Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехника и комплексная автоматизация»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

по дисциплине «Аналитические модели и имитационное моделирование»

Студент:	Осипов Арсений Константинович
Группа:	РК6-84б
Тип задания:	Домашнее задание №3
Название:	Теория надежности
Вариант:	10

Студент ____________ Осипов А. К.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ____________ Берчун Ю. В.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Оценка: ____________

Москва, 2023

Содержание

Теория надежности

1 Цель выполнения домашнего задания

Цель выполнения домашнего задания – изучить систему по теории надежности

2 Задание

Система состоит из устройств типа A и типа B, интенсивности отказов λ_A и λ_B известны. Для функционирования системы требуется хотя бы одно устройство типа A и хотя бы N_B устройств типа B. Общее число устройств в системе (включая резервные) – R_A и R_B соответственно, причём в нормальном состоянии одновременно включены сразу N_A устройств типа A.

Если N – номер зачётной книжки, а G – последняя цифра в номере группы, то параметры системы определяются следующим образом:

$$\lambda_A = G + (N \bmod 3)$$
$$\lambda_B = G + (N \bmod 5)$$
$$N_A = 2 + (G \bmod 2)$$
$$N_B = 2 + (N \bmod 2)$$
$$R_A = 4 + (G \bmod 2)$$
$$R_B = 5 - (G \bmod 2)$$

Требуется:

1. нарисовать граф состояний системы;
2. составить матрицу интенсивностей переходов;
3. записать дифференциальные уравнения Колмогорова;
4. аналитически решить полученную систему уравнений, исходя из того, что в начальный момент времени все устройства исправны;
5. построить графики вероятностей нахождения системы в каждом из возможных состояний с течением времени;
6. построить график функции надёжности системы;
7. рассчитать математическое ожидание времени безотказной работы;
8. провести имитационное моделирование системы в терминах непрерывных марковских цепей 100 раз, рассчитать среднее выборочное значение и стандартное отклонение времени безотказной работы системы.

3 Решение

Рассчитаем начальные данные для выполнения домашнего задания по номеру зачетки $N = 10$ и группы $G = 4$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_A &= G + (N \bmod 3) = 4 + (10 \bmod 3) = & 5 \\
\lambda_B &= G + (N \bmod 5) = 4 + (10 \bmod 5) = & 4 \\
N_A &= 2 + (G \bmod 2) = 2 + (4 \bmod 2) = & 2 \\
N_B &= 2 + (N \bmod 2) = 2 + (10 \bmod 2) = & 2 \\
R_A &= 4 + (G \bmod 2) = 4 + (4 \bmod 2) = & 4 \\
R_B &= 5 - (G \bmod 2) = 5 - (4 \bmod 2) = & 5
\end{aligned}
$$

Предположим что S_{cd}^{ab} - состояние системы, где

- a - количество работающих устройств типа A, включая резервные,
- b - количество резервных устройств типа A,
- c - количество работающих устройств типа B, включая резервные,
- d - количество резервных устройств типа B.

На рисунке 1 изображен граф состояний системы.

