8.3 定理证明

前提条件

① 已知图G有n个顶点，$n\ge 3$，G中无自环、无多重边的连通图. 求证：若G中任意两个不相邻顶点u和v，$deg(u)+deg(v)\ge n-1$，then 图G存在哈密尔顿通路

证：设 P_m 是G中一条长度为m-1的简单通路：$v_1, \ldots, v_m$（$v_1, \ldots, v_m$ 两两不同）$2\le m\le n$.

若 $m=n$，则哈密尔顿通路 P_n 存在

∴ 转为求证：$2\le m\le n-1$，P_m 可扩展为更长的通路，直至成为 P_n.

（注，P_m 的扩展方向有二，从 v_1 或 v_m 扩展均可，无实质区别）

Case 1：G中存在v与 v_1 或 v_m 相邻，且v不在 P_m 中，得 P_{m+1}

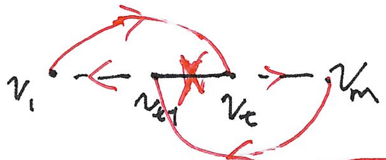
Case 2：v_1 和 v_m 均只与 P_m 内部顶点相邻.

设 P_m 中与 v_1 相邻的顶点集合为S，$|S|=k\ge 1$，即 $deg(v_1)=k$.

Case 2.1：若 $v_m\in S$，then 存在简单回路 C_m：$v_1, \ldots, v_m, v_1$

Case 2.2：若 $v_m\notin S$，但 $\exists v_t\in S$，且 v_{t-1} 与 v_m 相邻. （v_1 与 v_m 不相邻）

对 P_m 添加边 $\{v_1, v_t\}$ 和 $\{v_{t-1}, v_m\}$，并删除 $\{v_{t-1}, v_t\}$，得简单回路 C_m，如下图：



C_m：$v_1, v_t, \ldots, v_m, v_{t-1}, \ldots, v_1$

Case 2.3：若 $v_m\notin S$，且不存在 $v_t\in S$，使得 v_{t-1} 与 v_m 相邻. （v_1 与 v_m 不相邻）

∵ $|S|=k$，∴ P_{m-1} 中至少有k个顶点与 v_m 不相邻

又∵ Case 2 限定 v_m 只与 P_m 内顶点相邻 ∴ $deg(v_m)\le m-1-k$

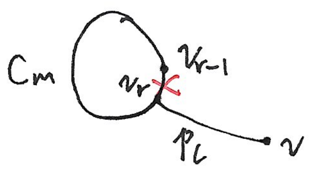
∴ $deg(v_1)+deg(v_m)\le k+m-1-k\le m-1<n$ （与前提 $deg(u)+deg(v)\ge n-1$ 矛盾）

∴ Case 2.3 不存在

综合Case 2，P_m 中所有顶点一定可构成简单回路 C_m（在前提之下）

任取在 C_m 外的一点v，由于图G是连通的. ∴ v一定与 C_m 中某个顶点 v_r 存在简单通路 P_L

如图：



把 $\{v_r, v_{r-1}\}$ 删除，可得简单通路 P_{m+L}：$v, \ldots, v_r, \ldots, v_{r-1}$

P_{m+L} 的长度大于 P_m

综上 Case 1 和 Case 2，当 $2\le m\le n-1$，P_m 总能被延展为更长的简单通路，直至 P_n. 得证

8.3 证明

① 已知图G有n个顶点，$n\geq 3$，G是无向环，无多重边的连通图，求证：

若G中任意两个不相邻顶点u和v，$deg(u)+deg(v)\geq n$，（已知条件）then 图G中存在哈密尔顿回路.

证：∵ $deg(u)+deg(v)\geq n>n-1$ ∴ 图G中存在哈密尔顿通路 P_n: $v_1,\dots,v_n$（上一个证明）

显然，v_1和v_n都只与P_n内的顶点相邻.

设P_n中与v_1相邻的顶点集合为S，$|S|=k\geq 1$. $deg(v_1)=k$

类比Case 2.1-2.3，分情况讨论：

Case 1：$v_n\in S$，∴ 哈密尔顿回路C_n为：$v_1,\dots,v_n,v_1$

Case 2：$v_n\notin S$，但$\exists v_t\in S$，使得v_{t-1}与v_n相邻（v_1与v_n不相邻）

对P_n添加边$\{v_1,v_t\}$和$\{v_{t-1},v_n\}$，删除边$\{v_{t-1},v_t\}$，得哈密尔顿回路C_n.

C_n: $v_1,v_t,\dots,v_n,\dots,v_{t-1},\dots,v_1$

Case 3：$v_n\notin S$，$\sim\exists v_t\in S$，使得v_{t-1}与v_n相邻.（v_1与v_n不相邻）

∵ $|S|=k$，∴ P_{n-1}中至少有k个顶点与v_n不相邻.

又∵ v_n只与P_n内顶点相邻 ∴ $deg(v_n)\leq n-1-k$

∴ $deg(v_1)+deg(v_n)\leq n-1<n$ 与已知条件矛盾

∴ Case 3 不存在.

∴ 综合Case 1和Case 2，当满足已知条件，哈密尔顿回路C_n一定存在.