^{-ikb}+(ik)B_2e^{ikb}=0 \\ & \Rightarrow B_1e^{-ikb}-B_2e^{ikb}=0 \\ & \Rightarrow B_2=B_1e^{-2ikb}(B_1=B_2e^{2ikb}) \end{aligned} \tag{4}$$

(b) B점에서 전단력:

$$\begin{aligned} & EI\,w_R'''(b)=0 \\ & \Rightarrow (i\bar{k}^3)B_3e^{-i\bar{k}b}+(-i\bar{k}^3)B_4e^{i\bar{k}b}+(\bar{k}^3)B_6e^{\bar{k}b}=0 \\ & \Rightarrow iB_3e^{-i\bar{k}b}-iB_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}b}=0 \end{aligned} \tag{5}$$

(c) B점에서 모멘트:

$$\begin{aligned} & EI\,w_R''(b)=0 \\ & \Rightarrow (-\bar{k}^2)B_3e^{-i\bar{k}b}+(-\bar{k}^2)B_4e^{i\bar{k}b}+(\bar{k}^2)B_6e^{\bar{k}b}=0 \\ & \Rightarrow -B_3e^{-i\bar{k}b}-B_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}b}=0 \end{aligned} \tag{6}$$

정리된 식을 매트릭스 형태로 표현하면 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} 1-if_{AA}Lk & 1+if_{AA}Lk & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & 0 & \frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ if_{FA}k & -if_{FA}k & i\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2 & -(i\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & -(\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & 0 & -i\bar{k} & i\bar{k} & -\bar{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & 0 & -1 & 0 & 0 & i & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ e^{2ika} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ie^{i\bar{k}a} & -ie^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2ikb} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ie^{-i\bar{k}b} & -ie^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-i\bar{k}b} & -e^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{7}$$

식 (3.3)과 식 (3.6)을 더하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
&A_3 + A_4 + A_6 - B_3 - B_4 - B_5 - A_3 - A_4 + A_6 + B_3 + B_4 - B_5 = 0 \\
&\Rightarrow 2A_6 - 2B_5 = 0 \\
&\Rightarrow B_5 = A_6
\end{aligned}
\tag{8}
$$

식 (2)에서 식(3)을 빼면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
&A_3 e^{i\bar{k}a} + A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} - iA_3 e^{i\bar{k}a} + iA_4 e^{-i\bar{k}a} - A_5 e^{\bar{k}a} = 0 \\
&\Rightarrow (1-i)A_3 e^{i\bar{k}a} = -(1+i)A_4 e^{-i\bar{k}a} \\
&\Rightarrow \frac{(1-i)}{-(1+i)} A_3 e^{2i\bar{k}a} = A_4 \\
&\Rightarrow iA_3 e^{2i\bar{k}a} = A_4 (A_3 = -iA_4 e^{-2i\bar{k}a})
\end{aligned}
\tag{9}
$$

식 (5)에서 식 (6)을 빼면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
&iB_3 e^{-i\bar{k}b} - iB_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} + B_3 e^{-i\bar{k}b} + B_4 e^{i\bar{k}b} - B_6 e^{\bar{k}b} = 0 \\
&\Rightarrow (i+1)B_3 e^{-i\bar{k}b} = (i-1)B_4 e^{i\bar{k}b} \\
&\Rightarrow B_3 = \frac{i-1}{i+1} B_4 e^{2i\bar{k}b} \\
&\Rightarrow B_3 = iB_4 e^{2i\bar{k}b} (B_4 = -iB_3 e^{-2i\bar{k}b})
\end{aligned}
\tag{10}
$$

식 (3.5)에 식 (8)-(10)의 결과를 대입하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow -iA_3 + iA_4 - A_6 + iB_3 - iB_4 - B_5 = 0 \\
&\Rightarrow -iA_3 + iA_4 - 2A_6 + iB_3 - iB_4 = 0 \\
&\Rightarrow -iA_3 - e^{2i\bar{k}a} A_3 - 2A_6 + iB_3 - e^{-2i\bar{k}b} B_3 = 0 \\
&\Rightarrow -(i + e^{2i\bar{k}a}) A_3 + (i - e^{-2i\bar{k}b}) B_3 - 2A_6 = 0 \\
&\Rightarrow 2A_6 = -(i + e^{2i\bar{k}a}) A_3 + (i - e^{-2i\bar{k}b}) B_3 \\
&\Rightarrow A_6 = -\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a}) A_3 + \frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b}) B_3 \\
&= \frac{i}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})(e^{-2i\bar{k}a} A_4) + \frac{i}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})(e^{2i\bar{k}b} B_4) \\
&= \frac{i}{2}(ie^{-2i\bar{k}a} + 1) A_4 + \frac{i}{2}(ie^{2i\bar{k}b} - 1) B_4
\end{aligned}
\tag{11}
$$

식 (3.1)에 식 (1), (4), (9)를 대입하면 다음과 같다:

$$u_R(0) - u_L(0) = (f_{AA}L)u_L'(0) + \frac{h^2}{12} f_{FA} w_L''(0)$$

$$\Rightarrow B_1 + B_2 - A_1 - A_2 = -if_{AA}Lk(A_1 - A_2) - \frac{h^2\bar{k}^2}{12} f_{FA}(A_3 + A_4 - A_6)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - if_{AA}Lk)}_{c_1}A_1 + \underbrace{(1 + if_{AA}Lk)}_{c_2}A_2 - \underbrace{\frac{h^2\bar{k}^2}{12} f_{FA}}_{c_3}(A_3 + A_4 - A_6) - B_1 - B_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_1A_1 + c_2A_2 - c_3(A_3 + A_4 - A_6) - B_1 - B_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_1A_1 + c_2(-A_1e^{2ika}) - c_3[A_3 + (iA_3e^{2i\bar{k}a})$$

$$-\{-\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})A_3 + \frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})B_3\}] - B_1 - (B_1e^{-2ikb}) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(c_1 - c_2e^{2ika})}_{\bar{c}_1}A_1 + \underbrace{[-c_3\{1 + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})\}]}_{\bar{c}_3}A_3 + \underbrace{(-1 - e^{-2ikb})}_{\bar{d}_1}B_1$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}c_3(i - e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{d}_3}B_3 = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \bar{c}_1A_1 + \bar{d}_1B_1 + \bar{c}_3A_3 + \bar{d}_3B_3 = 0$$

식 (3.2)에 식 (1), (9)-(11)을 대입하면 다음과 같다:

$$if_{FA}k(A_1 - A_2) + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)A_4 - (\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_6$$

$$-i\bar{k}B_3 + i\bar{k}B_4 - \bar{k}\underbrace{B_5}_{A_6} = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(A_1 + A_1 e^{2ika})$$

$$+(i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - ie^{2i\bar{k}a}(i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 + (2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})A_3$$

$$-(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})B_3 - i\bar{k}B_3 + i\bar{k}(-iB_3 e^{-2i\bar{k}b}) = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1 + e^{2ika})A_1$$

$$+\{(i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2) - ie^{2i\bar{k}a}(i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2) + (2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})\}A_3$$

$$+\{-(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b}) - i\bar{k} + \bar{k}e^{-2i\bar{k}b}\}B_3 = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1 + e^{2ika})A_1$$

$$+\{i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2 - ie^{2i\bar{k}a}i\bar{k} + ie^{2i\bar{k}a}f_{FF}L\bar{k}^2 + i\bar{k} + \bar{k}e^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}if_{FF}L\bar{k}^2$$

$$+\frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2 e^{2i\bar{k}a}\}A_3$$

$$+\{-i\bar{k} + \bar{k}e^{-2i\bar{k}b} - \frac{1}{2}if_{FF}L\bar{k}^2 + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2 e^{-2i\bar{k}b} - i\bar{k} + \bar{k}e^{-2i\bar{k}b}\}B_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{if_{FA}k(1 + e^{2ika})}_{e_1}A_1 + \underbrace{\{2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + f_{FF}L\bar{k}^2(1 + \frac{1}{2}i + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}e^{2i\bar{k}a})\}}_{\bar{e}_3}A_3$$

$$+\underbrace{\{-2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2(e^{-2i\bar{k}b} - i)\}}_{\bar{f}_3}B_3 = 0$$

$$\Rightarrow e_1 A_1 + \bar{e}_3 A_3 + \bar{f}_3 B_3 = 0$$

(13)

식 (3.4)에 식 (1), (4)을 대입하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} &A_1 - (-A_1 e^{2ika}) - B_1 + (B_1 e^{-2ikb}) = 0 \\ &\Rightarrow (1 + e^{2ika})A_1 - (1 - e^{-2ikb})B_1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

식 (3.3)에 식 (8)-(10)을 대입하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} &A_3 + (iA_3 e^{2i\bar{k}a}) - B_3 - (-ie^{-2i\bar{k}b}B_3) = 0 \\ &\Rightarrow (1 + ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1 - ie^{-2i\bar{k}b})B_3 = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

식 (12)와 식 (15)를 연립하여 A_3를 제거 할 수 있다:

$$\begin{aligned} &(1 + ie^{2i\bar{k}a}) \times (\bar{c}_1 A_1 + \bar{d}_1 B_1 + \bar{c}_3 A_3 + \bar{d}_3 B_3) \\ &- \bar{c}_3 \times \{(1 + ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1 - ie^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1}_{p_1} A_1 + \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1}_{q_1} B_1 \\ &+ \underbrace{\{(1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + (1 - ie^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3\}}_{q_3} B_3 = 0 \\ &\Rightarrow p_1 A_1 + q_1 B_1 + q_3 B_3 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

식 (13)과 식 (15)를 연립하여 A_3를 제거 할 수 있다:

$$\begin{aligned} &(1 + ie^{2i\bar{k}a}) \times (e_1 A_1 + \bar{e}_3 A_3 + \bar{f}_3 B_3) \\ &- \bar{e}_3 \times \{(1 + ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1 - ie^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})e_1}_{r_1} A_1 + \underbrace{\{(1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{f}_3 + (1 - ie^{-2i\bar{k}b})\bar{e}_3\}}_{s_3} B_3 = 0 \\ &\Rightarrow r_1 A_1 + s_3 B_3 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

