数字信号处理
——DFT及其快速算法

郑珏鹏
中山大学人工智能学院
zhengjp8@mail.sysu.edu.cn
2024年12月28日

DFT及其快速算法和应用

- 序列傅里叶变换
- 离散傅里叶变换
- 离散傅里叶变换的性质
- 周期序列的傅里叶级数
- 频率域采样
- 快速傅里叶变换

一、序列傅里叶变换

变换域

傅里叶变换

时域连续函数的傅里叶变换

时域离散序列的傅里叶变换

理论价值

DFT变换

FFT变换

工程价值

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换（DTFT）

1. 采样信号的数学表示

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

2. 采样信号的傅里叶变换

$$X_s(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_s(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-j\Omega t}dt$$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换（DTFT）

2. 采样信号的傅里叶变换

$$X_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x_a(nT)e^{-j\Omega nT}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)e^{-j\Omega nT}$$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换（DTFT）

2. 采样信号的傅里叶变换

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)e^{-j\Omega nT}$$

离散信号的傅里叶变换公式

3. 序列傅里叶变换（FT）的定义

令：$x_a(nT) = x(n)$，$\Omega T = \omega$

用 $X(e^{j\omega})$表示$X_s(j\Omega)$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}}$$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换（DTFT）

3. 序列傅里叶变换（FT）的定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

序列傅里叶变换存在的条件 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$

序列傅里叶的反变换（IFT）

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

一、序列傅里叶变换

典型序列的傅里叶变换

1. 求序列$\delta(n)$的傅里叶变换

$$1$$

一、序列傅里叶变换

典型序列的傅里叶变换

2. 求序列$a^n u(n)(0 < a < 1)$的傅里叶变换

$$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

1. 周期性

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j(\omega+2\pi M)n}$$

$$=X\left(e^{j(\omega+2\pi M)}\right)$$

$$e^{j\omega n}=\cos\omega n+j\sin\omega n$$

$$\cos\omega n=\cos(\omega+2\pi M)n$$

$$\sin\omega n=\sin(\omega+2\pi M)n$$

$$\therefore e^{-j\omega n}=e^{-j(\omega+2\pi M)n}$$

欧拉公式

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

2. 线性

设：$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$　　$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$

则：$FT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

3. 时移与频移性质

设：$FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$

则时移性质是：$FT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

则频移性质是：$FT[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

一、序列傅里叶变换

求以下序列傅里叶变换

$$x(n) = \delta(n-3)$$

$$e^{-j\omega 3}$$

一、序列傅里叶变换

求以下序列傅里叶变换

$$x(n) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n-1)$$

$$\frac{5e^{-j\omega}}{2\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

4. 帕斯维尔定理（能量定理）

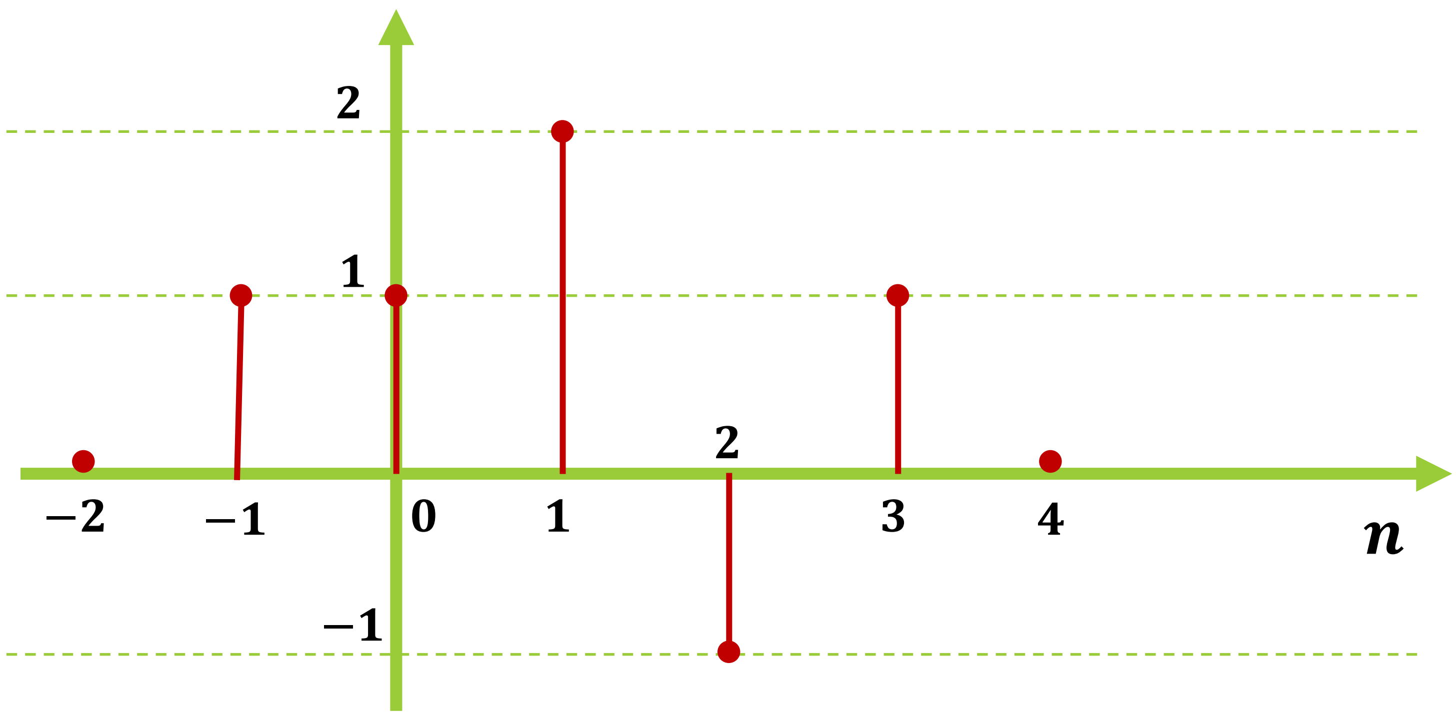
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

时域总能量等于频域总能量（能量守恒）

一、序列傅里叶变换

设序列$x(n)$如图所示，其傅里叶变换为$X(e^{j\omega})$，若

$Y(e^{j\omega})=\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$，求$Y(e^{j\omega})$



16π

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

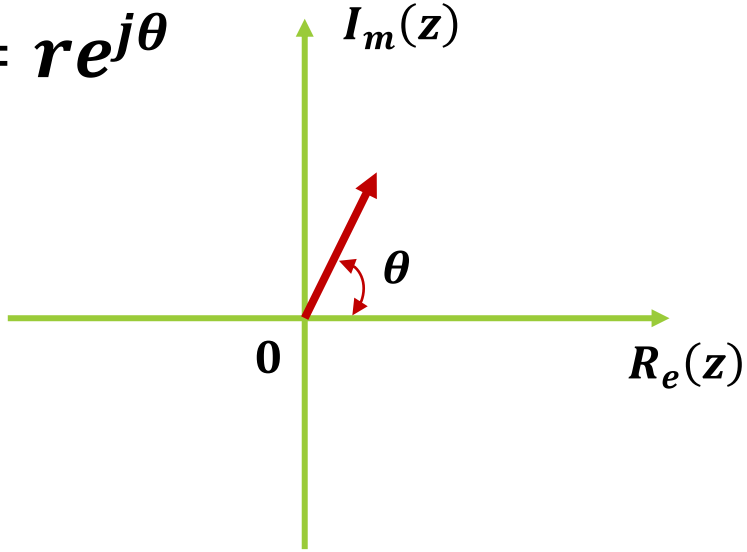
回顾复变函数

5. 对称性

复数的定义 $z = x + yj$

实部 $x = R_e(z)$　　虚部 $y = I_m(z)$

复数的指数表示法 $z = re^{j\theta}$



模 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

辐角 $\theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

回顾复变函数

5. 对称性

共轭复数　　设复数$z = x + yj$　　$z = re^{j\theta}$

z的共轭复数　　$z^* = x - yj$　　$z^* = re^{-j\theta}$

实数的共轭是什么？

虚实数的共轭是什么？

$$z = yj \rightarrow z^* = -yj \qquad z = re^{j\theta} \rightarrow z^* = re^{-j\theta}$$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

回顾复变函数

5. 对称性

$x(n)$的复数性质　　$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

$x(n)$的共轭序列　　$x^*(n) = x_r(n) - jx_i(n)$

$x(n)$和$x^*(n)$的几何表示法

$x(n) = re^{j\theta}$　　$x^*(n) = re^{-j\theta}$

一、序列傅里叶变换

求序列$x(-n)$，$x^*(n)$，$x^*(-n)$的傅里叶变换

$$X\left(e^{-j\omega}\right) \quad X^*\left(e^{-j\omega}\right) \quad X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

序列的共轭性质：时域取共轭频域共轭且反折

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

5. 对称性

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

对称　$(-n) \leftrightarrow (-j\omega)$

$$FT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

$$FT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

反对称　$(-n) \leftrightarrow (j\omega)$

$$FT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$ 序列共轭对称部分

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$ 序列共轭反对称部分

一、序列傅里叶变换

$\{0,0,0,1,1,1,1\}$

$x(n)=R_4(n)$， 求$x_e(n)$和$x_o(n)$

$\{1,1,1,1,0,0,0\}$

$x(n)=\{1,1,1,1\}$

$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)] \to \{0.5,0.5,0.5,\underline{1},0.5,0.5,0.5\}$

$$x_e(n)=\{0.5,0.5,0.5,\underline{1},0.5,0.5,0.5\}$$

这里指的是翻转

$$x_o(n)=\{-0.5,-0.5,-0.5,\underline{0},0.5,0.5,0.5\}$$

$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$

$\{0,0,0,1,1,1,1\}$

$\{1,1,1,1,0,0,0\}$

$\{-1,-1,-1,0,1,1,1\}$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

5. 对称性

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \qquad FT[x^*(n)] = X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$FT[x_e(n)] = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) + X^*\left(e^{j\omega}\right)\right] = R_e\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

