Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехника и комплексная автоматизация»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

по дисциплине «Аналитические модели и имитационное моделирование»

Студент:	Федорова Елизавета Константиновна
Группа:	РК6-86б
Тип задания:	Домашнее задание №4
Название:	Теория надежности
Вариант:	272

Студент ________________ Федорова Е. К.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ________________ Берчун Ю. В.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Оценка: ________________

Москва, 2023

МГТУ им. Н.Э.Баумана, кафедра «Системы автоматизированного проектирования» (РК-6)

Содержание

Теория надежности

1 Цель выполнения домашнего задания

Цель выполнения домашнего задания – изучить систему по теории надежности

2 Задание

Рассматривается система, аналогичная задаче 3, но в которой возможна организация ремонта ранее вышедших из строя устройств. Одновременно может ремонтироваться только одно устройство. Если подлежат ремонту устройства разных типов, приоритет отдаётся тем, которых сломалось больше, а если их сломалось одинаковое число – тому типу, интенсивность поломок которого выше. Интенсивность ремонта устройств обоих типов одинакова и равна $\lambda_S = (N_A + N_B - (G \bmod 3)) * (G + (N \bmod 4))$.

Если N – номер зачётной книжки, а G – последняя цифра в номере группы, то параметры системы определяются следующим образом:

$$\lambda_A = G + (N \bmod 3)$$
$$\lambda_B = G + (N \bmod 5)$$
$$N_A = 2 + (G \bmod 2)$$
$$N_B = 2 + (N \bmod 2)$$
$$R_A = 4 + (G \bmod 2)$$
$$R_B = 5 - (G \bmod 2)$$
$$\lambda_S = (N_A + N_B - (G \bmod 3)) * (G + (N \bmod 4))$$

Требуется:

1. нарисовать граф состояний системы;
2. составить матрицу интенсивностей переходов;
3. записать алгебраические уравнения Колмогорова для установившегося режима работы;
4. рассчитать предельные вероятности состояний системы;
5. рассчитать математические ожидания прикладных характеристик системы:
   - вероятности отказа системы;
   - числа готовых к эксплуатации устройств каждого типа;
   - коэффициента загрузки ремонтной службы.
6. записать дифференциальные уравнения Колмогорова;

7. методами численного интегрирования решить полученную систему уравнений, исходя из того, что в начальный момент времени все устройства исправны, а время моделирования выбирается вдвое больше теоретической оценки времени переходного процесса (т.е. того времени, которое необходимо, чтобы эвклидова норма вектора невязки с ранее рассчитанным предельным вектором составляла не более 10% эвклидовой нормы последнего);

8. построить графики вероятностей нахождения системы в каждом из возможных состояний с течением времени;

9. провести имитационное моделирование системы в терминах непрерывных марковских цепей 100 раз, время моделирования выбирается вдвое больше экспериментальной оценки времени переходного процесса (т.е. того времени, которое необходимо, чтобы накопленная доля времени пребывания системы в каждом из состояний отличалась не более чем на 10% от результатов, полученных при обработке предыдущего переключения цепи), проанализировать статистику времени выхода на установившийся режим работы и рассчитать статистические оценки предельных вероятностей после выхода на установившийся режим;

10. провести имитационное моделирование системы в терминах дискретно-событийного моделирования (с независимым планированием времени наступления событий для каждого устройства в отдельности) 100 раз, время моделирования выбирается вдвое больше экспериментальной оценки времени переходного процесса (т.е. того времени, которое необходимо, чтобы накопленные средние оценки прикладных характеристик системы отличалась не более чем на 10% от результатов, полученных при обработке предыдущего события в системе), проанализировать статистику времени выхода на установившийся режим работы и рассчитать статистические оценки для прикладных характеристик системы после выхода на установившийся режим.

