



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехника и комплексная автоматизация»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

по дисциплине «Аналитические модели и имитационное моделирование»

Студент:	Мягкова Екатерина Игоревна
Группа:	РК6-826
Тип задания:	Домашнее задание №4
Название:	Теория надежности
Вариант:	46

Студент

подпись, дата

Мягкова Е. И.
Фамилия, И.О.

Преподаватель

подпись, дата

Берчун Ю. В.
Фамилия, И.О.

Оценка:

Москва, 2023

Содержание

Теория надежности	3
1 Цель выполнения домашнего задания	3
2 Задание	3
3 Решение	5
4 Уравнения Колмогорова	7
Прикладные характеристики системы	11
Имитационное моделирование системы	12
5 Дискретно-событийное моделирование системы	14
6 Вывод	21

Теория надежности

1 Цель выполнения домашнего задания

Цель выполнения домашнего задания – изучить систему по теории надежности

2 Задание

Рассматривается система, аналогичная задаче 3, но в которой возможна организация ремонта ранее вышедших из строя устройств. Одновременно может ремонтироваться только одно устройство. Если подлежат ремонту устройства разных типов, приоритет отдаётся тем, которых сломалось больше, а если их сломалось одинаковое число – тому типу, интенсивность поломок которого выше. Интенсивность ремонта устройств обоих типов одинакова и равна $\lambda_S = (N_A + N_B - (G \bmod 3)) * (G + (N \bmod 4))$.

Если N – номер зачётной книжки, а G – последняя цифра в номере группы, то параметры системы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_A &= G + (N \bmod 3) \\ \lambda_B &= G + (N \bmod 5) \\ N_A &= 2 + (G \bmod 2) \\ N_B &= 2 + (N \bmod 2) \\ R_A &= 4 + (G \bmod 2) \\ R_B &= 5 - (G \bmod 2) \\ \lambda_S &= (N_A + N_B - (G \bmod 3)) * (G + (N \bmod 4))\end{aligned}$$

Требуется:

1. нарисовать граф состояний системы;
2. составить матрицу интенсивностей переходов;
3. записать алгебраические уравнения Колмогорова для установившегося режима работы;
4. рассчитать предельные вероятности состояний системы;
5. рассчитать математические ожидания прикладных характеристик системы:
 - вероятности отказа системы;
 - числа готовых к эксплуатации устройств каждого типа;
 - коэффициента загрузки ремонтной службы.
6. записать дифференциальные уравнения Колмогорова;

7. методами численного интегрирования решить полученную систему уравнений, исходя из того, что в начальный момент времени все устройства исправны, а время моделирования выбирается вдвое больше теоретической оценки времени переходного процесса (т.е. того времени, которое необходимо, чтобы эвклидова норма вектора невязки с ранее рассчитанным предельным вектором составляла не более 10% эвклидовой нормы последнего);
8. построить графики вероятностей нахождения системы в каждом из возможных состояний с течением времени;
9. провести имитационное моделирование системы в терминах непрерывных марковских цепей 100 раз, время моделирования выбирается вдвое больше экспериментальной оценки времени переходного процесса (т.е. того времени, которое необходимо, чтобы накопленная доля времени пребывания системы в каждом из состояний отличалась не более чем на 10% от результатов, полученных при обработке предыдущего переключения цепи), проанализировать статистику времени выхода на установившийся режим работы и рассчитать статистические оценки предельных вероятностей после выхода на установившийся режим;
10. провести имитационное моделирование системы в терминах дискретно-событийного моделирования (с независимым планированием времени наступления событий для каждого устройства в отдельности) 100 раз, время моделирования выбирается вдвое больше экспериментальной оценки времени переходного процесса (т.е. того времени, которое необходимо, чтобы накопленные средние оценки прикладных характеристик системы отличалась не более чем на 10% от результатов, полученных при обработке предыдущего события в системе), проанализировать статистику времени выхода на установившийся режим работы и рассчитать статистические оценки для прикладных характеристик системы после выхода на установившийся режим.