식 (16)과 식 (17)를 연립하여 B_3를 제거 할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
& s_3(p_1A_1 + q_1B_1 + q_3B_3) - q_3(r_1A_1 + s_3B_3) = 0 \\
& \Rightarrow s_3(p_1A_1 + q_1B_1 + q_3B_3) - q_3(r_1A_1 + s_3B_3) = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{(s_3p_1 - q_3r_1)}_{\bar{r}_1}A_1 + \underbrace{s_3q_1}_{\bar{s}_1}B_1 = 0 \\
& \Rightarrow \bar{r}_1A_1 + \bar{s}_1B_1 = 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

식 (14)과 식 (18)를 연립하여 B_1을 제거 할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
& \bar{s}_1\{(1+e^{2ika})A_1 - (1-e^{-2ikb})B_1\} + (1-e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1 + \bar{s}_1B_1) = 0 \\
& \Rightarrow \{\bar{s}_1(1+e^{2ika}) + \bar{r}_1(1-e^{-2ikb})\}A_1 = 0 \\
& \Rightarrow \bar{s}_1(1+e^{2ika}) + \bar{r}_1(1-e^{-2ikb}) = 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

(=> 특성방정식)

식 (19)으로부터,

$$\bar{s}_1\{(1+e^{2ika})A_1 - (1-e^{-2ikb})B_1\} + (1-e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1 + \bar{s}_1B_1) = 0$$

$$\Rightarrow \{\bar{s}_1(1+e^{2ika}) + \bar{r}_1(1-e^{-2ikb})\}A_1 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{s}_1(1+e^{2ika}) + \bar{r}_1(1-e^{-2ikb}) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1+e^{2ika})}_{t_a}s_3q_1 + \underbrace{(1-e^{-2ikb})}_{t_b}(s_3p_1 - q_3r_1) = 0$$

$$\Rightarrow t_a\{\underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3 + \underbrace{(1-ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}q_1 + t_b\{\underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3 + \underbrace{(1-ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}p_1$$

$$-t_bq_3r_1 = 0$$

$$\Rightarrow t_a(\bar{t}_a\bar{f}_3 + \bar{t}_b\bar{e}_3)q_1 + t_b(\bar{t}_a\bar{f}_3 + \bar{t}_b\bar{e}_3)p_1 - t_bq_3r_1 = 0$$

$$\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1 + t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1 + t_b\bar{t}_a\bar{f}_3p_1 + t_b\bar{t}_b\bar{e}_3p_1 - t_bq_3r_1 = 0$$

$$\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1 + t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1 + t_b\bar{t}_a\bar{f}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1) + t_b\bar{t}_b\bar{e}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1) - t_b(\bar{t}_a\bar{d}_3 + \bar{t}_b\bar{c}_3)(\bar{t}_ae_1) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{t_a\bar{t}_a\bar{f}_3 q_1}_{\Pi_1} + \underbrace{t_a\bar{t}_b\bar{e}_3 q_1}_{\Pi_2} + \underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{f}_3\bar{c}_1}_{\Pi_3} + \underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{e}_3\bar{c}_1}_{\Pi_4} - \underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{d}_3 e_1}_{\Pi_5} - \underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{c}_3 e_1}_{\Pi_6} = 0$$

$$\Rightarrow \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 - \Pi_5 - \Pi_6 = 0$$

정식화에 사용한 임시변수들을 정리한다.

$$c_1 = (1 - if_{AA}Lk) = 1 - \underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}} f_{AA} = 1 - \alpha_{AA} f_{AA}$$

$$c_2 = (1 + if_{AA}Lk) = 1 + \underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}} f_{AA} = 1 + \alpha_{AA} f_{AA}$$

$$c_3 = \underbrace{\frac{h^2\bar{k}^2}{12}}_{\bar{\alpha}_{FA}} f_{FA} = \bar{\alpha}_{FA} f_{FA}$$

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_2 e^{2ika} = 1 - \alpha_{AA} f_{AA} - (1 + \alpha_{AA} f_{AA}) e^{2ika}$$

$$\bar{c}_3 = -c_3\{1 + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})\} = -c_3\{\bar{t}_a + \frac{1}{2i}(-1 + ie^{2i\bar{k}a})\}$$

$$= -c_3 \underbrace{\{\bar{t}_a - \frac{i}{2}(\bar{t}_a - 2)\}}_{\hat{c}_3} = -c_3\hat{c}_3$$

$$\bar{d}_1 = -1 - e^{-2ikb} = t_b - 2$$

$$\bar{d}_3 = \frac{1}{2}c_3(i - e^{-2i\bar{k}b}) = \frac{1}{2i}c_3(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) = \frac{1}{2i}c_3(1 - ie^{-2i\bar{k}b} - 2)$$

$$= c_3 \underbrace{\frac{1}{2i}(\bar{t}_b - 2)}_{\hat{d}_3} = c_3\hat{d}_3$$

$$e_1 = if_{FA}k(1 + e^{2ika}) = \underbrace{ikt_a}_{\alpha_{FA}} f_{FA} = \alpha_{FA} f_{FA}$$

$$\bar{e}_3 = 2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + \{1 + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})\} f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= -2\bar{k}i(-1 + ie^{2i\bar{k}a}) + \{(1 + ie^{2i\bar{k}a}) - \frac{i}{2}(-1 + ie^{2i\bar{k}a})\} f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= \underbrace{-2\bar{k}i(\bar{t}_a - 2)}_{\alpha_1} + \underbrace{\{\bar{t}_a - \frac{i}{2}(\bar{t}_a - 2)\} L\bar{k}^2}_{\alpha_{FF}} f_{FF} = \alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}$$

$$= \underbrace{-2\bar{k}i(\bar{t}_a - 2)}_{\alpha_1} + \underbrace{\{\bar{t}_a(1 - \frac{i}{2}) + i)\} L\bar{k}^2}_{\alpha_{FF}} f_{FF} = \alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}$$

$$\bar{f}_3 = -2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} + \frac{1}{2} f_{FF} L\bar{k}^2 (e^{-2i\bar{k}b} - i)$$

$$= 2\bar{k}(-i + e^{-2i\bar{k}b}) + \frac{i}{2}(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= 2\bar{k}i(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) + \frac{i}{2}(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= \underbrace{2\bar{k}i(\bar{t}_b - 2)}_{\beta_1} + \underbrace{\frac{i}{2}(\bar{t}_b - 2) L\bar{k}^2}_{\beta_{FF}} f_{FF}$$

$$p_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1 = \bar{t}_a \bar{c}_1$$

$$q_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1 = \bar{t}_a \bar{d}_1 = \bar{t}_a (t_b - 2)$$

$$q_3 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + (1 - ie^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3 = \bar{t}_a \bar{d}_3 + \bar{t}_b \bar{c}_3$$

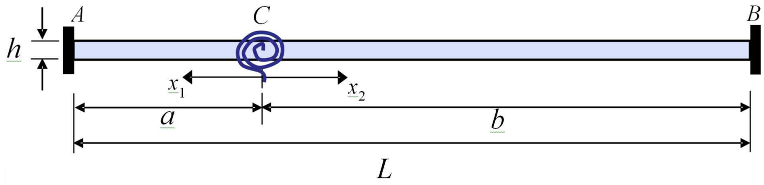
$$r_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a}) e_1 = \bar{t}_a e_1$$

$$s_3 = \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a} \bar{f}_3 + \underbrace{(1 - ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b} \bar{e}_3 = \bar{t}_a \bar{f}_3 + \bar{t}_b \bar{e}_3$$

$$\bar{r}_1 = (s_3 p_1 - q_3 r_1) \qquad \bar{s}_1 = s_3 q_1$$

이 후 정식화 과정은 단순보의 예와 동일하여 생략한다. 식 (3.34) ~ 식 (3.42)를 참고한다.

부록 A-5 **Fix-Fix** 지점조건에서 특성방정식 정식화



Fix-Fix 모델링

축 방향 변위와 굽힘 방향 변위, 균열지점에서 적합조건식, 평형방정식은 단순보의 경우와 동일하다. 이 과정은 식 (3.1) ~ 식 (3.6)을 참고한다. 부록에는 이후 과정부터 첨부한다.

1. 변위 경계조건:

(a) A점에서 축 방향 변위:

$$
\begin{aligned}
&u_L(a) = 0 \\
&\Rightarrow A_1 e^{ika} + A_2 e^{-ika} = 0 \\
&\Rightarrow A_2 = -A_1 e^{2ika} (A_1 = -A_2 e^{-2ika})
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(b) B점에서 축 방향 변위:

$$
\begin{aligned}
&u_R(b) = 0 \\
&\Rightarrow B_1 e^{-ikb} + B_2 e^{ikb} = 0 \\
&\Rightarrow B_1 = -B_2 e^{2ikb} (B_2 = -B_1 e^{-2ikb})
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(c) A점에서 굽힘 방향 변위:

$$
\begin{aligned}
&w_L(a) = 0 \\
&\Rightarrow A_3 e^{i\bar{k}a} + A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(d) B점에서 굽힘 방향 변위:

$$
\begin{aligned}
& w_R(b) = 0 \\
& \Rightarrow B_3 e^{-i\bar{k}b} + B_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(e) A점에서 처짐각:

$$
\begin{aligned}
& w_L'(a) = 0 \\
& \Rightarrow (i\bar{k}) A_3 e^{i\bar{k}a} + (-i\bar{k}) A_4 e^{-i\bar{k}a} + \bar{k} A_5 e^{\bar{k}a} = 0 \\
& \Rightarrow i A_3 e^{i\bar{k}a} - i A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(f) B점에서 처짐각:

$$
\begin{aligned}
& w_R'(b) = 0 \\
& \Rightarrow (-i\bar{k}) B_3 e^{-i\bar{k}b} + (i\bar{k}) B_4 e^{i\bar{k}b} + \bar{k} B_6 e^{\bar{k}b} = 0 \\
& \Rightarrow -i B_3 e^{-i\bar{k}b} + i B_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

