1.1 集合与子集

34 求证：如果$A \subseteq B$且$B \subseteq C$,那么$A \subseteq C$

证明:

$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ 即 $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A},\ \mathrm{x} \in \mathrm{B}$

$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{C}$ 即 $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{B},\ \mathrm{x} \in \mathrm{C}$

得：$\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A},\ \mathrm{x} \in \mathrm{C}$ ， 即$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{C}$

1.2 集合运算

48 何时有 A-B=B-A？请给出解释。

充分条件：A=B。此时有，A-B=空集，B-A=空集，即 A-B=B-A 成立。

（以下非题目所问，为拓展）

A=B 其实也是必要条件，以下是证明。

必要性：须证 A-B=B-A，则 A=B

反证，设 A 不等于 B，$\sim(A = B) = \sim(A \subseteq B \land B \subseteq A) = A \nsubseteq B \lor B \nsubseteq A$

不妨假设$A \nsubseteq B$

则存在$a \in A, a \notin B$，故$a \in A - B$，由 A-B=B-A 得$a \in B - A$

因$B - A \subseteq B$，故$a \in B$，矛盾。

第 9 页定理 2 推第 10 页定理 3

$|A \cup B \cup C| = |(A\cup B)\cup C|$

$= |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C|$

$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)|$

$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - (|A\cap C| + |B\cap C| - |(A\cap C)\cap(B\cap C)|$

$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - (|A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|)$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

1.6 数学结构

5 求证：对于集合是可交换运算

证明：欲证$A \oplus B = B \oplus A$

可参考 522 页答案，或者：

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = B \oplus A$$

6 使用例 12 的定义，

（a） 求证：口是可结合的

（b） 求证：▽是可结合的

(a) 即证(a 口 b)口 c = a 口(b 口 c)

列举 abc 八种取值情况（类似真值表）

a	b	c	(a 口 b)	(a 口 b)口 c	(b 口 c)	a 口(b 口 c)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

由上表可知，(a 口 b)口 c = a 口(b 口 c)成立

6(b)　即证(a▽b) ▽c = a▽(b▽c)

列举 abc 八种取值情况（类似真值表）

a	b	c	(a▽b)	(a▽b) ▽c	(b▽c)	a▽(b▽c)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

由上表可知，(a▽b) ▽c = a▽(b▽c)成立

2.2 条件命题

利用真值表证明定理 2(a) 即 $(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \equiv (\sim\boldsymbol{q} \Rightarrow \sim\boldsymbol{p})$

p	q	p⇒q	~p	~p∨q	(p⇒q) ⇔ (~p∨q)
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

∵(p⇒q) ⇔ (~p∨q)为永真（重言）式

$\therefore (\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \equiv (\sim\boldsymbol{q} \Rightarrow \sim\boldsymbol{p})$

利用真值表证明定理 2(c) 即 (p⇔q)≡((p⇒q)∧(q⇒p))

p	q	p⇒q	q⇒p	p⇔q	(p⇒q)∧(q⇒p)	(p⇔q)⇔ ((p⇒q)∧(q⇒p))
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

∵(p⇔q)⇔ ((p⇒q)∧(q⇒p))为永真（重言）式

∴(p⇔q)≡((p⇒q)∧(q⇒p))

65 页 推导定理 2(b)

$(\sim q \Rightarrow \sim p)$

$\equiv (\sim(\sim q) \vee (\sim p))$ … 定理 2(a)

$\equiv (q \vee (\sim p))$ … 定理 1(9)

$\equiv ((\sim p) \vee q)$ … 定理 1(1)

$\equiv (p \Rightarrow q)$ … 定理 2(a)

66 页 推导定理 4(g)

$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

$\equiv \sim(p \wedge (p \Rightarrow q)) \vee q$ … 定理 2(a)

$\equiv (\sim p \vee \sim(p \Rightarrow q)) \vee q$ … 定理 1(11)

$\equiv (\sim p \vee \sim(\sim p \vee q)) \vee q$ … 定理 2(a)

$\equiv (\sim p \vee (\sim\sim p \wedge \sim q)) \vee q$ … 定理 1(10)

$\equiv (\sim p \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$ … 定理 1(9)

$\equiv ((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee q$ … 定理 1(5)

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q$ … 析取合取定义

$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q)$ … 定理 1(3)

