数字信号处理
——离散信号和系统的表示

郑珏鹏
中山大学人工智能学院
zhengjp8@mail.sysu.edu.cn
2024年12月28日

离散信号和系统的表示

- 从连续到离散
- 时域离散信号及其表示方法
- 时域离散系统
- 线性时不变系统
- 模拟信号数字化（采样）

一、从连续到离散

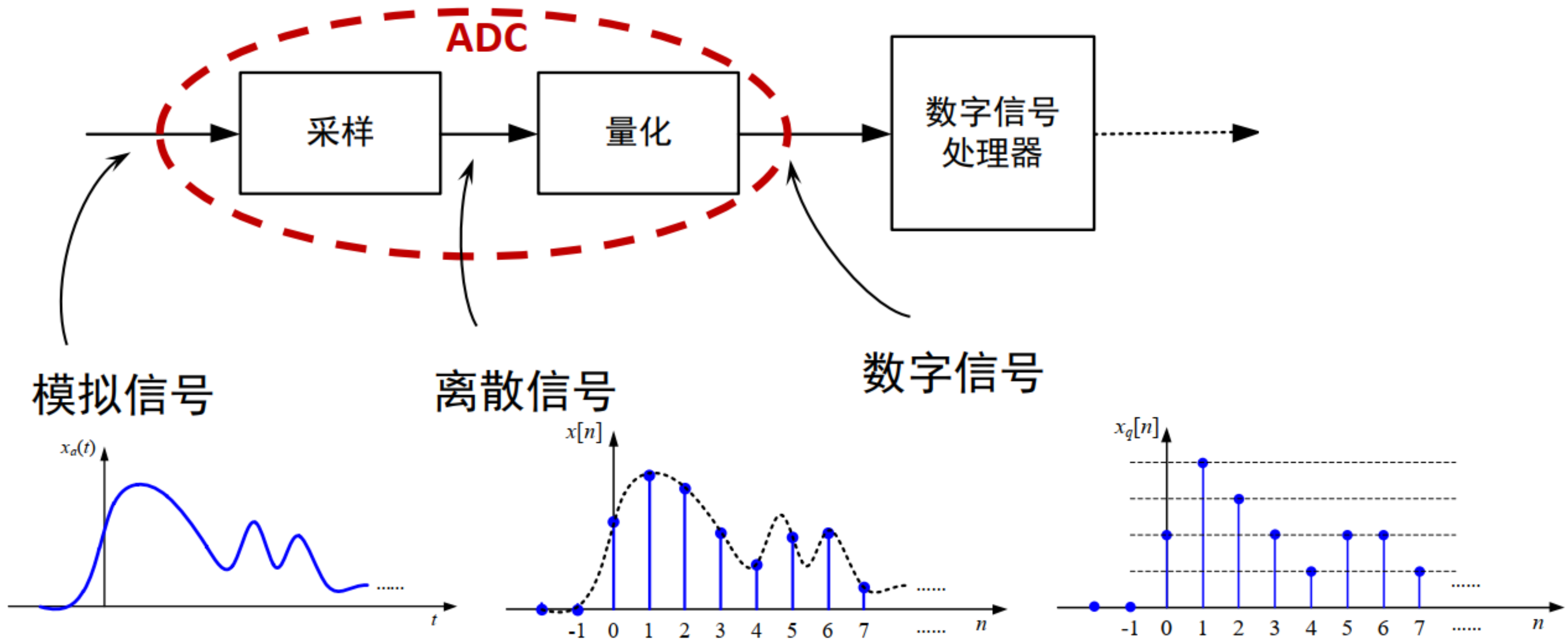
数字信号的来源

- 通过在一段时间里累计某个量
  - 气象观测站数据的测算
- 通过在离散时间点上对连续信号采样和量化
  - 例如：电话系统，对语音每秒钟采8000个样本

一、从连续到离散

数字信号处理系统的基本组成

- 在科学和工程上遇到的大多数信号是模拟信号
  - 电压、电流、温度、位移、速度……
- 在很多情况下希望用数字信号处理技术去处理模拟信号

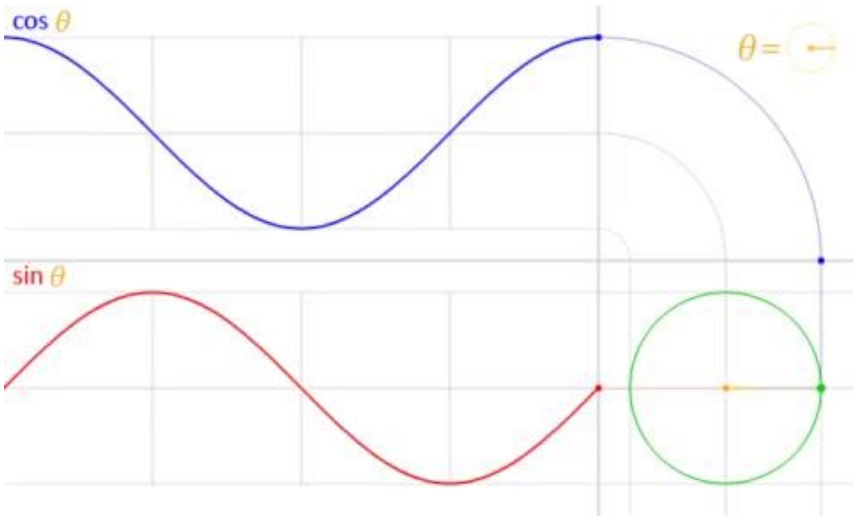


一、从连续到离散

信号与系统	数字信号处理
连续时间信号时域分析	离散时间信号时域分析
函数傅里叶变换（频域）	序列傅里叶变换（频域）
拉普拉斯变换（复频域）	z变换（z域） 离散傅里叶DFT和FFT
连续系统分析	离散系统分析与设计

一、从连续到离散

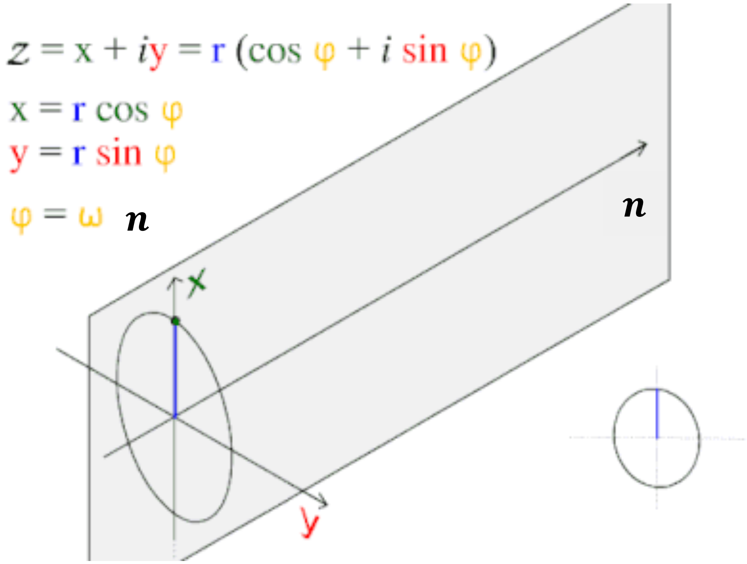
连续时间信号的表示



$$f(t) = sin\Omega t$$

$\Omega = 2\pi f$ 模拟域频率

离散时间信号的表示



$$x(n) = sin\omega n$$

ω 数字域频率

二、时域离散信号及其表示方法

1. 用集合符号表示

序列

样值大小

$$x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4, 5 \cdots\}$$

集合符号

$n = 0$

样值的顺序就是隐含的自变量n

n也可以用k来表示，$x(n)$也可以写成$x[k]$

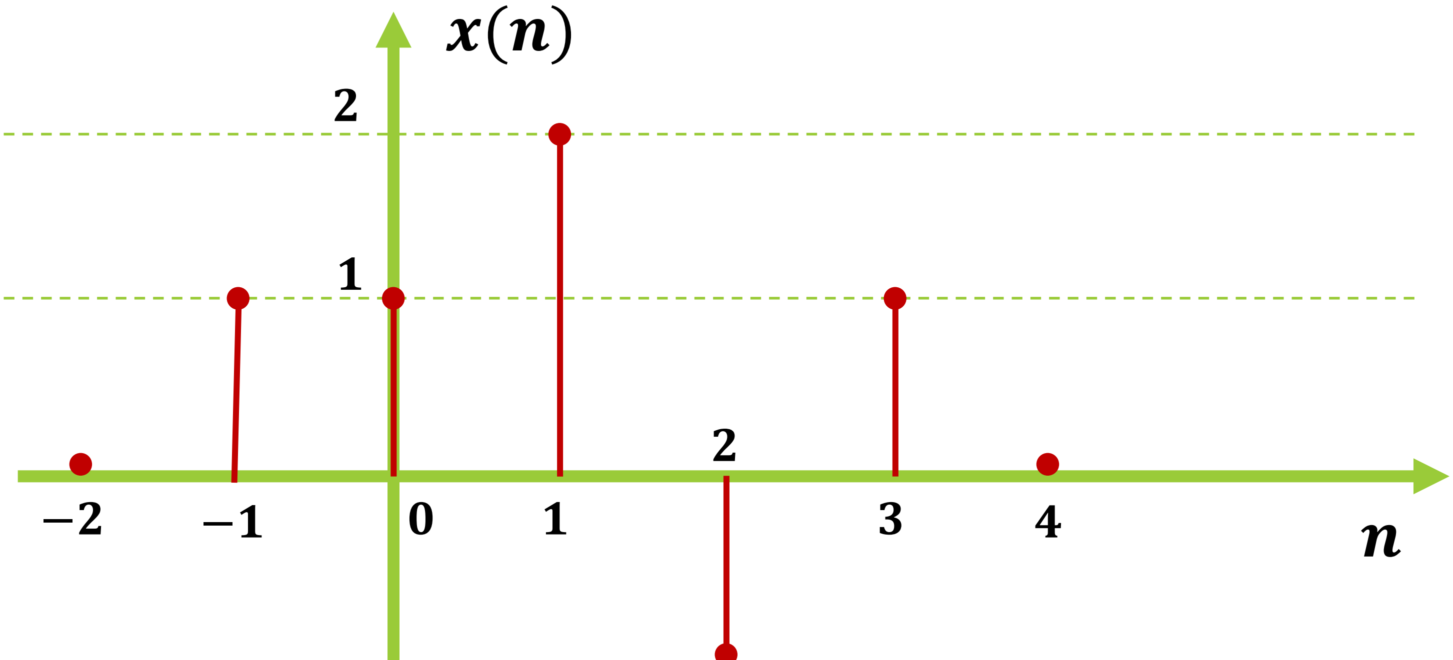
二、时域离散信号及其表示方法

2. 用公式表示

$$x(n) = sin\omega n; n = (-\infty, +\infty)$$

3. 用图形表示

$$x(n) = \{0, 1, \underline{1}, 2, -1, 1, 0\}$$

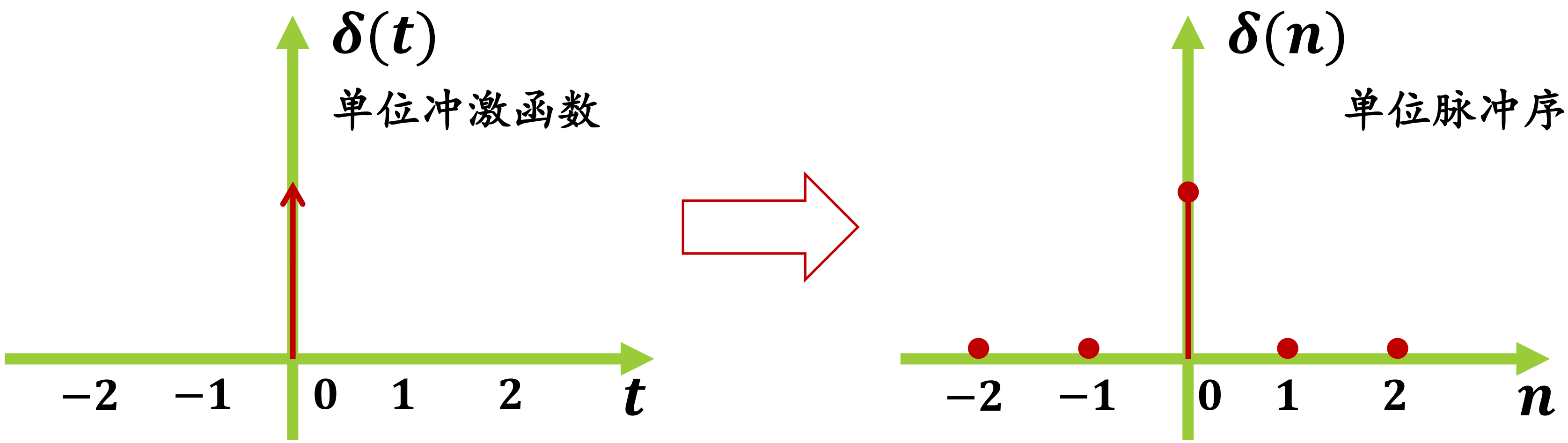


二、时域离散信号及其表示方法

常用的典型序列

1. 单位脉冲序列 $\delta(n)$

$$\delta(n)=\{\cdots 0,0,\underline{1},0,0\cdots\} \qquad \delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