3 Решение

Рассчитаем начальные данные для выполнения домашнего задания по номеру зачетки $N = 272$ и группы $G = 6$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_A &= G + (N \bmod 3) = 6 + (272 \bmod 3) = & 8 \\
\lambda_B &= G + (N \bmod 5) = 6 + (272 \bmod 5) = & 8 \\
N_A &= 2 + (G \bmod 2) = 2 + (6 \bmod 2) = & 2 \\
N_B &= 2 + (N \bmod 2) = 2 + (272 \bmod 2) = & 2 \\
R_A &= 4 + (G \bmod 2) = 4 + (6 \bmod 2) = & 4 \\
R_B &= 5 - (G \bmod 2) = 5 - (6 \bmod 2) = & 5 \\
\lambda_S &= (N_A + N_B - (G \bmod 3)) * (G + (N \bmod 4)) = & 24
\end{aligned}
$$

Так как по условию ремонт устройства в случае одинакового количества сломанных устройств A и B производится ремонт устройства с большей λ, однако в предложенном варианте эти λ получились равны, сделаем λ_A на один больше.

$$\lambda_A = 9$$

Предположим что S^{ab}_{cd} - состояние системы, где

- a - количество работающих устройств типа A,
- b - количество резервных устройств типа A,
- c - количество работающих устройств типа B,
- d - количество резервных устройств типа B.

На рисунке 1 изображен граф состояний системы.

Для системы с данными параметрами был получен граф состояний системы, представленный на рисунке 1. Верхние и нижние индексы – пара чисел, первое – рабочие устройства типа (верхний) или (нижний), второе – остаток в резерве.

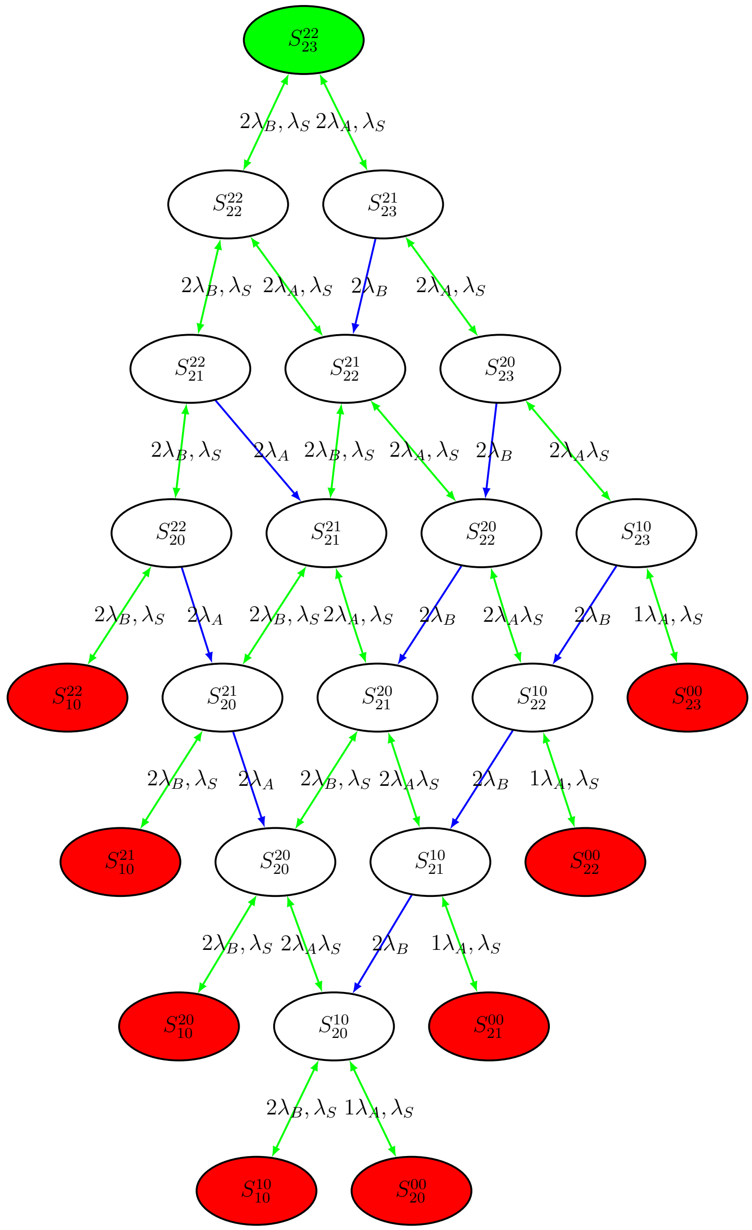

Рис. 1. Граф состояний системы ($\lambda_A = 9$, $\lambda_B = 8$)