3 Решение

Рассчитаем начальные данные для выполнения домашнего задания по номеру зачетки $N = 46$ и группы $G = 2$:

$$\begin{aligned}\lambda_A &= G + (N \bmod 3) = 2 + (46 \bmod 3) = 3 \\ \lambda_B &= G + (N \bmod 5) = 2 + (46 \bmod 5) = 3 \\ N_A &= 2 + (G \bmod 2) = 2 + (2 \bmod 2) = 2 \\ N_B &= 2 + (N \bmod 2) = 2 + (46 \bmod 2) = 2 \\ R_A &= 4 + (G \bmod 2) = 4 + (2 \bmod 2) = 4 \\ R_B &= 5 - (G \bmod 2) = 5 - (2 \bmod 2) = 5 \\ \lambda_S &= (N_A + N_B - (G \bmod 3)) * (G + (N \bmod 4)) = 8\end{aligned}$$

Так как по условию ремонт устройства в случае одинакового количества сломанных устройств А и В производится ремонт устройства с большей λ , однако в предложенном варианте эти λ получились равны, сделаем λ_A на один больше.

$$\lambda_A = 4$$

Предположим что S_{cd}^{ab} - состояние системы, где

- a - количество работающих устройств типа A ,
- b - количество резервных устройств типа A ,
- c - количество работающих устройств типа B ,
- d - количество резервных устройств типа B .

На рисунке 1 изображен граф состояний системы.

Для системы с данными параметрами был получен граф состояний системы, представленный на рисунке 1. Верхние и нижние индексы – пара чисел, первое – рабочие устройства типа (верхний) или (нижний), второе – остаток в резерве.

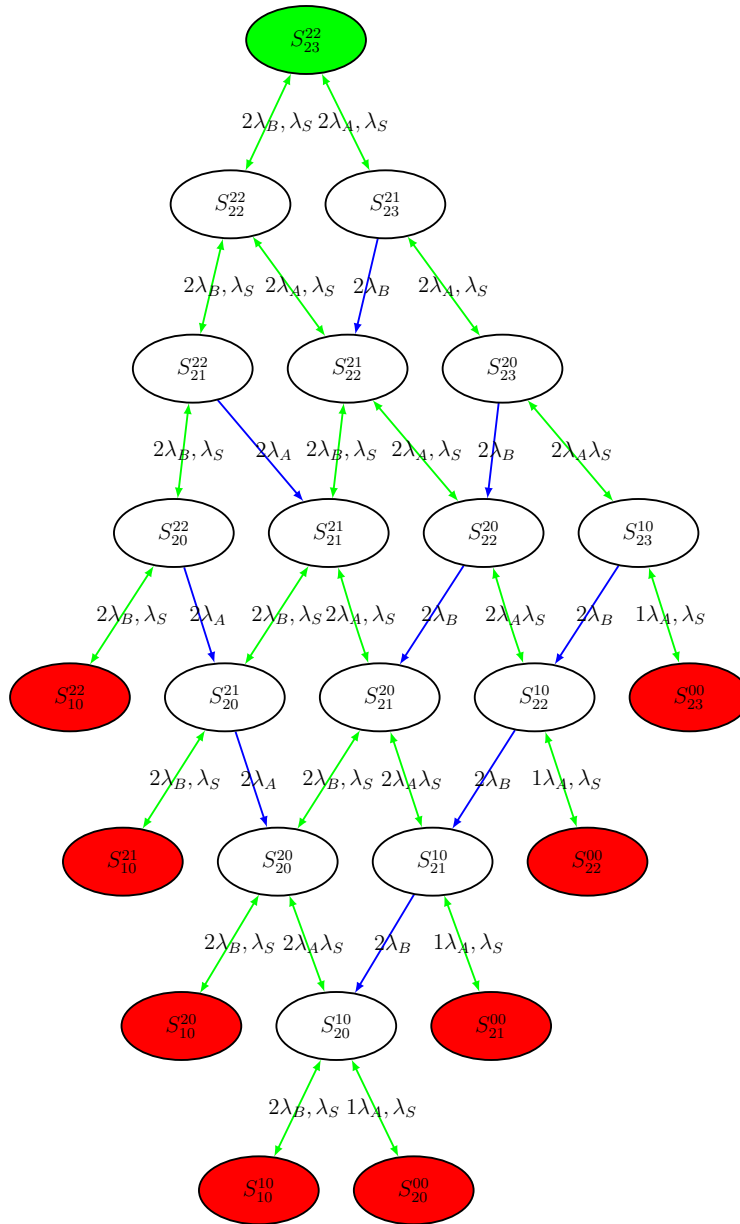


Рис. 1. Граф состояний системы ($\lambda_A = 4$, $\lambda_B = 3$)