二、时域离散信号及其表示方法

常用的典型序列

左加右减

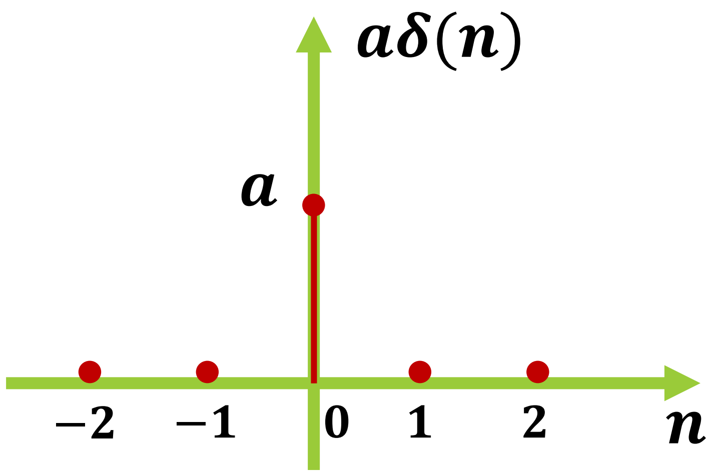
1. 单位脉冲序列 $\delta(n)$

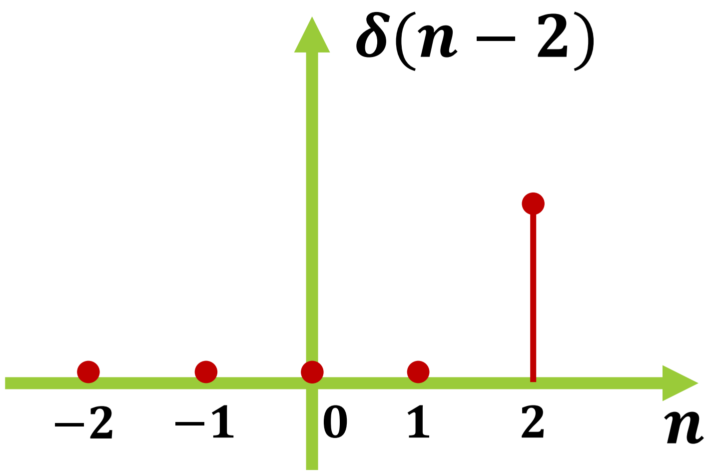
单位脉冲序列加权

$$a\delta(n)=\begin{cases}a & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}$$

单位脉冲序列的移位

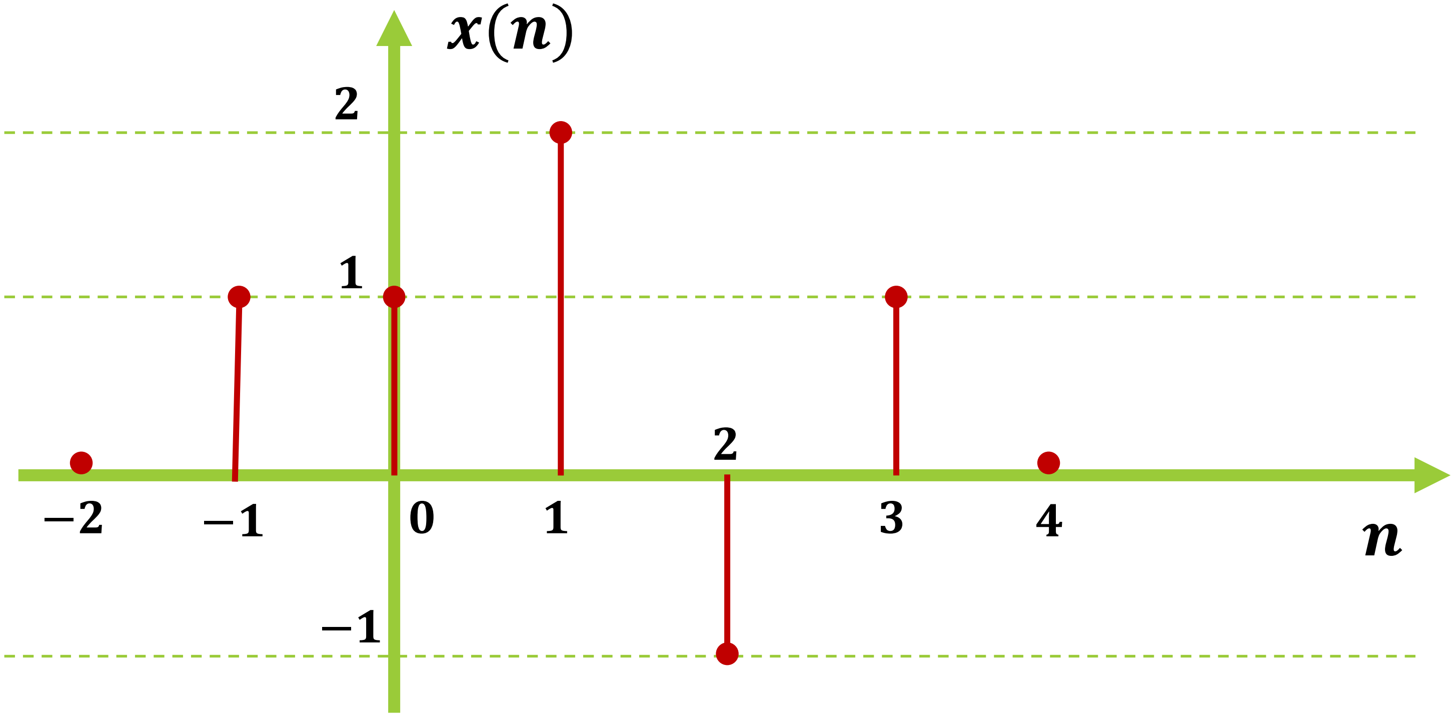
$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & n=n_0\\0 & n\neq n_0\end{cases}$$





二、时域离散信号及其表示方法

用单位脉冲序列$\delta(n)$的移位及其加权和表示任意序列$x(n)$



$$x(n)=\delta(n+1)+\delta(n)+2\delta(n-1)-\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

二、时域离散信号及其表示方法

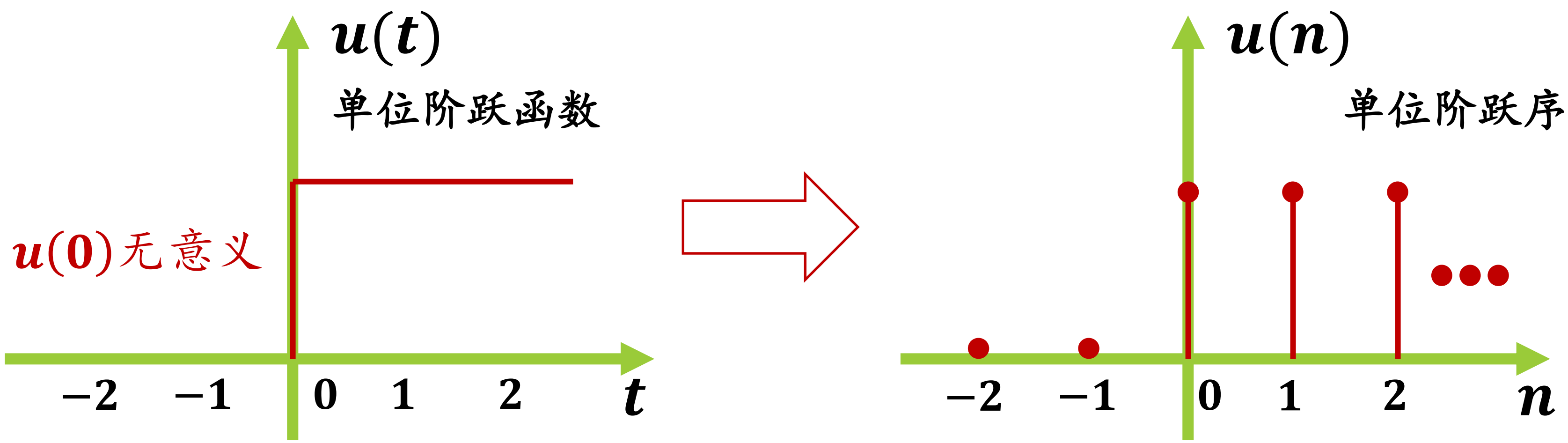
常用的典型序列

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$u(0) = 1$

$$u(n) = \{\cdots 0, \underline{1}, 1, 1 \cdots\}$$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



二、时域离散信号及其表示方法

常用的典型序列

左加右减

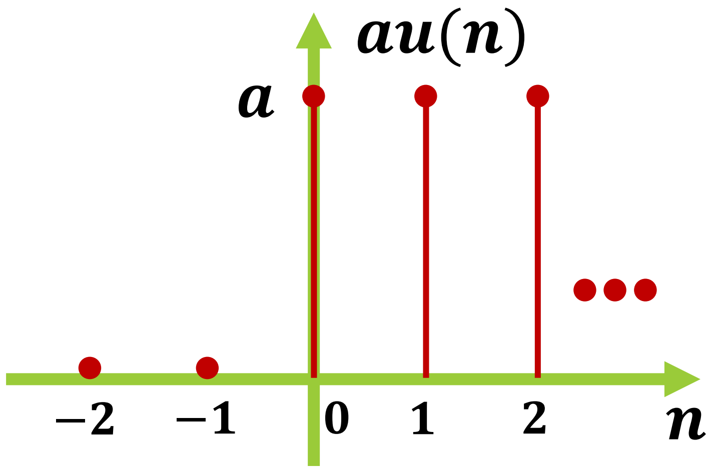
2. 单位阶跃序列 $u(n)$

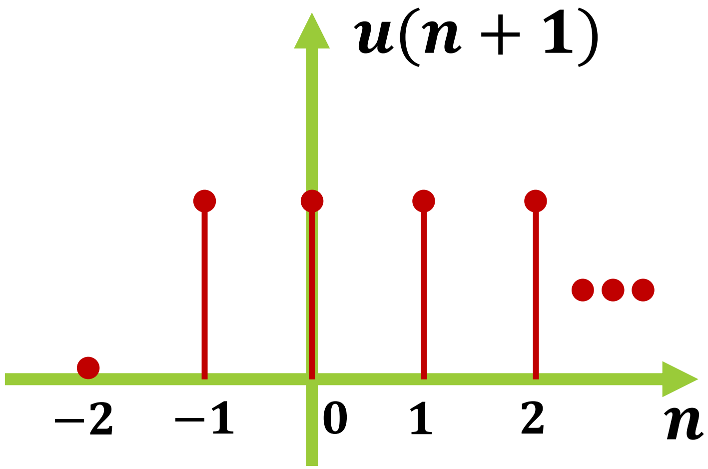
单位阶跃序列加权

$$au(n)=\begin{cases}a & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

单位阶跃序列的移位

$$u(n-n_0)=\begin{cases}1 & n\geq n_0\\ 0 & n<n_0\end{cases}$$





二、时域离散信号及其表示方法

用单位脉冲序列$\delta(n)$的移位及其加权和来表示$u(n)$

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots$$
$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \delta(n-m)$$

二、时域离散信号及其表示方法

常用的典型序列

3. 单位矩形序列 $R_N(n)$

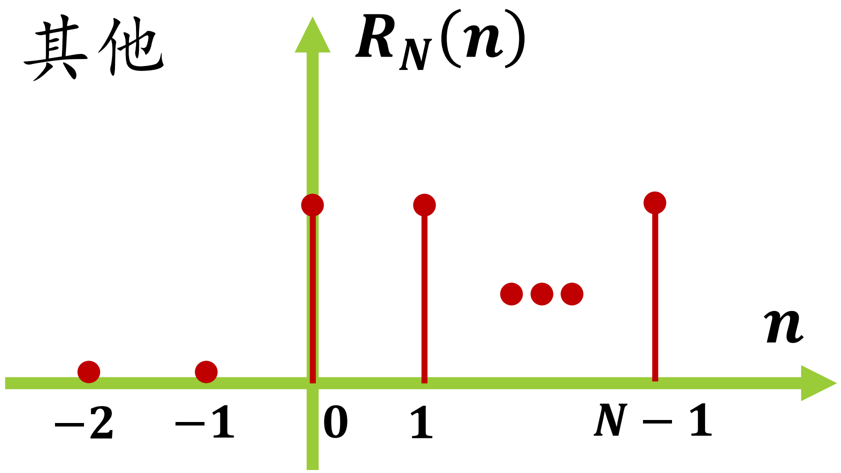
N：矩形序列样值的个数

n：矩形序列的自变量

$$R_N(n)=\{0,\underline{1},1,1\cdots,1\}$$

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

最后一个样值的n值是 $R_N(N-1)$



二、时域离散信号及其表示方法

用单位阶跃序列$\boldsymbol{u(n)}$来表示$\boldsymbol{\delta(n)}$和$\boldsymbol{R_N(n)}$

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

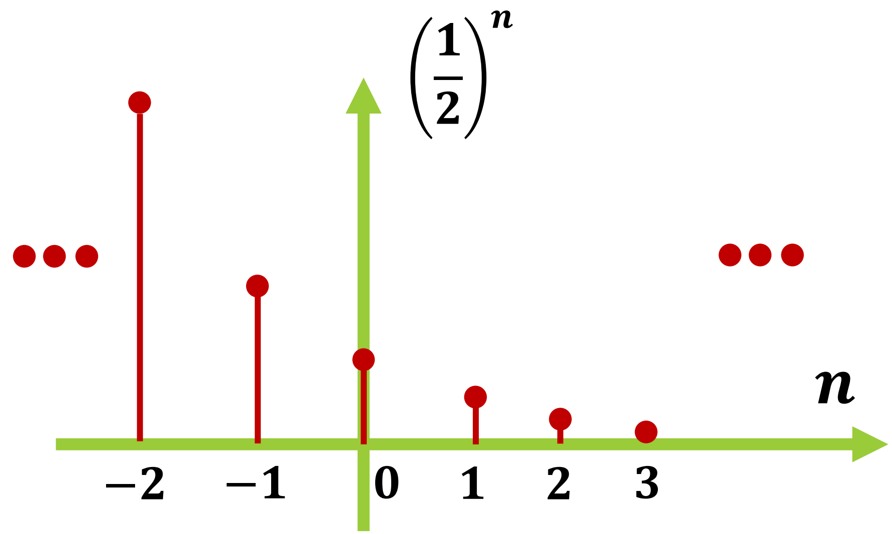
$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