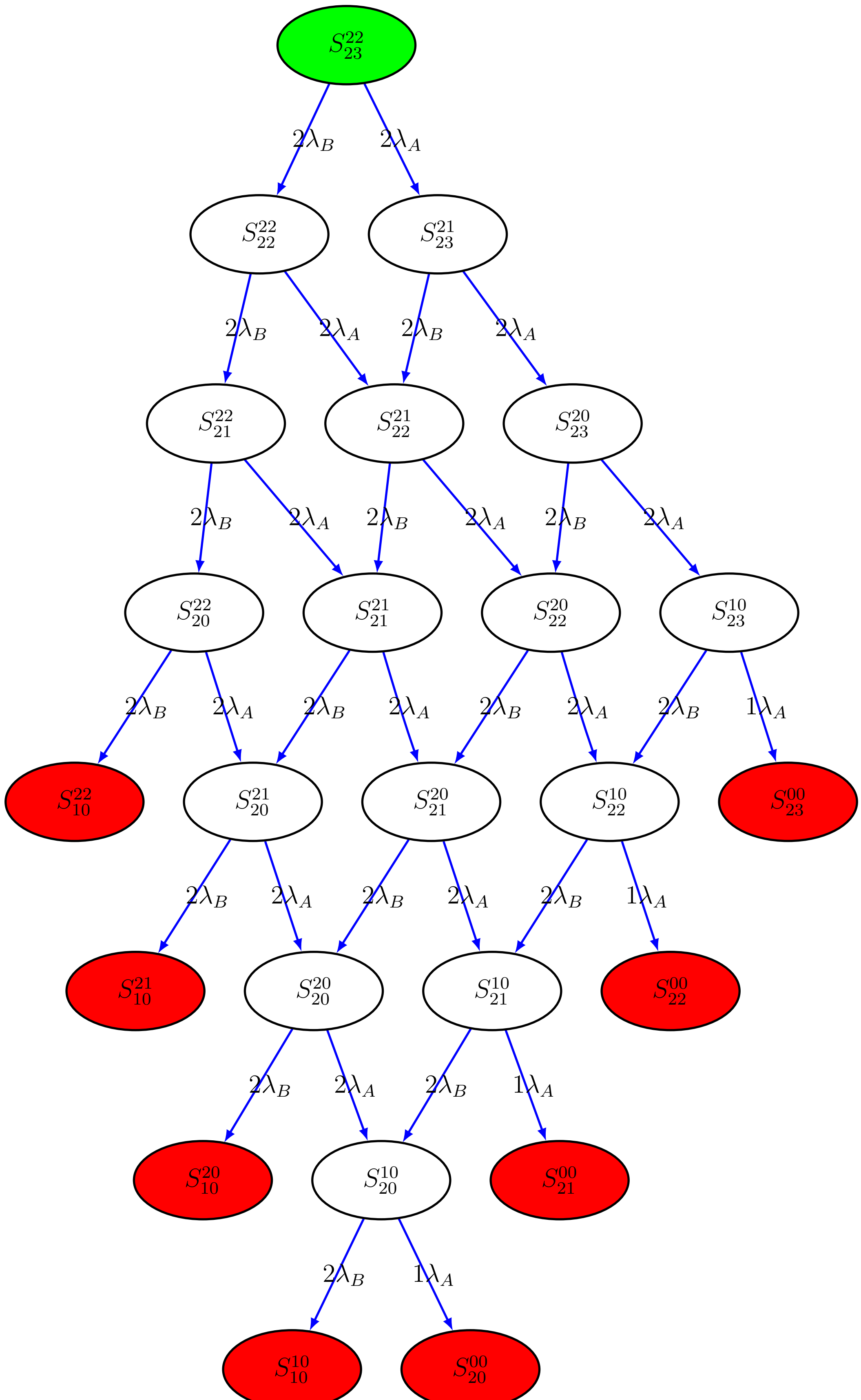

Рис. 1. Граф состояний системы

Переобозначим состояния следующим образом: $S_0 = S_{23}^{22}$, $S_1 = S_{22}^{22}$, $S_2 = S_{23}^{21}$, $S_3 = S_{21}^{22}$, $S_4 = S_{22}^{21}$, $S_5 = S_{23}^{20}$, $S_6 = S_{20}^{22}$, $S_7 = S_{21}^{21}$, $S_8 = S_{22}^{20}$, $S_9 = S_{23}^{10}$, $S_{10} = S_{10}^{22}$, $S_{11} = S_{20}^{21}$, $S_{12} = S_{21}^{20}$, $S_{13} = S_{22}^{10}$, $S_{14} = S_{23}^{00}$, $S_{15} = S_{10}^{21}$, $S_{16} = S_{20}^{20}$, $S_{17} = S_{21}^{10}$, $S_{18} = S_{22}^{00}$, $S_{19} = S_{10}^{20}$, $S_{20} = S_{20}^{10}$, $S_{21} = S_{21}^{00}$, $S_{22} = S_{10}^{10}$, $S_{23} = S_{20}^{00}$.