序列的共轭对称部分对应傅里叶变换的实部

$$FT[x_o(n)] = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) - X^*\left(e^{j\omega}\right)\right] = jI_m\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

序列的共轭反对称部分对应傅里叶变换的虚部（包括j）

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

5. 对称性

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = R_e[X(e^{j\omega})] + jI_m[X(e^{j\omega})]$$

$$x(n) = R_e[x(n)] + jI_m[x(n)]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

5. 对称性

对于实序列的结论

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$ 偶 $$R_e[X(e^{j\omega})]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$ 奇 $$jI_m[X(e^{j\omega})]$$

实序列可分解为偶分量和奇分量之和

任意序列频域函数实部是关于ω的偶函数
虚部（含j）是关于ω的奇函数

一、序列傅里叶变换

时域离散信号傅里叶变换的性质

5. 对称性

实部偶对称	$R_e\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = R_e\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$
虚部奇对称	$I_m\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = -I_m\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$
模偶对称	$\left\|X\left(e^{j\omega}\right)\right\| = \left\|X\left(e^{-j\omega}\right)\right\|$
辐角奇对称	$arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = -arg\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$

二、离散傅里叶变换

1. DTFT在应用中的不足

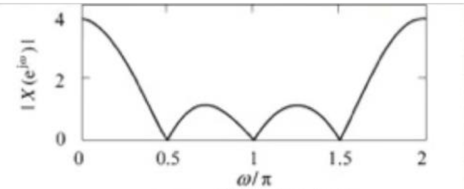
直接使用DTFT的困难在于：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

（1）实际信号往往没有解析表达式

（2）实际物理装置只能采集有限长度的数据

（3）DTFT的频谱是连续的，无法用数字设备记录和存储全部的值

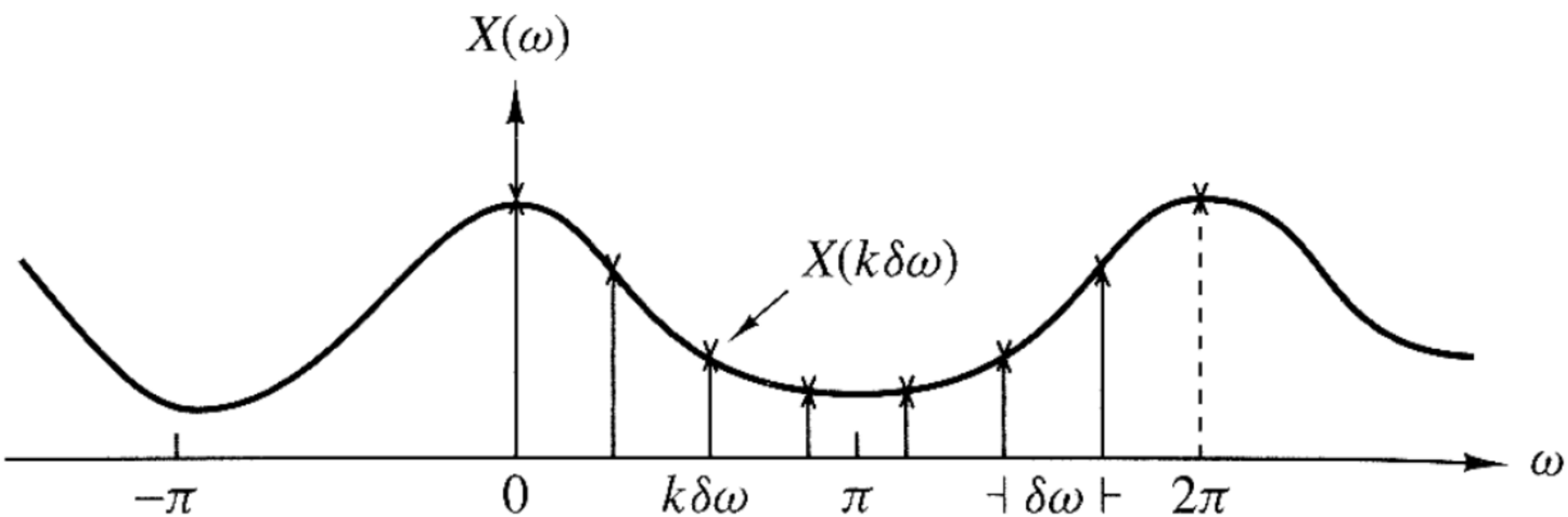


(a) $x(n)$的幅频特性曲线

二、离散傅里叶变换

1. DTFT在应用中的不足

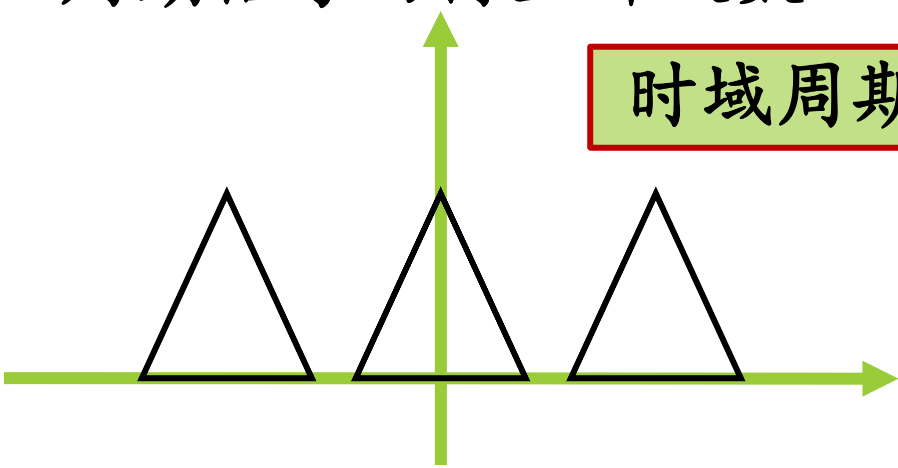
$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$