二、时域离散信号及其表示方法

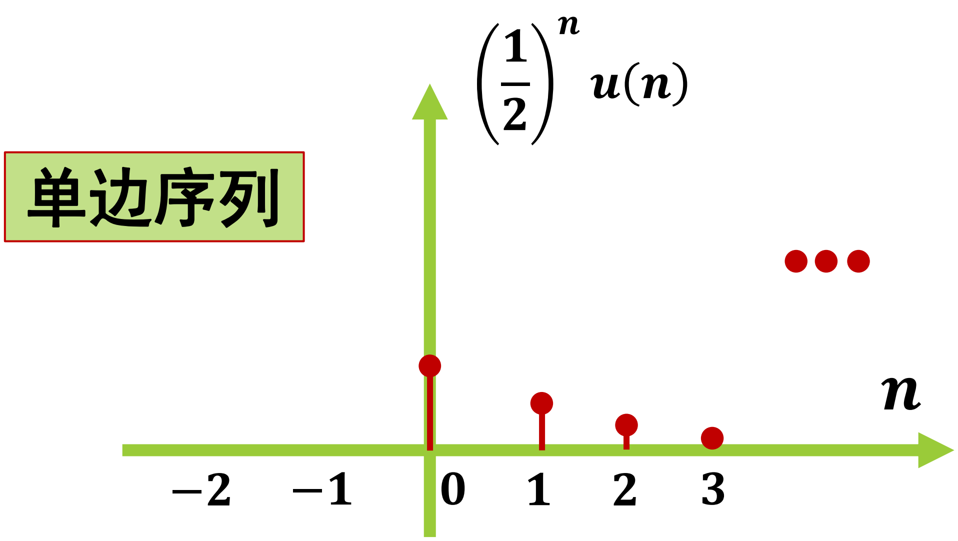
常用的典型序列

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n, n \in z$$



$$x(n) = a^n u(n)$$



二、时域离散信号及其表示方法

常用的典型序列

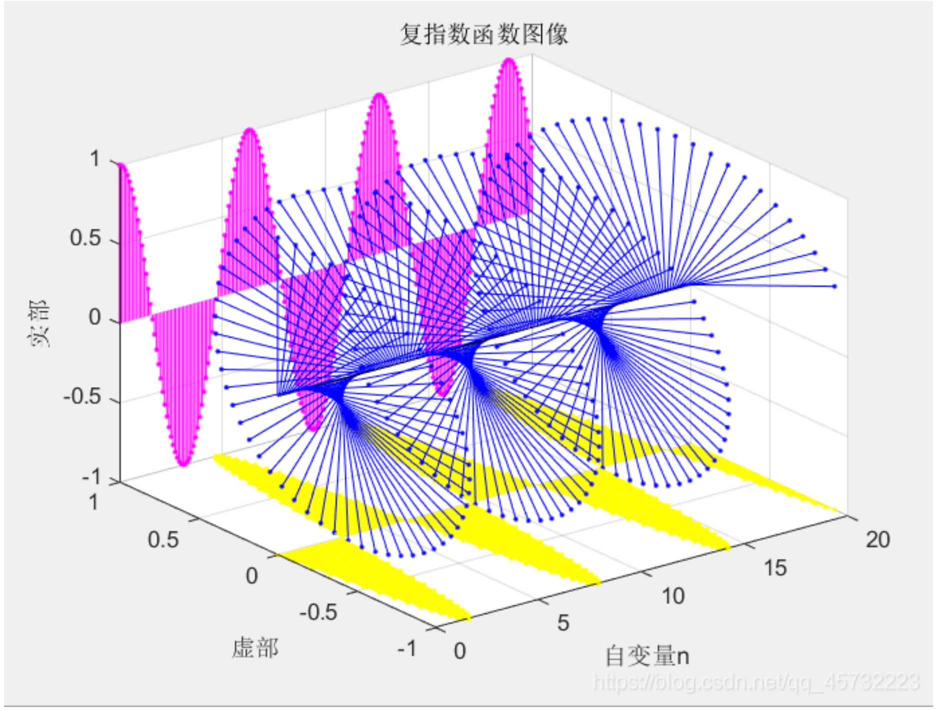
5. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma+j\omega_0)n}$$

$$e^{(\sigma+j\omega_0)n} = e^{\sigma n}e^{j\omega_0 n}$$

$e^{\sigma n}$：实指数序列

$e^{j\omega_0 n}$：虚指数序列



$e^{j\omega_0 n}$波形

$$e^{j\omega_0 n} = cos\omega_0 n + jsin\omega_0 n$$

$$cos\omega_0 n = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$

$$sin\omega_0 n = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right)$$

欧拉公式

复指数序列 ⟷ 正弦序列

二、时域离散信号及其表示方法

常用的典型序列

6. 正弦序列　$x(n) = sin(\omega_0 n)$　　ω_0数字频率

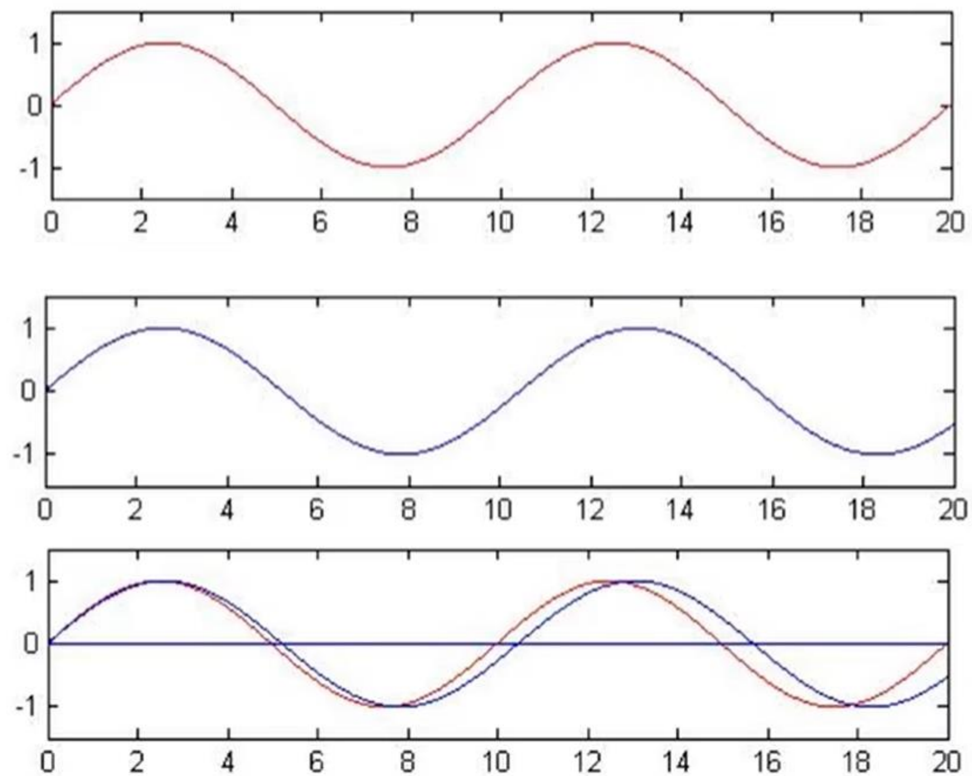
连续域的频率用Ω表示，重点是这里的自变量是t，在坐标轴上可以连续取值

$$sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$$

$$\Omega = \frac{\pi}{5} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 10$$

$$sin\left(\frac{3}{5}t\right)$$

$$\Omega = \frac{3}{5} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{10\pi}{3}$$

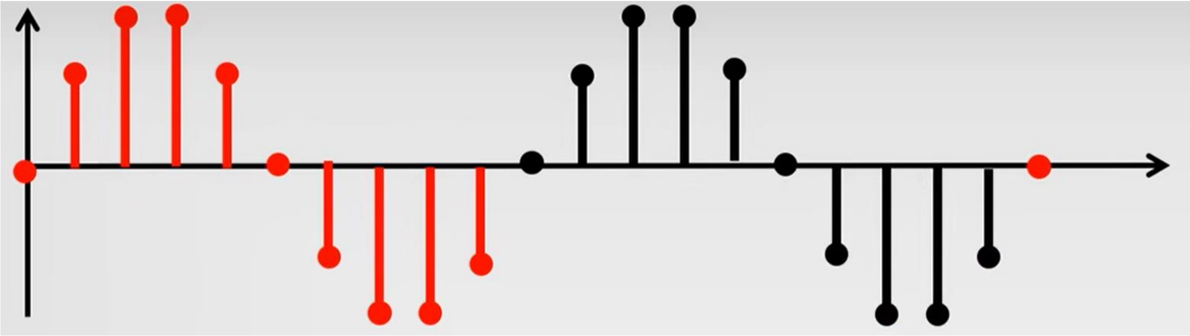


二、时域离散信号及其表示方法

常用的典型序列

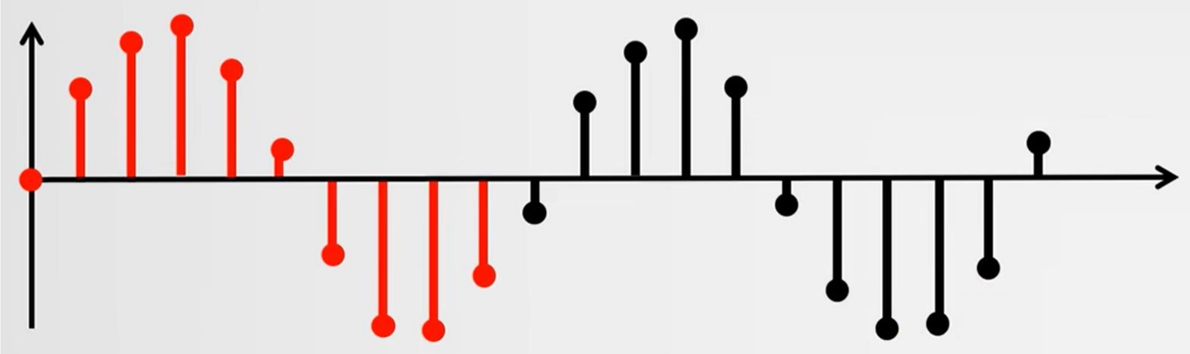
6. 正弦序列　$x(n)=sin(\omega_0 n)$　$\omega_0=\Omega_m T_s$数字频率

$x(n)=sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)$



一个周期内，有10个样值，下一个周期样值开始重复

$x(n)=sin\left(\frac{3}{5}n\right)$



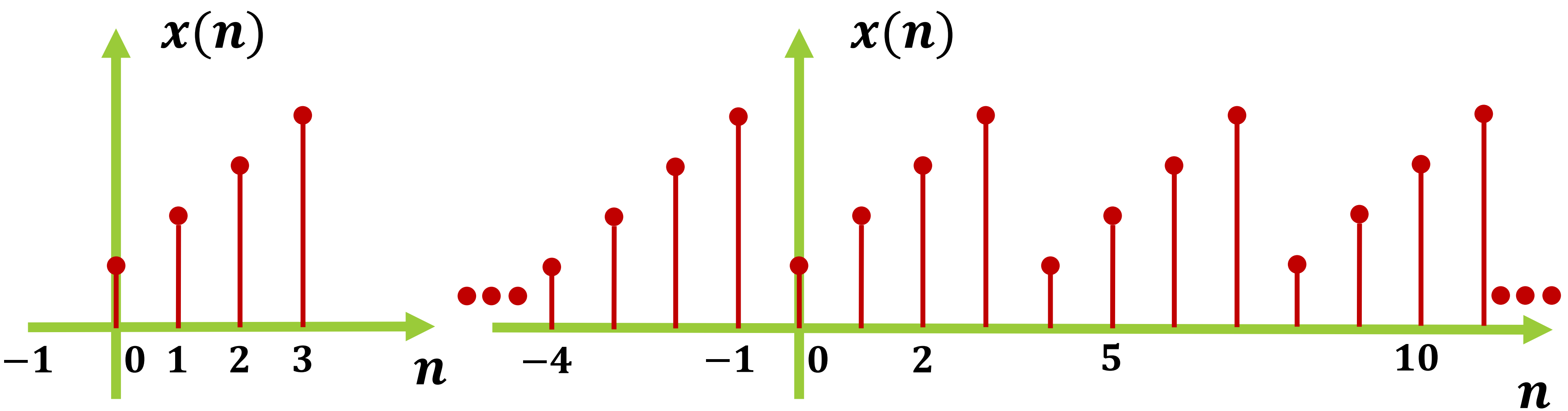
离散正弦型信号或虚指数信号不一定是周期信号

样值大小没有重复性

二、时域离散信号及其表示方法

常用的典型序列

7. 周期序列 $x(n) = x(n+N)$



二、时域离散信号及其表示方法

如何判断正弦型序列是否是周期序列，周期如何计算？

1. 计算$\frac{2\pi}{\omega_0}$

Q表示离散序列一个周期P内包含原连续周期信号的周期数

2. 根据 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的值来确定周期 N

a. 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 值为整数时，周期为该整数

必须不能再约分了

b. 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}=\boxed{\frac{P}{Q}}$，则周期为 P

c. 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$为无理数，则该序列无周期

二、时域离散信号及其表示方法

判断序列是否有周期，若有周期，确定其周期?