정리된 식을 매트릭스 형태로 표현하면 다음과 같다:

$$
\begin{bmatrix}
1 - i f_{AA} Lk & 1 + i f_{AA} Lk & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12} f_{FA} & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12} f_{FA} & 0 & \frac{h^2\bar{k}^2}{12} f_{FA} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i f_{FA} k & -i f_{FA} k & i\bar{k} + f_{FF} L\bar{k}^2 & -(i\bar{k} - f_{FF} L\bar{k}^2) & 0 & -(\bar{k} + f_{FF} L\bar{k}^2) & 0 & 0 & -i\bar{k} & i\bar{k} & -\bar{k} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & i & 0 & -1 & 0 & 0 & i & -i & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
e^{2ika} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e^{2ikb} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\bar{k}b} & e^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b} \\
0 & 0 & i e^{i\bar{k}a} & -i e^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i e^{-i\bar{k}b} & i e^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6
\end{Bmatrix}
= \mathbf{0}
\tag{7}
$$

식 (3.3)와 식 (3.6)을 더하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}&A_3 + A_4 + A_6 - B_3 - B_4 - B_5 - A_3 - A_4 + A_6 + B_3 + B_4 - B_5 = 0\\ &\Rightarrow 2A_6 - 2B_5 = 0\\ &\Rightarrow B_5 = A_6\end{aligned} \tag{8}$$

식 (7)에서 식 (5)을 빼면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}&A_3 e^{i\bar{k}a} + A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} - (iA_3 e^{i\bar{k}a} - iA_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a}) = 0\\ &\Rightarrow (1-i)A_3 e^{i\bar{k}a} + (1+i)A_4 e^{-i\bar{k}a} = 0\\ &\Rightarrow A_3 = -\frac{(1+i)}{(1-i)} A_4 e^{-2i\bar{k}a}\\ &\Rightarrow A_3 = -iA_4 e^{-2i\bar{k}a} (A_4 = iA_3 e^{2i\bar{k}a})\end{aligned} \tag{9}$$

식 (4)에서 식 (6)을 빼면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}&B_3 e^{-i\bar{k}b} + B_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} - (-iB_3 e^{-i\bar{k}b} + iB_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b}) = 0\\ &\Rightarrow (1+i)B_3 e^{-i\bar{k}b} + (1-i)B_4 e^{i\bar{k}b} = 0\\ &\Rightarrow B_3 = -\frac{(1-i)}{(1+i)} B_4 e^{2i\bar{k}b}\\ &\Rightarrow B_3 = iB_4 e^{2i\bar{k}b} (B_4 = -iB_3 e^{-2i\bar{k}b})\end{aligned} \tag{10}$$

식 (3.5)에 식 (8)-(10)의 결과를 대입하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}&\Rightarrow -iA_3 + iA_4 - A_6 + iB_3 - iB_4 - B_5 = 0\\ &\Rightarrow -iA_3 + iA_4 - 2A_6 + iB_3 - iB_4 = 0\\ &\Rightarrow -iA_3 + i(iA_3 e^{2i\bar{k}a}) - 2A_6 + iB_3 - i(-iB_3 e^{-2i\bar{k}b}) = 0\\ &\Rightarrow -iA_3 - A_3 e^{2i\bar{k}a} - 2A_6 + iB_3 - B_3 e^{-2i\bar{k}b} = 0\\ &\Rightarrow 2A_6 = -(i + e^{2i\bar{k}a})A_3 + (i - e^{-2i\bar{k}b})B_3\\ &\Rightarrow A_6 = -\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})A_3 + \frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})B_3\end{aligned} \tag{11}$$

식 (3.1)에 식 (1), (2), (9), (11)을 대입하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
& u_R(0)-u_L(0)=(f_{AA}L)u_L'(0)+\frac{h^2}{12}f_{FA}w_L''(0) \\
& \Rightarrow B_1+B_2-A_1-A_2=-if_{AA}Lk(A_1-A_2)-\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA}(A_3+A_4-A_6) \\
& \Rightarrow \underbrace{(1-if_{AA}Lk)}_{c_1}A_1+\underbrace{(1+if_{AA}Lk)}_{c_2}A_2-\underbrace{\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA}}_{c_3}(A_3+A_4-A_6) \\
& -B_1-B_2=0 \\
& \Rightarrow c_1A_1+c_2A_2-c_3(A_3+A_4-A_6)-B_1-B_2=0 \\
& \Rightarrow c_1A_1+c_2(-A_1e^{2ika})-c_3[A_3+(iA_3e^{2i\bar{k}a}) \\
& -\{-\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})A_3+\frac{1}{2}(i-e^{-2i\bar{k}b})B_3\}] \\
& -B_1-(-B_1e^{-2ikb})=0 \\
& \Rightarrow \underbrace{(c_1-c_2e^{2ika})}_{\bar{c}_1}A_1+\underbrace{[-c_3\{1+ie^{2i\bar{k}a}+\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})\}]}_{\bar{c}_3}A_3 \\
& +\underbrace{(-1+e^{-2ikb})}_{\bar{d}_1}B_1+\underbrace{\frac{1}{2}c_3(i-e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{d}_3}B_3=0 \\
& \Rightarrow \bar{c}_1A_1+\bar{d}_1B_1+\bar{c}_3A_3+\bar{d}_3B_3=0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

식 (3.2)에 식 (1), (9)-(11)을 대입하면 다음과 같다:

$$if_{FA}k(A_1 - A_2) + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)A_4$$

$$-(\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_6 - i\bar{k}B_3 + i\bar{k}B_4 - \bar{k}\underbrace{B_5}_{A_6} = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k\{A_1 - (-A_1e^{2ika})\} + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)(iA_3e^{2i\bar{k}a})$$

$$-(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\{-\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})A_3 + \frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})B_3\}$$

$$-i\bar{k}B_3 + i\bar{k}(-iB_3e^{-2i\bar{k}b}) = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1 + e^{2ika})A_1 + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - ie^{2i\bar{k}a}(i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)A_3$$

$$+(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})A_3$$

$$-(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})B_3 - i\bar{k}B_3 + i\bar{k}(-iB_3e^{-2i\bar{k}b}) = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1 + e^{2ika})A_1 + i\bar{k}A_3 + f_{FF}L\bar{k}^2A_3 - ie^{2i\bar{k}a}i\bar{k}A_3 + ie^{2i\bar{k}a}f_{FF}L\bar{k}^2A_3 \tag{13}$$

$$+\frac{1}{2}(2\bar{k}i + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + if_{FF}L\bar{k}^2 + e^{2i\bar{k}a}f_{FF}L\bar{k}^2)A_3$$

$$-\frac{1}{2}(2\bar{k}i - 2\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} + if_{FF}L\bar{k}^2 - f_{FF}L\bar{k}^2e^{-2i\bar{k}b})B_3$$

$$-i\bar{k}B_3 + \bar{k}B_3e^{-2i\bar{k}b} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{if_{FA}k(1 + e^{2ika})}_{e_1}A_1$$

$$+\underbrace{\{2\bar{k}i + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + (1 + \frac{1}{2}i + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}e^{2i\bar{k}a})f_{FF}L\bar{k}^2\}}_{\bar{e}_3}A_3$$

$$+\underbrace{\{-2\bar{k}i + 2\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2(e^{-2i\bar{k}b} - i)\}}_{\bar{f}_3}B_3 = 0$$

식 (3.4)에 식 (1), (2)를 대입하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} & A_1 - (-A_1 e^{2ika}) - B_1 + (-B_1 e^{-2ikb}) = 0 \\ & \Rightarrow (1+e^{2ika})A_1 - (1+e^{-2ikb})B_1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

식 (3.3)에 식 (8)-(10)을 대입하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} & A_3 + (iA_3 e^{2i\bar{k}a}) - B_3 - (-iB_3 e^{-2i\bar{k}b}) = 0 \\ & \Rightarrow (1+ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1-ie^{-2i\bar{k}b})B_3 = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

식 (12)와 식 (15)를 연립하여 A_3를 제거 할 수 있다:

$$\begin{aligned} & (1+ie^{2i\bar{k}a})(\bar{c}_1 A_1 + \bar{d}_1 B_1 + \bar{c}_3 A_3 + \bar{d}_3 B_3) \\ & -\bar{c}_3\{(1+ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1-ie^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0 \\ & \Rightarrow \underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1}_{p_1} A_1 + \underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1}_{q_1} B_1 \\ & + \underbrace{\{(1+ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + \bar{c}_3(1-ie^{-2i\bar{k}b})\}}_{q_3} B_3 = 0 \\ & \Rightarrow p_1 A_1 + q_1 B_1 + q_3 B_3 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

식 (13)과 식 (15)를 연립하여 A_3를 제거 할 수 있다:

$$\begin{aligned} & (1+ie^{2i\bar{k}a}) \times (e_1 A_1 + \bar{e}_3 A_3 + \bar{f}_3 B_3) \\ & -\bar{e}_3 \times \{(1+ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1-ie^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0 \\ & \Rightarrow \underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})e_1}_{r_1} A_1 + \underbrace{\{(1+ie^{2i\bar{k}a})\bar{f}_3 + (1-ie^{-2i\bar{k}b})\bar{e}_3\}}_{s_3} B_3 = 0 \\ & \Rightarrow r_1 A_1 + s_3 B_3 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

식 (16)과 식 (17)를 연립하여 B_3를 제거 할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
& s_3(p_1A_1+q_1B_1+q_3B_3)-q_3(r_1A_1+s_3B_3)=0 \\
& \Rightarrow s_3(p_1A_1+q_1B_1+q_3B_3)-q_3(r_1A_1+s_3B_3)=0 \\
& \Rightarrow \underbrace{(s_3p_1-q_3r_1)}_{\bar{r}_1}A_1+\underbrace{s_3q_1}_{\bar{s}_1}B_1=0 \\
& \Rightarrow \bar{r}_1A_1+\bar{s}_1B_1=0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

식 (14)과 식 (18)를 연립하여 B_1을 제거 할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
& \bar{s}_1\{(1+e^{2ika})A_1-(1+e^{-2ikb})B_1\}+(1+e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1+\bar{s}_1B_1)=0 \\
& \Rightarrow \bar{s}_1(1+e^{2ika})A_1+\bar{r}_1(1+e^{-2ikb})A_1=0 \\
& \Rightarrow \bar{s}_1(1+e^{2ika})+\bar{r}_1(1+e^{-2ikb})=0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

(=> 특성방정식)