На основании построенного графа состояний можно составить матрицу интенсивностей переходов (матрица 1). Необходимо заметить, что диоганальные элементы матрицы равны отрицательной сумме всех остальных элементов строки.

$$\Lambda = \begin{pmatrix}
-18 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -18 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -18 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 8 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{1}$$

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{cases} P_0' = -8P_0(t) - 10P_0(t) \\ P_1' = 8P_0(t) - 8P_1(t) - 10P_1(t) \\ P_2' = 10P_0(t) - 8P_2(t) - 10P_2(t) \\ P_3' = 8P_1(t) - 8P_3(t) - 10P_3(t) \\ P_4' = 10P_1(t) + 8P_2(t) - 8P_4(t) - 10P_4(t) \\ P_5' = 10P_2(t) - 8P_5(t) - 10P_5(t) \\ P_6' = 8P_3(t) - 8P_6(t) - 10P_6(t) \\ P_7' = 10P_3(t) + 8P_4(t) - 8P_7(t) - 10P_7(t) \\ P_8' = 10P_4(t) + 8P_5(t) - 8P_8(t) - 10P_8(t) \\ P_9' = 10P_5(t) - 8P_9(t) - 5P_9(t) \\ P_{10}' = 8P_6(t) \\ P_{11}' = 10P_6(t) + 8P_7(t) - 8P_{11}(t) - 10P_{11}(t) \\ P_{12}' = 10P_7(t) + 8P_8(t) - 8P_{12}(t) - 10P_{12}(t) \\ P_{13}' = 10P_8(t) + 8P_9(t) - 8P_{13}(t) - 5P_{13}(t) \\ P_{14}' = 5P_9(t) \\ P_{15}' = 8P_{11}(t) \\ P_{16}' = 10P_{11}(t) + 8P_{12}(t) - 8P_{16}(t) - 10P_{16}(t) \\ P_{17}' = 10P_{12}(t) + 8P_{13}(t) - 8P_{17}(t) - 5P_{17}(t) \\ P_{18}' = 5P_{13}(t) \\ P_{19}' = 8P_{16}(t) \\ P_{20}' = 10P_{16}(t) + 8P_{17}(t) - 8P_{20}(t) - 5P_{20}(t) \\ P_{21}' = 5P_{17}(t) \\ P_{22}' = 8P_{20}(t) \\ P_{23}' = 5P_{20}(t) \end{cases}$$

Начальные условия:

$$P_0(t=0) = 1$$

$$P_i(t=0) = 0 \quad \forall i \in [1, 24]$$

Найдем функцию $P_0(t)$.

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -18P_0(t)$$

$$\int \frac{1}{P_0(t)} dP_0(t) = \int -18dt$$

$$\int d\ln P_0(t) = \int -18dt$$

$$\ln P_0(t) = -18t + c$$

$$P_0(t) = e^{-18t+c}$$
$$P_0(t=0) = 1 => e^{-18t+c} = 1 => c = 0$$
$$P_0(t) = e^{-18t}$$

Теперь найдем функцию $P_1(t)$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = 8e^{-18t} - 18P_1(t)$$
$$\frac{dP_1(t)}{dt} + 18P_1(t) = 8e^{-18t} \quad |\cdot e^{18t}$$
$$e^{18t}\frac{dP_1(t)}{dt} + e^{18t}18P_1(t) = 8$$
$$\frac{dP_1(t)\cdot e^{18t}}{dt} = 8$$
$$\int \frac{dP_1(t)\cdot e^{18t}}{dt}dt = \int 8dt$$
$$P_1(t)e^{18t} = 8t + c => P_1(t) = (8t + c)e^{-18t}$$
$$P_1(t=0) = 0 => (0+c)e^{-18t} = 0 => c = 0$$
$$P_1(t) = 8e^{-18t}t$$

Аналогично вычисляется $P_2(t)$:

$$P_2(t) = 10e^{-18t}t$$

На основе $P_1(t)$ и $P_2(t)$ найдем $P_4(t)$:

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = 8P_1(t) + 10P_2(t) - 18P_4(t)$$
$$\frac{dP_4(t)}{dt} + 18P_4(t) = 160e^{-18t}t$$
$$\frac{d}{dt}(e^{18t}P_4(t)) = 160t$$
$$\int \frac{d}{dt}(e^{18t}P_4(t))dt = \int 160tdt$$
$$e^{18t}P_4(t) = 80t^2 + c$$
$$y(0) = 0 => P_4(t) = e^{-18t}(80t^2 + c), c = 0$$
$$P_4(t) = 80e^{-18t}t^2$$