По данному графу была получена матрица интенсивности:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -14 & 6 & 8 & 0 \\ 8 & -22 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -22 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -22 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

4 Уравнения Колмогорова

Составим систему алгебраических уравнений Колмогорова для установившегося режима работы.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -14p_0 + 8p_1 + 8p_2 \\ 0 = 6p_0 - 22p_1 + 8p_3 + 8p_4 \\ 0 = 8p_0 - 22p_2 + 8p_5 \\ 0 = 6p_1 - 22p_3 + 8p_6 \\ 0 = 8p_1 + 6p_2 - 22p_4 + 8p_7 + 8p_8 \\ 0 = 8p_2 - 22p_5 + 8p_9 \\ 0 = 6p_3 - 22p_6 + 8p_{10} \\ 0 = 8p_3 + 6p_4 - 22p_7 + 8p_{11} + 8p_{12} \\ 0 = 8p_4 + 6p_5 - 22p_8 + 8p_{13} \\ 0 = 8p_5 - 18p_9 + 8p_{14} \\ 0 = 6p_6 - 8p_{10} \\ 0 = 8p_6 + 6p_7 - 22p_{11} + 8p_{15} \\ 0 = 8p_7 + 6p_8 - 22p_{12} + 8p_{16} + 8p_{17} \\ 0 = 8p_8 + 6p_9 - 18p_{13} + 8p_{18} \\ 0 = 4p_9 - 8p_{14} \\ 0 = 6p_{11} - 8p_{15} \\ 0 = 8p_{11} + 6p_{12} - 22p_{16} + 8p_{19} + 8p_{20} \\ 0 = 8p_{12} + 6p_{13} - 18p_{17} + 8p_{21} \\ 0 = 4p_{13} - 8p_{18} \\ 0 = 6p_{16} - 8p_{19} \\ 0 = 8p_{16} + 6p_{17} - 18p_{20} + 8p_{22} + 8p_{23} \\ 0 = 4p_{17} - 8p_{21} \\ 0 = 6p_{20} - 8p_{22} \\ 0 = 4p_{20} - 8p_{23} \end{array} \right.$$

Условие нормировки: $\sum_{i=0}^{23} p_i = 1$. Тогда вектор предельных вероятностей может быть найден после решения СЛАУ вида

$$\mathbf{\Lambda}^T \bar{p} = \bar{b}.$$

Вектор предельных вероятностей:

$$\bar{p} = (0.01, 0.02, 0.01, 0.01, 0.03, 0.0, 0.0, 0.05, 0.02, 0.0, 0.0, 0.02, 0.09, 0.01, 0.0, 0.02, 0.13, 0.06, 0.0, 0.1, 0.17, 0.03, 0.13, 0.09)$$