$\equiv \sim p \vee \mathrm{True}$

$\equiv \mathrm{True}$

66 页 推导定理 4(j)

$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

≡~((~pVq)∧ (~qVr))V(~pVr) … 定理 2(a)

≡(~(~pVq) V ~(~qVr)) V (~pVr) … 定理 1(11)

≡((p∧~q) V (q∧~r)) V (~pVr) … 定理 1(10)

≡((p∧~q) V(~p)) V ((q∧~r) Vr) … 定理 1 交换、结合

≡(~q V(~p)) V (q V r) … 定理 1 分配

≡~q Vq V ~p V r … 定理 1 交换结、合

≡True

2.3 证明方法

18 求证：n^2 是偶数 iff n 是偶数

证明：以下证明需基于 n 是整数为大前提。

不然我们可以举出反例 n 为根号 2。

设 p: n^2 为偶数，q:n 为偶数

证$p \Rightarrow q$：反证法，若不然，n 为奇数，则存在整数 k，n=2k+1，那么 n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1，即~p，矛盾。

证$q \Rightarrow p$：n 为偶数，则存在整数 k，n=2k，那么 n^2=2(2k^2)，即 p 为真。

2.4 数学归纳法

26．设 A 和 B 是方阵，如果 AB=BA，那么$(AB)^n = A^nB^n$对$n \geq 1$成立。

证明:

先证一个辅助的结论

记 Q(n): $AB^n = B^nA$

下面用归纳法证明 Q(n)对任意正整数 n 成立。

首先已知 Q(1)为真。

假设 Q(k)为真，

$AB^{k+1} = AB^kB$

$= B^kAB$ ... Q(k)为真

$= B^kBA$ ... Q(k)为真

$= B^{k+1}A$ ，即 Q(k+1)为真。

记 P(n): $(AB)^n = A^nB^n$

已知 P(1)为真。

假设 P(k)为真，

$(AB)^{k+1} = (AB)^k(AB)$

$= A^kB^kAB$ ...P(k)为真

$= A^kAB^kB$...Q(n)对任意正整数 n 为成立

$= A^{k+1}B^{k+1}$，即 P(k+1)为真。

4.1 笛卡尔积与划分

40 设$p_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$是 A 的一个划分，$p_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$是 B 的一个划分，求证$p = \{A_i \times B_j, 1 \le i \le k, 1 \le j \le m\}$是 AXB 的一个划分。

证明:

（不重）

假设 AXB 中有一有序对(a,b)同时属于 p 里的两个块$A_i \times B_j$和$A_x \times B_y$

$(a, b) \in A_i \times B_j$ 得 $a \in A_i$ ，$b \in B_j$

$(a, b) \in A_x \times B_y$ 得 $a \in A_x$ ，$b \in B_y$

由于A_i，A_x是划分里的块，且都含有 a，故必须是同一块$A_i = A_x$

同理，$B_j = B_y$ ，得$A_i \times B_j = A_x \times B_y$，矛盾

（不漏）

AXB 中任一有序对(a,b)

p_1是 A 的划分，故存在某个块A_i，$a \in A_i$

p_2是 B 的划分，故存在某个块B_j，$b \in B_j$

得 $(a, b) \in A_i \times B_j$

即 p 中有一个块包含(a,b)

4.4 关系的性质

33.设 R 是集合 A 上的一个非空关系，假设 R 是对称的和传递的，求证：R 不是非自反的。

证明:

R 非空，则$\exists(a,b)\in R$,

R 对称，故$(b,a)\in R$,

R 传递，故$(a,a)\in R$

得$(a,a)\in R\cap\Delta\neq\emptyset$

即 R 不是非自反的。

4.5 等价关系

24. 求证：如果R_1和R_1是集合 A 上的等价关系，那么$R_1 \cap R_2$是 A 上的一个等价关系。（即 176 页定理 5(c))

证明：

（1）自反

$$\left.\begin{array}{l} R_1\text{自反} \Leftrightarrow \Delta \subseteq R_1 \\ R_2\text{自反} \Leftrightarrow \Delta \subseteq R_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta \subseteq R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow R_1 \cap R_2\text{自反}$$

（2）对称

按定义：

$\forall(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2$

由R_1和R_2对称知 $(b, a) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$

故$R_1 \cap R_2$对称

（3）传递

按定义：

$$\forall(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in R_1 \cap R_2 \wedge (\mathrm{b}, \mathrm{c}) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2$$