$$x(n) = sin\left(\frac{\pi}{5}n\right) \qquad T = 10$$

$$x(n) = cos\left(\frac{3}{5}n\right)$$

$$x(n) = sin\left(\frac{3}{7}\pi n\right) \qquad T = 14$$

二、时域离散信号及其表示方法

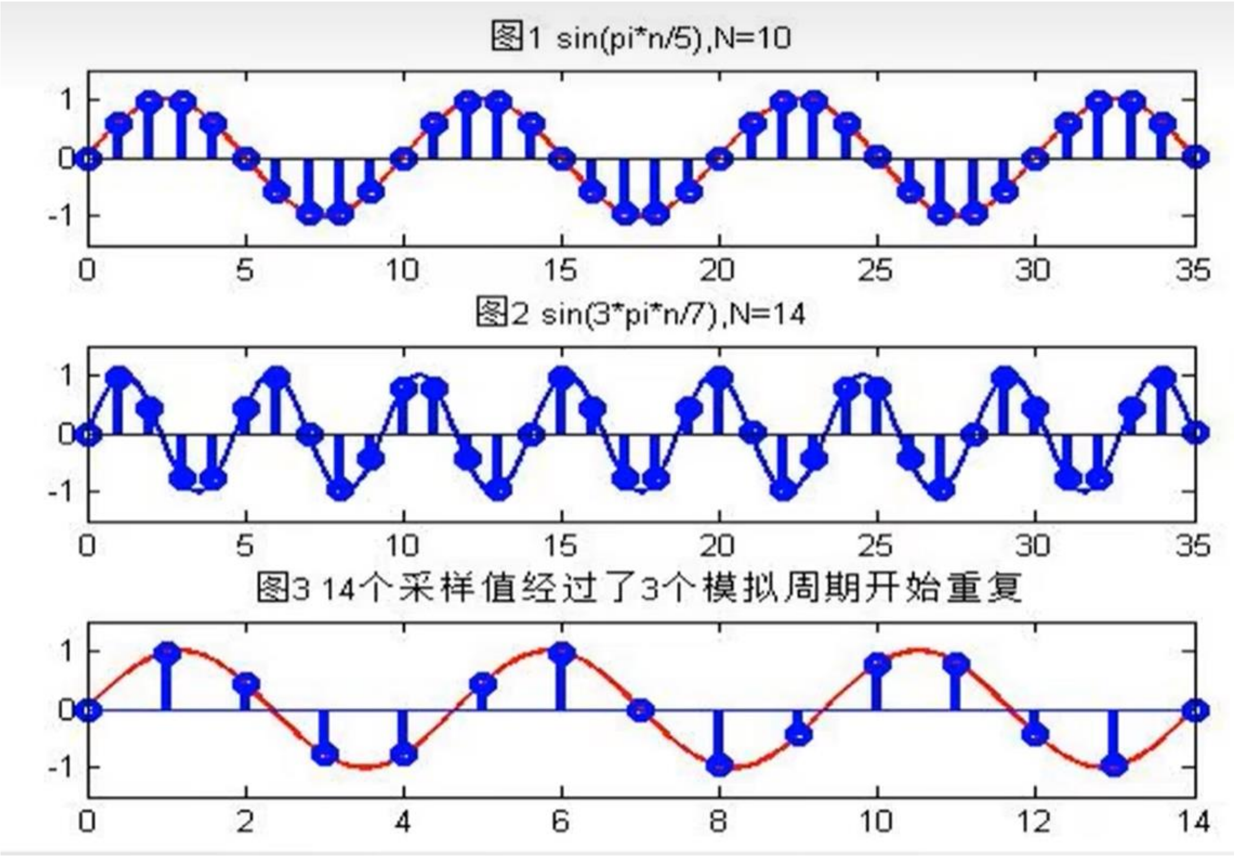
$\frac{P}{Q}$：Q表示离散序列一个周期P内包含原连续周期信号的周期数

$$x(n) = sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

$\frac{2\pi}{\omega_0} = 10$ $\quad N = 10$

$$x(n) = sin\left(\frac{3}{7}\pi n\right)$$

$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{14}{3}$ $\quad N = 14$



二、时域离散信号及其表示方法

求序列 $x(n) = 2sin\left(\frac{\pi}{16}n\right) + cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$ 的周期 N

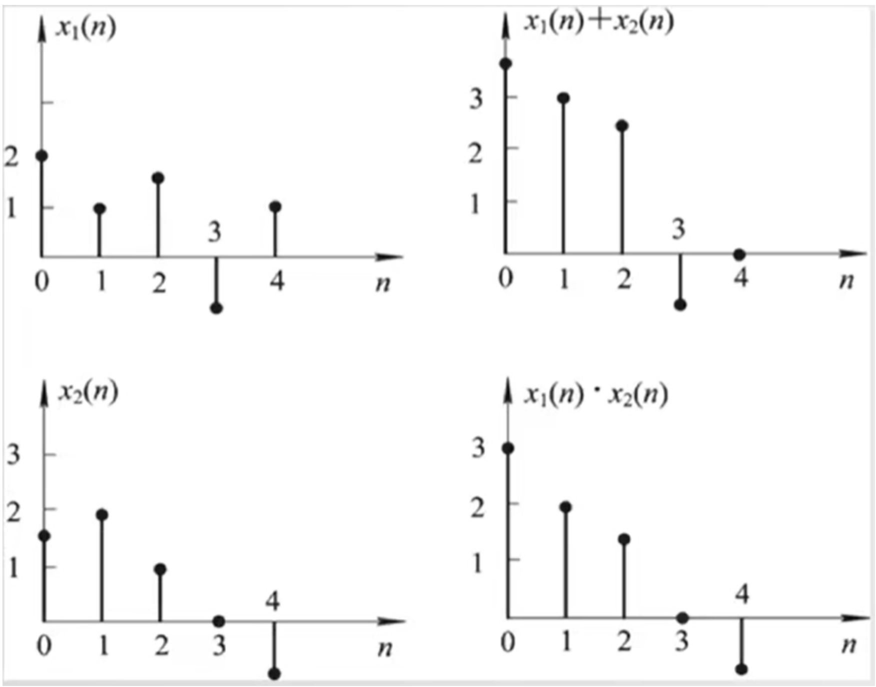
$\frac{2\pi}{\pi/16} = 32$　　$\frac{2\pi}{\pi/8} = 16$

$$T = 32$$

二、时域离散信号及其表示方法

序列的运算

1. 加和乘



$$x_1(n)=\{\underline{2},1,1.5,-1,1\}$$

$$x_2(n)=\{\underline{1.5},2,1,0,-1\}$$

$$x_1(n)+x_2(n)=$$

$$x_1(n)\cdot x_2(n)=$$

对位相加/相乘不进位

二、时域离散信号及其表示方法

序列的运算

1. 加和乘

$$x_1(n)=\{\underline{2},1,1.5,-1,1\}\quad 求 x_1(n)\delta(n)$$

$$\boxed{x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)}$$

$$\boxed{x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)\delta(n-n_0)}$$

二、时域离散信号及其表示方法

序列的运算

2. 移位（shift）

$$x_1(n)=\{\underline{2},1,1.5,-1,1\}$$

求$x_1(n-1)$ 右移 延迟

求$x_1(n+1)$ 左移 超前

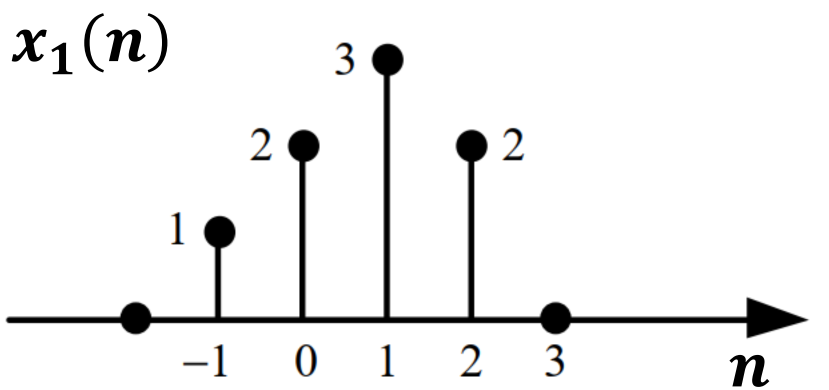
左移右移时$n=0$点的移动规律

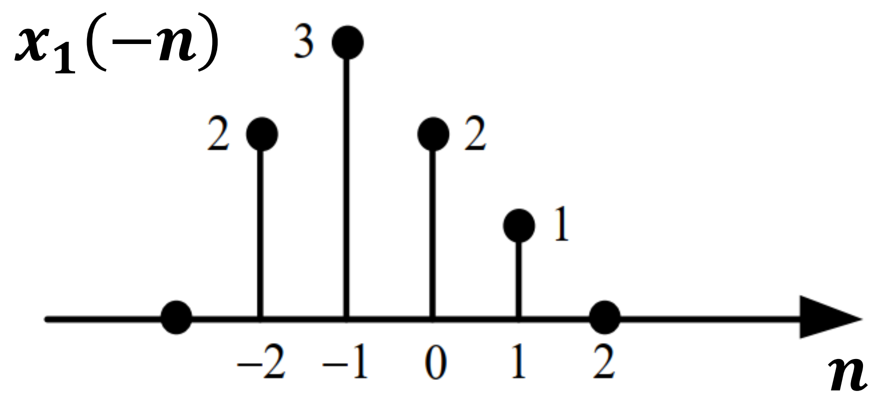
二、时域离散信号及其表示方法

序列的运算

3. 翻转（time reversal）

$x_1(n)=\{0,1,\underline{2},3,2,0\}$ $\qquad$ $x_1(-n)=\{0,2,3,\underline{2},1,0\}$





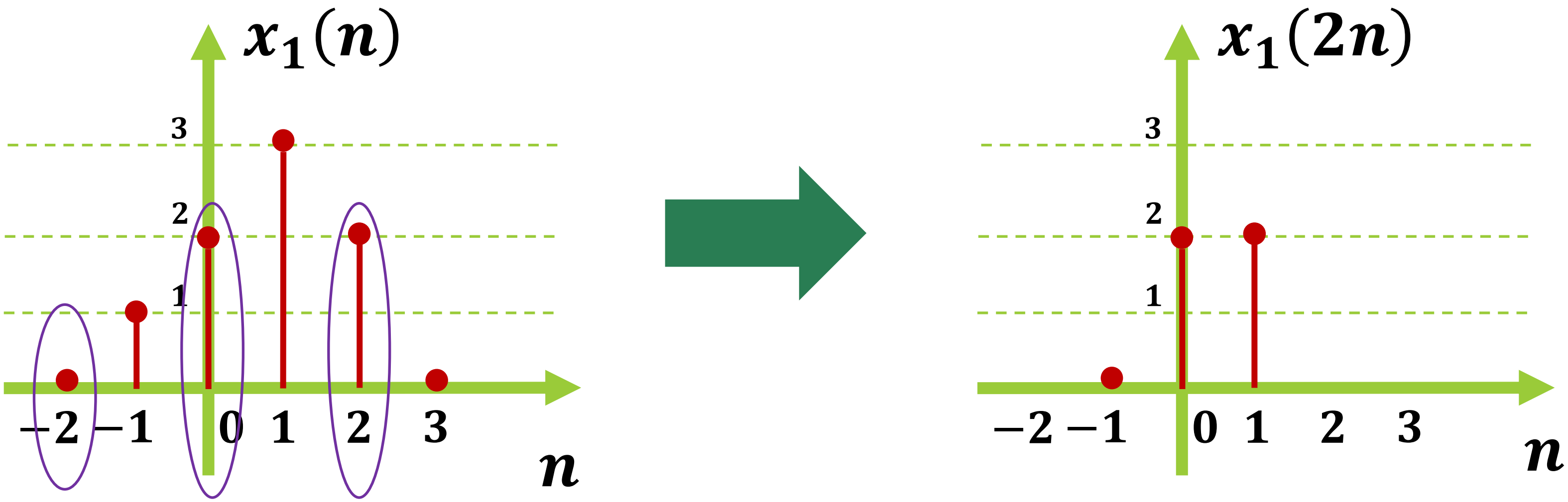
将 $x_1(n)$ 以纵轴为中心作180°翻转

二、时域离散信号及其表示方法

序列的运算

3. 尺度变换（抽取、decimation）

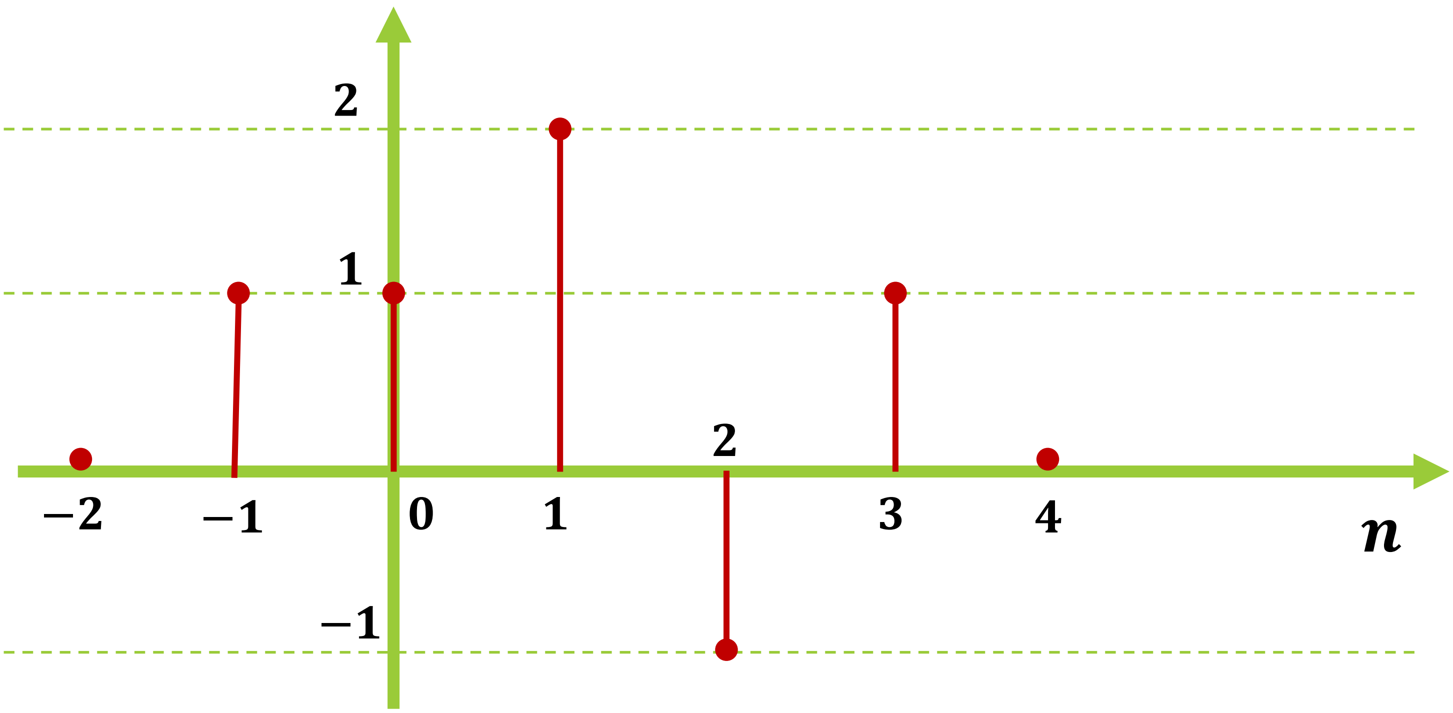
$x_1(n) = \{0, 1, \underline{2}, 3, 2, 0\}$　　　　$x_1(2n) = \{0, \underline{2}, 2\}$