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_0 = 8P_1(t) + 8P_2(t) - 6P_0(t) - 8P_0(t) \\ P'_1 = 6P_0(t) + 8P_3(t) + 8P_4(t) - 8P_1(t) - 6P_1(t) - 8P_1(t) \\ P'_2 = 8P_0(t) + 8P_5(t) - 8P_2(t) - 6P_2(t) - 8P_2(t) \\ P'_3 = 6P_1(t) + 8P_6(t) - 8P_3(t) - 6P_3(t) - 8P_3(t) \\ P'_4 = 8P_1(t) + 6P_2(t) + 8P_7(t) + 8P_8(t) - 8P_4(t) - 6P_4(t) - 8P_4(t) \\ P'_5 = 8P_2(t) + 8P_9(t) - 8P_5(t) - 6P_5(t) - 8P_5(t) \\ P'_6 = 6P_3(t) + 8P_{10}(t) - 8P_6(t) - 6P_6(t) - 8P_6(t) \\ P'_7 = 8P_3(t) + 6P_4(t) + 8P_{11}(t) + 8P_{12}(t) - 8P_7(t) - 6P_7(t) - 8P_7(t) \\ P'_8 = 8P_4(t) + 6P_5(t) + 8P_{13}(t) - 8P_8(t) - 6P_8(t) - 8P_8(t) \\ P'_9 = 8P_5(t) + 8P_{14}(t) - 8P_9(t) - 6P_9(t) - 4P_9(t) \\ P'_{10} = 6P_6(t) - 8P_{10}(t) \\ P'_{11} = 8P_6(t) + 6P_7(t) + 8P_{15}(t) - 8P_{11}(t) - 6P_{11}(t) - 8P_{11}(t) \\ P'_{12} = 8P_7(t) + 6P_8(t) + 8P_{16}(t) + 8P_{17}(t) - 8P_{12}(t) - 6P_{12}(t) - 8P_{12}(t) \\ P'_{13} = 8P_8(t) + 6P_9(t) + 8P_{18}(t) - 8P_{13}(t) - 6P_{13}(t) - 4P_{13}(t) \\ P'_{14} = 4P_9(t) - 8P_{14}(t) \\ P'_{15} = 6P_{11}(t) - 8P_{15}(t) \\ P'_{16} = 8P_{11}(t) + 6P_{12}(t) + 8P_{19}(t) + 8P_{20}(t) - 8P_{16}(t) - 6P_{16}(t) - 8P_{16}(t) \\ P'_{17} = 8P_{12}(t) + 6P_{13}(t) + 8P_{21}(t) - 8P_{17}(t) - 6P_{17}(t) - 4P_{17}(t) \\ P'_{18} = 4P_{13}(t) - 8P_{18}(t) \\ P'_{19} = 6P_{16}(t) - 8P_{19}(t) \\ P'_{20} = 8P_{16}(t) + 6P_{17}(t) + 8P_{22}(t) + 8P_{23}(t) - 8P_{20}(t) - 6P_{20}(t) - 4P_{20}(t) \\ P'_{21} = 4P_{17}(t) - 8P_{21}(t) \\ P'_{22} = 6P_{20}(t) - 8P_{22}(t) \\ P'_{23} = 4P_{20}(t) - 8P_{23}(t) \end{array} \right.$$

Система дифференциальных уравнений была решена неявным методом Эйлера (см. листинг 1).

Листинг 1. Неявный метод Эйлера

```
1 def backward_euler(u0, tau, vec, Q_T):
2     from scipy import optimize
3     from scipy.spatial import distance
4     t = [0]
5     u = [[x for x in u0]]
6
7     def Phi(z, v):
8         return z - tau * (Q_T @ z) - v
9
```

```

10 u.append(optimize.fsolve(Phi, u[-1], args=(u[-1])))
11 t.append(t[-1] + tau)
12
13 # интегрируем пока L2 норма вектора невязки с ранее рассчитанным предельным
вектором составляла не более 10% L2 нормы последнего
14 while distance.euclidean(u[-1], vec) > 0.1 * np.linalg.norm(vec):
15     u.append(optimize.fsolve(Phi, u[-1], args=(u[-1])))
16     t.append(t[-1] + tau)
17
18 for _ in range(int(t[-1] / tau)):
19     u.append(optimize.fsolve(Phi, u[-1], args=(u[-2])))
20     t.append(t[-1] + tau)
21
22 return np.array(u), t

```

По вычисленным функциям были построены графики вероятностей нахождения системы в каждом из возможных состояний с течением времени (рисунки 2, 3).