По данному графу была получена матрица интенсивности:

$$\Lambda = \begin{pmatrix}
-34 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
24 & -58 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
24 & 0 & -58 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 24 & 0 & -58 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 24 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 24 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -49 & 0 & 0 & 0 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49 & 0 & 0 & 0 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -58 & 0 & 0 & 16 & 18 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49 & 0 & 0 & 16 & 9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -49 & 0 & 16 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & -24 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & -24
\end{pmatrix}$$

4 Уравнения Колмогорова

Составим систему алгебраических уравнений Колмогорова для установившегося режима работы.

$$
\begin{cases}
0 = -34p_0 + 24p_1 + 24p_2 \\
0 = 16p_0 - 58p_1 + 24p_3 + 24p_4 \\
0 = 18p_0 - 58p_2 + 24p_5 \\
0 = 16p_1 - 58p_3 + 24p_6 \\
0 = 18p_1 + 16p_2 - 58p_4 + 24p_7 + 24p_8 \\
0 = 18p_2 - 58p_5 + 24p_9 \\
0 = 16p_3 - 58p_6 + 24p_{10} \\
0 = 18p_3 + 16p_4 - 58p_7 + 24p_{11} + 24p_{12} \\
0 = 18p_4 + 16p_5 - 58p_8 + 24p_{13} \\
0 = 18p_5 - 49p_9 + 24p_{14} \\
0 = 16p_6 - 24p_{10} \\
0 = 18p_6 + 16p_7 - 58p_{11} + 24p_{15} \\
0 = 18p_7 + 16p_8 - 58p_{12} + 24p_{16} + 24p_{17} \\
0 = 18p_8 + 16p_9 - 49p_{13} + 24p_{18} \\
0 = 9p_9 - 24p_{14} \\
0 = 16p_{11} - 24p_{15} \\
0 = 18p_{11} + 16p_{12} - 58p_{16} + 24p_{19} + 24p_{20} \\
0 = 18p_{12} + 16p_{13} - 49p_{17} + 24p_{21} \\
0 = 9p_{13} - 24p_{18} \\
0 = 16p_{16} - 24p_{19} \\
0 = 18p_{16} + 16p_{17} - 49p_{20} + 24p_{22} + 24p_{23} \\
0 = 9p_{17} - 24p_{21} \\
0 = 16p_{20} - 24p_{22} \\
0 = 9p_{20} - 24p_{23}
\end{cases}
$$

Условие нормировки: $\sum\limits_{i=0}^{23} p_i = 1$. Тогда вектор предельных вероятностей может быть найдет после решения СЛАУ вида

$$\mathbf{\Lambda}^T \bar{p} = \bar{b}.$$

Вектор предельных вероятностей:

$$\bar{p} = (0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.06, 0.01, 0.0, 0.08, 0.02, 0.0, 0.0, 0.03, 0.1, 0.01, 0.0, 0.02, 0.13, 0.05, 0.0, 0.08, 0.13, 0.02, 0.09, 0.05)$$