По аналогии с $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $P_4(t)$ вычислим функции вероятностей для всех нетерминальных состояний:

$$P_1(t) = 8e^{-18t}t^1$$
$$P_2(t) = 10e^{-18t}t^1$$
$$P_3(t) = 32e^{-18t}t^2$$
$$P_4(t) = 80e^{-18t}t^2$$
$$P_5(t) = 50e^{-18t}t^2$$
$$P_6(t) = 85.333333333333e^{-18t}t^3$$
$$P_7(t) = 320e^{-18t}t^3$$
$$P_8(t) = 400e^{-18t}t^3$$
$$P_9(t) = 166.666666666666e^{-18t}t^3$$
$$P_{11}(t) = 853.33333333333e^{-18t}t^4$$
$$P_{12}(t) = 1600e^{-18t}t^4$$
$$P_{13}(t) = 1333.33333333333e^{-18t}t^4$$
$$P_{16}(t) = 4266.6666666666e^{-18t}t^5$$
$$P_{17}(t) = 5333.3333333333e^{-18t}t^5$$
$$P_{20}(t) = 14222.222222222e^{-18t}t^6$$

По вычисленным функциям были построены графики вероятностей нахождения системы в каждом из возможных «рабочих» состояний с течением времени (рис. 2 и 3).

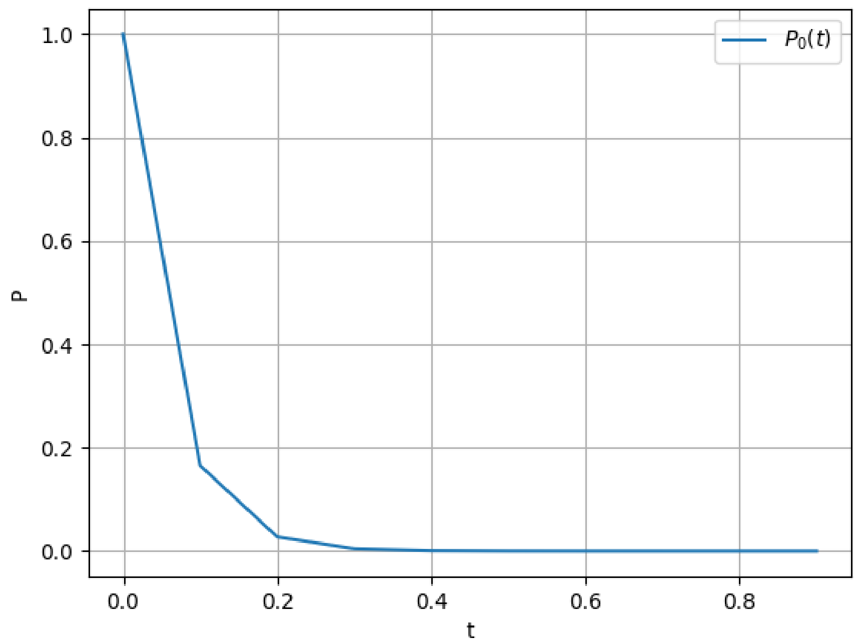

Рис. 2. Функция вероятности для начального состояния

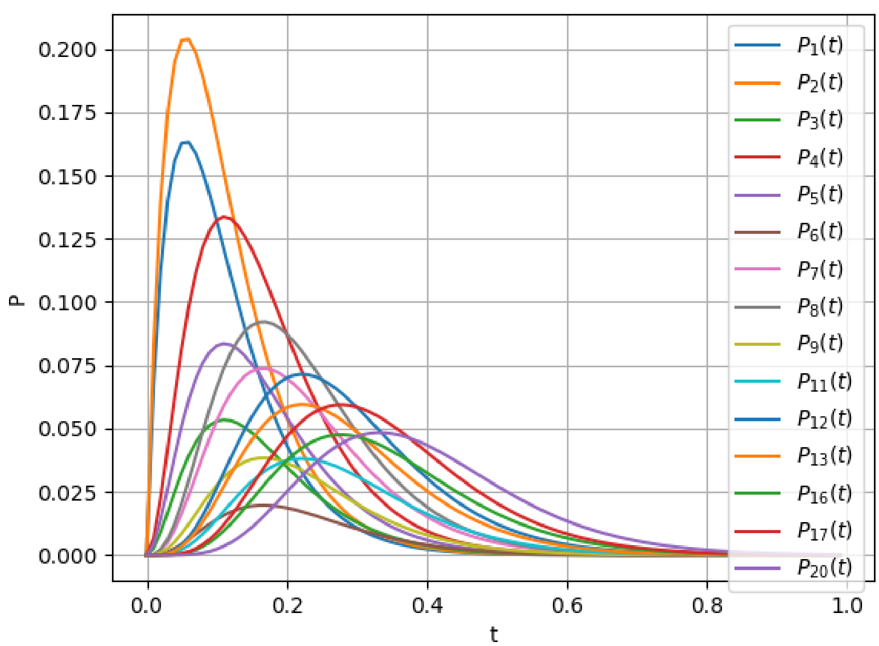

Рис. 3. Функции вероятностей для нетерминальных состояний

Найдем функцию вероятности системы для терминального состояния.