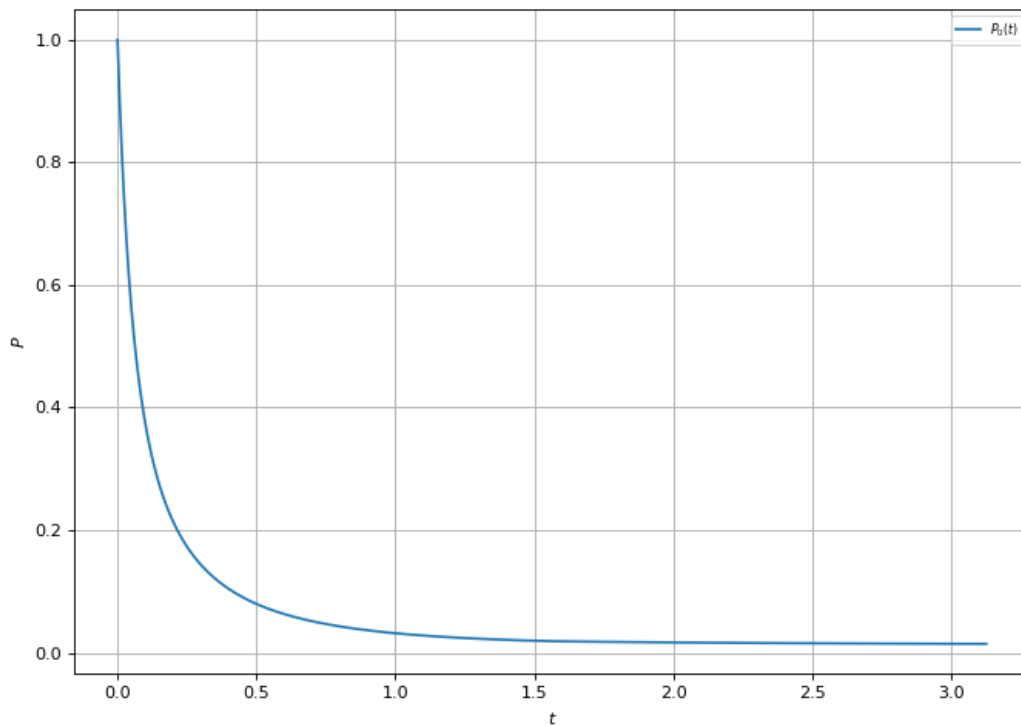


Рис. 2. Функция вероятности для 0 состояния

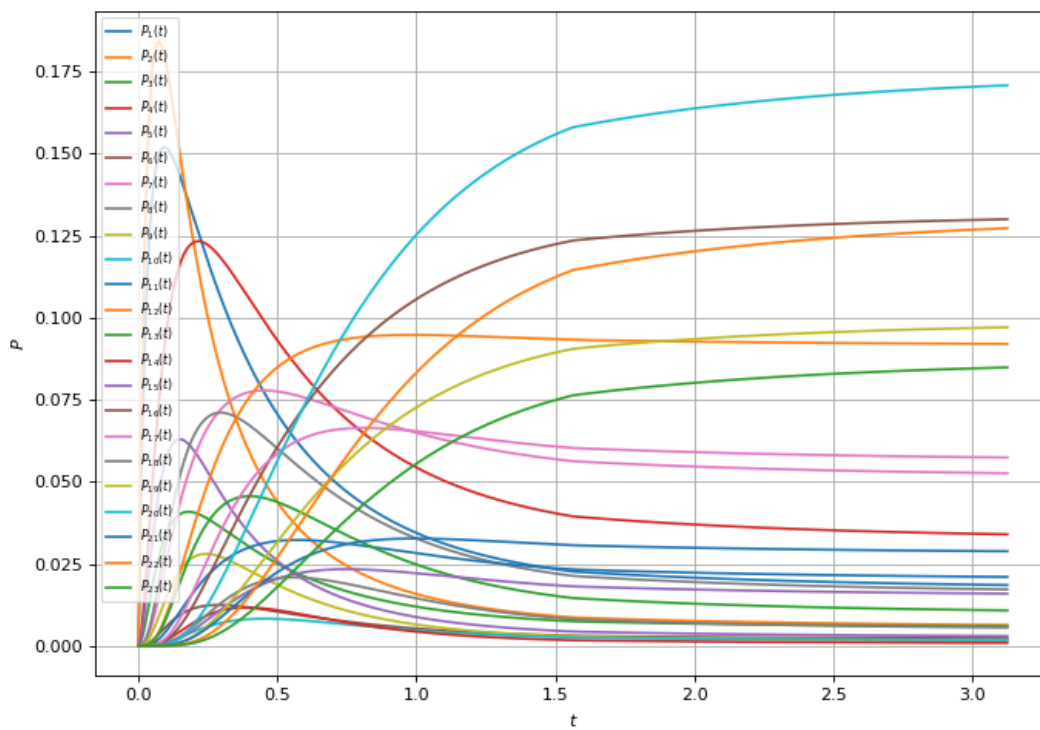


Рис. 3. Функции вероятностей для всех состояний (помимо 0)

Прикладные характеристики системы

Функция отказа может быть определена следующим образом:

$$1 - R(t) = P_{term}(t)$$

График функции отказа $1 - R(t)$ представлен на рисунке 4.