식 (19)으로부터,

$$\bar{s}_1\{(1+e^{2ika})A_1-(1+e^{-2ikb})B_1\}+(1+e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1+\bar{s}_1B_1)=0$$

$$\Rightarrow \bar{s}_1(1+e^{2ika})A_1+\bar{r}_1(1+e^{-2ikb})A_1=0$$

$$\Rightarrow \bar{s}_1(1+e^{2ika})+\bar{r}_1(1+e^{-2ikb})=0$$

$$\Rightarrow s_3q_1\underbrace{(1+e^{2ika})}_{t_a}+(s_3p_1-q_3r_1)\underbrace{(1+e^{-2ikb})}_{t_b}=0$$

$$\Rightarrow t_a\{\underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3+\underbrace{(1-ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}q_1+t_b\{\underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3+\underbrace{(1-ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}p_1$$

$$-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a(\bar{t}_a\bar{f}_3+\bar{t}_b\bar{e}_3)q_1+t_b(\bar{t}_a\bar{f}_3+\bar{t}_b\bar{e}_3)p_1-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1+t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1+t_b\bar{t}_a\bar{f}_3p_1+t_b\bar{t}_b\bar{e}_3p_1-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1+t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1+t_b\bar{t}_a\bar{f}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1)+t_b\bar{t}_b\bar{e}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1)-t_b(\bar{t}_a\bar{d}_3+\bar{t}_b\bar{c}_3)(\bar{t}_ae_1)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1}_{\Pi_1}+\underbrace{t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1}_{\Pi_2}+\underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{f}_3\bar{c}_1}_{\Pi_3}+\underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{e}_3\bar{c}_1}_{\Pi_4}-\underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{d}_3e_1}_{\Pi_5}-\underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{c}_3e_1}_{\Pi_6}=0$$

$$\Rightarrow \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4-\Pi_5-\Pi_6=0$$

정식화에 사용한 임시변수들을 정리한다.

$$c_1=(1-if_{AA}Lk)=1-\underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}}f_{AA}=1-\alpha_{AA}f_{AA}$$

$$c_2=(1+if_{AA}Lk)=1+\underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}}f_{AA}=1+\alpha_{AA}f_{AA}$$

$$c_3=\underbrace{\frac{h^2\bar{k}^2}{12}}_{\bar{\alpha}_{FA}}f_{FA}=\bar{\alpha}_{FA}f_{FA}$$

$$\bar{c}_1=c_1-c_2e^{2ika}=1-\alpha_{AA}f_{AA}-(1+\alpha_{AA}f_{AA})e^{2ika}$$

$$\bar{c}_3=-c_3\{1+ie^{2i\bar{k}a}+\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})\}=-c_3\{\bar{t}_a+\frac{1}{2i}(-1+ie^{2i\bar{k}a})\}$$

$$=-c_3\underbrace{\{\bar{t}_a-\frac{i}{2}(\bar{t}_a-2)\}}_{\hat{c}_3}=-c_3\hat{c}_3$$

$$\bar{d}_1=-1+e^{-2ikb}=t_b-2$$

$$\bar{d}_3=\frac{1}{2}c_3(i-e^{-2i\bar{k}b})=\frac{1}{2i}c_3(-1-ie^{-2i\bar{k}b})=\frac{1}{2i}c_3(1-ie^{-2i\bar{k}b}-2)$$

$$=c_3\underbrace{\frac{1}{2i}(\bar{t}_b-2)}_{\hat{d}_3}=c_3\hat{d}_3$$

$$e_1=if_{FA}k(1+e^{2ika})=\underbrace{ikt_a}_{\alpha_{FA}}f_{FA}=\alpha_{FA}f_{FA}$$

$$\bar{e}_3 = 2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + \{1 + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})\} f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= -2\bar{k}i(-1 + ie^{2i\bar{k}a}) + \{(1 + ie^{2i\bar{k}a}) - \frac{i}{2}(-1 + ie^{2i\bar{k}a})\} f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= \underbrace{-2\bar{k}i(\bar{t}_a - 2)}_{\alpha_1} + \underbrace{\{\bar{t}_a - \frac{i}{2}(\bar{t}_a - 2)\} L\bar{k}^2}_{\alpha_{FF}} f_{FF} = \alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}$$

$$= \underbrace{-2\bar{k}i(\bar{t}_a - 2)}_{\alpha_1} + \underbrace{\{\bar{t}_a(1 - \frac{i}{2}) + i)\} L\bar{k}^2}_{\alpha_{FF}} f_{FF} = \alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}$$

$$\bar{f}_3 = -2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} + \frac{1}{2} f_{FF} L\bar{k}^2 (e^{-2i\bar{k}b} - i)$$

$$= 2\bar{k}(-i + e^{-2i\bar{k}b}) + \frac{i}{2}(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= 2\bar{k}i(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) + \frac{i}{2}(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= \underbrace{2\bar{k}i(\bar{t}_b - 2)}_{\beta_1} + \underbrace{\frac{i}{2}(\bar{t}_b - 2) L\bar{k}^2}_{\beta_{FF}} f_{FF}$$

$$p_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1 = \bar{t}_a \bar{c}_1$$

$$q_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1 = \bar{t}_a \bar{d}_1 = \bar{t}_a(t_b - 2)$$

$$q_3 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + (1 - ie^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3 = \bar{t}_a \bar{d}_3 + \bar{t}_b \bar{c}_3$$

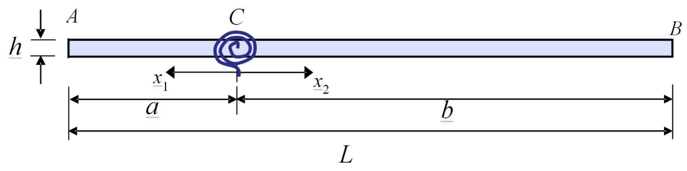
$$r_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a}) e_1 = \bar{t}_a e_1$$

$$s_3 = \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a} \bar{f}_3 + \underbrace{(1 - ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b} \bar{e}_3 = \bar{t}_a \bar{f}_3 + \bar{t}_b \bar{e}_3$$

$$\bar{r}_1 = (s_3 p_1 - q_3 r_1) \qquad \bar{s}_1 = s_3 q_1$$

이 후 정식화 과정은 단순보의 예와 동일하여 생략한다. 식 (3.34) ~ 식 (3.42)를 참고한다.

부록 A-6 **Free-Free** 지점조건에서 특성방정식 정식화



Free-Free 모델링

축 방향 변위와 굽힘 방향 변위, 균열지점에서 적합조건식, 평형방정식은 단순보의 경우와 동일하다. 이 과정은 식 (3.1) ~ 식 (3.6)을 참고한다. 부록에는 이후 과정부터 첨부한다.

1. 힘의 경계조건:

(a) A점에서 축력:

$$\begin{aligned} & EA\,u'_L(a)=0 \\ & \Rightarrow (ik)A_1e^{ika}+(-ik)A_2e^{-ika}=0 \\ & \Rightarrow A_1e^{ika}-A_2e^{-ika}=0 \\ & \Rightarrow A_1=A_2e^{-2ika}(A_2=A_1e^{2ika}) \end{aligned} \tag{1}$$

(b) B점에서 축력:

$$\begin{aligned} & EA\,u'_R(b)=0 \\ & \Rightarrow (-ik)B_1e^{-ikb}+(ik)B_2e^{ikb}=0 \\ & \Rightarrow B_1e^{-ikb}-B_2e^{ikb}=0 \\ & \Rightarrow B_2=B_1e^{-2ikb}(B_1=B_2e^{2ikb}) \end{aligned} \tag{2}$$

(c) A점에서 전단력:

$$\begin{aligned} & EIw'''_L(a)=0 \\ & \Rightarrow (-i\bar{k}^3)A_3e^{i\bar{k}a}+(i\bar{k}^3)A_4e^{-i\bar{k}a}+(\bar{k}^3)A_5e^{\bar{k}a}=0 \\ & \Rightarrow -iA_3e^{i\bar{k}a}+iA_4e^{-i\bar{k}a}+A_5e^{\bar{k}a}=0 \end{aligned} \tag{3}$$

(d) B점에서 전단력:

$$
\begin{aligned}
&EIw_R'''(b)=0\\
&\Rightarrow (i\bar{k}^3)B_3e^{-i\bar{k}b}+(-i\bar{k}^3)B_4e^{i\bar{k}b}+(\bar{k}^3)B_6e^{\bar{k}b}=0\\
&\Rightarrow iB_3e^{-i\bar{k}b}-iB_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}b}=0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(e) A점에서 모멘트:

$$
\begin{aligned}
&EIw_L''(a)=0\\
&\Rightarrow (-\bar{k}^2)A_3e^{i\bar{k}a}+(-\bar{k}^2)A_4e^{-i\bar{k}a}+(\bar{k}^2)A_5e^{\bar{k}a}=0\\
&\Rightarrow -A_3e^{i\bar{k}a}-A_4e^{-i\bar{k}a}+A_5e^{\bar{k}a}=0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(f) B점에서 모멘트:

$$
\begin{aligned}
&EIw_R''(b)=0\\
&\Rightarrow (-\bar{k}^2)B_3e^{-i\bar{k}b}+(-\bar{k}^2)B_4e^{i\bar{k}b}+(\bar{k}^2)B_6e^{\bar{k}b}=0\\
&\Rightarrow -B_3e^{-i\bar{k}b}-B_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}b}=0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

정리된 식을 매트릭스 형태로 표현하면 다음과 같다:

$$
\begin{bmatrix}
1-if_{AA}Lk & 1+if_{AA}Lk & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & 0 & \frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
if_{FA}k & -if_{FA}k & i\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2 & -(i\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & -(\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & 0 & -i\bar{k} & i\bar{k} & -\bar{k} & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -i & i & 0 & -1 & 0 & 0 & i & -i & -1 & 0\\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\
1 & -e^{-2ika} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2ikb} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -ie^{i\bar{k}a} & ie^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ie^{-i\bar{k}b} & -ie^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b}\\
0 & 0 & -e^{i\bar{k}a} & -e^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-i\bar{k}b} & -e^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\\ A_5\\ A_6\\ B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\\ B_5\\ B_6 \end{Bmatrix}
=\mathbf{0}
\tag{7}
$$