$$P_{term} = 1 - \sum P_{not\_term}$$

$$P_{term} = 1 - e^{-18t}(14222.22t^6 + 9600t^5 + 3786.66t^4 + 972t^3 + 162t^2 + 18t^1 + 1) \quad (1)$$

График функции вероятности терминального состояния представлен на рисунке 4.

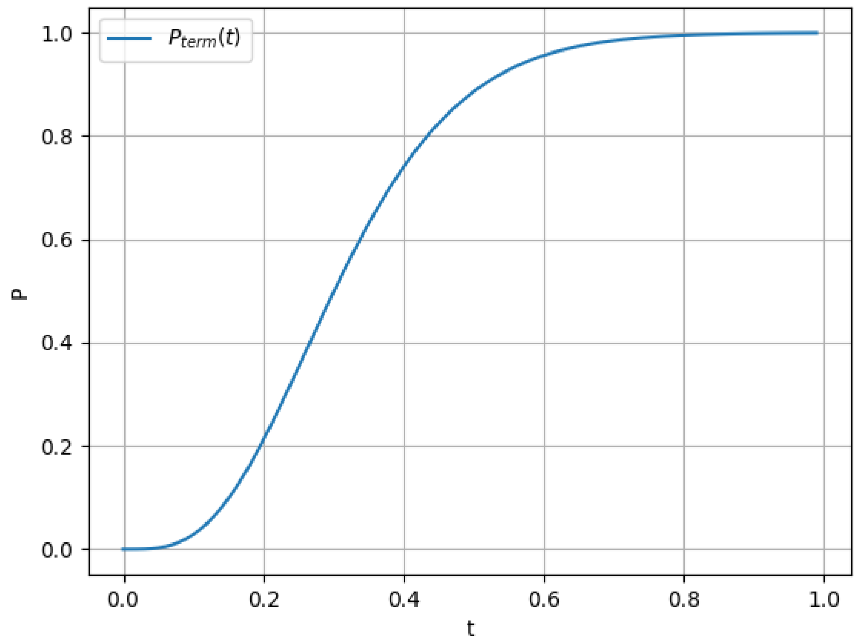

Рис. 4. График функции вероятности терминального состояния

Функция надежности системы

Функция надежности может быть определена следующим образом:

$$R(t) = 1 - P_{term}(t)$$

График функции надежности $R(t)$ представлен на рисунке 5.

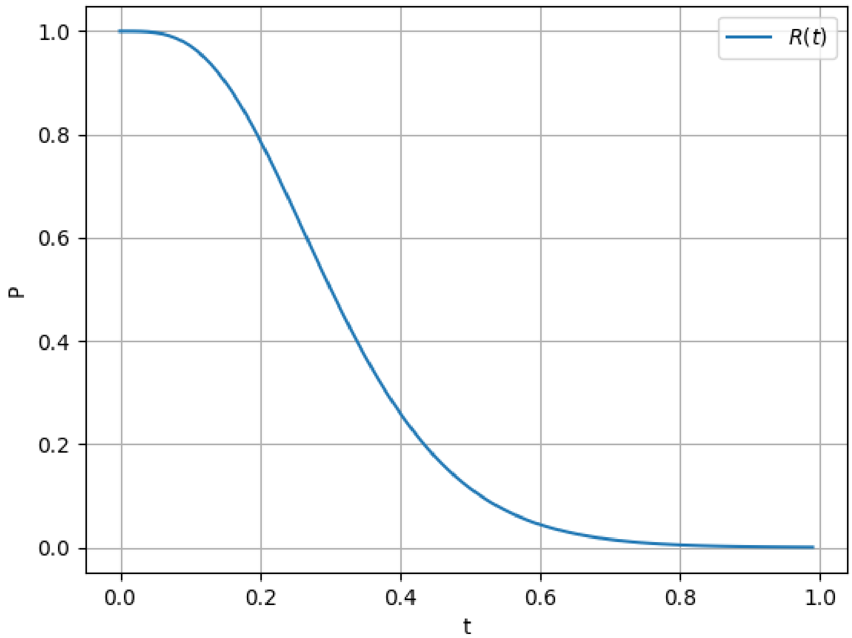

Рис. 5. Функция надежности системы

Математическое ожидание может быть вычислено по следующей формуле:

$$\mu = \int_{0}^{+\infty} R(t)dt = 0.320914059865326$$

Имитационное моделирование

Для системы с непрерывным временем была реализована функция, осуществляющая переходы по состояниям.