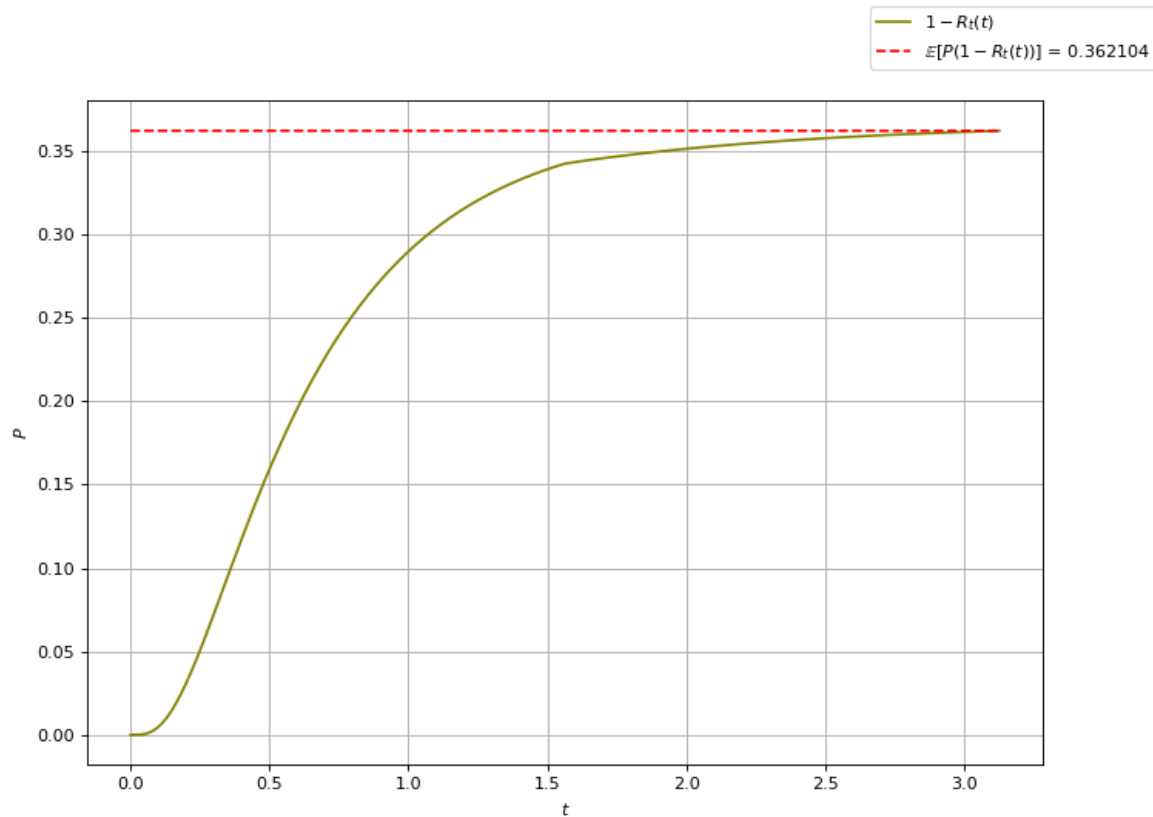


Рис. 4. Функция отказа системы

- Математическое ожидание вероятности отказа: $\mathbb{E}[P(1 - R_t(t))] = 0.362104$;
- Коэффициент загрузки ремонтной службы: 0.99615;
- Среднее число готовых к эксплуатации устройств типа А и В: 1.5, 5.0 соответственно;

Имитационное моделирование системы

Для системы с непрерывным временем была реализована функция, осуществляющая переходы по состояниям.

Листинг 2. реализация марковского процесса

```

1 # моделирование одного эпизода с непрерывным временем
2 def MD(m):
3     current_s = 0
4     current_t = 0
5     states_tr = [current_s]
6     t_tr = [0]
7     times = np.zeros(len(m))