在原序列中每M个点（每隔 M−1个点） 抽取一点

二、时域离散信号及其表示方法

已知离散信号 $x(n)$ 如图所示，画出 $x(-2n+2)$ 的图形



$$\{0, \underline{-1}, 1, 0\}$$

二、时域离散信号及其表示方法

序列的运算

4. 卷积（convolution）

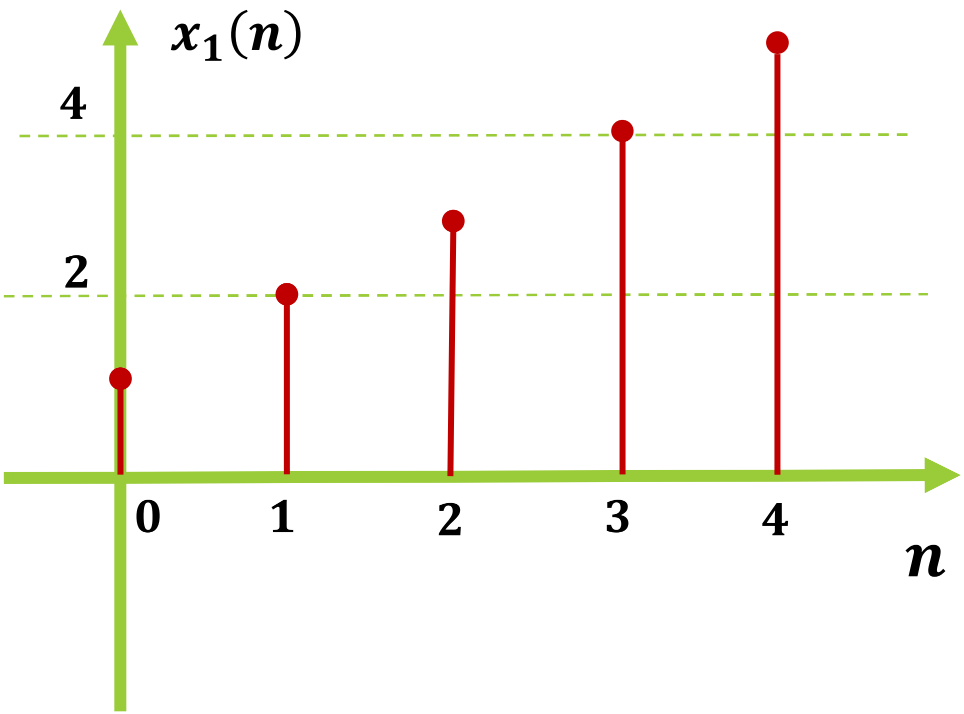
求序列卷积和的公式：

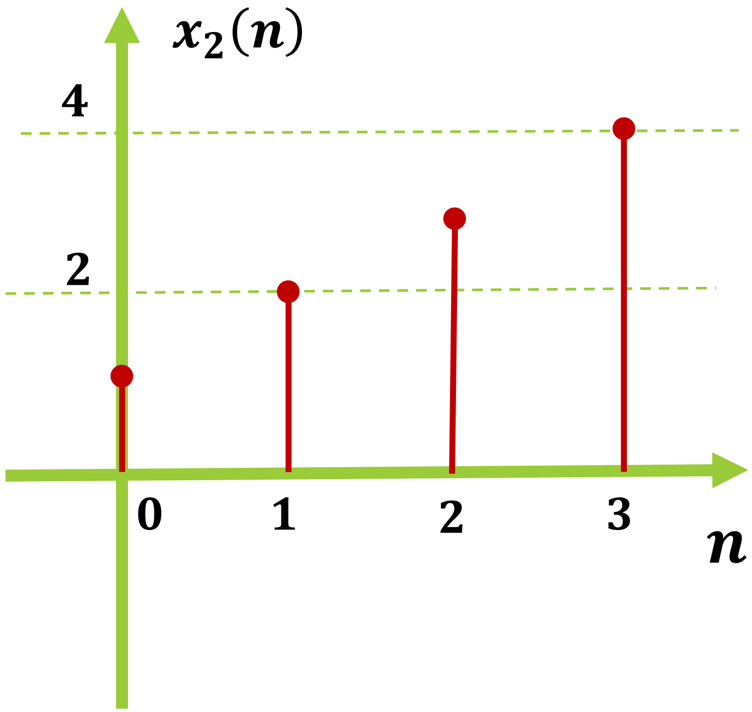
$$y(n)=x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_1(m)x_2(n-m)$$

卷积计算主要有图形法、解析法和列表法，通过卷积计算加深信号与系统相互作用的理解，而不是为计算而计算。

二、时域离散信号及其表示方法

已知$x_1(n)$和$x_2(n)$如图所示，求$y(n)=x_1(n)*x_2(n)$





$\{\underline{1},4,10,20,30,34,31,20\}$

采用快速手算法？

二、时域离散信号及其表示方法

计算$x(n)=\{1,2,\underline{0},3,2\}$和$h(n)=\{1,\underline{4},2,3\}$，

求$y(n)=x(n)*h(n)$

采用快速手算法

$$\{1,6,10,\underline{10},20,14,13,6\}$$

二、时域离散信号及其表示方法

已知序列知$x_1(n) = x_2(n) = u(n)$

求$y(n) = x_1(n) * x_2(n)$

$$y(n) = (n + 1)u(n)$$

求序列的卷积和 $y(n)=u(n-3)*u(n-4)$

$$y(n)=(n-6)u(n-7)$$

二、时域离散信号及其表示方法

已知序列知$x_1(n) = a^n u(n)$，$(0 < a < 1)$

$x_2(n) = u(n)$，求$y(n) = x_1(n) * x_2(n)$

如果$x_2(n) = u(n-4)$，求$y(n)$？

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n) \qquad y(n) = \frac{1-a^{n-3}}{1-a}u(n-4)$$

二、时域离散信号及其表示方法

序列的运算

4. 卷积（convolution）

序列卷积的运算规则

1） 交换律$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(n-m)x_2(m)$$

二、时域离散信号及其表示方法

序列的运算

4. 卷积（convolution）

序列卷积的运算规则

2）结合律

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

3）分配律

$$x_1(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x_1(n) * h_1(n) + x_1(n) * h_2(n)$$

二、时域离散信号及其表示方法

求序列的卷积和 $y(n)=x(n)*\delta(n)$

$$y(n)=x(n)$$

任意序列与$\delta(n)$卷积等于自己

二、时域离散信号及其表示方法

单位脉冲序列的卷积和特性

1） $x(n) * \delta(n) = x(n)$

2） $x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$

单位脉冲序列的卷积和特性与交换律转移序列移位

3） $x(n + n_1) * \delta(n - n_0) = x(n) * \delta(n + n_1 - n_0)$

$$= x(n + n_1 - n_0)$$

二、时域离散信号及其表示方法

求序列的卷积和 $y(n) = u(n-3) * u(n-4)$

$$y(n) = (n-6)u(n-7)$$

二、时域离散信号及其表示方法

计算$a^n u(n) * R_4(n)$

$$y(n)=\begin{cases}0, n<0\\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, 0\le n\le 3\\ a^n\dfrac{1-a^{-4}}{1-a^{-1}}, n\ge 4\end{cases}$$

分类讨论 解析法

$$y(n)=\begin{cases}0, n<0\\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, 0\le n\le N-1\\ a^n\dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}, n\ge N\end{cases}$$

计算$a^n u(n) * R_N(n)$

计算$(0.5)^n u(n) * R_5(n)$

$$y(n)=\begin{cases}0, n<0\\ 2-0.5^n, 0\le n\le 4\\ 31\times 0.5^n, n\ge 5\end{cases}$$

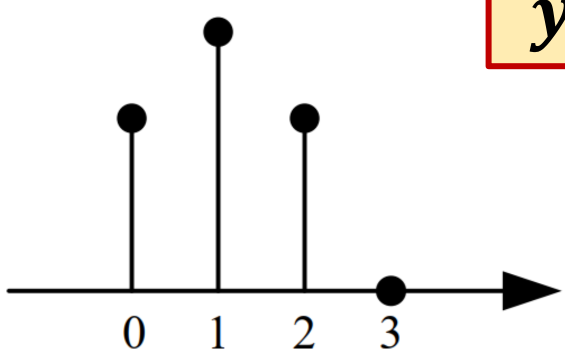
三、时域离散系统

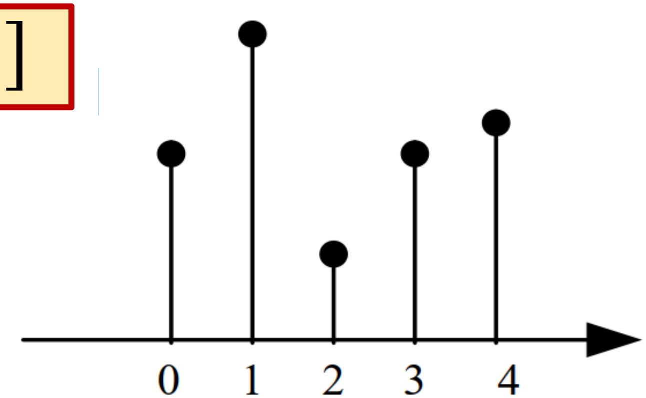
离散系统的定义

$x(n)$ → 离散系统 → $y(n)$

离散信号　　　　时域离散系统的运算$T[\cdot]$　　　　离散信号

$$\boxed{y(n) = T[x(n)]}$$





三、时域离散系统

离散系统的定义与分类

1. 线性与非线性系统

定义：系统的输入输出之间满足线性叠加性原理的系统统称为具有线性特性的系统，即线性系统

同时具有均匀特性与叠加特性才称线性特性

判定原则

若$y_1(n)=T[a_1x_1(n)]$，$y_2(n)=T[a_2x_2(n)]$

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=y_1(n)+y_2(n)$$

非线性系统：不具有线性特性的系统

三、时域离散系统

证明 $y(n)=x(n)+b$ 是非线性系统

$$T(a_1x_1(n)+a_2x_2(n)) = a_1x_1(n)+a_2x_2(n)+b$$

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n) = a_1x_1(n)+a_1b + a_2x_2(n)+a_2b$$

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] \neq a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$$

三、时域离散系统

证明 $y(n) = nx(n)$ 是线性系统

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]$$

$$= n(a_1x_1(n)+a_2x_2(n))$$

$$= n a_1x_1(n) + n a_2x_2(n)$$

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n) = n a_1 x_1(n) + n a_2 x_2(n)$$