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$
\begin{cases}
P_0' = 24P_1(t) + 24P_2(t) - 16P_0(t) - 18P_0(t) \\
P_1' = 16P_0(t) + 24P_3(t) + 24P_4(t) - 24P_1(t) - 16P_1(t) - 18P_1(t) \\
P_2' = 18P_0(t) + 24P_5(t) - 24P_2(t) - 16P_2(t) - 18P_2(t) \\
P_3' = 16P_1(t) + 24P_6(t) - 24P_3(t) - 16P_3(t) - 18P_3(t) \\
P_4' = 18P_1(t) + 16P_2(t) + 24P_7(t) + 24P_8(t) - 24P_4(t) - 16P_4(t) - 18P_4(t) \\
P_5' = 18P_2(t) + 24P_9(t) - 24P_5(t) - 16P_5(t) - 18P_5(t) \\
P_6' = 16P_3(t) + 24P_{10}(t) - 24P_6(t) - 16P_6(t) - 18P_6(t) \\
P_7' = 18P_3(t) + 16P_4(t) + 24P_{11}(t) + 24P_{12}(t) - 24P_7(t) - 16P_7(t) - 18P_7(t) \\
P_8' = 18P_4(t) + 16P_5(t) + 24P_{13}(t) - 24P_8(t) - 16P_8(t) - 18P_8(t) \\
P_9' = 18P_5(t) + 24P_{14}(t) - 24P_9(t) - 16P_9(t) - 9P_9(t) \\
P_{10}' = 16P_6(t) - 24P_{10}(t) \\
P_{11}' = 18P_6(t) + 16P_7(t) + 24P_{15}(t) - 24P_{11}(t) - 16P_{11}(t) - 18P_{11}(t) \\
P_{12}' = 18P_7(t) + 16P_8(t) + 24P_{16}(t) + 24P_{17}(t) - 24P_{12}(t) - 16P_{12}(t) - 18P_{12}(t) \\
P_{13}' = 18P_8(t) + 16P_9(t) + 24P_{18}(t) - 24P_{13}(t) - 16P_{13}(t) - 9P_{13}(t) \\
P_{14}' = 9P_9(t) - 24P_{14}(t) \\
P_{15}' = 16P_{11}(t) - 24P_{15}(t) \\
P_{16}' = 18P_{11}(t) + 16P_{12}(t) + 24P_{19}(t) + 24P_{20}(t) - 24P_{16}(t) - 16P_{16}(t) - 18P_{16}(t) \\
P_{17}' = 18P_{12}(t) + 16P_{13}(t) + 24P_{21}(t) - 24P_{17}(t) - 16P_{17}(t) - 9P_{17}(t) \\
P_{18}' = 9P_{13}(t) - 24P_{18}(t) \\
P_{19}' = 16P_{16}(t) - 24P_{19}(t) \\
P_{20}' = 18P_{16}(t) + 16P_{17}(t) + 24P_{22}(t) + 24P_{23}(t) - 24P_{20}(t) - 16P_{20}(t) - 9P_{20}(t) \\
P_{21}' = 9P_{17}(t) - 24P_{21}(t) \\
P_{22}' = 16P_{20}(t) - 24P_{22}(t) \\
P_{23}' = 9P_{20}(t) - 24P_{23}(t)
\end{cases}
$$

Система дифференциальных уравнений была решена неявным методом Эйлера (см. листинг 1).

Листинг 1. *Неявный метод Эйлера*

```python
def backward_euler(u0, tau, vec, Q_T):
    from scipy import optimize
    from scipy.spatial import distance
    t = [0]
    u = [[x for x in u0]]

    def Phi(z, v):
        return z - tau * (Q_T @ z) - v

```

```
    u.append(optimize.fsolve(Phi, u[−1], args=(u[−1])))
    t.append(t[−1] + tau)

    # интегрируем пока L2 норма вектора невязки с ранее рассчитанным предельным
        вектором составляла не более 10% L2 нормы последнего
    while distance.euclidean(u[−1], vec) > 0.1 ∗ np.linalg.norm(vec):
        u.append(optimize.fsolve(Phi, u[−1], args=(u[−1])))
        t.append(t[−1] + tau)

    for _ in range(int(t[−1] / tau)):
        u.append(optimize.fsolve(Phi, u[−1], args=(u[−2])))
        t.append(t[−1] + tau)

    return np.array(u), t
```

По вычисленным функциям были построены графики вероятностей нахождения системы в каждом из возможных состояний с течением времени (рисунки 2, 3).