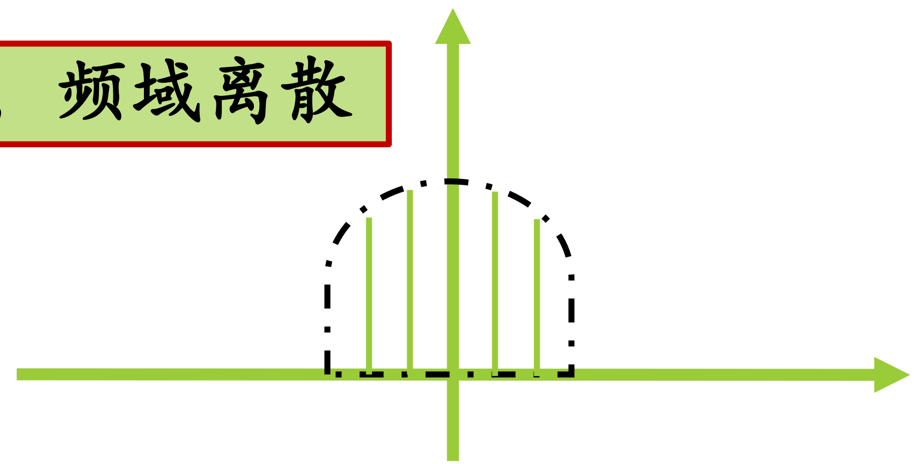
二、离散傅里叶变换

1. DTFT在应用中的不足

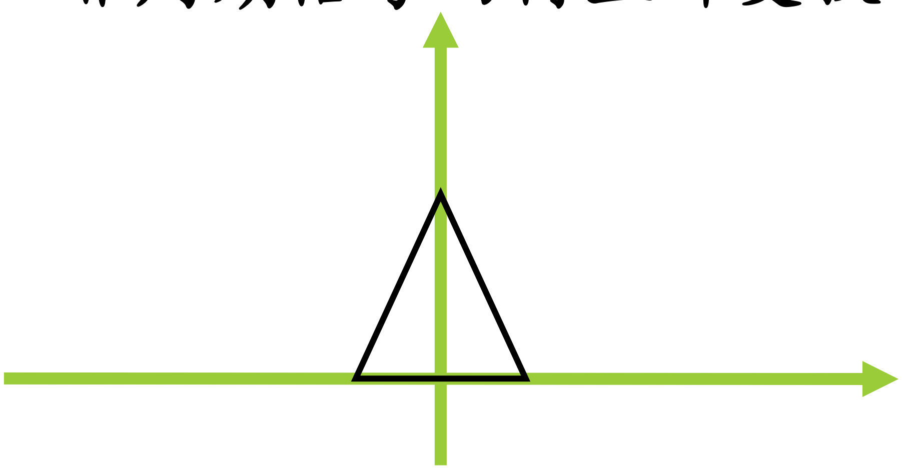
周期信号的傅里叶级数

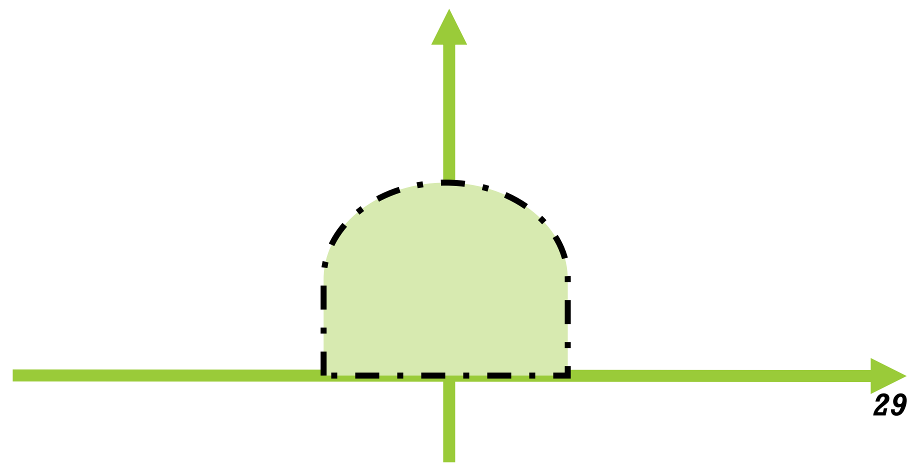


时域周期，频域离散



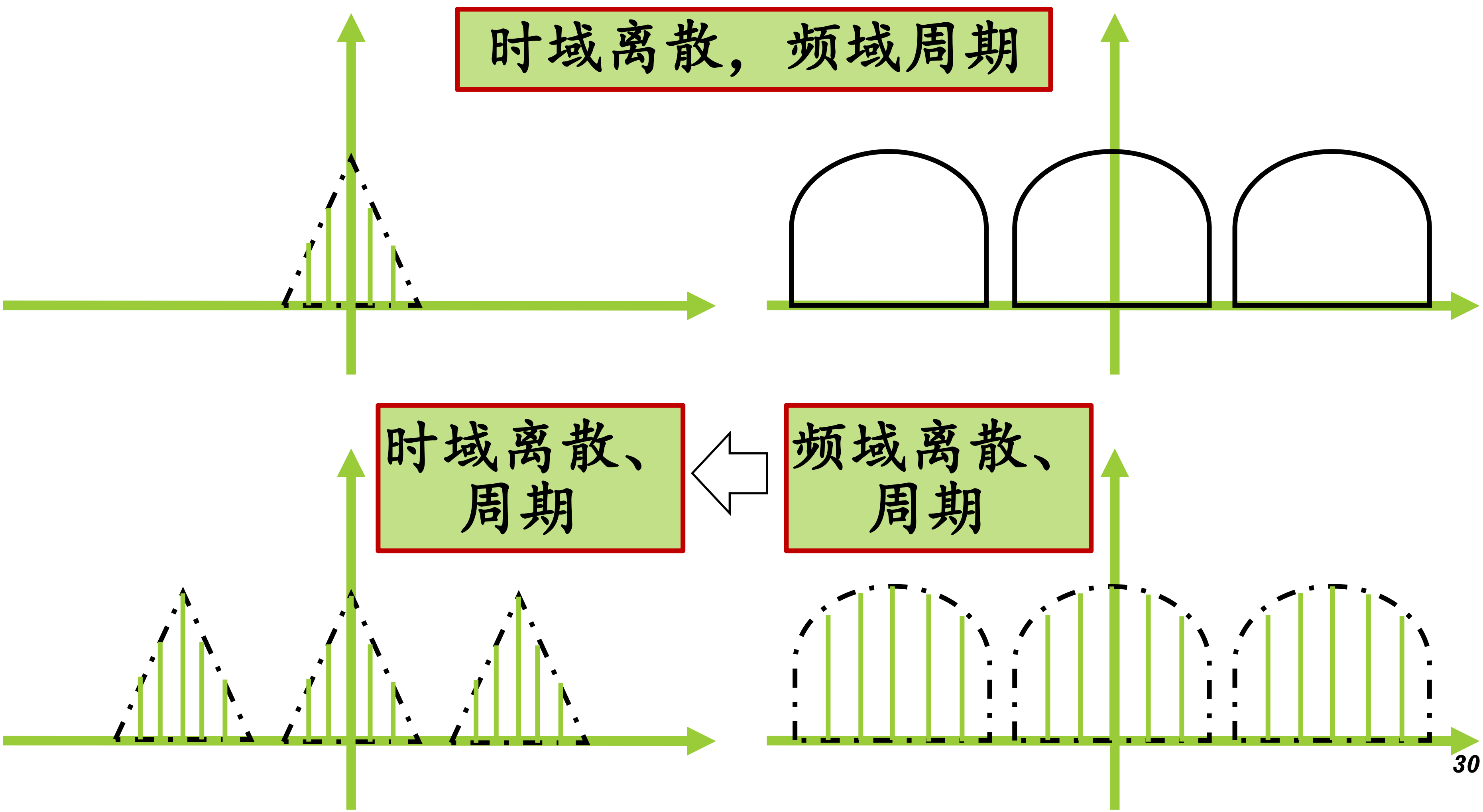
非周期信号的傅里叶变换





二、离散傅里叶变换

1. DTFT在应用中的不足



二、离散傅里叶变换

2. 离散傅里叶变换DFT的定义

离散傅里叶变换DFT

时域和频域都是离散的

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

离散傅里叶反变换IDFT

两者有什么区别?

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$$

二、离散傅里叶变换

2. 离散傅里叶变换DFT的定义

离散傅里叶变换DFT

DFT一定要强调是N点DFT

DFT变换区间的长度

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

频谱的自变量

时域序列的自变量

二、离散傅里叶变换

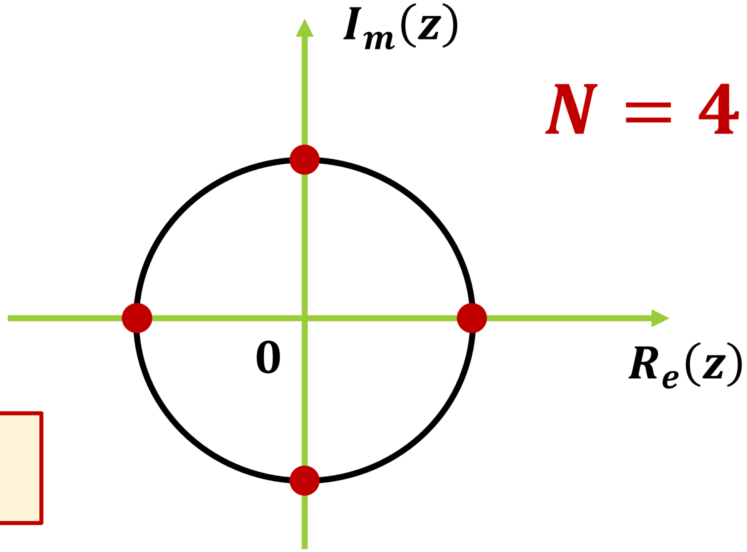
2. 离散傅里叶变换DFT的定义

离散傅里叶变换DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N{}^{nk}$$ → 周期单位复指数序列

$$W_N{}^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$



z变换N点间隔取样

二、离散傅里叶变换

已知$\boldsymbol{x(n)} = \boldsymbol{\delta(n)}$，求$\boldsymbol{x(n)}$的4点DFT

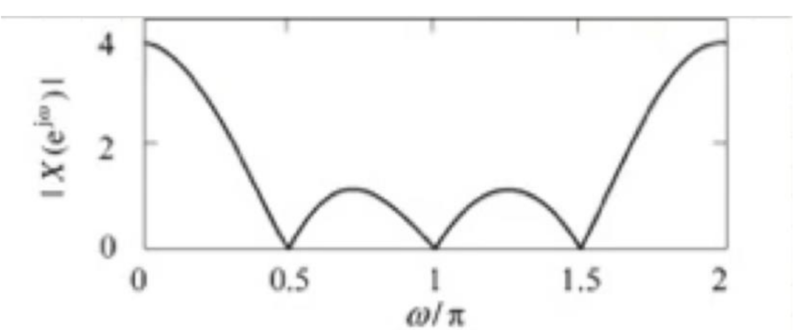
$$\{\underline{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}\}$$

二、离散傅里叶变换

已知$x(n)=R_4(n)$，求$x(n)$的4点和8点DFT

$$\{\underline{4},0,0,0\}$$

$$e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{sin\left(-\frac{\pi}{2}k\right)}{sin\left(-\frac{\pi}{8}k\right)}$$



(a) $x(n)$的幅频特性曲线

二、离散傅里叶变换

长为L的序列$x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le L-1\\ 0, & other\end{cases}$，计算该序列的$N$点DFT，其中$N\ge L$

$$\begin{cases} L & ,k=0 \\ e^{-j\frac{L-1}{N}\pi k}\dfrac{\sin\left(-\dfrac{\pi}{N}kL\right)}{\sin\left(-\dfrac{\pi}{N}k\right)} & ,k\neq 0 \end{cases}$$