```

```

8 last = np.zeros(len(m))
9
10 while 1:
11     l_b, l_a, l_s = find_lambda(m[current_s])
12     # -log(1-y)/(lambda_a+lambda_b)
13     t_cur_s = F_t(l_a[0] + l_b[0] + l_s[0],
14                 np.random.uniform(low=0.0, high=1.0, size=None))
15
16     times[current_s] += t_cur_s
17     current_t += t_cur_s
18     idx_b = l_b[1]
19     idx_a = l_a[1]
20     idx_s = l_s[1]
21     current_s = np.random.choice([idx_a, idx_b, idx_s],
22                                 p=[l_a[0] / (l_a[0] + l_b[0] + l_s[0]),
23                                   l_b[0] / (l_a[0] + l_b[0] + l_s[0]),
24                                   l_s[0] / (l_a[0] + l_b[0] + l_s[0])])
25     # для дальнейшей отрисовки
26     states_tr.append(current_s)
27     t_tr.append(current_t)
28
29     if distance.euclidean(times / current_t, last)<0.00001:
30         return states_tr, t_tr, [np.mean(w_A), np.mean(w_B)], times / current_t,
31             current_t
32
33     last = times / current_t

```

На рисунке 5 представлен график переключения состояний системы для 1 прогона ($N = 1$).

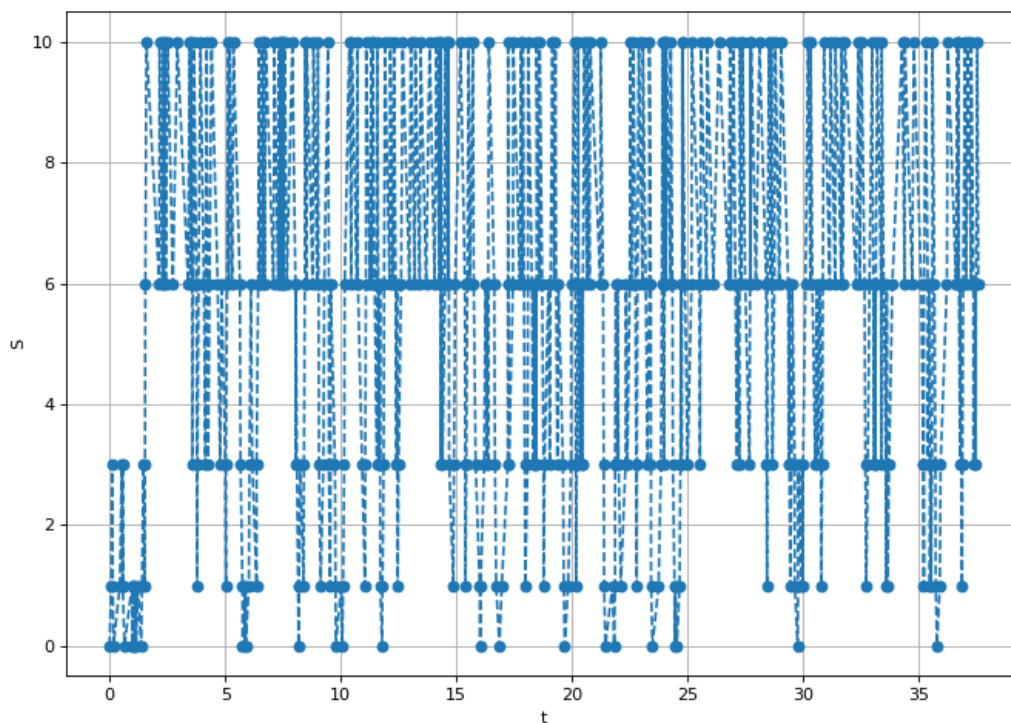


Рис. 5. График переключения состояний системы

Для $N = 100$:

- Среднее t выхода на установившийся режим работы 24.113639752443333;
- Статистические оценки предельных вероятностей после выхода на установившийся режим:

[0.07, 0.11, 0.0, 0.17, 0.0, 0.0, 0.26, 0.0, 0.0, 0.0, 0.39, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]

5 Дискретно-событийное моделирование системы

Основные элементы дискретно-событийного моделирования системы:

- Часы – текущее "время" внутри моделирования.
- События – поломка или починка устройства.