식 (3.3)와 식 (3.6)을 더하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
& A_3 + A_4 + A_6 - B_3 - B_4 - B_5 - A_3 - A_4 + A_6 + B_3 + B_4 - B_5 = 0 \\
& \Rightarrow 2A_6 - 2B_5 = 0 \\
& \Rightarrow B_5 = A_6
\end{aligned}
\tag{8}
$$

식 (3)에서 식 (5)를 빼면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
& -iA_3 e^{i\bar{k}a} + iA_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a} - (-A_3 e^{i\bar{k}a} - A_4 e^{-i\bar{k}a} + A_5 e^{\bar{k}a}) = 0 \\
& \Rightarrow (1-i)A_3 e^{i\bar{k}a} + (i+1)A_4 e^{-i\bar{k}a} = 0 \\
& \Rightarrow A_3 = -\frac{(i+1)}{(1-i)} A_4 e^{-2i\bar{k}a} \\
& \Rightarrow A_3 = -iA_4 e^{-2i\bar{k}a} \, (A_4 = iA_3 e^{2i\bar{k}a})
\end{aligned}
\tag{9}
$$

식 (4)에서 식 (6)을 빼면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
& iB_3 e^{-i\bar{k}b} - iB_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} - (-B_3 e^{-i\bar{k}b} - B_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b}) = 0 \\
& \Rightarrow (i+1)B_3 e^{-i\bar{k}b} + (1-i)B_4 e^{i\bar{k}b} = 0 \\
& \Rightarrow B_3 = iB_4 e^{2i\bar{k}b} \, (B_4 = -iB_3 e^{-2i\bar{k}b})
\end{aligned}
\tag{10}
$$

식 (3.5)에 식 (8)-(10)의 결과를 대입하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow -iA_3 + iA_4 - A_6 + iB_3 - iB_4 - B_5 = 0 \\
& \Rightarrow -iA_3 + i(iA_3 e^{2i\bar{k}a}) + iB_3 - i(-iB_3 e^{-2i\bar{k}b}) - 2A_6 = 0 \\
& \Rightarrow -(i + e^{2i\bar{k}a})A_3 + (i - e^{-2i\bar{k}b})B_3 = 2A_6 \\
& \Rightarrow A_6 = -\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})A_3 + \frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})B_3 \\
& \Rightarrow A_6 = -\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})(-iA_4 e^{-2i\bar{k}a}) + \frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})(iB_4 e^{2i\bar{k}b}) \\
& \Rightarrow A_6 = \frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}a})A_4 - \frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}b})B_4
\end{aligned}
\tag{11}
$$

식 (3.1)에 식 (1), (4), (9), (11)을 대입하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
& u_R(0)-u_L(0)=(f_{AA}L)u_L'(0)+\frac{h^2}{12}f_{FA}w_L''(0) \\
& \Rightarrow B_1+B_2-A_1-A_2=-if_{AA}Lk(A_1-A_2)-\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA}(A_3+A_4-A_6) \\
& \Rightarrow \underbrace{(1-if_{AA}Lk)}_{c_1}A_1+\underbrace{(1+if_{AA}Lk)}_{c_2}A_2-\underbrace{\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA}}_{c_3}(A_3+A_4-A_6) \\
& -B_1-B_2=0 \\
& \Rightarrow c_1A_1+c_2A_2-c_3(A_3+A_4-A_6)-B_1-B_2=0 \\
& \Rightarrow c_1A_1+c_2(A_1e^{2ika})-c_3[A_3+(iA_3e^{2i\bar{k}a}) \\
& -\{-\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})A_3+\frac{1}{2}(i-e^{-2i\bar{k}b})B_3\}]-B_1-(B_1e^{-2ikb})=0 \\
& \Rightarrow \underbrace{(c_1+c_2e^{2ika})}_{\bar{c}_1}A_1+\underbrace{[-c_3\{1+ie^{2i\bar{k}a}+\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})\}]}_{\bar{c}_3}A_3 \\
& +\underbrace{(-1-e^{-2ikb})}_{\bar{d}_1}B_1+\underbrace{\frac{1}{2}c_3(i-e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{d}_3}B_3=0 \\
& \Rightarrow \bar{c}_1A_1+\bar{d}_1B_1+\bar{c}_3A_3+\bar{d}_3B_3=0
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

식 (3.2)에 식 (1), (9)-(11)을 대입하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
& if_{FA}k(A_1 - A_2) + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)A_4 \\
& -(\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_6 - i\bar{k}B_3 + i\bar{k}B_4 - \bar{k}\underbrace{B_5}_{A_6} = 0 \\
& \Rightarrow if_{FA}k\{A_1 - (A_1 e^{2ika})\} + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)(iA_3 e^{2i\bar{k}a}) \\
& -(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\{-\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})A_3 + \frac{1}{2}(i - e^{-2i\bar{k}b})B_3\} \\
& - i\bar{k}B_3 + i\bar{k}(-iB_3 e^{-2i\bar{k}b}) = 0 \\
& \Rightarrow if_{FA}k(1 - e^{2ika})A_1 + \{(i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2) - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)ie^{2i\bar{k}a} \\
& + \frac{1}{2}(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)(i + e^{2i\bar{k}a})\}A_3 + \{-\frac{1}{2}(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)(i - e^{-2i\bar{k}b}) \\
& - i\bar{k} + \bar{k}e^{-2i\bar{k}b}\}B_3 = 0 \\
& \Rightarrow if_{FA}k(1 - e^{2ika})A_1 \\
& + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2 + e^{2i\bar{k}a}\bar{k} + ie^{2i\bar{k}a}f_{FF}L\bar{k}^2 + i\bar{k} + \bar{k}e^{2i\bar{k}a} \\
& + \frac{1}{2}if_{FF}L\bar{k}^2 + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2 e^{2i\bar{k}a})A_3 \\
& + (-i\bar{k} + \bar{k}e^{-2i\bar{k}b} - \frac{1}{2}if_{FF}L\bar{k}^2 + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2 e^{-2i\bar{k}b} \\
& - i\bar{k} + \bar{k}e^{-2i\bar{k}b})B_3 = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{if_{FA}k(1 - e^{2ika})}_{e_1}A_1 \\
& + \underbrace{\{2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + f_{FF}L\bar{k}^2(1 + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}e^{2i\bar{k}a})\}}_{\bar{e}_3}A_3 \\
& + \underbrace{\{-2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} + \frac{1}{2}f_{FF}L\bar{k}^2(e^{-2i\bar{k}b} - i)\}}_{\bar{f}_3}B_3 = 0 \\
& \Rightarrow e_1 A_1 + \bar{e}_3 A_3 + \bar{f}_3 B_3 = 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

식 (3.4)에 식 (1), (2)을 대입하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} &A_1 - (A_1 e^{2ika}) - B_1 + (B_1 e^{-2ikb}) = 0 \\ &\Rightarrow (1 - e^{2ika}) A_1 - (1 - e^{-2ikb}) B_1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

식 (3.3)에 식 (8)-(10)을 대입하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} &A_3 + (iA_3 e^{2i\bar{k}a}) - B_3 - (-iB_3 e^{-2i\bar{k}b}) = 0 \\ &\Rightarrow (1 + ie^{2i\bar{k}a}) A_3 - (1 - ie^{-2i\bar{k}b}) B_3 = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

식 (12)와 식 (15)를 연립하여 A_3를 제거 할 수 있다:

$$\begin{aligned} &(1 + ie^{2i\bar{k}a}) \times (\bar{c}_1 A_1 + \bar{d}_1 B_1 + \bar{c}_3 A_3 + \bar{d}_3 B_3) \\ &- \bar{c}_3 \times \{(1 + ie^{2i\bar{k}a}) A_3 - (1 - ie^{-2i\bar{k}b}) B_3\} = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1}_{p_1} A_1 + \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1}_{q_1} B_1 \\ &+ \underbrace{\{(1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + (1 - ie^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3\}}_{q_3} B_3 = 0 \\ &\Rightarrow p_1 A_1 + q_1 B_1 + q_3 B_3 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

식 (13)과 식 (15)를 연립하여 A_3를 제거 할 수 있다:

$$\begin{aligned} &(1 + ie^{2i\bar{k}a}) \times (e_1 A_1 + \bar{e}_3 A_3 + \bar{f}_3 B_3) \\ &- \bar{e}_3 \times \{(1 + ie^{2i\bar{k}a}) A_3 - (1 - ie^{-2i\bar{k}b}) B_3\} = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a}) e_1}_{r_1} A_1 + \underbrace{\{(1 + ie^{2i\bar{k}a}) \bar{f}_3 + (1 - ie^{-2i\bar{k}b}) \bar{e}_3\}}_{s_3} B_3 = 0 \\ &\Rightarrow r_1 A_1 + s_3 B_3 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

식 (16)과 식 (17)를 연립하여 B_3를 제거 할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
& s_3(p_1A_1+q_1B_1+q_3B_3)-q_3(r_1A_1+s_3B_3)=0 \\
& \Rightarrow s_3(p_1A_1+q_1B_1+q_3B_3)-q_3(r_1A_1+s_3B_3)=0 \\
& \Rightarrow \underbrace{(s_3p_1-q_3r_1)}_{\bar{r}_1}A_1+\underbrace{s_3q_1}_{\bar{s}_1}B_1=0 \\
& \Rightarrow \bar{r}_1A_1+\bar{s}_1B_1=0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

식 (14)과 식 (18)를 연립하여 B_1을 제거 할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
& \bar{s}_1\{(1-e^{2ika})A_1-(1-e^{-2ikb})B_1\}+(1-e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1+\bar{s}_1B_1)=0 \\
& \Rightarrow \{\bar{s}_1(1-e^{2ika})+\bar{r}_1(1-e^{-2ikb})\}A_1=0 \\
& \Rightarrow \bar{s}_1(1-e^{2ika})+\bar{r}_1(1-e^{-2ikb})=0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

(=> characteristic equation)