二、离散傅里叶变换

已知$x(n)$的序列长度为4，其4点DFT为$\{\underline{4},0,0,0\}$，求$x(n)$

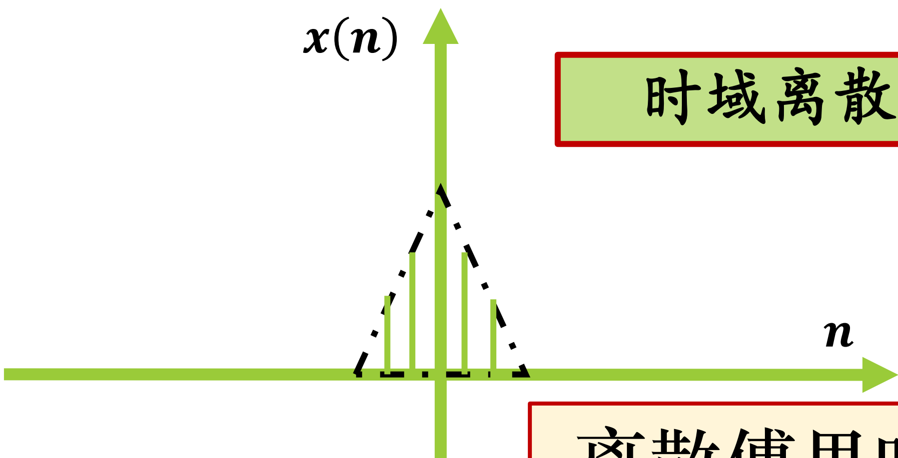
$$x(n)=\{\underline{1},1,1,1\}$$

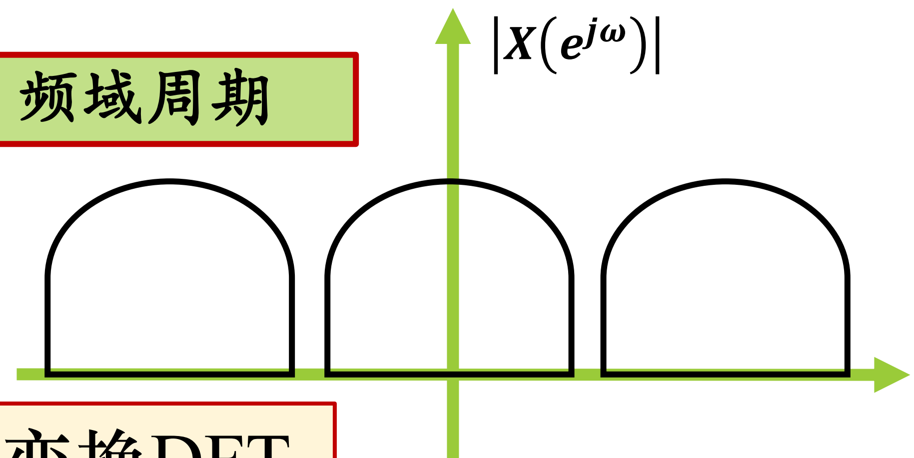
离散傅里叶反变换IDFT

二、离散傅里叶变换

3. 周期延拓

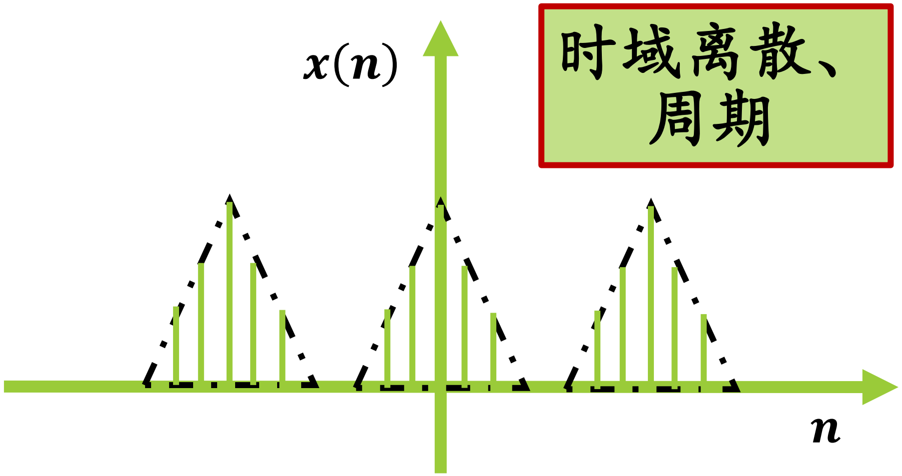
序列傅里叶变换





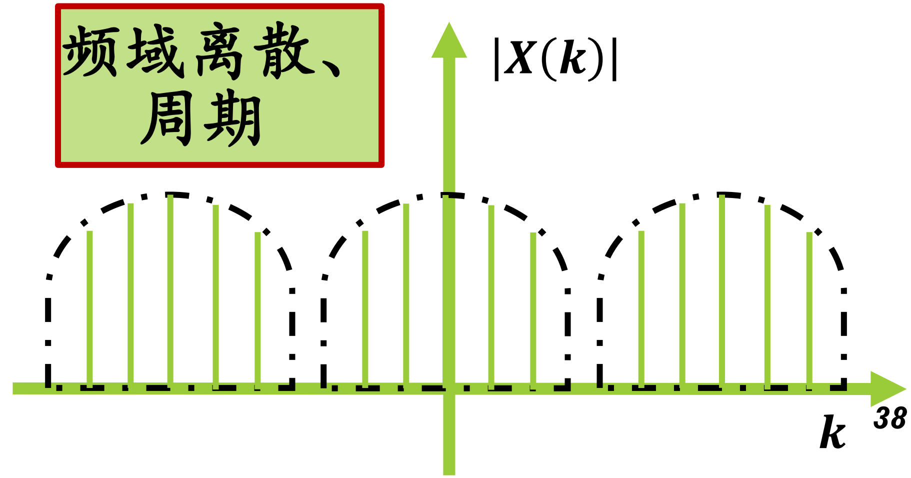
时域离散，频域周期

离散傅里叶变换DFT



时域离散、周期

频域离散、周期



二、离散傅里叶变换

3. 周期延拓

时域	DFT域
$x(n)$	$X(k)$
$\tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k)$
$\tilde{x}(n) = x\big((n)\big)_N$	$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$

二、离散傅里叶变换

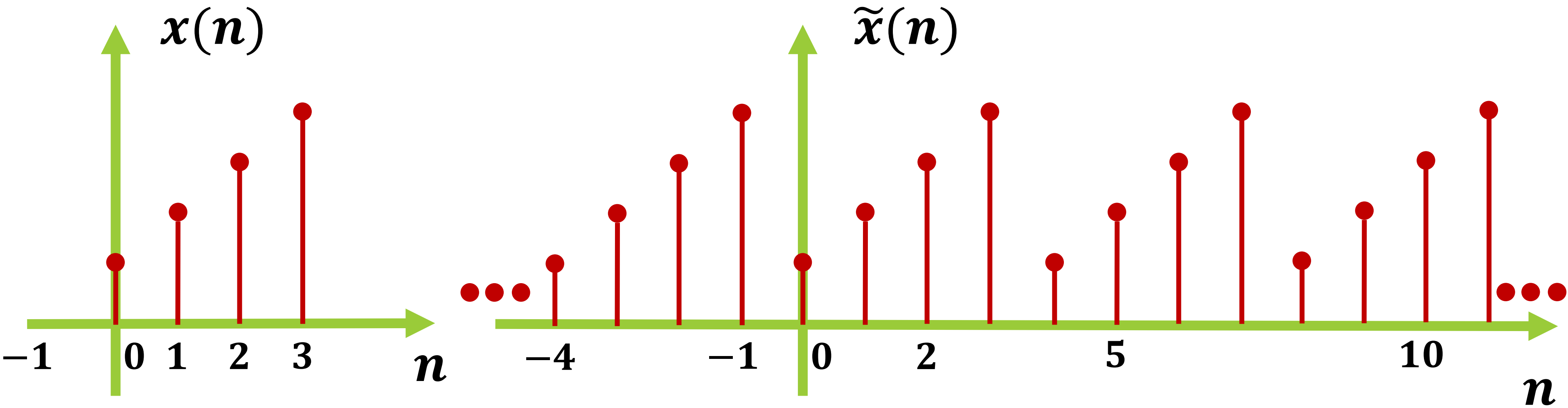
3. 周期延拓

关键参数：序列$x(n)$的长度M

周期延拓序列的周期N

$\boxed{\text{序列长度}M=\text{延拓周期}N}$

$$\tilde{x}(n) = x((n))_4$$



$$x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$$

$$\tilde{x}(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1 \cdots\}$$

二、离散傅里叶变换

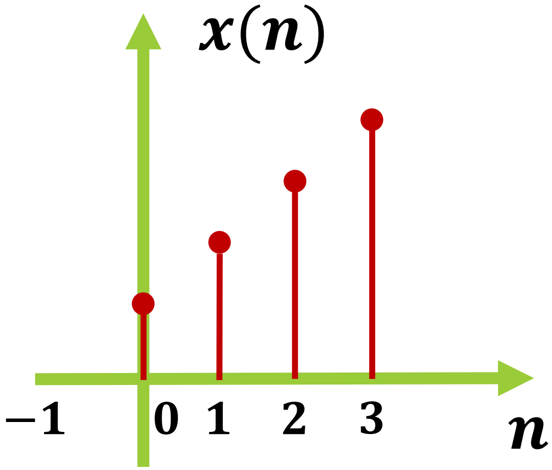
3. 周期延拓

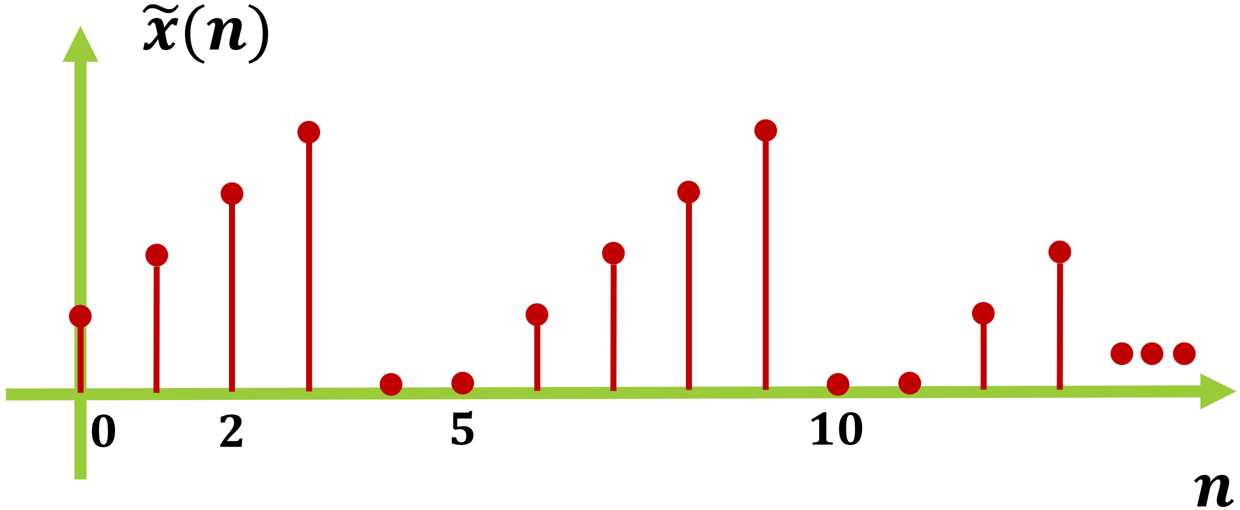
序列长度$M <$延拓周期N

$$\tilde{x}(n) = x((n))_6$$

序列后补$N - M$个0

$$x_6(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4, 0, 0\}$$





$$x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4\} \quad \tilde{x}(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 0 \cdots\}$$

