中山大学 2022 学年第二学期

《数值计算方法》期末考试试卷（A）卷解答

一、填空题（每题 6 分，共 30 分）

1、设 $x = 3.141$ 是由四舍五入得到的近似值，则 x 具有（4）位有效数字。

2、设 $l_i(x)$（$i = 0,1,\cdots n$）是 n 次 Lagrange 基函数，则 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) =$（1）；$l_i(x_j) =$（δ_{ij}）。

3、已知 $X = (1,-2)^T$，$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\| AX \|_1 =$（16），$\mathrm{Cond}(A)_\infty =$（90）。

4、Newton-Cotes 求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

当 n 为奇数时，至少具有（n）次代数精确度；当 n 为偶数时，至少具有（n+1）次代数精确度。

5、用 Dolittle 分解将矩阵 A 分解如下：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

则分解式中，$a =$（2），$b =$（3）。

二、（10 分）用追赶法求解下列三对角方程组：

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$$

解：$\begin{pmatrix} 10 & & & \\ 2 & 1 & & \\ & 1 & 9 & \\ & & 2 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \frac{5}{9} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & & \\ 2 & 2 & 1 & \\ & 1 & 10 & 5 \\ & & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....5 分

求解 $\begin{pmatrix} 10 & & & \\ 2 & 1 & & \\ & 1 & 9 & \\ & & 2 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$ 得，$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{25}{9} \\ -4 \end{pmatrix}$；................................7 分

求解$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \frac{5}{9} \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{25}{9} \\ -4 \end{pmatrix}$得，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$。……………………………10 分

三、（10 分）在最小二乘原理下求解矛盾方程：

$$\begin{cases} x_1-2x_2=1, \\ x_1+5x_2=13.1, \\ 2x_1+x_2=7.9, \\ x_1+x_2=5.1. \end{cases}$$

解：方程组两边乘以系数矩阵的转置得

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 35 \\ 76.5 \end{bmatrix}，$$ ……………………………5 分

解得 $x_1=3.2895, x_2=1.9956$ ……………………………10 分

四、（10 分）给定函数 $f(x)$，设对一切 x， $f'(x)$存在，而且$0<m\le f'(x)\le M$ 。证明对$0<\lambda<\dfrac{2}{M}$的任意常数λ，迭代法$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$均收敛于方程 $f(x)=0$的根。

解：由迭代公式知，迭代函数$\varphi(x)=x-\lambda f(x)$， $\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)$。…………………3’

对于任意的 x， $0<m\le f'(x)\le M$ 。因此，当$0<\lambda<\dfrac{2}{M}$时， $0<\lambda f'(x)<2$，$-1<1-\lambda f'(x)<1$，即$|\varphi'(x)|<1$，由定理 2.1 的推论知，迭代法收敛。………………7’

记x^*为迭代序列的极限，则$x^*=x^*-\lambda f(x^*)$，即$\lambda f(x^*)=0$，又$\lambda\ne 0$，故 $f(x^*)=0$，x^*为方程 $f(x)=0$的根。…………………………………………………………………10’

五、（10 分）用规范化幂法求矩阵$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$按模最大特征值及相应特征向量，列表计算三次，取$x^{(0)}=(1,1,1)^T$，保留两位小数。

解：幂法计算$x^{(1)}=Ax^{(0)}=(4,0,1)^T$，. . . . . 2 分

规范化$\mu_1=4$， $v^{(1)}=(1,0,\frac{1}{4})^T=(1,0,0.25)^T$ . . . . 4 分

幂法计算 $x^{(2)}=Av^{(1)}=(4,-\frac{5}{4},\frac{1}{2})^T=(4,-1.25,0.5)^T$，. . . . . 5 分

规范化 $\mu_2=4$，$v^{(2)}=(1,-\frac{5}{16},\frac{1}{8})^T=(1,-0.3125,0.125)^T$ . . . . 6 分

幂法计算 $x^{(3)}=Av^{(2)}=(4,-1.75,0.5625)^T$，. . . . . 7 分

规范化 $\mu_3=4$，$v^{(3)}=(1,-0.4375,0.1406)^T$ . . . . 8 分

故 $\lambda_1\approx 4$，对应的特征向量为 $(1,-0.4375,0.1406)^T$。. . . . . 10 分

六、（15 分）确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有的代数精确度。

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$$

解：当 $f(x)=1$，$A_{-1}+A_0+A_1=4h$ ....3 分

当 $f(x)=x$，$-A_{-1}h+A_1h=0$ ....6 分

当 $f(x)=x^2$，$A_{-1}h^2+A_1h^2=\frac{16}{3}h^3$ ....9 分

解得 $A_0=-\frac{4}{3}h$，$A_1=A_{-1}=\frac{8}{3}h$。..................................12 分

又因为求积公式对 $f(x)=x^3$ 精确成立，对 $f(x)=x^4$ 不精确成立，因此它的代数精确度为 3 次。..................................15 分

七、（15 分）已知方程组 $AX=f$，其中

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & \\ 3 & 4 & -1 \\ & -1 & 4\end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix}24\\30\\-24\end{bmatrix}$$

（1）列出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式。
（2）求出 Jacobi 迭代矩阵的谱半径。
解：Jacobi 迭代法：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(24-3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(30-3x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-24+x_2^{(k)}) \\ k=0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

..................................5 分

Gauss-Seidel 迭代法：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(24 - 3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(30 - 3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(-24 + x_2^{(k+1)}) \\ k = 0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

……………………………10 分

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix},$$

……………………………13 分

$$\rho(B_J) = \sqrt{5/8}\,(\text{或}\,\frac{\sqrt{10}}{4}) = 0.790569$$

……………………………15 分