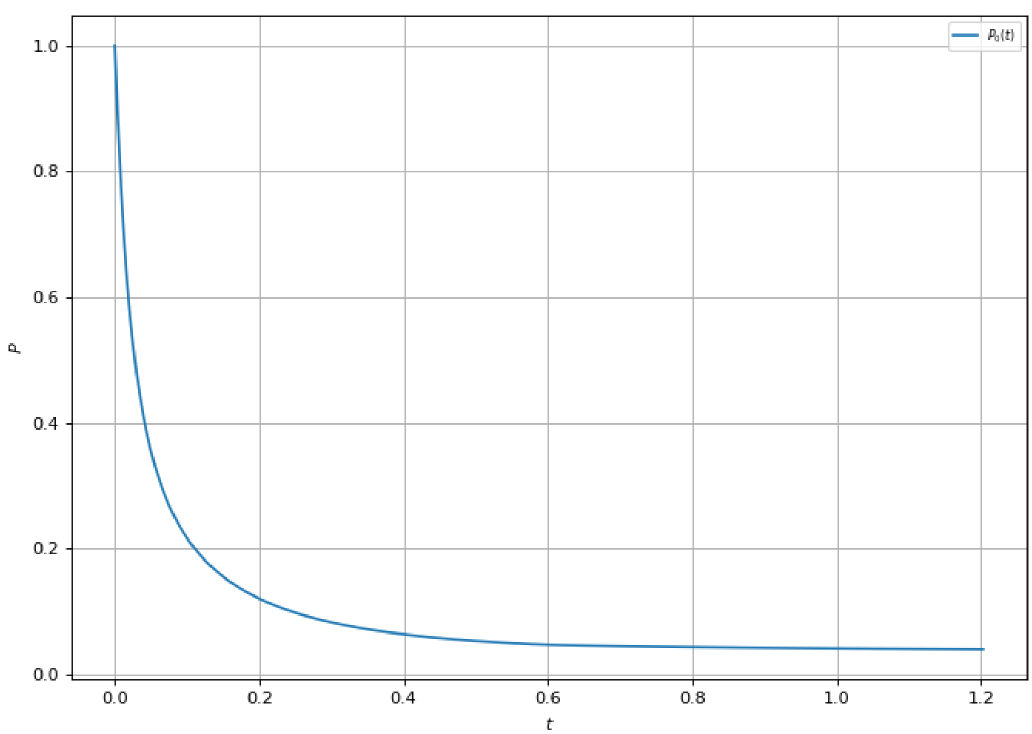

Рис. 2. Функция вероятности для 0 состояния

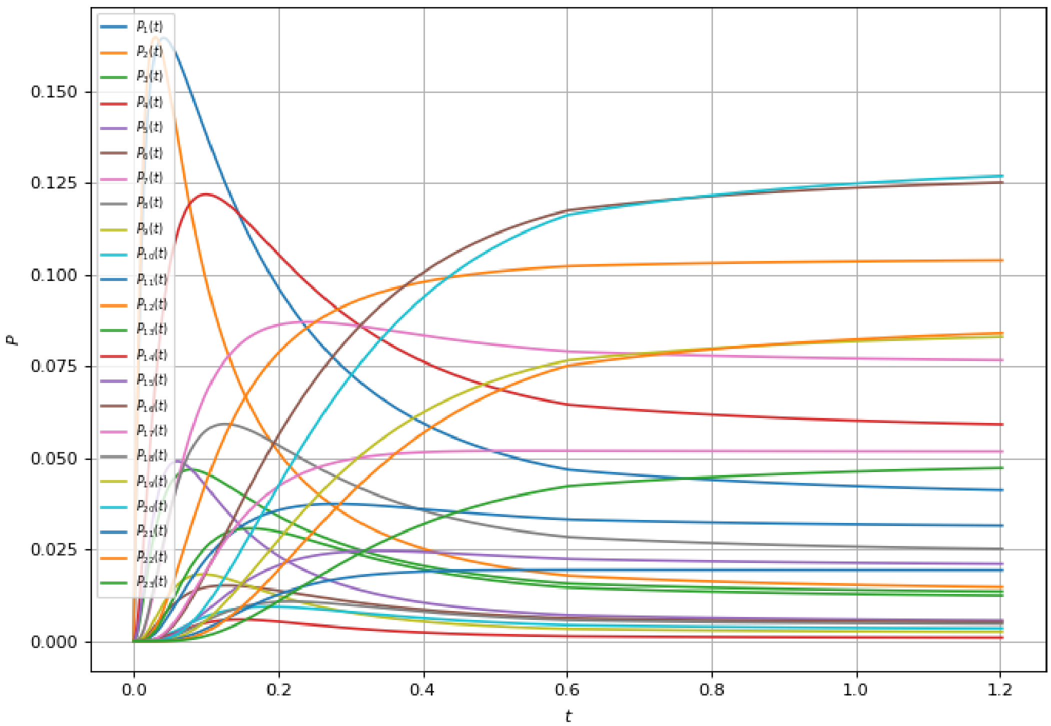

Рис. 3. Функции вероятностей для всех состояний (помимо 0)