식 (19)으로부터,

$$\bar{s}_1(1-e^{2ika})+\bar{r}_1(1-e^{-2ikb})=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-e^{2ika})}_{t_a}s_3q_1+\underbrace{(1-e^{-2ikb})}_{t_b}(s_3p_1-q_3r_1)=0$$

$$\Rightarrow t_as_3q_1+t_bs_3p_1-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a\{\underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3+\underbrace{(1-ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}q_1+t_b\{\underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3+\underbrace{(1-ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}p_1$$

$$-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a(\bar{t}_a\bar{f}_3+\bar{t}_b\bar{e}_3)q_1+t_b(\bar{t}_a\bar{f}_3+\bar{t}_b\bar{e}_3)p_1-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1+t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1+t_b\bar{t}_a\bar{f}_3p_1+t_b\bar{t}_b\bar{e}_3p_1-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1+t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1+t_b\bar{t}_a\bar{f}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1)+t_b\bar{t}_b\bar{e}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1)-t_b(\bar{t}_a\bar{d}_3+\bar{t}_b\bar{c}_3)(\bar{t}_ae_1)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1}_{\Pi_1}+\underbrace{t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1}_{\Pi_2}+\underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{f}_3\bar{c}_1}_{\Pi_3}+\underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{e}_3\bar{c}_1}_{\Pi_4}-\underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{d}_3e_1}_{\Pi_5}-\underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{c}_3e_1}_{\Pi_6}=0$$

$$\Rightarrow \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4-\Pi_5-\Pi_6=0$$

정식화에 사용한 임시변수들을 정리한다.

$$c_1=(1-if_{AA}Lk)=1-\underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}}f_{AA}=1-\alpha_{AA}f_{AA}$$

$$c_2=(1+if_{AA}Lk)=1+\underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}}f_{AA}=1+\alpha_{AA}f_{AA}$$

$$c_3=\underbrace{\frac{h^2\bar{k}^2}{12}}_{\bar{\alpha}_{FA}}f_{FA}=\bar{\alpha}_{FA}f_{FA}$$

$$\bar{c}_1=c_1+c_2e^{2ika}=1-\alpha_{AA}f_{AA}+(1+\alpha_{AA}f_{AA})e^{2ika}$$

$$\bar{c}_3=-c_3\{1+ie^{2i\bar{k}a}+\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})\}=-c_3\underbrace{\{\bar{t}_a-\frac{i}{2}(\bar{t}_a-2)\}}_{\hat{c}_3}=-c_3\hat{c}_3$$

$$\bar{d}_1=-1-e^{-2ikb}=t_b-2$$

$$\bar{d}_3=\frac{1}{2}c_3(i-e^{-2i\bar{k}b})=\frac{1}{2i}c_3(-1-ie^{-2i\bar{k}b})$$

$$=\frac{1}{2i}c_3(1-ie^{-2i\bar{k}b}-2)=c_3\underbrace{\frac{1}{2i}(\bar{t}_b-2)}_{\hat{d}_3}=c_3\hat{d}_3$$

$$e_1=if_{FA}k(1-e^{2ika})=\underbrace{ikt_a}_{\alpha_{FA}}f_{FA}=\alpha_{FA}f_{FA}$$

$$\bar{e}_3 = 2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + \{1 + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})\} f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= -2\bar{k}i(-1 + ie^{2i\bar{k}a}) + \{(1 + ie^{2i\bar{k}a}) - \frac{i}{2}(-1 + ie^{2i\bar{k}a})\} f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= \underbrace{-2\bar{k}i(\bar{t}_a - 2)}_{\alpha_1} + \underbrace{\{\bar{t}_a - \frac{i}{2}(\bar{t}_a - 2)\} L\bar{k}^2}_{\alpha_{FF}} f_{FF} = \alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}$$

$$\bar{f}_3 = -2i\bar{k} + 2\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} + \frac{1}{2} f_{FF} L\bar{k}^2 (e^{-2i\bar{k}b} - i)$$

$$= 2\bar{k}(-i + e^{-2i\bar{k}b}) + \frac{i}{2}(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= 2\bar{k}i(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) + \frac{i}{2}(-1 - ie^{-2i\bar{k}b}) f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= \underbrace{2\bar{k}i(\bar{t}_b - 2)}_{\beta_1} + \underbrace{\frac{i}{2}(\bar{t}_b - 2)L\bar{k}^2}_{\beta_{FF}} f_{FF}$$

$$p_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1 = \bar{t}_a \bar{c}_1$$

$$q_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1 = \bar{t}_a \bar{d}_1 = \bar{t}_a (t_b - 2)$$

$$q_3 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + (1 - ie^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3 = \bar{t}_a \bar{d}_3 + \bar{t}_b \bar{c}_3$$

$$r_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})e_1 = \bar{t}_a e_1$$

$$s_3 = \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a} \bar{f}_3 + \underbrace{(1 - ie^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b} \bar{e}_3 = \bar{t}_a \bar{f}_3 + \bar{t}_b \bar{e}_3$$

$$\bar{r}_1 = (s_3 p_1 - q_3 r_1)$$

$$\bar{s}_1 = s_3 q_1$$

$$\prod_1 = t_a \bar{t}_a \bar{f}_3 q_1 = t_a \bar{t}_a (\beta_1 + \beta_{FF} f_{FF}) q_1 = t_a \bar{t}_a q_1 \beta_1 + t_a \bar{t}_a q_1 \beta_{FF} f_{FF}$$

$$\prod_2 = t_a \bar{t}_b \bar{e}_3 q_1 = t_a \bar{t}_b q_1 (\alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}) = t_a \bar{t}_b q_1 \alpha_1 + t_a \bar{t}_b q_1 \alpha_{FF} f_{FF}$$

$$\prod_3 = t_b\bar{t}_a^2\bar{f}_3\bar{c}_1 = t_b\bar{t}_a^2\bar{f}_3(c_1 + c_2e^{2ika})$$

$$= t_b\bar{t}_a^2\bar{f}_3\{1 - \alpha_{AA}f_{AA} + (1 + \alpha_{AA}f_{AA})(1 - t_a)\}$$

$$= t_b\bar{t}_a^2(\beta_1 + \beta_{FF}f_{FF})\{(2 - t_a) - t_a\alpha_{AA}f_{AA}\}$$

$$= (t_b\bar{t}_a^2\beta_1 + t_b\bar{t}_a^2\beta_{FF}f_{FF})\{(2 - t_a) - t_a\alpha_{AA}f_{AA}\}$$

$$= t_b\bar{t}_a^2\beta_1(2 - t_a) - t_at_b\bar{t}_a^2\beta_1\alpha_{AA}f_{AA} + t_b\bar{t}_a^2\beta_{FF}f_{FF}(2 - t_a)$$

$$- t_at_b\bar{t}_a^2\beta_{FF}f_{FF}\alpha_{AA}f_{AA}$$

$$\prod_4 = t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{e}_3\bar{c}_1 = t_b\bar{t}_a\bar{t}_b(\alpha_1 + \alpha_{FF}f_{FF})(c_1 + c_2e^{2ika})$$

$$= t_b\bar{t}_a\bar{t}_b(\alpha_1 + \alpha_{FF}f_{FF})\{(2 - t_a) - t_a\alpha_{AA}f_{AA}\}$$

$$= t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\{\alpha_1(2 - t_a) - \alpha_1t_a\alpha_{AA}f_{AA} + \alpha_{FF}f_{FF}(2 - t_a)$$

$$- \alpha_{FF}f_{FF}t_a\alpha_{AA}f_{AA}\}$$

$$= t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_1(2 - t_a) + t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_{FF}f_{FF}(2 - t_a) - t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_1\alpha_{AA}f_{AA}$$

$$- t_at_b\bar{t}_a\bar{t}_b\alpha_{AA}\alpha_{FF}f_{AA}f_{FF}$$

$$\prod_5 = t_b\bar{t}_a^2e_1\bar{d}_3 = t_b\bar{t}_a^2(\alpha_{FA}f_{FA})(c_3\hat{d}_3) = t_b\bar{t}_a^2\hat{d}_3(\alpha_{FA}f_{FA})(\overline{\alpha}_{FA}f_{FA})$$

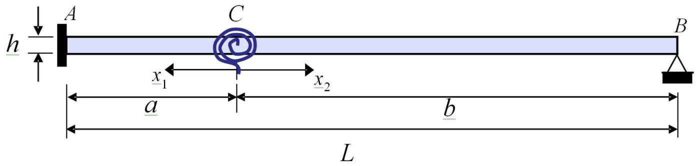
$$= t_b\bar{t}_a^2\hat{d}_3\alpha_{FA}\overline{\alpha}_{FA}f_{FA}^2$$

$$\prod_6 = t_b\bar{t}_a\bar{t}_be_1\bar{c}_3 = t_b\bar{t}_a\bar{t}_b(\alpha_{FA}f_{FA})(-c_3\hat{c}_3)$$

$$= -t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\hat{c}_3(\alpha_{FA}f_{FA})(\overline{\alpha}_{FA}f_{FA}) = -t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\hat{c}_3\alpha_{FA}\overline{\alpha}_{FA}f_{FA}^2$$

이 후 정식화 과정은 단순보의 예와 동일하여 생략한다. 식 (3.34) ~ 식 (3.42)를 참고한다.

부록 A-7 **Fix-Hinge** 지점조건에서 특성방정식 정식화



Free-Hinge 모델링

축 방향 변위와 굽힘 방향 변위, 균열지점에서 적합조건식, 평형방정식은 단순보의 경우와 동일하다. 이 과정은 식 (3.1) ~ 식 (3.6)을 참고한다. 부록에는 이후 과정부터 첨부한다.

