5.1 函数

29. 如果 A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，那么从 A 到 B 存在多少个函数？

对 A 中的每个元素 a，f 在 a 上有 n+1 种可能: f(a)属于 B 或者 a 不属于 f 的定义域）。

故一共有$(n+1)^m$个函数。

32. 设 f:A->B, g:B->C 是函数，证明：如果 g∘f 是单射，则 f 是单射。

反证法，假设 f 不是单射，则存在$a_1 \neq a_2$但$f(a_1)=f(a_2)$

故$(g\circ f)(a_1)=g(f(a_1))=g(f(a_2))=(g\circ f)(a_2)$, 与 g∘f 单射矛盾。

（注：严谨地讲，f 是在 Dom(g∘f)上是单射，因为a_1，$a_2 \in Dom(f)$，但未必属于 Dom(g∘f)，

所以$(g\circ f)(a_1)$或$(g\circ f)(a_2)$可能没定义。）

5.3 函数的增长

7. f(n)=nlgn, g(n)=n^2, 求证 f 是 O(g)，g 不是 O(f)。

证明：

$\exists c=1, k=1, \forall n \geq k, |nlgn| \leq c|n^2|$, 即 f 是 O(g)。

若$\exists c>0, k, \forall n \geq k, |n^2| \leq c|nlgn|$，即$\forall n \geq k$, $\frac{1}{c} \leq \frac{lgn}{n}$，得$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{c} \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{lgn}{n}$即$\frac{1}{c} \leq 0$ 矛盾，所以 g 不是 O(f)。

9. 求证：如果$f(n)=5n^2+4n+3$ 和 $g(n)=n^2+100n$，那么 f 和 g 具有相同的阶。

证明：

f 是 g 的大 O:

$$\exists c=5, k=1, \forall n \geq k, |f(n)| = \left|5n^2+4n+3\right| \leq 5n^2+500n = c|g(n)|$$

g 是 f 的大 O:

$$\exists c=25, k=1, \forall n \geq k, |g(n)| = \left|n^2+100n\right| \leq 25n^2+100n \leq c|f(n)|$$

因此，f 和 g 具有相同的阶。

另一种证明：根据Θ-类法则 3,8 和 6, 有$f(n)=\Theta(5n^2)=\Theta(n^2)$

根据法则 3 和 8, 有$g(n)=\Theta(n^2)$

故$f=\Theta(g)$。

6.1 偏序集

39. 设 A={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}， 考虑 A 上的整除偏序≤，即定义 a≤b 为 a|b。设 A′=P(S)是有偏序⊆的偏序集，这里 S={e, f, g}。证明：（A，≤）和（A′，⊆）是同构偏序集。

定义一个函数 f:A→A′

x	1	2	3	5	6	10	15	30
$f(x)$	∅	{e}	{f}	{g}	{e,f}	{e,g}	{f,g}	{e,f,g}

f 是一一对应。

还须说明 f 保序,即$\forall a,b\in A, a\le b \Leftrightarrow f(a)\le f(b)$，例如，$\forall x\in A, 1|x, f(1)=\emptyset\subseteq f(x)$, 即 $1\le x\Leftrightarrow f(1)\le f(x)$；或者画出他们的哈塞图进行比较。

6.3 格

13. 设 L=P(S)是在包含关系下集合 S 的所有子集组成的格，设 T 是 S 的一个子集，证明 P(T)是 L 的一个子格。

证明：

首先，$\forall t \in P(T), t \subseteq T \subseteq S$, 得 $t \in P(S)$, 故 $P(T) \subseteq P(S)$。

其次，对任意$t_1, t_2 \in P(T)$, 有$t_1 \subseteq T \wedge t_2 \subseteq T$得 $t_1 \wedge t_2 = t_1 \cap t_2 \subseteq T$即 $t_1 \wedge t_2 \in P(T)$；

同理 $t_1 \vee t_2 \in P(T)$

综上 P(T)是子格（在包含关系下）。

19. 求证：对格 L 中的任意两元素 a,b，有 $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \leq b$