Прикладные характеристики системы

Функция отказа может быть определена следующим образом:

$$1 - R(t) = P_{term}(t)$$

График функции отказа $1 - R(t)$ представлен на рисунке 4.

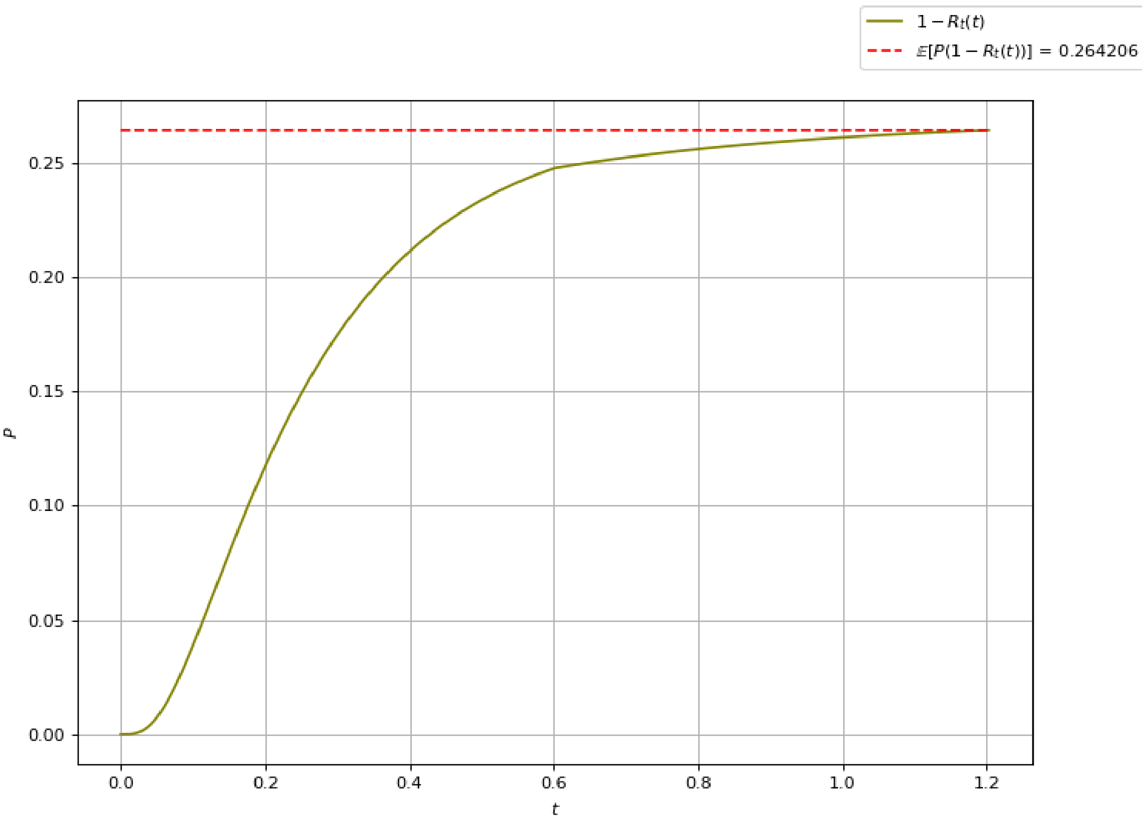

Рис. 4. Функция отказа системы

- Математическое ожидание вероятности отказа: $\mathbb{E}[P(1 - R_t(t))] = 0.264206$;
- Коэффициент загрузки ремонтной службы: 0.98961;
- Среднее число готовых к эксплуатации устройств типа A и B: $1.76, 2.6$ соответственно;

Имитационное моделирование системы

Для системы с непрерывным временем была реализована функция, осуществляющая переходы по состояниям.