1. 변위 경계조건:

(a) A점에서 축 방향 변위:

$$\begin{aligned} & u_L(a)=0 \\ & \Rightarrow A_1 e^{ika}+A_2 e^{-ika}=0 \\ & \Rightarrow A_2=-A_1 e^{2ika} \end{aligned} \tag{1}$$

(b) A점에서 굽힘 방향 변위:

$$\begin{aligned} & w_L(a)=0 \\ & \Rightarrow A_3 e^{i\bar{k}a}+A_4 e^{-i\bar{k}a}+A_5 e^{\bar{k}a}=0 \end{aligned} \tag{2}$$

(c) A점에서 처짐각:

$$\begin{aligned} & w_L'(a)=0 \\ & \Rightarrow (i\bar{k})A_3 e^{i\bar{k}a}+(-i\bar{k})A_4 e^{-i\bar{k}a}+\bar{k}A_5 e^{\bar{k}a}=0 \\ & \Rightarrow iA_3 e^{i\bar{k}a}-iA_4 e^{-i\bar{k}a}+A_5 e^{\bar{k}a}=0 \end{aligned} \tag{3}$$

(d) B점에서 축 방향 변위:

$$\begin{aligned} & u_R(b)=0 \\ & \Rightarrow B_1 e^{-ikb}+B_2 e^{ikb}=0 \\ & \Rightarrow B_1=-B_2 e^{2ikb}(B_2=-B_1 e^{-2ikb}) \end{aligned} \tag{4}$$

(e) B점에서 굽힘 방향 변위:

$$
\begin{aligned}
& w_R(b) = 0 \\
& \Rightarrow B_3 e^{-i\bar{k}b} + B_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} = 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

2. 힘의 경계조건:

(a) B점에서 모멘트:

$$
\begin{aligned}
& EIw_R''(b) = 0 \\
& \Rightarrow (-\bar{k}^2) B_3 e^{-i\bar{k}b} + (-\bar{k}^2) B_4 e^{i\bar{k}b} + (\bar{k}^2) B_6 e^{\bar{k}b} = 0 \\
& \Rightarrow -B_3 e^{-i\bar{k}b} - B_4 e^{i\bar{k}b} + B_6 e^{\bar{k}b} = 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

정리된 식을 매트릭스 형태로 표현하면 다음과 같다:

$$
\begin{bmatrix}
1-if_{AA}Lk & 1+if_{AA}Lk & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & 0 & \frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
if_{FA}k & -if_{FA}k & i\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2 & -(i\bar{k}-f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & -(\bar{k}+f_{FF}L\bar{k}^2) & 0 & 0 & -i\bar{k} & i\bar{k} & -\bar{k} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & i & 0 & -1 & 0 & 0 & i & -i & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
e^{2ika} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & e^{i\bar{k}a} & e^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & ie^{i\bar{k}a} & -ie^{-i\bar{k}a} & e^{\bar{k}a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e^{2ikb} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\bar{k}b} & e^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-i\bar{k}b} & -e^{i\bar{k}b} & 0 & e^{\bar{k}b}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{7}
$$

식 (3.3)와 식 (3.6)을 더하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
& A_3 + A_4 + A_6 - B_3 - B_4 - B_5 - A_3 - A_4 + A_6 + B_3 + B_4 - B_5 = 0 \\
& \Rightarrow 2A_6 - 2B_5 = 0 \\
& \Rightarrow B_5 = A_6
\end{aligned} \tag{8}
$$

식 (2)에서 식 (3)을 빼면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
&A_3e^{i\bar{k}a}+A_4e^{-i\bar{k}a}+A_5e^{\bar{k}a}-iA_3e^{i\bar{k}a}+iA_4e^{-i\bar{k}a}-A_5e^{\bar{k}a}=0\\
&\Rightarrow(1-i)A_3e^{i\bar{k}a}=-(1+i)A_4e^{-i\bar{k}a}\\
&\Rightarrow\frac{(1-i)}{-(1+i)}A_3e^{2i\bar{k}a}=A_4\\
&\Rightarrow iA_3e^{2i\bar{k}a}=A_4\,(A_3=-iA_4e^{-2i\bar{k}a})
\end{aligned}\tag{9}$$

식 (5)에서 식 (6)을 더하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
&B_3e^{-i\bar{k}b}+B_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}b}-B_3e^{-i\bar{k}b}-B_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}b}=0\\
&\Rightarrow 2B_6e^{\bar{k}b}=0\\
&\Rightarrow B_6=0
\end{aligned}\tag{10}$$

식 (10)에서 식 (5)를 빼면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
&B_3e^{-i\bar{k}b}+B_4e^{i\bar{k}b}+B_6e^{\bar{k}b}=0\\
&\Rightarrow B_3e^{-i\bar{k}b}+B_4e^{i\bar{k}b}=0\\
&\Rightarrow B_3=-B_4e^{2i\bar{k}b}(B_4=-B_3e^{-2i\bar{k}b})
\end{aligned}\tag{11}$$

식 (3.5)에 식 (8)-(11)의 결과를 대입하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -iA_3+iA_4-A_6+iB_3-iB_4-B_5=0\\
&\Rightarrow -iA_3+iA_4-2A_6+iB_3-iB_4=0\\
&\Rightarrow -iA_3+i(iA_3e^{2i\bar{k}a})-2A_6+iB_3-i(-B_3e^{-2i\bar{k}b})=0\\
&\Rightarrow -iA_3-A_3e^{2i\bar{k}a}-2A_6+iB_3+iB_3e^{-2i\bar{k}b}=0\\
&\Rightarrow 2A_6=-(i+e^{2i\bar{k}a})A_3+i(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3\\
&\Rightarrow A_6=-\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})A_3+\frac{i}{2}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3
\end{aligned}\tag{12}$$

식 (3.1)에 식 (1), (4), (9), (11), (12)을 대입하면 다음과 같다:

$$u_R(0)-u_L(0)=(f_{AA}L)u_L'(0)+\frac{h^2}{12}f_{FA}w_L''(0)$$

$$\Rightarrow B_1+B_2-A_1-A_2=-if_{AA}Lk(A_1-A_2)-\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA}(A_3+A_4-A_6)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-if_{AA}Lk)}_{c_1}A_1+\underbrace{(1+if_{AA}Lk)}_{c_2}A_2-\underbrace{\frac{h^2\bar{k}^2}{12}f_{FA}}_{c_3}(A_3+A_4-A_6)$$

$$-B_1-B_2=0$$

$$\Rightarrow c_1A_1+c_2A_2-c_3(A_3+A_4-A_6)-B_1-B_2=0$$

$$\Rightarrow c_1A_1+c_2(-A_1e^{2ika})-c_3[A_3+(iA_3e^{2i\bar{k}a})$$

$$-\{-\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})A_3+\frac{i}{2}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3\}] \tag{13}$$

$$-B_1-(-B_1e^{-2ikb})=0$$

$$\Rightarrow (c_1-c_2e^{2ika})A_1-c_3\{A_3+iA_3e^{2i\bar{k}a}+\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})A_3$$

$$-\frac{i}{2}(1+e^{-2i\bar{k}b})B_3\}+(-1+e^{-2ikb})B_1=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(c_1-c_2e^{2ika})}_{\bar{c}_1}A_1\underbrace{-c_3\{1+ie^{2i\bar{k}a}+\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})\}}_{\bar{c}_3}A_3$$

$$+\underbrace{(-1+e^{-2ikb})}_{\bar{d}_1}B_1+\underbrace{c_3\frac{i}{2}(1+e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{d}_3}B_3=0$$

$$\Rightarrow \bar{c}_1A_1+\bar{d}_1B_1+\bar{c}_3A_3+\bar{d}_3B_3=0$$

식 (3.2)에 식 (1), (8)-(12)를 대입하면 다음과 같다:

$$if_{FA}k(A_1 - A_2) + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)A_4$$

$$-(\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_6 - i\bar{k}B_3 + i\bar{k}B_4 - \bar{k}\underbrace{B_5}_{A_6} = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k\{A_1 - (-A_1e^{2ika})\} + (i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)A_3 - (i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)(iA_3e^{2i\bar{k}a})$$

$$-(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\{-\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})A_3 + \frac{i}{2}(1 + e^{-2i\bar{k}b})B_3\} - i\bar{k}B_3$$

$$+i\bar{k}(-B_3e^{-2i\bar{k}b}) = 0$$

$$\Rightarrow if_{FA}k(1 + e^{2ika})A_1 + \{i\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2 - ie^{2i\bar{k}a}(i\bar{k} - f_{FF}L\bar{k}^2)$$

$$+(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)\frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})\}A_3 \qquad (14)$$

$$+\{-\frac{i}{2}(2\bar{k} + f_{FF}L\bar{k}^2)(1 + e^{-2i\bar{k}b}) - i\bar{k} - i\bar{k}e^{-2i\bar{k}b}\}B_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{if_{FA}k(1 + e^{2ika})}_{e_1}A_1$$

$$+\underbrace{\{2\bar{k}i + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + f_{FF}L\bar{k}^2(1 + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}e^{2i\bar{k}a})\}}_{\bar{e}_3}A_3$$

$$+\underbrace{\{-2\bar{k}i - 2i\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} - \frac{i}{2}f_{FF}L\bar{k}^2(1 + e^{-2i\bar{k}b})\}}_{\bar{f}_3}B_3 = 0$$

$$\Rightarrow e_1A_1 + \bar{e}_3A_3 + \bar{f}_3B_3 = 0$$

식 (3.4)에 식 (1), (4)을 대입하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
&A_1 - (-A_1 e^{2ika}) - B_1 + (-B_1 e^{-2ikb}) = 0 \\
&(1+e^{2ika})A_1 - (1+e^{-2ikb})B_1 = 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

식 (3.3)에 식 (8)-(11)을 대입하면 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
&A_3 + (iA_3 e^{2i\bar{k}a}) - B_3 - (-B_3 e^{-2i\bar{k}b}) = 0 \\
&(1+ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1-e^{-2i\bar{k}b})B_3 = 0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

식 (13)와 식 (16)를 연립하여 A_3를 제거 할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&(1+ie^{2i\bar{k}a}) \times (\bar{c}_1 A_1 + \bar{d}_1 B_1 + \bar{c}_3 A_3 + \bar{d}_3 B_3) \\
&-\bar{c}_3 \times \{(1+ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1-e^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0 \\
&\Rightarrow \underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1}_{p_1} A_1 + \underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1}_{q_1} B_1 \\
&+ \underbrace{\{(1+ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + (1-e^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3\}}_{q_3} B_3 = 0 \\
&\Rightarrow p_1 A_1 + q_1 B_1 + q_3 B_3 = 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