二、离散傅里叶变换

3. 周期延拓

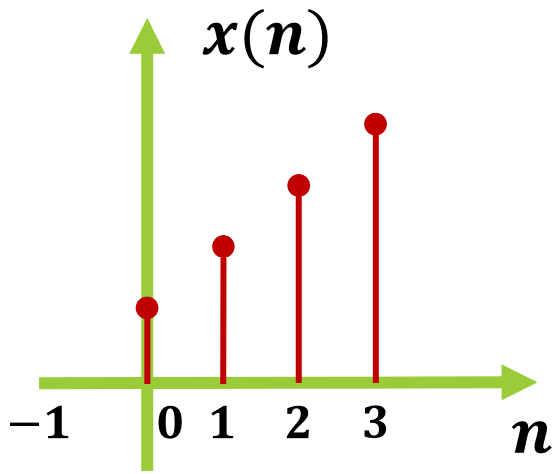
$$\tilde{x}(n) = x((n))_2$$

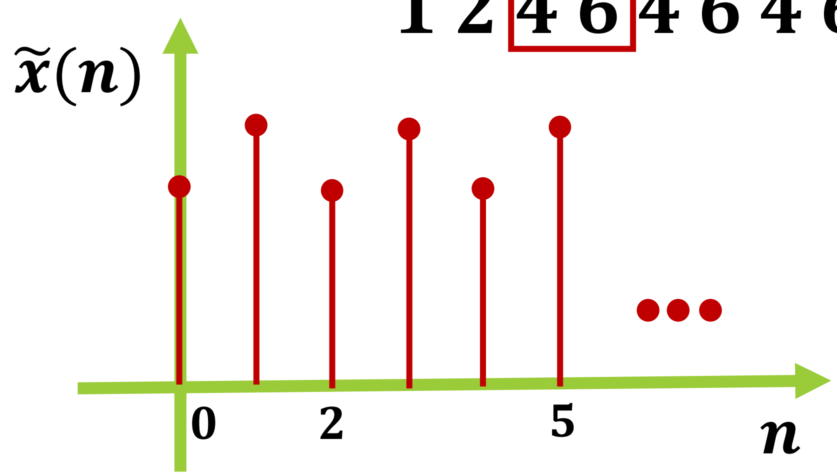
序列长度M >延拓周期N

将序列$x(n)$按周期延拓，混叠相加形成新序列

1 2 3 4
  1 2 3 4
    1 2 3 4
      1 2 3 4

1 2 $\boxed{4\ 6}$ 4 6 4 6⋯

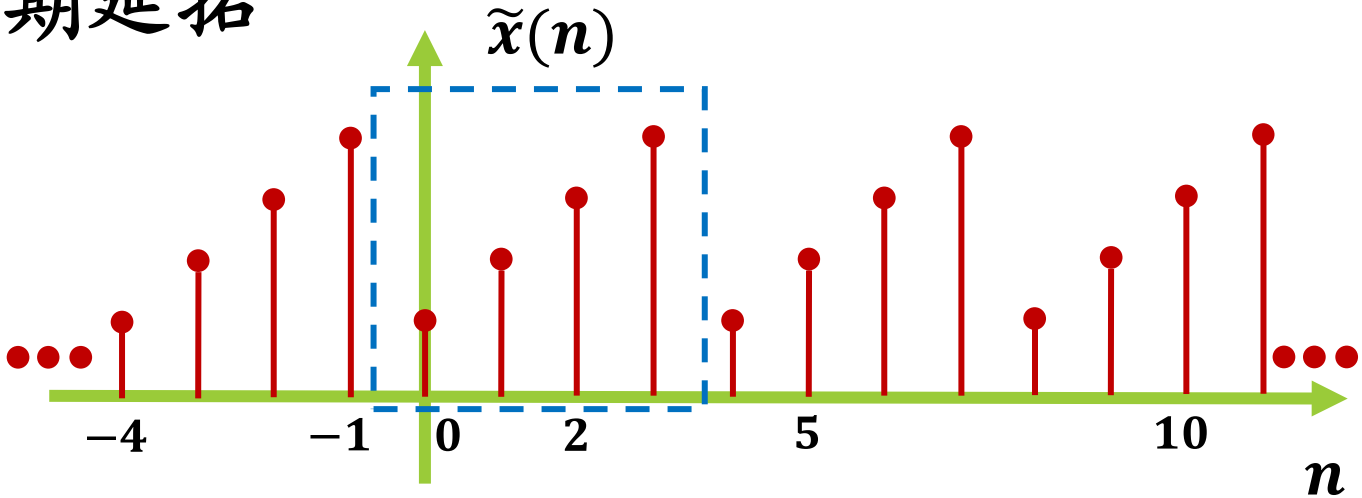


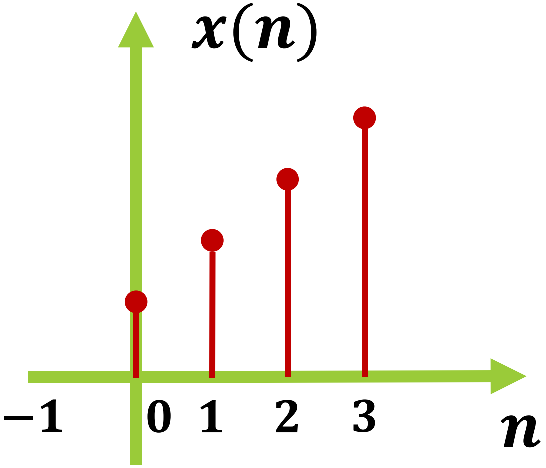


$$x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4\} \qquad \tilde{x}(n) = x((n))_2 = \{4, 6, 4, 6, 4, 6 \cdots\}$$

二、离散傅里叶变换

3. 周期延拓





$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

$\tilde{x}(n)$是$x(n)$以n为周期延拓而得到

$x(n)$是$\tilde{x}(n)$的主值序列

二、离散傅里叶变换

已知序列$x(n) = \{\underline{1}, 1, 3, 4\}$，求：

1）$x((n))_4$，$x((n))_4 R_4(n)$；　$\{\underline{1}, 1, 3, 4\}$

2）$x((n))_6$，$x((n))_6 R_6(n)$；　$\{\underline{1}, 1, 3, 4, 0, 0\}$

3）$x((n))_2$，$x((n))_2 R_3(n)$；　$\{\underline{4}, 5, 4\}$

4）$x((-n))_5$，$x((-n))_5 R_5(n)$　$\{\underline{1}, 0, 4, 3, 1\}$

二、离散傅里叶变换

3. 周期延拓

$$\tilde{x}(n) = x\big((n)\big)_N$$

$\big((n)\big)_N$的意思：模N对n求余

$x\big((8)\big)_8 =$ $x((0))_8$

$x\big((9)\big)_8 =$ $x((1))_8$

二、离散傅里叶变换

3. 周期延拓

$X(k)$的隐含周期

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$\tilde{X}(k)$是$x(n)$的周期延拓序列$\tilde{x}(n)$的频谱

$\tilde{X}(k)$的本质是离散傅里叶级数系数

$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$X(k)$是$\tilde{X}(k)$的主值序列

三、离散傅里叶变换的性质

1. 线性
2. 循环移位性质
3. 循环卷积定理
4. 复共轭的DFT
5. DFT的共轭对称性

三、离散傅里叶变换的性质

1. 线性

如果$x_1(n)$和$x_2(n)$是两个有限长序列，长度分别为N_1和N_2，且

$$y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

式中a、b为常数，取变换区间长度$N = [N_1, N_2]_{max}$

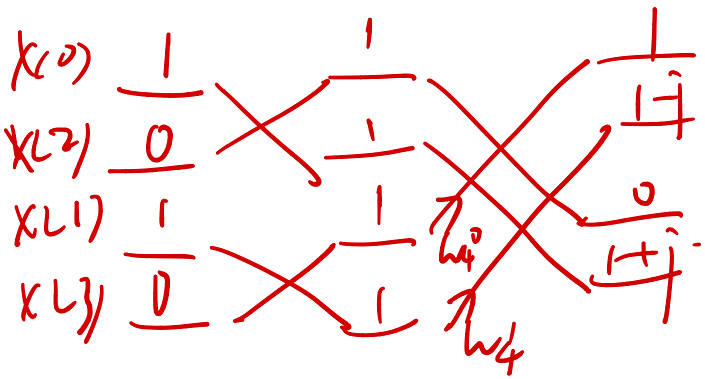
$$X_1(k) = DFT[x_1(n)]_N \qquad X_2(k) = DFT[x_2(n)]_N$$