Листинг 1. *реализация марковского процесса*

```
# моделирование одного эпизода с непрерывным временем
def MD(m):

    def F_t(l,y):
        return -np.log(1-y)/l


    def find_lambda(line):
        flag = True
        for i in range(len(line)):
            if line[i] > 0:
```

```
            if flag:
                lb = [i, line[i]]
                flag = False
            else:
                la = [i, line[i]]

    return lb, la

current_s = 0
current_t = 0
states_tr = [current_s]
t_tr = [0]

while np.max(m[current_s]) != 0: # пока не упали в терминальное
    lb, la = find_lambda(m[current_s])
    t_cur_s=F_t(la+lb, np.random.uniform(low=0.0, high=1.0, size=None)) # -log(1-y)/(lambda_a+lambda_b)

    current_t += t_cur_s
    idx_b=m[current_s].index(lb)
    idx_a=list(m[current_s])[idx_b+1::].index(la) + idx_b + 1
    current_s = np.random.choice([idx_a, idx_b], p=[la/(la+lb), lb/(la+lb)])

    # для дальнейшей отрисовки
    states_tr.append(current_s)
    t_tr.append(current_t)

return current_t, states_tr, t_tr
```

На рисунке 6 представлен график переключению состояний системы для 15 прогонов ($N = 15$).

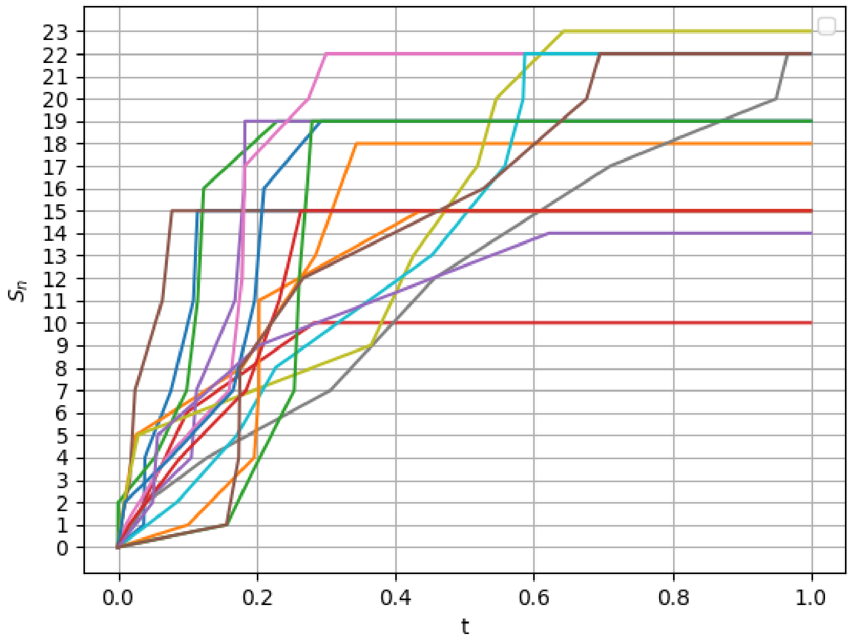

Рис. 6. График переключению состояний системы

Для $N = 100$

$$S = \sqrt{D\frac{N}{N-1}} = 0.181,$$

$$\hat{t} = 0.3772731297158321,$$

где S - стандартное, $\hat{t}$ - среднее отклонение.

4 Вывод

В ходе выполнения домашнего задания была промоделирована работа СМО в терминах непрерывных марковских цепей, а также выполнен анализ ее работы.

Постановка: © *старший преподаватель кафедры РК-6, Берчун Ю.В.*
Решение и вёрстка: © *студент группы РК6-84б, Осипов А. К.*

2023, зимний семестр