식 (14)과 식 (16)를 연립하여 A_3를 제거 할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&(1+ie^{2i\bar{k}a}) \times (e_1 A_1 + \bar{e}_3 A_3 + \bar{f}_3 B_3) \\
&-\bar{e}_3 \times \{(1+ie^{2i\bar{k}a})A_3 - (1-e^{-2i\bar{k}b})B_3\} = 0 \\
&\Rightarrow \underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})e_1}_{r_1} A_1 + \underbrace{\{(1+ie^{2i\bar{k}a})\bar{f}_3 + (1-e^{-2i\bar{k}b})\bar{e}_3\}}_{s_3} B_3 = 0 \\
&\Rightarrow r_1 A_1 + s_3 B_3 = 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

식 (17)과 식 (18)를 연립하여 B_3를 제거 할 수 있다:

$$\begin{aligned}
& s_3(p_1A_1 + q_1B_1 + q_3B_3) - q_3(r_1A_1 + s_3B_3) = 0 \\
& \Rightarrow s_3(p_1A_1 + q_1B_1 + q_3B_3) - q_3(r_1A_1 + s_3B_3) = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{(s_3p_1 - q_3r_1)}_{\bar{r}_1}A_1 + \underbrace{s_3q_1}_{\bar{s}_1}B_1 = 0 \\
& \Rightarrow \bar{r}_1A_1 + \bar{s}_1B_1 = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

식 (15)과 식 (19)를 연립하여 B_1을 제거 할 수 있다:

$$\begin{aligned}
& \bar{s}_1\{(1+e^{2ika})A_1 - (1+e^{-2ikb})B_1\} + (1+e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1 + \bar{s}_1B_1) = 0 \\
& \Rightarrow \{\bar{s}_1(1+e^{2ika}) + \bar{r}_1(1+e^{-2ikb})\}A_1 = 0 \\
& \Rightarrow \bar{s}_1(1+e^{2ika}) + \bar{r}_1(1+e^{-2ikb}) = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

(=> characteristic equation)

식 (20)으로부터,

$$\bar{s}_1\{(1+e^{2ika})A_1 - (1+e^{-2ikb})B_1\} + (1+e^{-2ikb})(\bar{r}_1A_1 + \bar{s}_1B_1) = 0$$

$$\Rightarrow \{\bar{s}_1(1+e^{2ika}) + \bar{r}_1(1+e^{-2ikb})\}A_1 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{s}_1(1+e^{2ika}) + \bar{r}_1(1+e^{-2ikb}) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1+e^{2ika})}_{t_a}s_3q_1 + \underbrace{(1+e^{-2ikb})}_{t_b}(s_3p_1 - q_3r_1) = 0$$

$$\Rightarrow t_a\{\underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3 + \underbrace{(1-e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}q_1 + t_b\{\underbrace{(1+ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a}\bar{f}_3$$

$$+ \underbrace{(1-e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b}\bar{e}_3\}p_1 - t_bq_3r_1 = 0$$

$$\Rightarrow t_a(\bar{t}_a\bar{f}_3+\bar{t}_b\bar{e}_3)q_1+t_b(\bar{t}_a\bar{f}_3+\bar{t}_b\bar{e}_3)p_1-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1+t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1+t_b\bar{t}_a\bar{f}_3p_1+t_b\bar{t}_b\bar{e}_3p_1-t_bq_3r_1=0$$

$$\Rightarrow t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1+t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1+t_b\bar{t}_a\bar{f}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1)+t_b\bar{t}_b\bar{e}_3(\bar{t}_a\bar{c}_1)$$

$$-t_b(\bar{t}_a\bar{d}_3+\bar{t}_b\bar{c}_3)(\bar{t}_ae_1)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{t_a\bar{t}_a\bar{f}_3q_1}_{\Pi_1}+\underbrace{t_a\bar{t}_b\bar{e}_3q_1}_{\Pi_2}+\underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{f}_3\bar{c}_1}_{\Pi_3}+\underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{e}_3\bar{c}_1}_{\Pi_4}-\underbrace{t_b\bar{t}_a^2\bar{d}_3e_1}_{\Pi_5}-\underbrace{t_b\bar{t}_a\bar{t}_b\bar{c}_3e_1}_{\Pi_6}=0$$

$$\Rightarrow \prod_1+\prod_2+\prod_3+\prod_4-\prod_5-\prod_6=0$$

정식화에 사용한 임시변수들을 정리한다.

$$c_1=(1-if_{AA}Lk)=1-\underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}}f_{AA}=1-\alpha_{AA}f_{AA}$$

$$c_2=(1+if_{AA}Lk)=1+\underbrace{iLk}_{\alpha_{AA}}f_{AA}=1+\alpha_{AA}f_{AA}$$

$$c_3=\underbrace{\frac{h^2\bar{k}^2}{12}}_{\bar{\alpha}_{FA}}f_{FA}=\bar{\alpha}_{FA}f_{FA}$$

$$\bar{c}_1=c_1-c_2e^{2ika}=1-\alpha_{AA}f_{AA}-(1+\alpha_{AA}f_{AA})e^{2ika}$$

$$\bar{c}_3=-c_3\{1+ie^{2i\bar{k}a}+\frac{1}{2}(i+e^{2i\bar{k}a})\}$$

$$=-c_3\{\bar{t}_a+\frac{1}{2i}(-1+ie^{2i\bar{k}a})\}=-c_3\underbrace{\{\bar{t}_a-\frac{i}{2}(\bar{t}_a-2)\}}_{\hat{c}_3}=-c_3\hat{c}_3$$

$$\bar{d}_1=-1+e^{-2ikb}=t_b-2$$

$$\bar{d}_3=c_3\frac{i}{2}(1+e^{-2i\bar{k}b})=-c_3\frac{i}{2}(-1-e^{-2i\bar{k}b})=c_3\underbrace{\frac{i}{2}(2-\bar{t}_b)}_{\hat{d}_3}=c_3\hat{d}_3$$

$$e_1 = if_{FA}k(1+e^{2ika}) = \underbrace{ikt_a}_{\alpha_{FA}} f_{FA} = \alpha_{FA} f_{FA}$$

$$\bar{e}_3 = 2\bar{k}i + 2\bar{k}e^{2i\bar{k}a} + \{1 + ie^{2i\bar{k}a} + \frac{1}{2}(i + e^{2i\bar{k}a})\} f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= -2\bar{k}i(-1 + ie^{2i\bar{k}a}) + \{(1 + ie^{2i\bar{k}a}) - \frac{i}{2}(-1 + ie^{2i\bar{k}a})\} f_{FF} L\bar{k}^2$$

$$= \underbrace{-2\bar{k}i(\bar{t}_a - 2)}_{\alpha_1} + \underbrace{\{\bar{t}_a - \frac{i}{2}(\bar{t}_a - 2)\} L\bar{k}^2}_{\alpha_{FF}} f_{FF} = \alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}$$

$$= \underbrace{-2\bar{k}i(\bar{t}_a - 2)}_{\alpha_1} + \underbrace{\{\bar{t}_a (1 - \frac{i}{2}) + i)\} L\bar{k}^2}_{\alpha_{FF}} f_{FF} = \alpha_1 + \alpha_{FF} f_{FF}$$

$$\bar{f}_3 = -2\bar{k}i - 2i\bar{k}e^{-2i\bar{k}b} - \frac{i}{2} f_{FF} L\bar{k}^2 (1 + e^{-2i\bar{k}b})$$

$$= -2\bar{k}i(1 + e^{-2i\bar{k}b}) - \frac{i}{2} f_{FF} L\bar{k}^2 (1 + e^{-2i\bar{k}b})$$

$$= \underbrace{2\bar{k}i(\bar{t}_b - 2)}_{\beta_1} + \underbrace{\frac{i}{2} L\bar{k}^2 (\bar{t}_b - 2)}_{\beta_{FF}} f_{FF}$$

$$= \beta_1 + \beta_{FF} f_{FF}$$

$$p_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{c}_1 = \bar{t}_a \bar{c}_1$$

$$q_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_1 = \bar{t}_a \bar{d}_1 = \bar{t}_a (t_b - 2)$$

$$q_3 = (1 + ie^{2i\bar{k}a})\bar{d}_3 + (1 - e^{-2i\bar{k}b})\bar{c}_3 = \bar{t}_a \bar{d}_3 + \bar{t}_b \bar{c}_3$$

$$r_1 = (1 + ie^{2i\bar{k}a}) e_1 = \bar{t}_a e_1$$

$$s_3 = \underbrace{(1 + ie^{2i\bar{k}a})}_{\bar{t}_a} \bar{f}_3 + \underbrace{(1 - e^{-2i\bar{k}b})}_{\bar{t}_b} \bar{e}_3 = \bar{t}_a \bar{f}_3 + \bar{t}_b \bar{e}_3$$

$$\bar{r}_1 = (s_3 p_1 - q_3 r_1) \qquad \bar{s}_1 = s_3 q_1$$

이 후 정식화 과정은 단순보의 예와 동일하여 생략한다. 식 (3.34) ~ 식 (3.42)를 참고한다.

Abstract

Predicting the Natural Frequencies of a Cracked Beam Considering Axial-bending Coupling from Wave Propagation Perspective.

by

KANG JI KANG

Department of Civil Engineering
Graduate school, Dong-A University
Busan. Korea

This paper presents a technique for predicting natural frequencies of a cracked beam considering the axial - bending coupling from wave propagation perspective. Higher-mode natural frequencies are sensitive to incipient cracks, but previous studies have focused on the effect of the cracks on the lower-mode natural frequencies. In this regard, we derive a characteristic equation for calculating the higher-mode natural frequencies from wave propagation perspective. In order to determine the unknowns in the dynamic behaviors of the beam, 12 equations are obtained considering force, displacement boundary, compatibility and equilibrium conditions, respectively. In particular, the effects of axial-bending coupling are considered for the compatibilities of axial displacement and deflection angle at crack location. Wave components corresponding evanescent wave modes

are assumed to be selectively negligible in the formulation from wave perspective. This results in a single characteristic equation through parameterization regardless of support conditions of a beam. The natural frequencies are computed using the characteristic equation which is solved through the Newton-Raphson method. The natural frequencies computed by the proposed method are compared to those obtained by finite element analysis using ABAQUS for verification purpose. The differences of natural frequencies are compared as well between pure bending and the axial-bending coupling for identifying the axial-bending coupling effects. The axial-bending coupling plays a crucial role in predicting accurate natural frequencies of a cracked beam either in case the crack depth ratio increases or the natural mode of interest becomes higher.