则$y(n)$的N点DFT为：

$$Y(k) = DFT[y(n)]_N = aX_1(k) + bX_2(k)$$

三、离散傅里叶变换的性质

设$x_1(n) = R_4(n)$， $x_2(n) = R_2(n)$，求$y(n) = 3x_1(n) + x_2(n)$的离散傅里叶变换4点DFT $Y(k)$



⇒2

$$W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}\times n\times 1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow -j$$

$\{\underline{14}, 1-j, 0, 1+j\}$

三、离散傅里叶变换的性质

2. 循环移位

序列的循环移位

$$\tilde{x}(n) = x\big((n)\big)_N$$

设$x(n)$为有限长序列，长度为M，则$x(n)$的循环移位定义为：

$$y(n) = x\big((n+m)\big)_N R_N(n)$$

相当于$\tilde{x}(n)$左移m得到$x\big((n+m)\big)_N$，即$\tilde{x}(n+m)$，最后取$\tilde{x}(n+m)$的主值序列$y(n)$

三、离散傅里叶变换的性质

设$x(n)=\{\underline{0.2},0.5,0.8,0.8,0.5,0.2\}$， $M=6$，$N=8$，求

1） $x((n))_8$

2） $x((n+2))_8$

3） $x((n+2))_8R_8(n)$

序列左移

原点右移

$$\{\underline{0.8},0.8,0.5,0.2,0,0,0.2,0.5\}$$

三、离散傅里叶变换的性质

2. 循环移位

时域循环移位定理

设$x(n)$为有限长序列，长度为M，则$y(n)$为$x(n)$的循环移位：

$$y(n) = x\big((n+m)\big)_N R_N(n)$$

$$Y(k) = DFT[y(n)]_N = W_N^{-mk} X(k)$$

如何证明？

三、离散傅里叶变换的性质

2. 循环移位

频域循环移位定理

如果$X(k) = DFT[x(n)]_N$

$$Y(k) = X\big((k+l)\big)_N R_N(k)$$

则$y(n) = IDFT[Y(k)]_N = W_N^{nl} x(n)$

三、离散傅里叶变换的性质

3. 循环卷积定理

如果$x_1(n)$和$x_2(n)$是两个有限长序列，长度分别为M_1和M_2，且取循环卷积区间长度$L \geq max[M_1, M_2]$:

$X_1(k)$是$x_1(n)$的L点DFT　　$X_2(k)$是$x_2(n)$的L点DFT

$$y(n) = x_1(n) \, \textcircled{L} \, x_2(n) \longleftrightarrow Y(k) = X_1(k)\, X_2(k)$$

三、离散傅里叶变换的性质

3. 循环卷积定理

L点循环卷积定义

循环卷积的运算符号：Ⓛ （圆周卷积、圆卷积）

如果$x_1(n)$和$x_2(n)$是两个有限长序列，长度分别为M_1和M_2，且取循环卷积区间长度$L \geq max[M_1, M_2]$：

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \left[x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n)$$

三、离散傅里叶变换的性质

3. 循环卷积定理

循环卷积(圆周卷积、圆卷积)

$$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \left[x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n)$$

线卷积(卷积和)

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) x_2(n-m)$$

三、离散傅里叶变换的性质

3. 循环卷积定理

$$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \left[x_1(m) x_2\left((n-m)\right)_L \right] R_L(n)$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \text{循环卷积矩阵} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ \vdots \\ x_1(L-1) \end{bmatrix}$$

$$x_2\left((n-m)\right)_L \qquad\qquad x_1(m)$$

三、离散傅里叶变换的性质

已知序列$x_1(n)=\{\underline{1},1,1,1\}$， $x_2(n)=\{\underline{1},2,3,4\}$，

求序列的$x_1(n)$ ④ $x_2(n)$和$x_1(n)$ ⑧ $x_2(n)$

$$\{\underline{10},10,10,10\}$$

$$\{\underline{1},3,6,10,9,7,4,0\}$$

实用解法？

三、离散傅里叶变换的性质

求$x_1(n)=\{1,\underline{2},3,4\}$，$x_2(n)=\{1,\underline{1},1,1\}$的4点循环卷积

$$\{\underline{10},10,10,10\}$$

8点循环卷积如何求解？

三、离散傅里叶变换的性质

4. 复共轭的DFT

设$x^*(n)$是$x(n)$的复共轭序列，长度为N，

$DFT[x(n)]_N = X(k)$，则

$DFT[x^*(n)]_N = X^*(N-k)$； $0 \le k \le N-1$

且$X(N) = X(0)$

已知$x(n)$的4点DFT为$\left\{\underline{1}, \frac{1}{2}+j, -2, 1+j\right\}$

则的$x^*(n)$ 的4点DFT为？

$$\left\{\underline{1}, 1-j, -2, \frac{1}{2}-j\right\}$$

三、离散傅里叶变换的性质

5. DFT的共轭对称性

设$x(n)$是长度为N的实序列，

且$X(k)=DFT[x(n)]_N$，则$X(k)$满足如下对称性：

1）$X(k)$共轭对称：$X(k)=X^*(N-k)$

2）若$x(n)$ 实偶对称，即$x(n)=x(N-n)$：

$$X(k)=X(N-k)$$

2）若$x(n)$ 实奇对称，即$x(n)=-x(N-n)$：

$$X(k)=-X(N-k)$$

三、离散傅里叶变换的性质

已知$N = 7$点的实序列的DFT偶数点的值如下：求DFT奇数点的值

$$X(0) = 4.8;$$

$$X(2) = 3.1 + 2.5j;$$

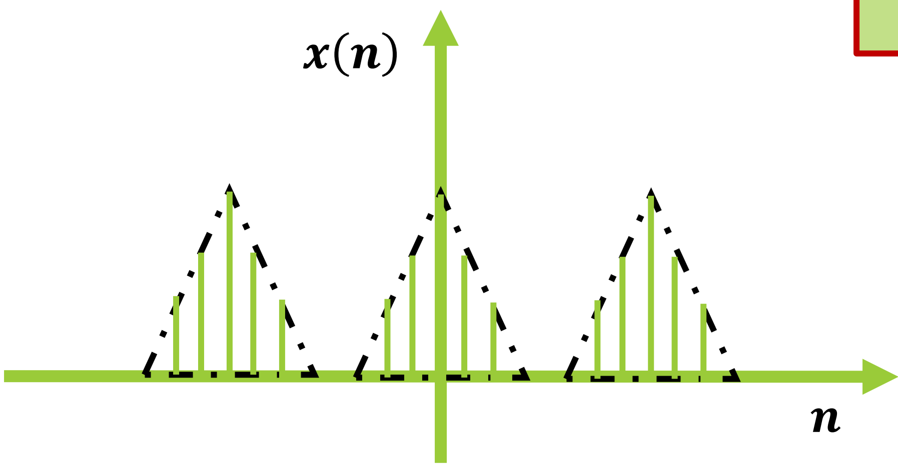
$$X(4) = 2.4 + 4.2j;$$

$$X(6) = 5.2 + 3.7j$$

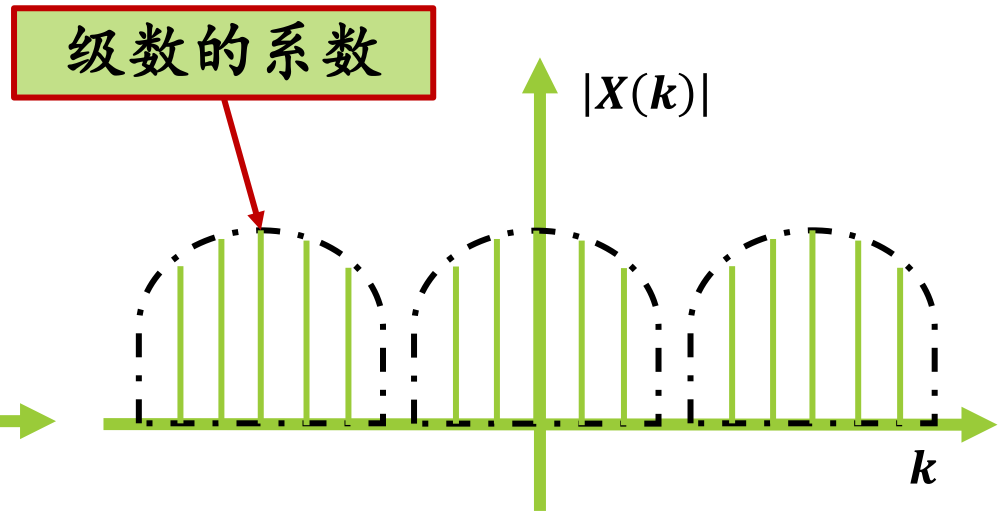
$X(1) = 5.2 - 3.7j$　　$X(3) = 2.4 - 4.2j$