证明：

求证方向 1：$a \wedge b = a \Rightarrow a \leq b$

$a \wedge b$ 代表{a,b}的最大下界，既然是下界，自然有 $a \wedge b \leq b$, 若 $a \wedge b = a$,则 $a \leq b$。

求证方向 2：$a \wedge b = a \Leftarrow a \leq b$

由自反得 $a \leq a$, 若 $a \leq b$,则 a 是{a,b}的下界，而 $a \wedge b$ 是{a,b}的最大下界，故 $a \leq a \wedge b$。

$a \wedge b$ 也是{a,b}的下界，故 $a \wedge b \leq a$。

由反对称得：$a \wedge b = a$。

25. 设 L 是一个分配格，求证：如果存在一个 a，有 $a \wedge x = a \wedge y$ 和 $a \vee x = a \vee y$，那么 x=y。

证明：

$x = x \wedge (a \vee x)$ ... 吸收律

$= x \wedge (a \vee y)$ ...已知

$= (a \wedge x) \vee (x \wedge y)$ ...分配

$= (y \wedge a) \vee (y \wedge x)$ ...已知+交换律

$= y \wedge (a \vee x)$ ...分配

$= y \wedge (a \vee y)$ ...已知

$= y$ ...吸收律

6.4 有限布尔代数

17. 求证：在一个布尔代数中，对任意 a 和 b，有$(a\wedge b)\vee(a\wedge b')=a$

证明：

$(a\wedge b)\vee(a\wedge b')$

$=((a\wedge b)\vee a)\wedge((a\wedge b)\vee b')$ ... 分配

$=a\wedge((a\wedge b)\vee b')$ ... 吸收

$=a\wedge((a\vee b')\wedge(b\vee b'))$ ... 分配

$=a\wedge((a\vee b')\wedge I)$ ... b 和 b'互补

$=a\wedge(a\vee b')$ ... I 是∧运算的单位元

$=a$ ... 吸收

23. 关系矩阵如教材 P268 定义，求证（A，R）是一个偏序。

即证明关系 R 同时满足：自反性，反对称性，传递性。

（自反）对角线上都是 1

（反对称）除了对角线，不存在对称位置值都为 1

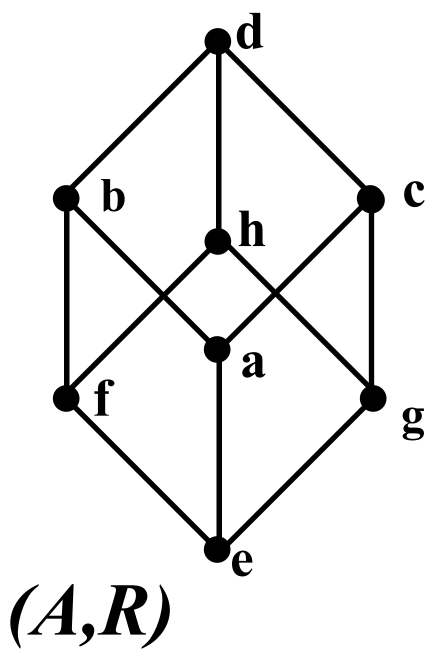
（传递）计算$M_R\odot M_R$, 得M_{R^2}, 发现$M_{R^2}\wedge M_R=M_{R^2}$，即$R^2\subseteq R$

或者计算传递闭包M_{R^∞}，发现$M_{R^\infty}=M_R$

26. 关系矩阵如教材 P268 定义，求证（A，R）是一个布尔代数。

$|A|=8=2^3$,故若为布尔代数则同构于 B_3

画出其哈塞图，同构于 B_3



声明

上述证明资料仅供本班（中山大学人工智能学院）学生参考，切勿传播。

这些证明尽量使用教材中出现的知识点和方法。不一定是唯一的证明过程。

这些证明中难以避免存在不足和纰漏，请同学们辨证地看待这些资料，欢迎指正错误和交流心得。

对本资料的不正当获取或错误使用所造成的任何后果，均与本课题组无关。

常晓斌，陈梓潼

2022/10/15