三、时域离散系统

常见的线性系统

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$$

$$y(n) = x(-n) \qquad y(n) = nx(n) \qquad y(n) = x(n-n_0)$$

$$y(n) = x(n^2) \qquad y(n) = x(n)sin(\omega n)$$

常见的非线性系统

$$y(n) = x^2(n) \qquad y(n) = e^{x(n)}$$

$$y(n) = 2x(n) + 3$$

三、时域离散系统

离散系统的定义与分类

2. 时不变与时变系统

定义：系统对于输入信号的运算关系在整个过程中不随时间变化

判定原则

若$y(n)=T[x(n)]$

则$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

时变系统：不满足非时变特性的系统。

三、时域离散系统

证明 $y(n) = x(n) + b$ 是时不变系统

三、时域离散系统

证明 $\boldsymbol{y(n)=nx(n)}$ 不是时不变系统

$T(x(n-n_0)) = nx(n-n_0)$

$y(n-n_0) = (n-n_0)x(n-n_0)$

三、时域离散系统

常见的时不变系统

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$$

$$y(n) = 2x(n) + 3 \qquad y(n) = x(n - n_0)$$

$$y(n) = e^{x(n)} \qquad y(n) = x^2(n)$$

常见的时变系统

$$y(n) = nx(n) \qquad y(n) = x(n^2) \qquad y(n) = x(-n)$$

$$y(n) = x(n)sin(\omega n)$$

三、时域离散系统

离散系统的定义与分类

3. 因果与非因果系统

因果系统：系统的输出响应不超前于系统的输入信号

$$y(n) = ax(n) + b$$

$$y(n) = ax(n+1) + b$$ 超前

$$y(n) = ax(n-1) + b$$ 滞后

判断方法：序号0发生在1之前？还是之后？

非因果系统：不具有因果特性的系统称为非因果系统。

三、时域离散系统

判断下列序列是否是因果系统

$$y(n) = x(n) + x(n+1)$$

$$y(n) = x(n - n_0)$$

$$y(n) = e^{x^2(n^2)}$$

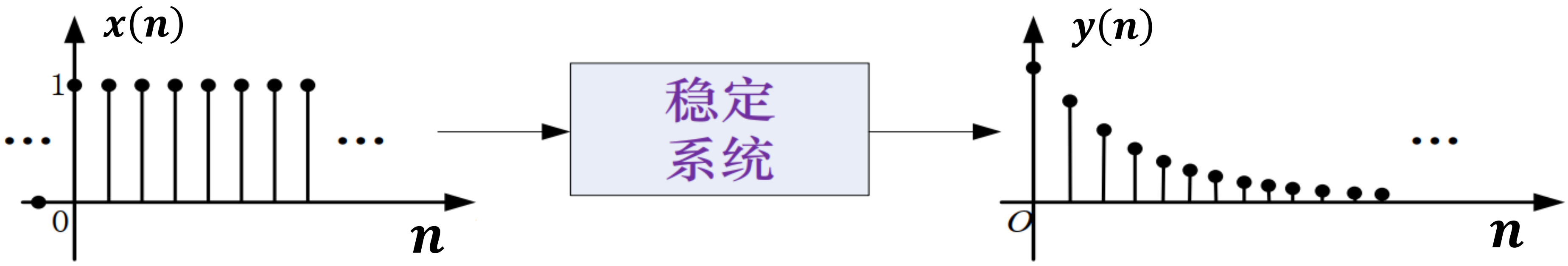
三、时域离散系统

离散系统的定义与分类

4. 稳定与不稳定系统

稳定系统：系统对任意的有界输入其输出也有界，称为BIBO稳定系统。

BIBO： Bounded Input, Bounded Output



不稳定系统：系统输入有界时，输出可能无界。

三、时域离散系统

判断$y(n) = e^{x(n)}$是否是稳定系统

三、时域离散系统

时域离散系统的数学模型——常系数差分方程

1. 时域离散系统的基本单元——D延时

$$y(n)=\{\underline{1},2,3,4,5\cdots\}$$

$$y(n-1)=\{\underline{0},1,2,3,4,5\cdots\}$$

三、时域离散系统

时域离散系统的数学模型——常系数差分方程

2. 一阶时域离散系统的结构

加法器输出端

加法器输入端

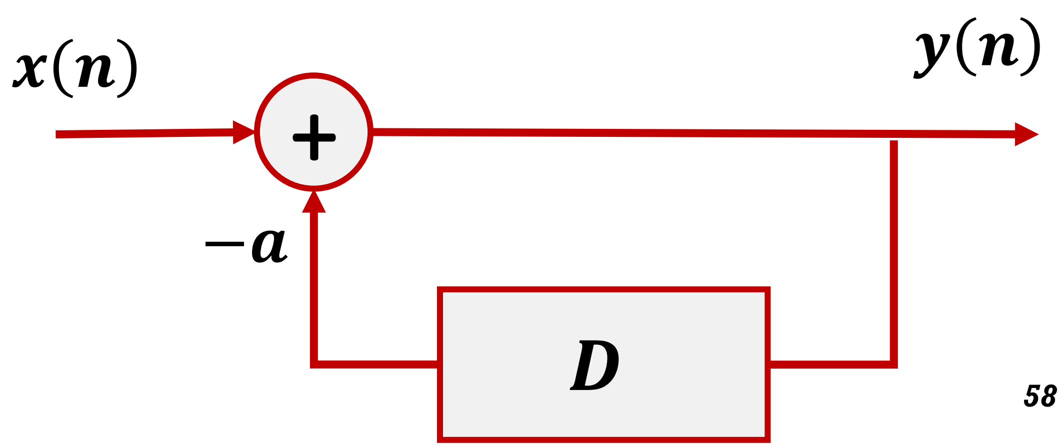
$$y(n) = x(n) - ay(n-1)$$

一阶常系数差分方程

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)$$

系统输入

系统输出



三、时域离散系统

时域离散系统的数学模型——常系数微分方程

3. 关于常系数差分方程的一些概念

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)$$

一阶常系数差分方程

$$y(n) + ay(n-1) + by(n-2) = x(n)$$

二阶常系数差分方程

$$\sum_{i=0}^{N} a_i\, y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} b_i\, x(n-i)$$

N阶常系数差分方程

三、时域离散系统

假定每对兔子每个月可以生育一对小兔，新生兔子要隔一个月才具有生育能力。若第一个月只有一对新生小兔子，求第4个月后小兔子的对数

1）经典法

2）递推法

3）z变换法

三、时域离散系统

已知差分方程为$y(n)-y(n-1)=2x(n)-x(n-1)$，
$x(n)=\{0,0,\underline{1},2,3,4,1\}$， $y(-1)=1$，求$y(3)$

$$y(3)=15$$

四、线性时不变系统

线性时不变系统的定义：

同时满足线性和时不变特性的系统

系统单位脉冲响应的定义：

系统输入为$\delta(n)$时的输出定义为单位脉冲响应$h(n)$

对于$y(n) = T[x(n)]$ 有$h(n) = T[\delta(n)]$

系统输入输出关系：

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对于线性时不变系统

四、线性时不变系统

求序列卷积和的公式：

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

系统输入输出卷积的运算表示：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$$

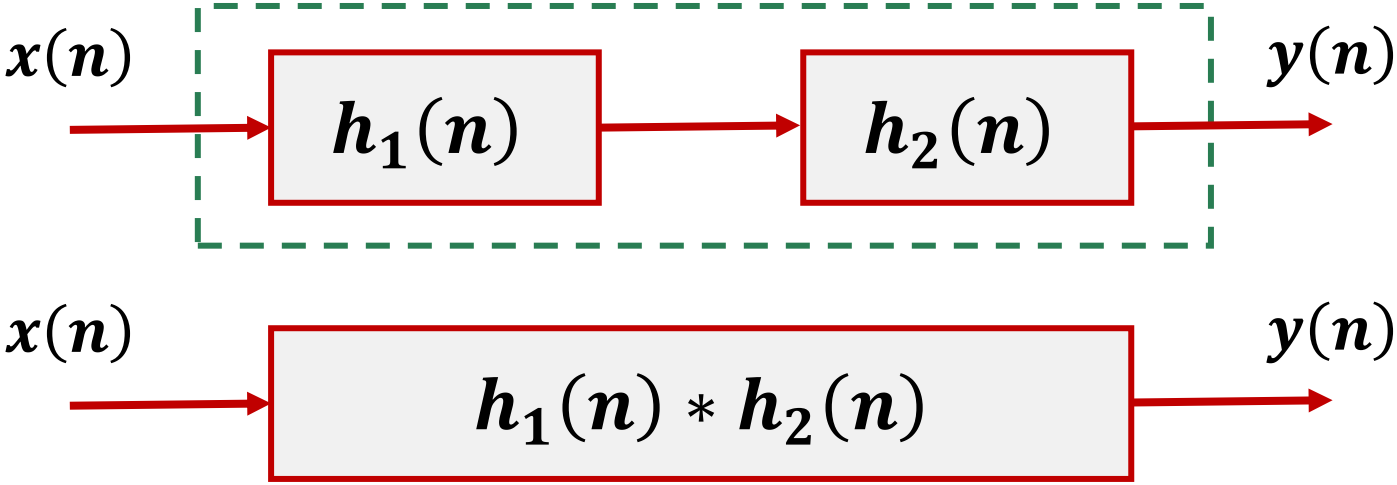
对于线性时不变系统

四、线性时不变系统

序列卷积的运算规则在离散系统中的意义

结合律

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$



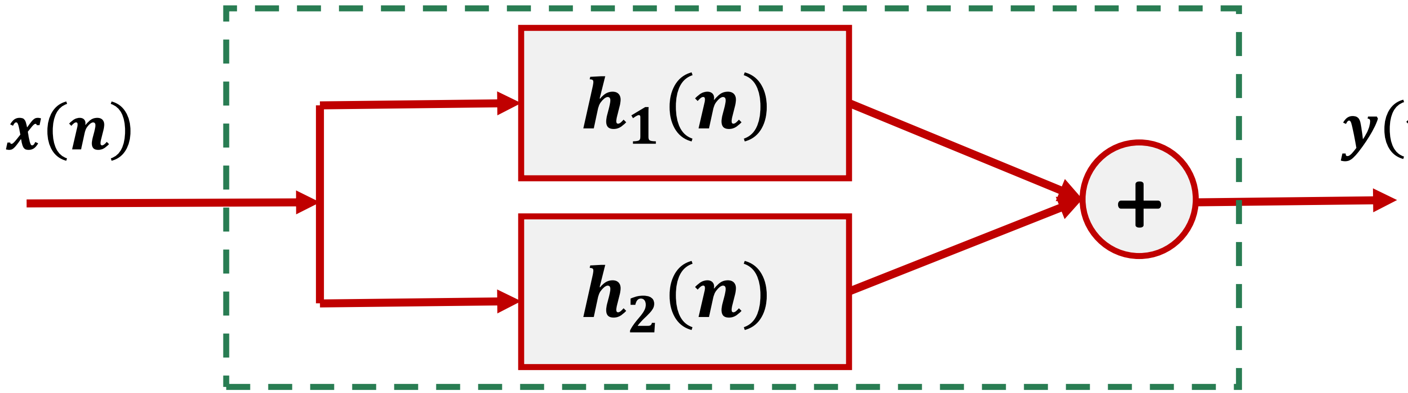
四、线性时不变系统

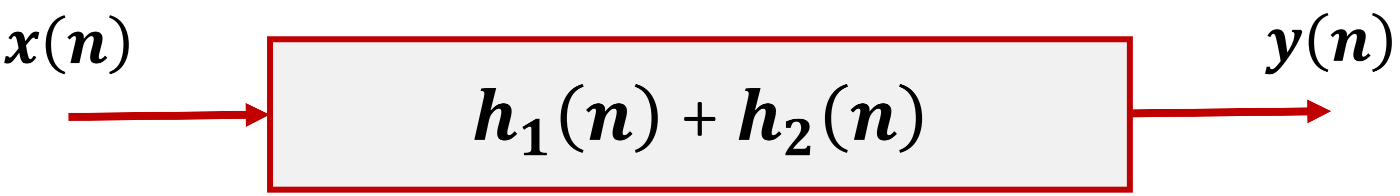
序列卷积的运算规则在离散系统中的意义

分配律

并联型系统

$$x_1(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x_1(n) * h_1(n) + x_1(n) * h_2(n)$$





四、线性时不变系统

线性时不变系统具有因果性的充分必要条件：

系统的单位脉冲响应应满足下式：

当 $n < 0$ 时，$h(n) = 0$

更一般地说，对于一个线性系统，其因果性就是在输入序列作用于系统前，系统储能（初始值）为零

线性时不变系统稳定的充分必要条件：

系统的单位脉冲响应应绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

四、线性时不变系统

设单位脉冲响应$h(n)=u(n)$，求对任意输入序列$x(n)$的输出$y(n)$，并检验系统的稳定性和因果性

四、线性时不变系统

设线性时不变系统的单位脉冲响应$h(n)=a^n u(n)$，式中a是常数，分析该系统的因果稳定性

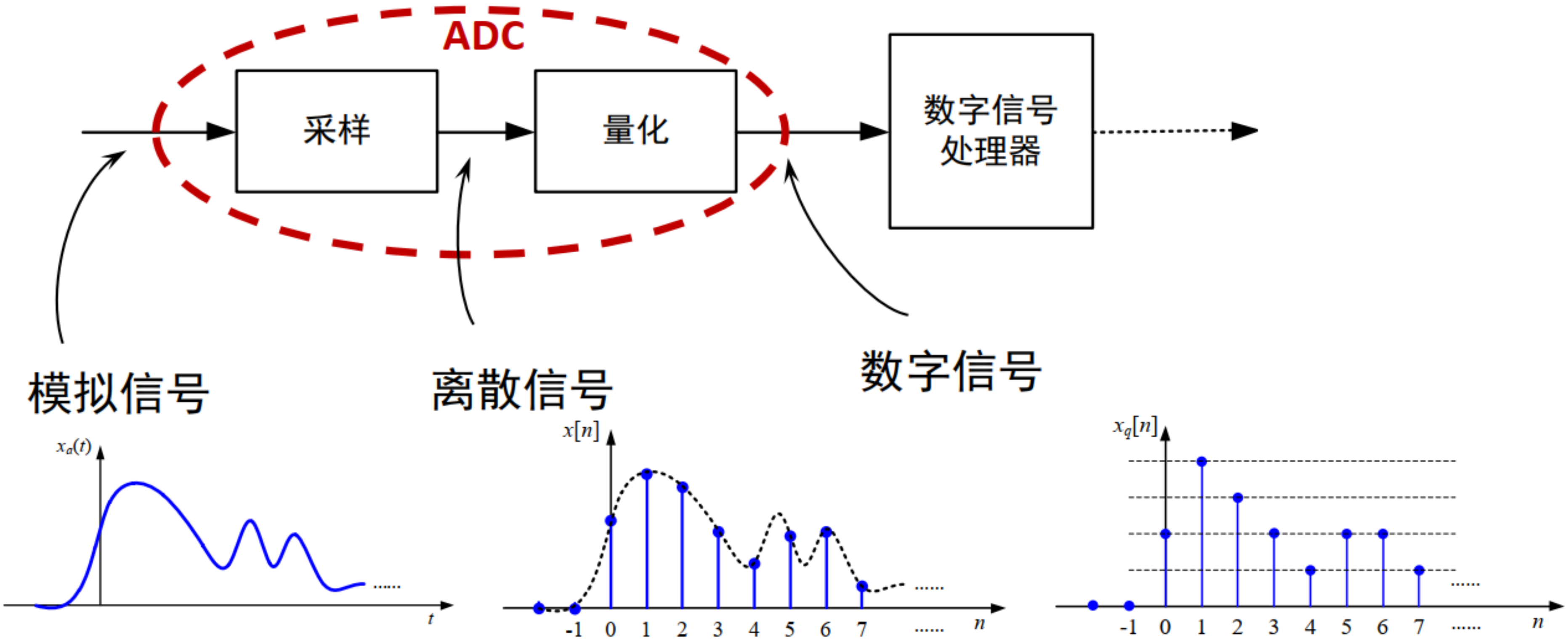
四、线性时不变系统

已知线性因果系统的差分方程为$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)$，求其单位脉冲响应$h(n)$