由R_1和R_2传递知 $(a, c) \in R_1 \wedge (a, c) \in R_2 \Leftrightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$

故$R_1 \cap R_2$传递

4.7 关系运算

37. 证明定理 3。

设 R 是集合 A 上的一个关系，那么

(a) R 对称 iff $R = R^{-1}$

(b) R 反对称 iff $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$

(c) R 非对称 iff $R \cap R^{-1} = \emptyset$

证明:

(a)

$$R对称 \Leftrightarrow \forall(a,b) \in R, (b,a) \in R \Leftrightarrow \forall(a,b) \in R, (a,b) \in R^{-1} \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$$

$$R对称 \Leftrightarrow \forall(a,b) \in R, (b,a) \in R \Leftrightarrow \forall(b,a) \in R^{-1}, (b,a) \in R \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R$$

$$R对称 \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow R = R^{-1}$$

(b) R 反对称 $\Leftrightarrow \forall(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathrm{R} \wedge (\mathrm{b},\mathrm{a}) \in \mathrm{R},\ \mathrm{a} = \mathrm{b}$

$\Leftrightarrow \forall(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathrm{R} \wedge (\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathrm{R}^{-1}, (\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \Delta \Leftrightarrow \mathrm{R} \cap R^{-1} \subseteq \Delta$

(c) R 非对称 $\Leftrightarrow \forall(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathrm{R}, (\mathrm{b},\mathrm{a}) \notin \mathrm{R} \Leftrightarrow \forall(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathrm{R}, (\mathrm{a},\mathrm{b}) \notin \mathrm{R}^{-1} \Leftrightarrow$

$\mathrm{R} \cap R^{-1} = \emptyset$

4.8 传递闭包与 WarShall 算法

25.设 A=R，R 是由 aRb 当且仅当|a|<|b|所定义的关系，计算包含 R 的最小等价关系。

解：用 X 记录包含 R 的最小等价关系，初始化 X=R

先弄成自反，即并上相等关系，$X \leftarrow X \cup \Delta$,

此时 $aXb\ iff\ |a| < |b| \vee a = b$

再弄成对称，$X \leftarrow X \cup X^{-1}$,

此时 $aXb\ iff\ |a| < |b| \vee a = b \vee |a| > |b|$

最后只要计算 X 的传递闭包X^{∞}

先算X^2, 由 X 的描述知$\forall a \forall b$，有$(a, 0) \in$X，$(0, b) \in$X, 故$(a, b) \in X^2$,

既然任意有序对(a,b)都属于X^2，那么$X^2 = A \times A$，故$X^{\infty} = A \times A$

结论：包含 R 的最小等价关系为$A \times A$

另需求证 R 的等价闭包 X 为$(R \cup \Delta \cup R^{-1})^{\infty}$

证明：

（1）易知$R \subseteq X$

（2）验证 X 是等价关系

a) $\Delta \subseteq R \cup \Delta \cup R^{-1} \subseteq (R \cup \Delta \cup R^{-1})^{\infty} = X$，故自反

b) 易证若 S 对称，则S^{∞}也对称。故只需说明$R \cup \Delta \cup R^{-1}$对称，如下：

$$(R \cup \Delta \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup \Delta^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup \Delta \cup R$$
$$= R \cup \Delta \cup R^{-1}$$

c) X 为$R \cup \Delta \cup R^{-1}$的传递闭包，故 X 是传递的

（3）说明 X 是最小的

可证 任意包含 R 的等价关系 Y，$X \subseteq Y$

显然，有$R \subseteq Y$(已知)，$\Delta \subseteq Y$(等价关系-自反的需要)，$R^{-1} \subseteq Y$(等价关系-对称的需要)，

故$R \cup \Delta \cup R^{-1} \subseteq Y$，那么$(R \cup \Delta \cup R^{-1})^{\infty} \subseteq Y$(等价关系-传递的需要)，

即得$X \subseteq Y$

声明

上述证明资料仅供本班（中山大学人工智能学院）学生参考，切勿传播。

这些证明尽量使用教材中出现的知识点和方法。不一定是唯一的证明过程。

这些证明中难以避免存在不足和纰漏，请同学们辨证地看待这些资料，欢迎指正错误和交流心得。

对本资料的不正当获取或错误使用所造成的任何后果，均与本课题组无关。

常晓斌，陈梓潼

2022/10/15