中山大学本科生期末考试
《概率统计》试题(A)参考答案

(2021.01.16)

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	总分人	复核人
阅卷人										

一、

得分	阅卷人

(14分)设随机变量X的分布列如下：

X	-2	-1	0	1	3
P	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

(1) 试求$Y=(X-1)^2$的分布列；

(2) 试求Y的数学期望和方差.

解：(1) $Y=(X-1)^2$的分布列

Y	0	1	4	9
P	0.2	0.3	0.4	0.1

(2) $E[Y]=2.8,\quad Var[y]=6.96.$

二、

得分	阅卷人

(10分) 设随机变量X服从区间$[-3,2]$上的均匀分布,$Y = X^2$,试求Y的分布函数和分布密度函数.

解: Y的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}), & 0 < y \leqslant 4; \\ P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) + P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant -2), & 4 < y \leqslant 9; \\ 1, & y > 9. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{5}, & 0 < y \leqslant 4; \\ \dfrac{\sqrt{y}}{5} + \dfrac{2}{5}, & 4 < y \leqslant 9; \\ 1, & y > 9. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Y的分布密度函数为

$$
p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{5\sqrt{y}}, & 0 < y \leqslant 4; \\ \dfrac{\sqrt{y}}{10}, & 4 < y \leqslant 9; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

三、

得分	阅卷人

(16分) 设随机变量(X,Y)的分布列如下：

$X \ \backslash \ Y$	0	1	2	3
-1	1/12	1/12	0	1/6
0	0	1/6	1/12	0
1	1/6	0	1/6	1/12

(1) 试求X和Y的边缘分布列；

(2) 试问X与Y是否相互独立？

(3) 试求$Z = XY$的分布列；

(4) 试求$X = 1$条件下Y的条件分布列.

解：(1) X的边缘分布列为

X	-1	0	1
P	4/12	3/12	5/12

Y的边缘分布列为

Y	0	1	2	3
P	1/4	1/4	1/4	1/4

(2) 因为$P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$, 所以$X$与$Y$不相互独立.

(3) Y的分布列为

Z	-3	-1	0	2	3
P	2/12	1/12	6/12	2/12	1/12

(4)

$$
\begin{aligned}
P(Y = 0|X = 1) =& \frac{2}{5}; \\
P(Y = 1|X = 1) =& 0; \\
P(Y = 2|X = 1) =& \frac{2}{5}; \\
P(Y = 3|X = 1) =& \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

四、

得分	阅卷人

(15分) 设一简单的电路系统由两个电器A和B并联而成，假定A和B能正常使用的寿命分别服从参数为λ_A和λ_B的指数分布，且二者能否正常工作互不影响，试求该电路系统能正常使用的寿命的分布.

解: 记两个电器A和B的寿命分别为X和Y,且记该电路系统的寿命为Z,则$Z = \max\{X, Y\}$,则Z的

分布函数为

$$F_Z(z) = P(\max\{X,Y\} \leqslant z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0; \\ P(X \leqslant z)P(Y \leqslant z), & z > 0. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & z \leqslant 0; \\ (1-e^{-\lambda_A z})(1-e^{-\lambda_B z}), & z > 0. \end{cases}$$

Z的分布函数密度函数为

$$p_Z(z) = \lambda_A e^{-\lambda_A z} + \lambda_B e^{-\lambda_B z} - (\lambda_A + \lambda_B) e^{-(\lambda_A+\lambda_B)z} 1_{\{(0,\infty)\}}(z).$$

五、

得分	阅卷人

(14分)

已知$E[X] = 2, E[Y] = 4, D[X] = 9, D[Y] = 36, \rho_{XY} = -0.2.$

(1) 试求$D[X+Y]$;

(2) 设$U = 2X - 5Y - 3, V = X^2 + Y^2$, 试求$E[U], D[U], E[V]$.

解: **(1)**

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X,Y) = 9 + 36 - 2 \times 0.2 \times 3 \times 6 = 37.8.$$

(2) $E[U] = 2E[X] - 5E[Y] - 3 = 4 - 20 - 3 = -19.$;

$$\begin{aligned} Var[U] =& Cov(2X-5Y-3, 2X-5Y-3) = Cov(2X-5Y, 2X-5Y) \\ =& 2Cov(2X-5Y, X) - 5Cov(2X-5Y, Y) \\ =& 4Cov(X,X) - 10Cov(Y,X) - 10Cov(X,Y) + 25Cov(Y,Y) \\ =& 4 \times 9 + 20 \times 3 \times 6 \times 0.2 + 25 \times 36 \\ =& 1008. \\ E[V] =& E[X^2] + E[Y^2] = (9+4) + (36+16) \\ =& 65. \end{aligned}$$

六、

得分	阅卷人

(16分) 设(X,Y)的联合密度函数为$p(x,y) = \frac{1}{4\pi}1_D(x,y)$，其中$D = \{(x,y): x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

(1) 试分别求出X和Y的边缘分布密度函数;

(2) 试求X与Y的相关系数;

(3) 试问X与Y是否独立?

(4) 试求$Y = y(-2 \leqslant y \leqslant 2)$的条件下，$X$的条件密度函数 $p_{X|Y}(x|y)$.

解: **(1)**

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}1_{\{(-2,2\}}(x),\quad f_Y(y) = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}1_{\{(-2,2\}}(y).$$

(2) 因为$E[X]=0, E[Y]=0, E[XY]=0$,所以X与Y的相关系数$\rho_{XY}=0$.

(3) 由于$p(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$,所以X与Y不相互独立.

(4) 当$-2 \leqslant y \leqslant 2$时，

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{1}{4\pi}1_D(x,y)}{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{4-y^2}}1_{\{(-2,2)\}}(x).$$

七、

得分	阅卷人

(15分) 若飞机乘客购票后按期搭机的概率为0.95，假定各乘客的行动是独立的.记一架200座飞机售出202张机票而不发生超座的概率为 p.

(1) 试给出 p 的一个下界(**提示**：可用切比雪夫(**Чебышёв**)不等式.);

(2) 试求 p (只给出计算公式，不必计算出结果);

(3) 试用合适的近似计算方法，求 p 的近似值.

解: **(1)** 记X为购得机票的202位中按期搭机者的乘客数，则$X \sim B(202, 0.95)$,

$$p = P(X \leqslant 200) = P(X - 202\times 0.95 \leqslant 200 - 202\times 0.95) = P(X - 202\times 0.95 \leqslant 8.1)$$

由切比雪夫不等式，有

$$P(X - 202\times 0.95 \geqslant 8.1) \leqslant \frac{202\times 0.95\times 0.05}{8.1^2} \doteq 0.15$$

从而$p \geqslant 1 - P(X - 202\times 0.95 \geqslant 8.1) \geqslant 0.85$.

(2)

$$p = P(X \leqslant 200) = \sum_{i=0}^{200}\binom{202}{i}0.95^i 0.15^{202-i} (\doteq 0.9996)$$

(3)

$$\begin{aligned} p = P(X \leqslant 200) =& P\left(\frac{X - 202\times 0.95}{\sqrt{202\times 0.95\times 0.05}} \leqslant \frac{200 - 202\times 0.95}{\sqrt{202\times 0.95\times 0.05}}\right) \\ \doteq& \Phi\left(\frac{200 - 202\times 0.95}{\sqrt{202\times 0.95\times 0.05}}\right) \\ =& \Phi\left(\frac{8.1}{3.096}\right) (\doteq 0.9956) \end{aligned}$$