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$$

五、模拟信号数字化（采样与量化）

1. 采样　　2. 量化　　3. 编码



五、模拟信号数字化（采样与量化）

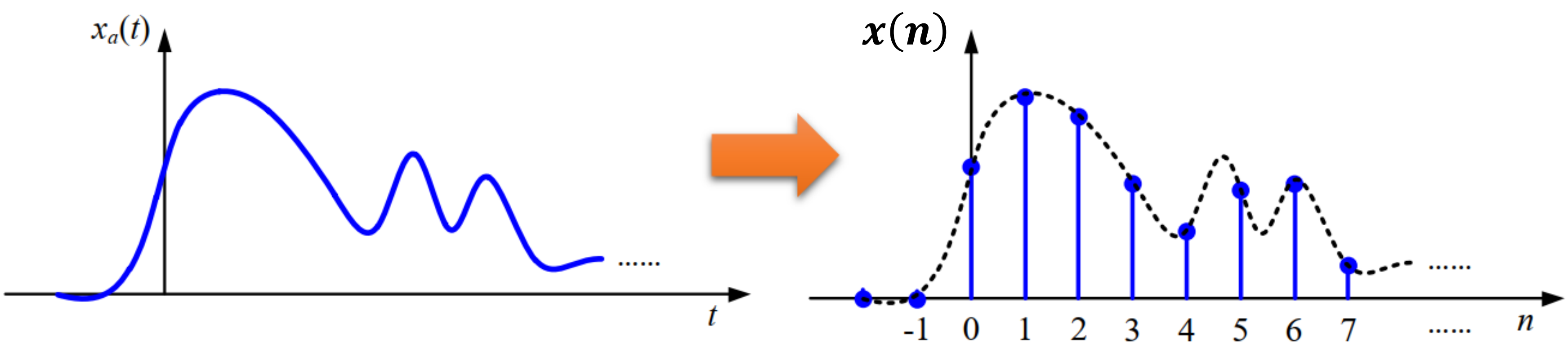
1. 采样

按一定间隔取连续信号的样本，得到离散信号

$$x(n) = x_a(nT) \qquad -\infty < n < +\infty$$

T：采样周期 $\qquad \Omega_s = 2\pi f_s$：采样角频率

$f_s = {}^{1}/_{T}$：采样率

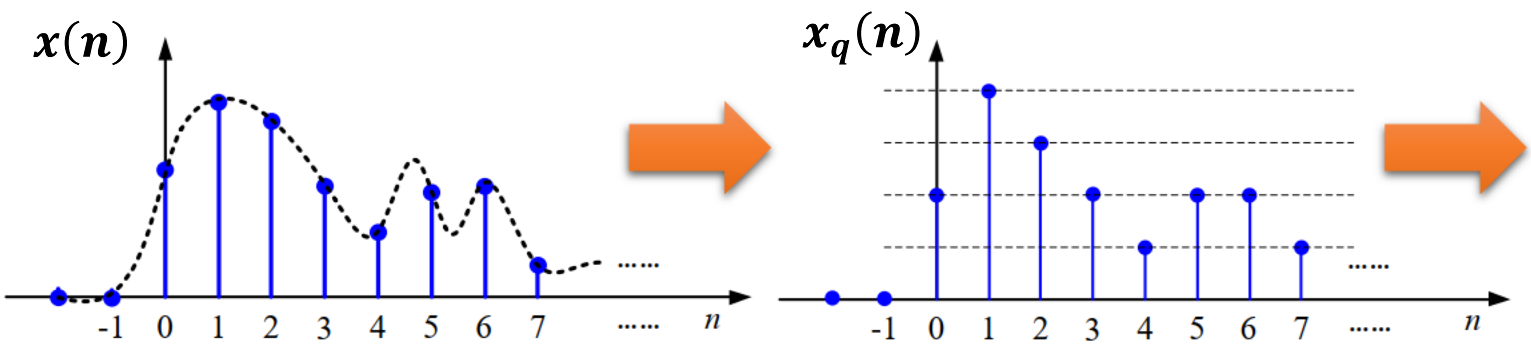


五、模拟信号数字化（采样与量化）

2. 量化

将离散信号的取值量化到某个离散值集上，能够以二进制编码形式表示

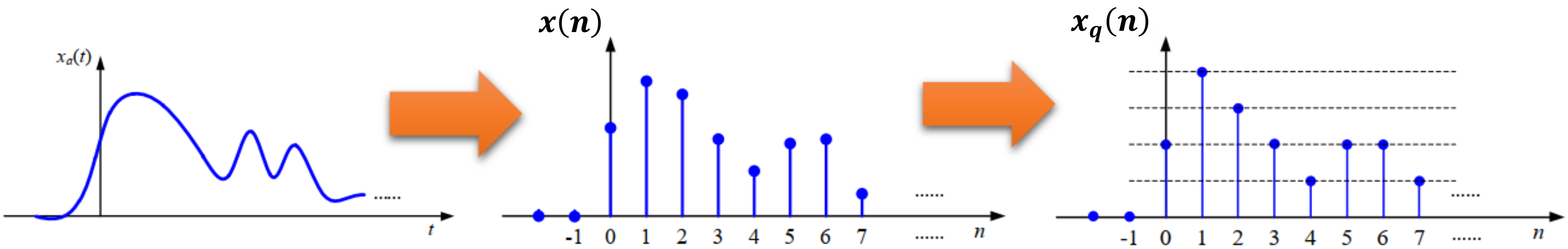
截尾处理　　**舍入处理**



1001001001
0101010101
0010100001
0101010100
001111……

五、模拟信号数字化（采样与量化）

采样和量化会不会引起信号中信息的丢失？



- 采样如果满足特定条件可以保证无损恢复
  - 采样定理
- 量化会造成信息的丢失
  - 难以对量化的影响进行确定性分析
  - 将量化误差建模为随机过程——量化噪声
- 将数字信号看作是离散信号与量化噪声的叠加进行分析

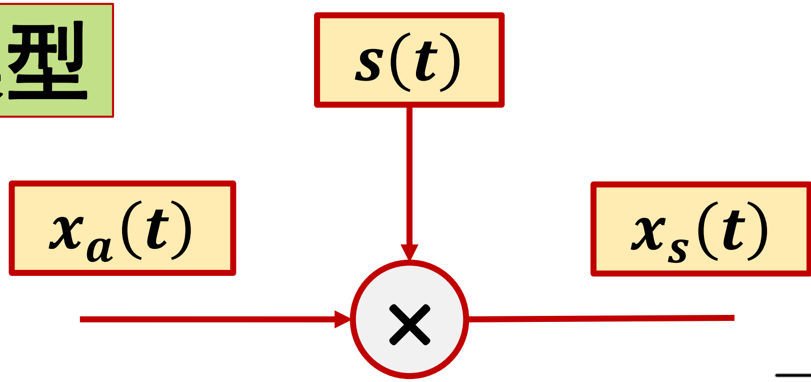
$$x_q(n) = x(n) + e(n)$$

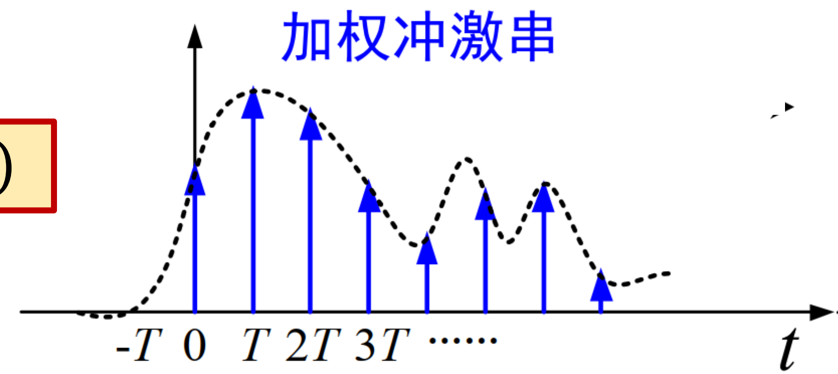
五、模拟信号数字化（采样与量化）

信号时域抽样理论分析

输入和输出都是连续时间信号

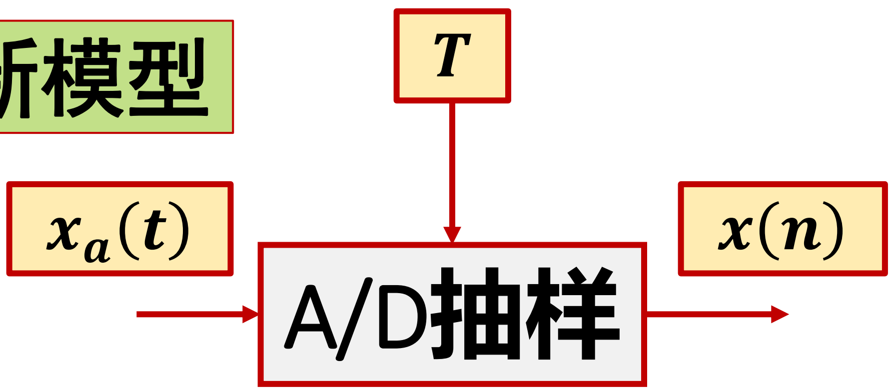
传统模型

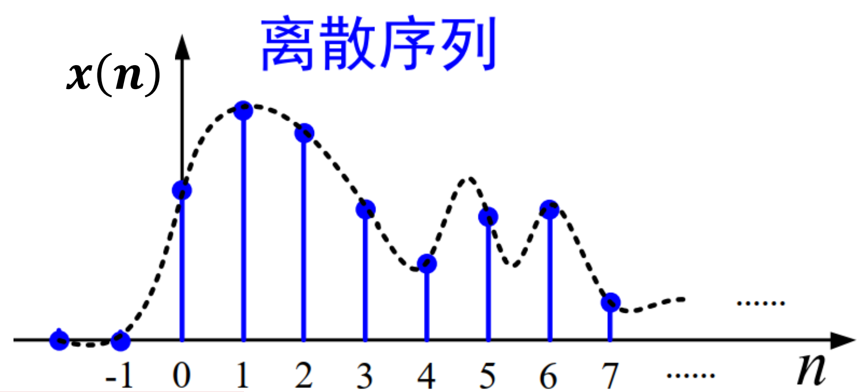




理想冲激采样的建模

新模型



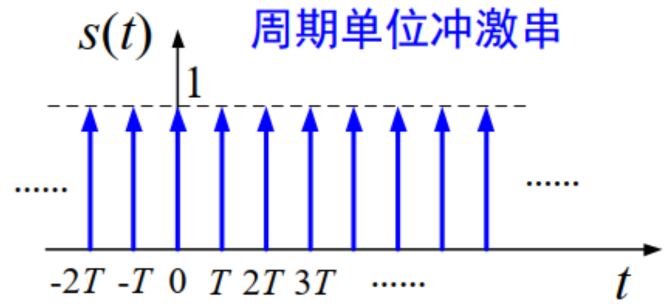


输入是连续时间信号，输出是离散时间信号

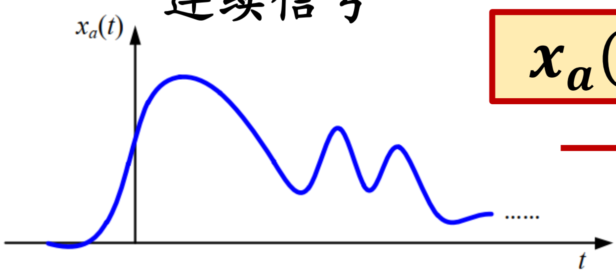
五、模拟信号数字化（采样与量化）

理想冲激采样的建模

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$



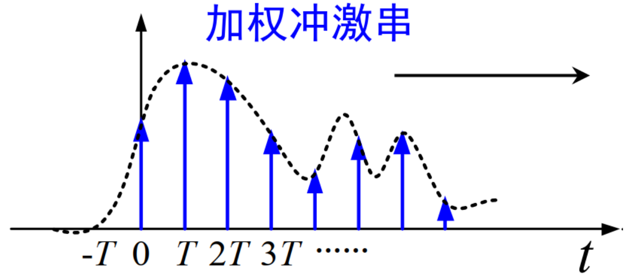
连续信号

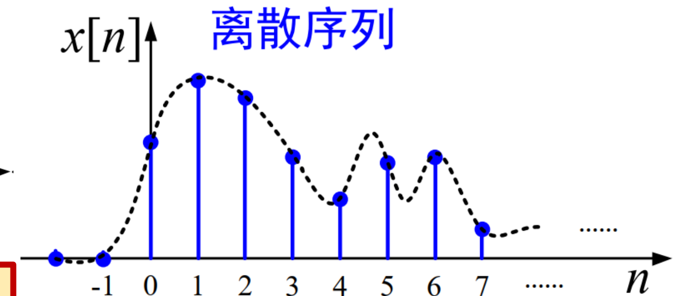


$$x_a(t)$$

冲击串到离散序列的转换

$$x(n)=x_a(nT)$$





$$x_s(t)=x_a(t)\cdot s(t)$$

五、模拟信号数字化（采样与量化）

理想冲激采样的建模

$$x_s(t) = x_a(t) \cdot s(t)$$

$$= x_a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t)\delta(t - nT)$$

$$= \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)}$$

如何得到？

五、模拟信号数字化（采样与量化）

采样后的序列$x_a(n)$表达式

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$x_a(t)\xrightarrow{t=nT} x_a(nT)$$