$$X(5) = 3.1 - 2.5j$$

四、周期序列的傅里叶级数



$\tilde{x}(n)$



$\tilde{X}(k)$

周期序列的傅里叶级数DFS

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

周期序列没有傅里叶变换

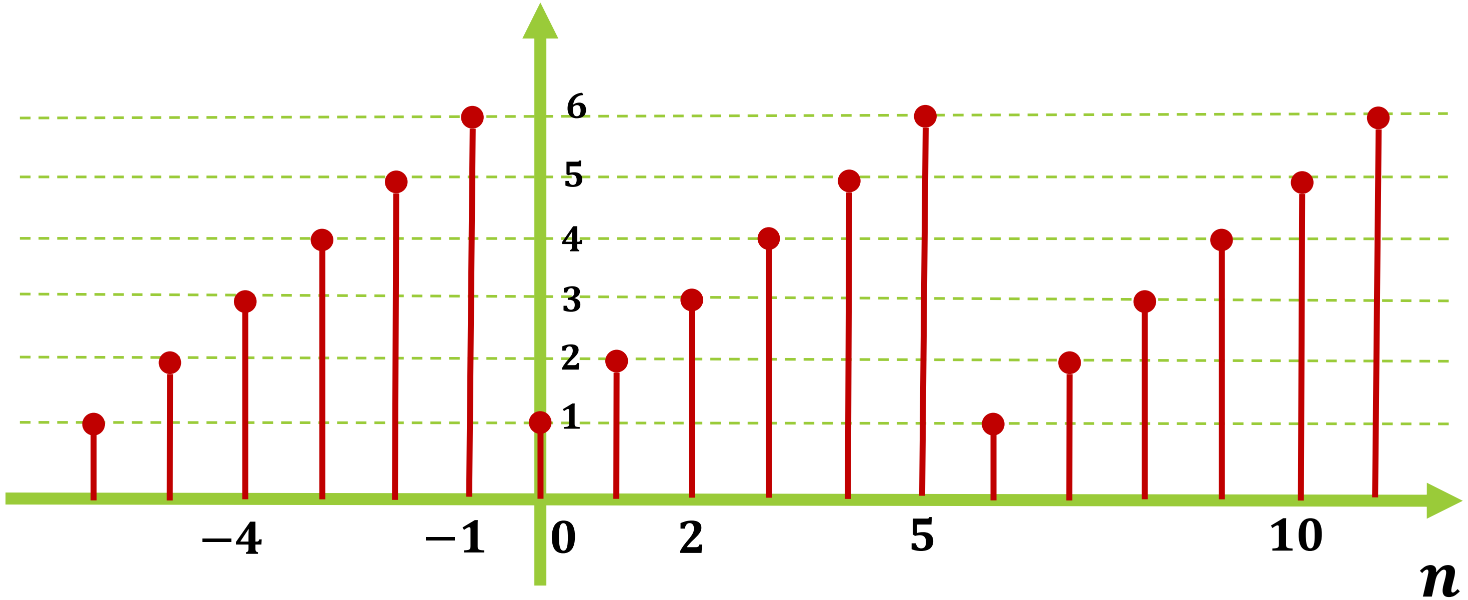
离散傅里叶变换DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

频谱的抽样值

四、周期序列的傅里叶级数

已知如图所示的序列，求其傅里叶级数的系数



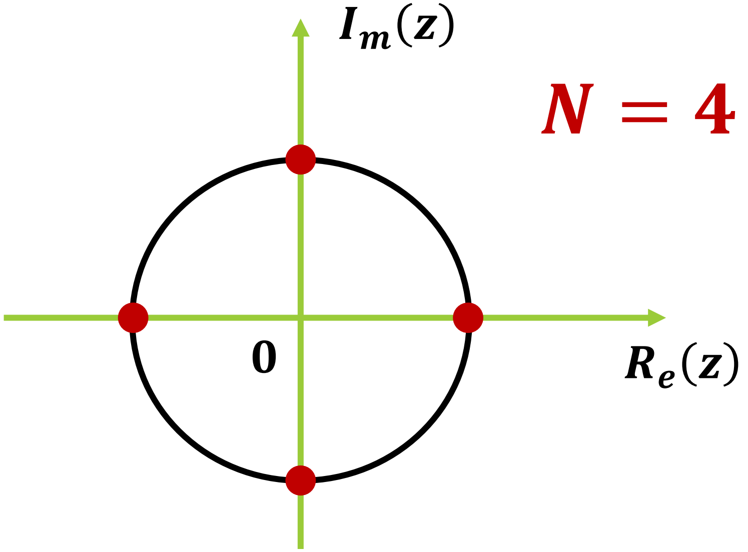
$$\{\underline{21}, -3+j3\sqrt{3}, -3+j\sqrt{3}, -3, -3-j\sqrt{3}, -3-j3\sqrt{3}\}$$

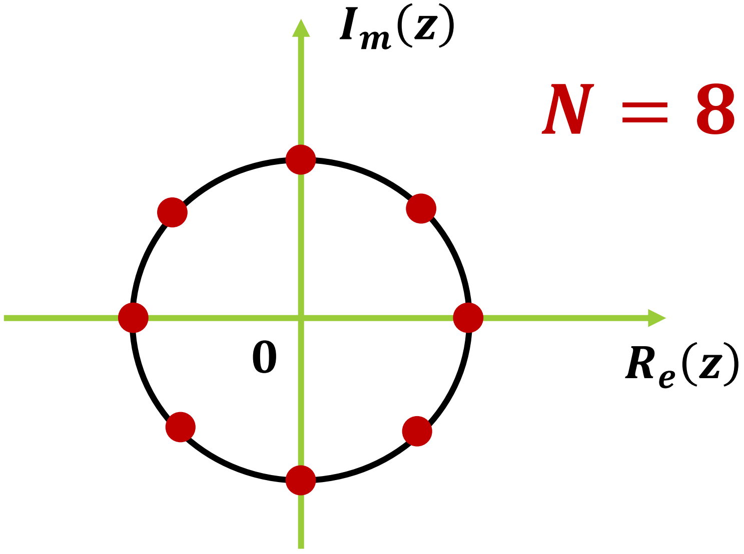
四、周期序列的傅里叶级数

知识回顾

旋转因子（周期单位复指数序列）的特性研究

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$





$$\widetilde{X}(k) = \widetilde{X}^*(N-k)$$

级数的系数

四、周期序列的傅里叶级数

傅里叶级数还是DFT？

题目给出$\tilde{x}(n)$，求周期序列的傅里叶级数DFS

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

N是周期

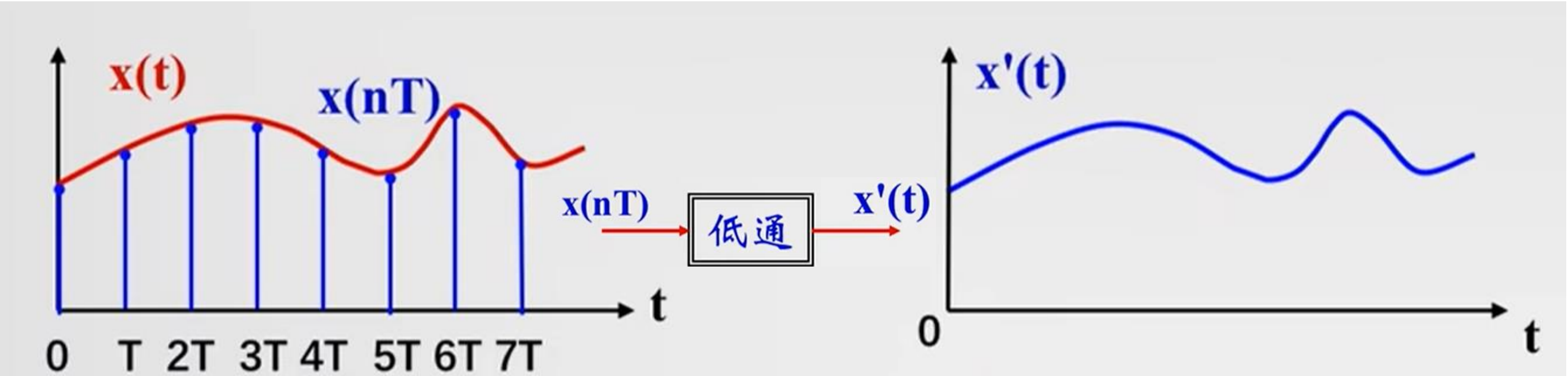
题目给出$x(n)$，求离散傅里叶变换DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

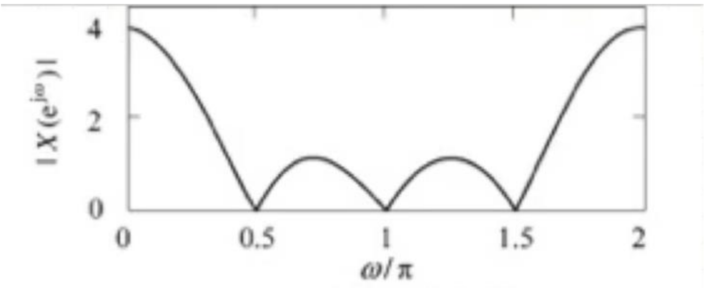
N是DFT的变换区间，不一定是$x(n)$的周期

五、频率域采样

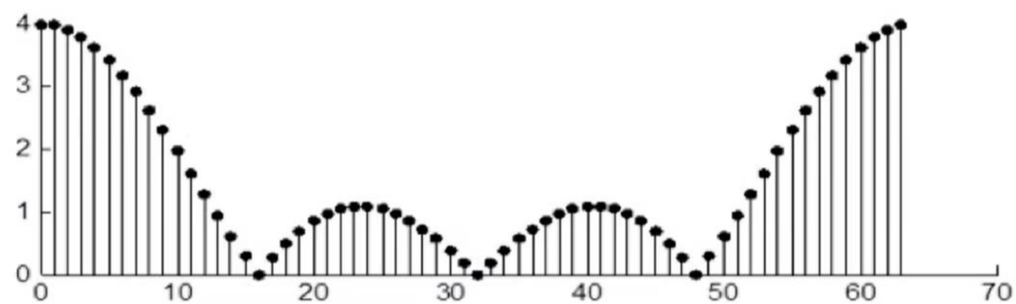
时域采样与恢复



频率域采样DFT



(a) $x(n)$的幅频特性曲线



五、频率域采样

频率域采样定理

如果序列$x(n)$长度为M，则只有当频域采样点数$N \geq M$时才有

$$\boxed{x_N(n)} = IDFT[X(k)] = \boxed{x(n)}$$

频率采样序列$X(k)$反变换得到的时域序列

原序列

频率域即可由频率采样$X(k)$恢复原序列$x(n)$

五、频率域采样

8个点

已知$x(n)=\{\underline{1},2,3,4,5,4,3,2,1\}$，$X(k)$是在序列$x(n)$的傅里叶变换在$[0,2\pi]$上的8点等间隔采样。请写出$X(k)$的8点IDFT变换序列

1 2 3 4 5 4 3 2 1

1 2 3 4 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 4 3 2 1

1 2 2 3 4 5 4 3 2 1

$$\{\underline{2},2,3,4,5,4,3,2\}$$

六、快速傅里叶变换

离散傅里叶变换DFT的计算过程

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

求任意序列$x(n)=\{\underline{x(0)},x(1),x(2),x(3)\}$的4点

DFT

12次加法

16次乘法

计算量有多少?

