中山大学本科生期末考试

考试科目：《数值计算方法》（A 卷）

学年学期：2022学年第二学期　　　　姓　　名：________________

开课单位：人工智能学院　　　　　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　　　　　　　　　年　　级：________________

考试时长：120 分钟　　　　　　　　院　　系：________________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

---------以下为试题区域，共 七 道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答-------

一、　填空题（共 5 小题，每题6分，共 30 分）

1、设 $x=3.141$ 是由四舍五入得到的近似值，则 x 具有_____位有效数字。

2、设 $l_i(x)$（$i=0,1,\cdots n$）是 n 次Lagrange基函数，则 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=$__________；$l_i(x_j)=$__________。

3、已知 $X=(1,-2)^T$，$A=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$，则 $||AX||_1=$_____，$\mathrm{Cond}(A)_\infty=$ _____。

4、Newton-Cotes求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

当 n 为奇数时，至少具有____次代数精确度；当 n 为偶数时，至少具有____次代数精确度。

5、用Dolittle分解将矩阵 A 分解如下：

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 7\\ -2 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

则分解式中，$a=$_______ ，$b=$ _________。

二、　计算题（10分）

用追赶法求解下列三对角方程组：

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$$

三、　计算题（10分）

在最小二乘原理下求解矛盾方程：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 = 13.1, \\ 2x_1 + x_2 = 7.9, \\ x_1 + x_2 = 5.1. \end{cases}$$

四、　证明题（10分）

给定函数 $f(x)$，设对一切 x， $f'(x)$ 存在，而且 $0 < m \le f'(x) \le M$ 。证明：对 $0 < \lambda < \dfrac{2}{M}$ 的任意常数 λ，迭代法 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 均收敛于方程 $f(x) = 0$ 的根。

五、　计算题（10 分）

用规范化幂法求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 按模最大特征值及相应特征向量，列表计算三次，取 $x^{(0)} = (1,1,1)^T$，保留两位小数。

六、　计算题（15分）

确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有的代数精确度。

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

七、　分析计算题（15分）

已知方程组$AX = f$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \\ 3 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

（1）列出Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法的分量形式。

（2）求出Jacobi迭代矩阵的谱半径。