假设$x_a(t)=cos(2\pi ft+\theta)$

常数ω_0数字频率

采样后的序列为 $x_a(n)=cos[\boxed{(2\pi fT)}n+\theta]$

常数初始相位

五、模拟信号数字化（采样与量化）

采样后的序列周期性分析

回顾前面学习的序列的周期性分析

根据 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的值来确定周期 N

a. 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 值为整数时，周期为该整数

b. 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{P}{Q}$，则周期为 P

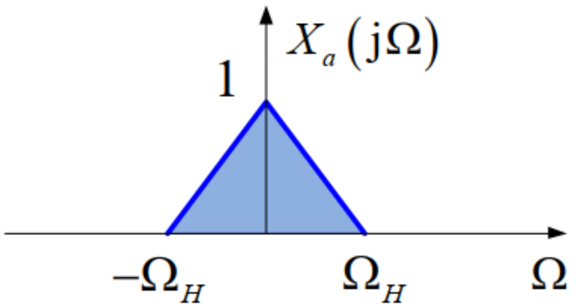
b. 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数，则该序列无周期

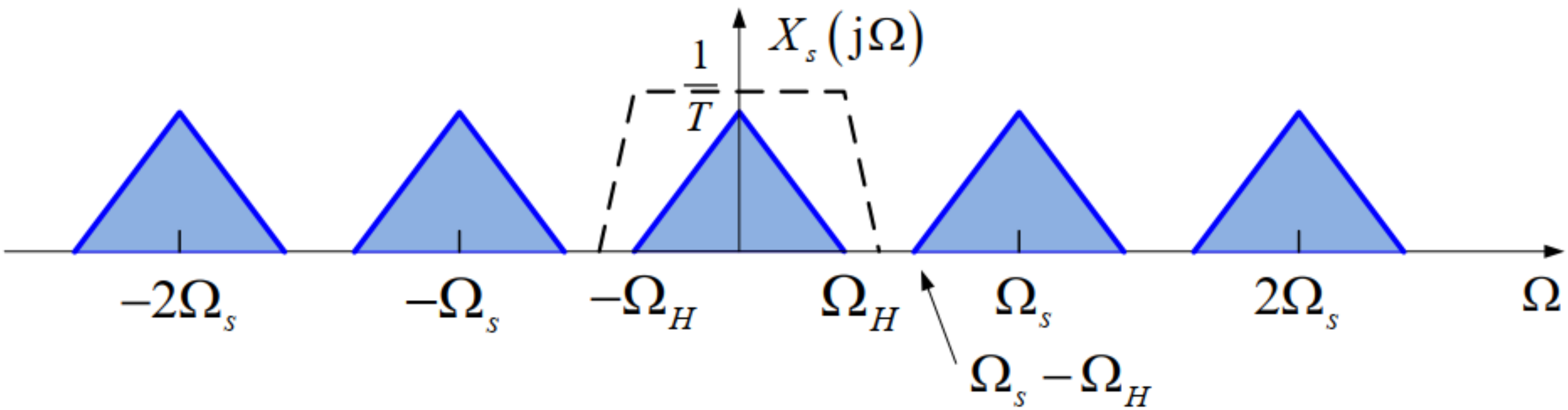
五、模拟信号数字化（采样与量化）

频谱分析

抽样信号的频谱

$$\Omega_s \geq 2\Omega_H$$





连续信号进行理想采样后，其频谱是原信号频谱的周期延拓，延拓周期为采样频率，并且频率轴进行了尺度归一化

五、模拟信号数字化（采样与量化）

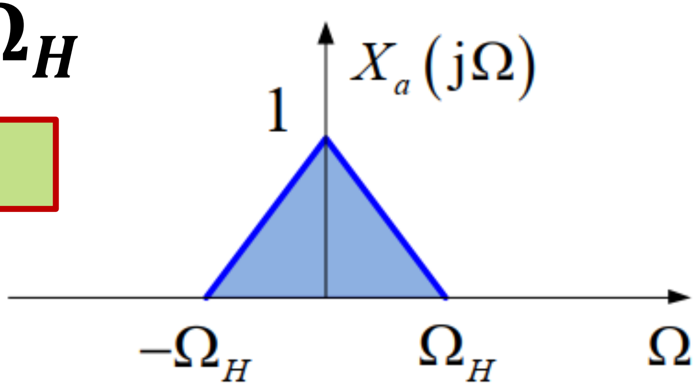
频谱分析

https://www.bilibili.com/video/BV13b421J72e/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=6172e25b17534498c09307f0ab178e11

奈奎斯特（Nyquist）采样定理

一个带限连续时间信号$x_a(t)$，满足

$X_a(j\Omega)=0$ 对所有 $|\Omega|>\Omega_H$



什么时候取等号？

则当

$$\Omega_s=\frac{2\pi}{T}\geq 2\Omega_H\text{时，}$$

$x_a(t)$可由其采样序列$x(n)=x_a(nT)$唯一确定

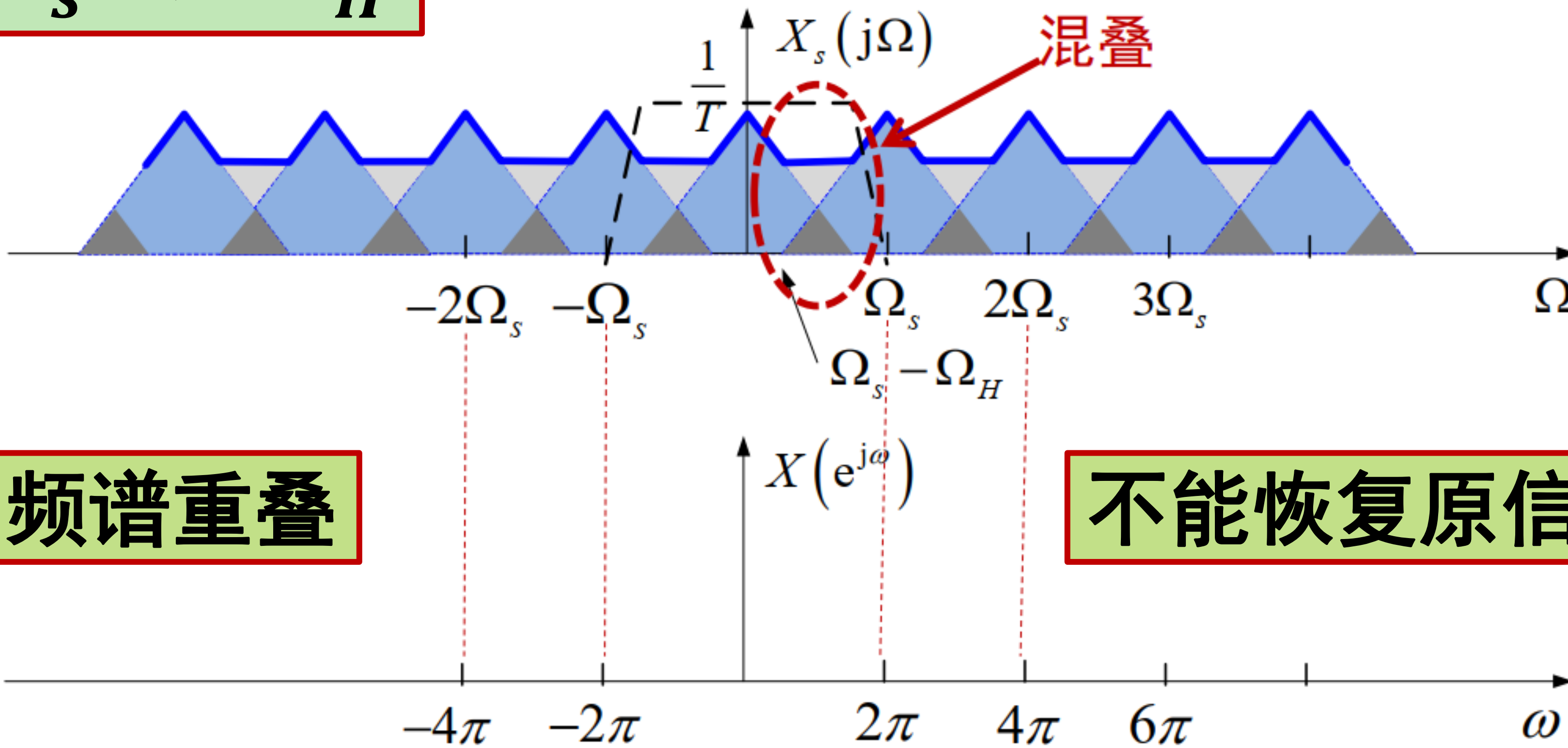
实际工程中不仅要大于Nyquist采样率，还要留足余量

五、模拟信号数字化（采样与量化）

频谱分析

奈奎斯特（Nyquist）采样定理

$$\Omega_s < 2\Omega_H$$



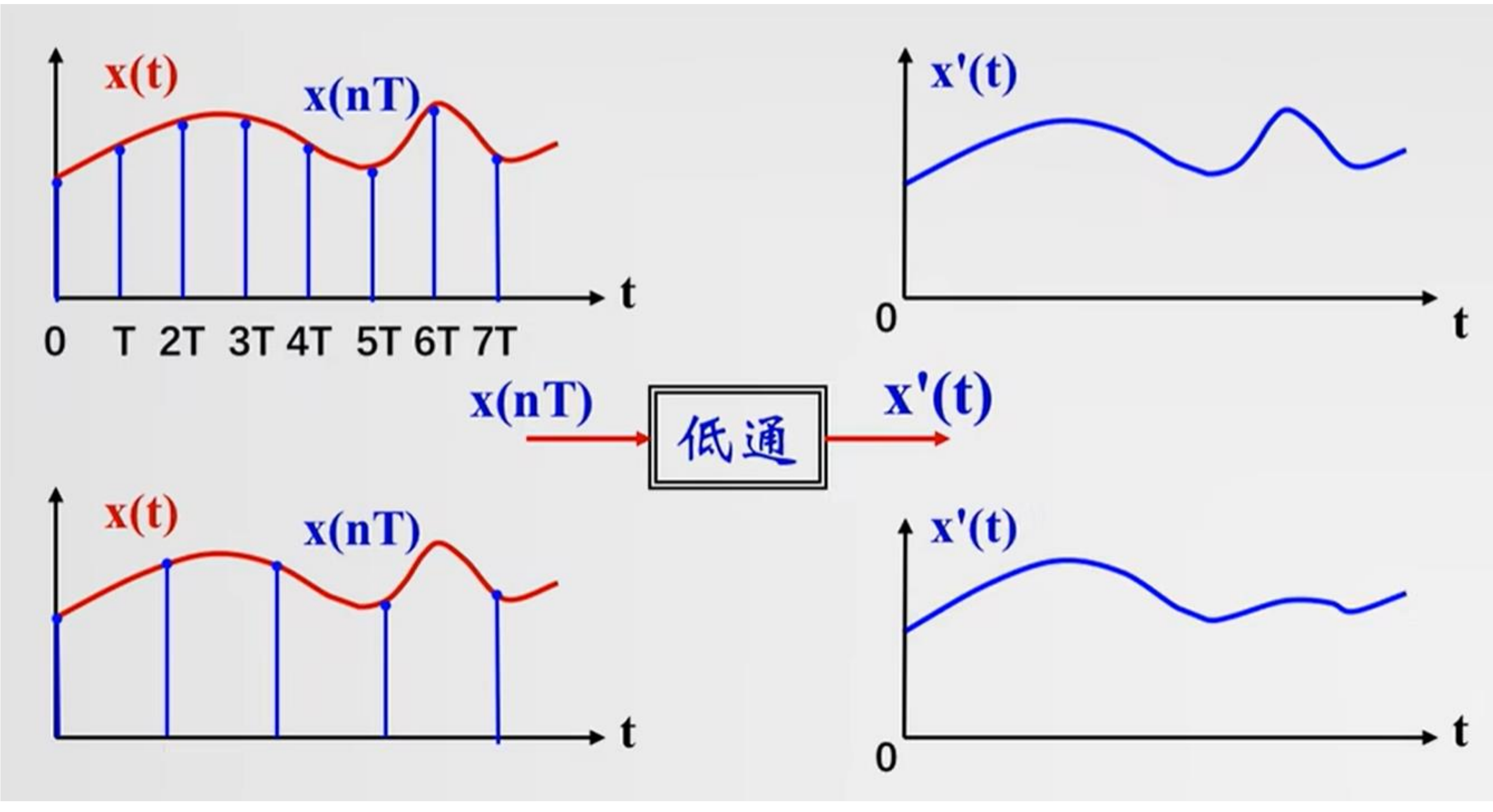
频谱重叠

不能恢复原信号

五、模拟信号数字化（采样与量化）

频谱分析

奈奎斯特（Nyquist）采样定理



五、模拟信号数字化（采样与量化）

频谱分析

奈奎斯特（Nyquist）采样定理

为什么高速行驶的车轮好像在倒着转?

https://www.bilibili.com/video/BV1qB4y157Zq/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=6172e25b17534498c09307f0ab178e11

谢谢！

郑珏鹏
中山大学人工智能学院
zhengjp8@mail.sysu.edu.cn
2024年12月28日