六、快速傅里叶变换

离散傅里叶变换DFT的计算量分析

N点DFT的计算量

加法：$N(N-1)$次

乘法：N^2次

4点DFT的计算量：加法12次，乘法16次

2点DFT的计算量：加法2次，乘法4次

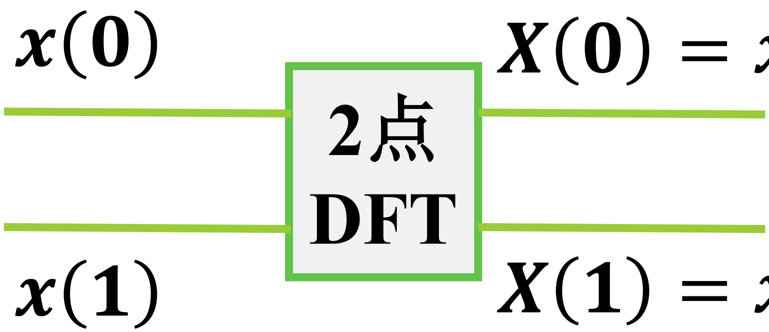
4点DFT分解为两次2点DFT：加法4次，乘法8次

2点DFT的旋转因子？　4点DFT的旋转因子？

六、快速傅里叶变换

基2FFT的基本原理

时域抽取法

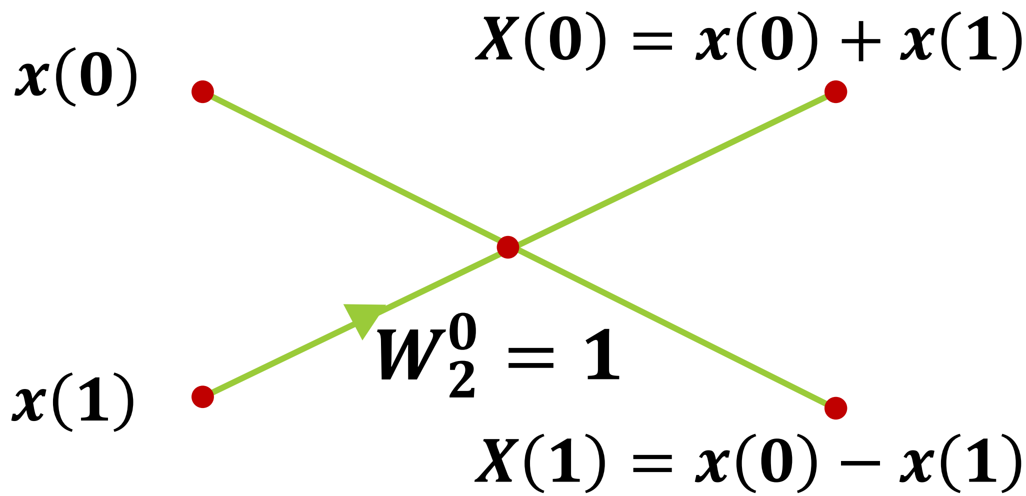


$$X(0)=x(0)W_2^0+x(1)W_2^0=x(0)+x(1)$$

$$X(1)=x(0)W_2^0+x(1)W_2^1=x(0)-x(1)$$

蝶形运算符

一次乘法两次加法



六、快速傅里叶变换

基2FFT的基本原理

4点DFT的时域抽取运算流图示例

六、快速傅里叶变换

已知$x(n)=\{\underline{1},0.5,0,0.5\}$，用FFT算法求$x(n)$的4点DFT

六、快速傅里叶变换

基2FFT的基本原理

8点DFT的时域抽取运算流图示例

倒序算法

第L级的旋转因子计算为$W_N^{J\cdot 2^{M-L}}$

六、快速傅里叶变换

已知$x(n) = \{\underline{1}, 0.5, 0, 0.5, 1, 1, 0.5, 0\}$， 用FFT算法求$x(n)$的8点DFT

六、快速傅里叶变换

N点DFT传统算法与N点FFT算法次数公式

N点DFT传统算法次数：

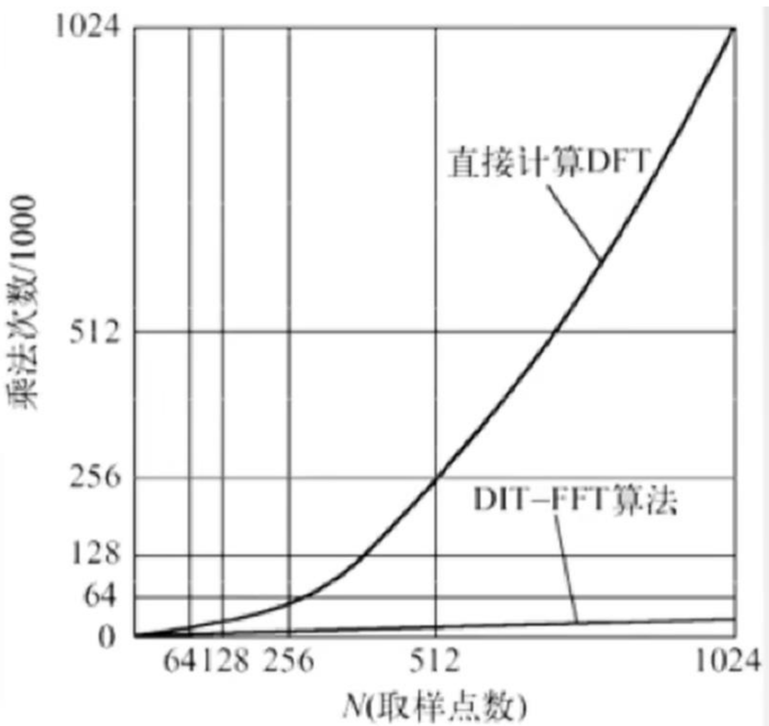
加法： $C_{ADFT}=N(N-1)$次

乘法： $C_{MDFT}=N^2$次

N点FFT快速算法次数：

加法： $C_{AFFT}=N\log_2 N$次

乘法： $C_{MFFT}=\frac{N}{2}\log_2 N$次



六、快速傅里叶变换

如果某通用单片计算机的速度为平均每次复数乘需要4 μs，每次复数加需要1 μs，用来计算N=1024点DFT，问直接计算需要多少时间。用FFT计算需要多少时间

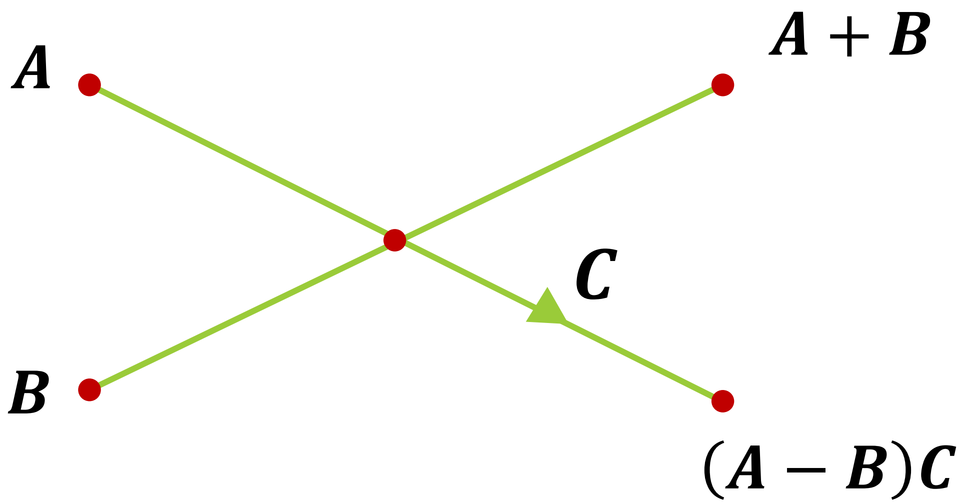
$$5.241856s$$

$$30.72ms$$

六、快速傅里叶变换

频域抽取的基2FFT的数学原理

频域抽取法



频域抽取的蝶形运算符

六、快速傅里叶变换

已知实序列的长度为8，其8点DFT为

$X(k) = \{\underline{0.9}, 0.5, 0.3, 0.2, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5\}$,

另一个序列$y(n) = x\big((n)\big)_8 R_{16}(n)$

则$y(n)$的16点DFT为$Y(k) =$

$$\{\underline{1.8}, 0, 1, 0, 0.6, 0, 0.4, 0, 0.2, 0, 0.4, 0\}$$

六、快速傅里叶变换

最重要算法背后的故事：
快速傅里叶变换

https://www.bilibili.com/video/BV1N94y147uY/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=6172e25b17534498c09307f0ab178e11

https://www.bilibili.com/video/BV1HU411S7XU/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=6172e25b17534498c09307f0ab178e11

谢谢！

郑玨鹏
中山大学人工智能学院
zhengjp8@mail.sysu.edu.cn
2024年12月28日