Листинг 2. *реализация марковского процесса*

```
# моделирование одного эпизода с непрерывным временем
def MD(m):
    current_s = 0
    current_t = 0
    states_tr = [current_s]
    t_tr = [0]
    times = np.zeros(len(m))
```

```
    last = np.zeros(len(m))

    while 1:
        l_b, l_a, l_s = find_lambda(m[current_s])
         # -log(1-y)/(lambda_a+lambda_b)
        t_cur_s = F_t(l_a[0] + l_b[0] + l_s[0],
                       np.random.uniform(low=0.0, high=1.0, size=None))

        times[current_s] += t_cur_s
        current_t += t_cur_s
        idx_b = l_b[1]
        idx_a = l_a[1]
        idx_s = l_s[1]
        current_s = np.random.choice([idx_a, idx_b, idx_s],
                                     p=[l_a[0] / (l_a[0] + l_b[0] + l_s[0]),
                                        l_b[0] / (l_a[0] + l_b[0] + l_s[0]),
                                        l_s[0] / (l_a[0] + l_b[0] + l_s[0])])
        # для дальнейшей отрисовки
        states_tr.append(current_s)
        t_tr.append(current_t)

        if distance.euclidean(times / current_t, last)<0.00001:
            return states_tr, t_tr, [np.mean(w_A), np.mean(w_B)], times / current_t,
                current_t

        last = times / current_t
```

На рисунке 5 представлен график переключению состояний системы для 1 прогона ($N = 1$).

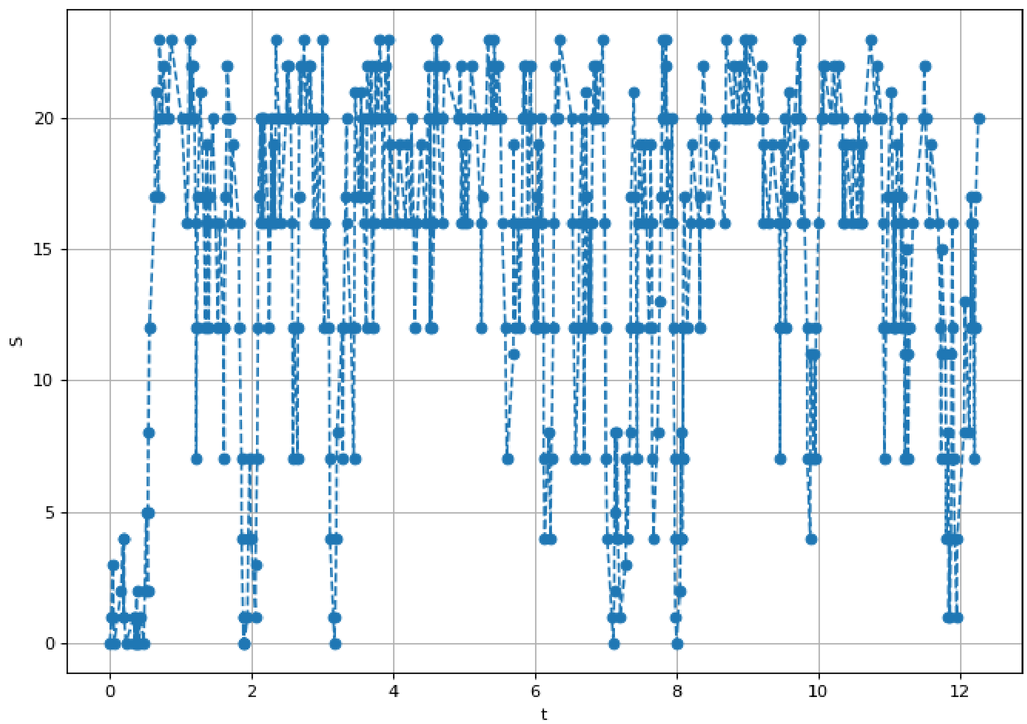

Рис. 5. График переключению состояний системы

Для $N = 100$:

- Среднее t выхода на установившийся режим работы 8.061029372694884;
- Статистические оценки предельных вероятностей после выхода на установившийся режим:

$$[0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.05, 0.01, 0.01, 0.07, 0.02, 0.0, 0.0, 0.03, 0.1, 0.01, 0.0, 0.02, 0.13, 0.06, 0.0, 0.08, 0.13, 0.02, 0.09, 0.05]$$

5 Дискретно-событийное моделирование системы

Основные элементы дискретно-событийного моделирования системы:

- Часы – текущее "время"внутри моделирования.
- События – поломка или починка устройства.