Блок-схема алгоритма дискретно-событийного моделирования представлена на рисунке 6

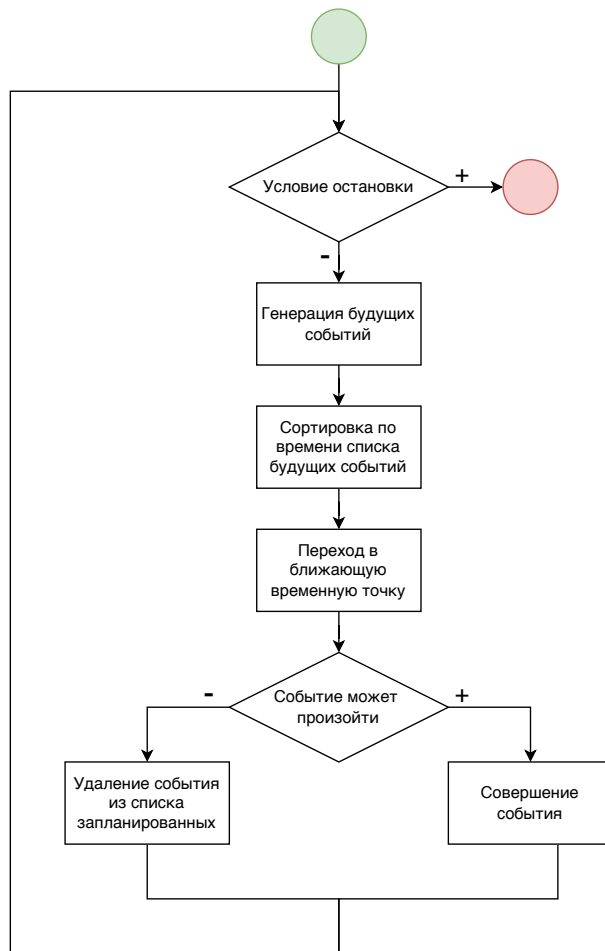


Рис. 6. Блок-схема алгоритма дискретно-событийного моделирования

Результаты моделирования при $N = 1$:

Сломан А в момент времени 0.171 всего устройств типа А и В 4 5	-----> 3 5
Починен А в момент времени 0.222 всего устройств типа А и В 3 5	-----> 4 5
Сломан А в момент времени 0.244 всего устройств типа А и В 4 5	-----> 3 5
Сломан В в момент времени 0.369 всего устройств типа А и В 3 5	-----> 3 4
Сломан А в момент времени 0.402 всего устройств типа А и В 3 4	-----> 2 4
Сломан А в момент времени 0.406 всего устройств типа А и В 2 4	-----> 1 4
Починен А в момент времени 0.432 всего устройств типа А и В 1 4	-----> 2 4
Сломан В в момент времени 0.446 всего устройств типа А и В 2 4	-----> 2 3
Сломан А в момент времени 0.492 всего устройств типа А и В 2 3	-----> 1 3
Сломан В в момент времени 0.497 всего устройств типа А и В 1 3	-----> 1 2
Сломан А в момент времени 0.648 всего устройств типа А и В 1 2	-----> пропуск события ввиду неработоспособности системы

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```

-----> пропуск события ввиду исправности всех устройств типа А
Починен В в момент времени 6.740 всего устройств типа А и В 4 4
-----> 4 5
Починен В в момент времени 6.782 всего устройств типа А и В 4 5
-----> пропуск события ввиду исправности всех устройств типа В
Починен А в момент времени 6.789 всего устройств типа А и В 4 5
-----> пропуск события ввиду исправности всех устройств типа А
Починен В в момент времени 6.812 всего устройств типа А и В 4 5
-----> пропуск события ввиду исправности всех устройств типа В
Починен А в момент времени 6.837 всего устройств типа А и В 4 5
-----> пропуск события ввиду исправности всех устройств типа А
Сломан А в момент времени 6.975 всего устройств типа А и В 4 5
-----> 3 5
Починен А в момент времени 6.986 всего устройств типа А и В 3 5
-----> 4 5
Починен А в момент времени 7.132 всего устройств типа А и В 4 5
-----> пропуск события ввиду исправности всех устройств типа А
Сломан В в момент времени 7.151 всего устройств типа А и В 4 5
-----> 4 4

```

Статистические данные при $N = 100$:

- Среднее число готовых к эксплуатации устройств типа А и В = 3.29, 3.94,
- Среднее время выхода в установившийся режим работы = 4.407275403114299

6 Вывод

В ходе выполнения домашнего задания была промоделирована работа СМО в терминах непрерывных марковских цепей, а также выполнен анализ ее работы.

Постановка: © старший преподаватель кафедры РК-6, Берчун Ю.В.
Решение и вёрстка: © студент группы РК6-826, Мяжкова Е. И.

2023, зимний семестр