Блок-схема алгортима дискретно-событийного моделирования представлена на рисунке 6

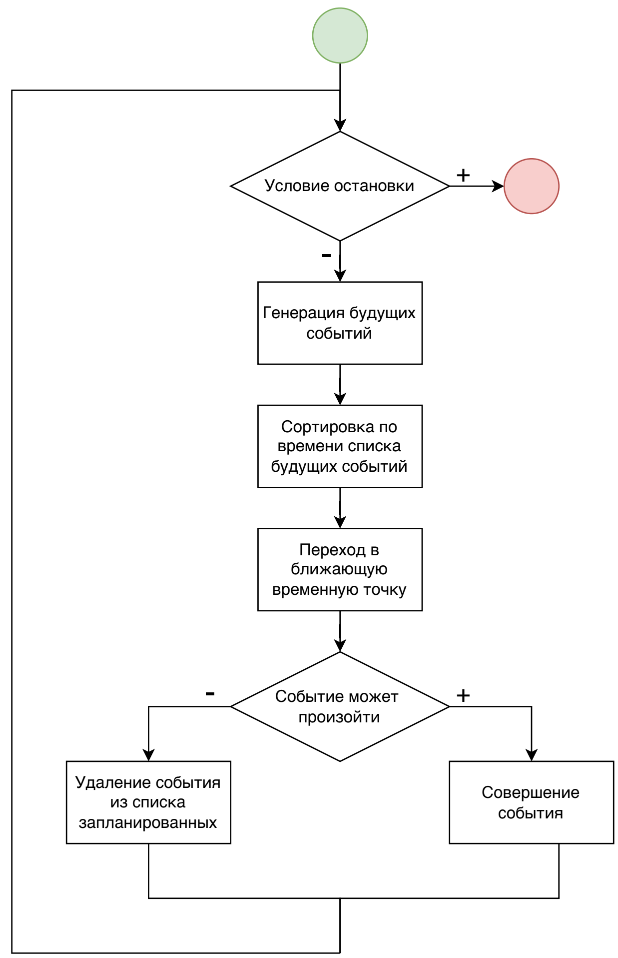

Рис. 6. Блок-схема алгоритма дискретно-событийного моделирования

Результаты моделирования при $N = 1$:

```
Сломан A в момент времени 0.023 всего устройств типа A и B 4 5
                                                  --------------> 3 5
Сломан A в момент времени 0.025 всего устройств типа A и B 3 5
                                                  --------------> 2 5
Починен A в момент времени 0.034 всего устройств типа A и B 2 5
                                                  --------------> 3 5
Сломан B в момент времени 0.042 всего устройств типа A и B 3 5
                                                  --------------> 3 4
Сломан A в момент времени 0.043 всего устройств типа A и B 3 4
                                                  --------------> 2 4
Сломан B в момент времени 0.052 всего устройств типа A и B 2 4
                                                  --------------> 2 3
Сломан A в момент времени 0.080 всего устройств типа A и B 2 3
                                                  --------------> 1 3
```

Статистические данные при $N = 100$:

- Среднее число готовых к эксплуатации устройств типа A и B $= 2.24, 3.06$,
- Среднее время выхода в установившийся режим работы $= 1.95713820308564$

6 Вывод

В ходе выполнения домашнего задания была промоделирована работа СМО в терминах непрерывных марковских цепей, а также выполнен анализ ее работы.

Постановка: © *старший преподаватель кафедры РК-6, Берчун Ю.В.*
Решение и вёрстка: © *студент группы РК6-86б, Федорова Е. К.*

2023, зимний семестр