9.2 半群

31. 设$(S_1, *_1), (S_2, *_2)$和$(S_3, *_3)$是半群，$f: S_1 \to S_2$和 $g: S_2 \to S_3$是同态，证明 $g \circ f$是从S_1到S_3的一个同态。

证：∵$f: S_1 \to S_2$和 $g: S_2 \to S_3$是同态。∴f和 g 都是处处定义的函数，即 $Dom(f)=S_1$且 $Dom(g)=S_2$。∴$g \circ f$是从S_1到S_3的函数且处处定义的。

另，$\forall a, b \in S_1$，$g \circ f(a *_1 b)=g(f(a *_1 b))=g(f(a) *_2 f(b))=g(f(a)) *_3 g(f(b))=g \circ f(a) *_3 g \circ f(b)$。

综上，$g \circ f$是从S_1到S_3的一个同态。

35. 设R^+是所有正实数的集合，证明：由 $f(x)=\ln x$ 所定义的函数 $f: R^+ \to R$ 是半群$(R^+, \times)$到半群$(R, +)$上的一个同构，其中×和+分别是普通乘法和加法。

证：$f(x)=\ln x$ 的定义域为R^+，f是处处定义的；

设 $f(x_1)=f(x_2)$，$\ln x_1=\ln x_2$，得 $x_1=x_2$。∴f是单射的；

$\forall r \in R$，对应输入 $e^r \in R^+$，有 $\ln(e^r)=r$。∴f是满射的；

综上，$f(x)=\ln x$ 是一一对应。

$\forall a, b \in R^+$，$f(a \times b)=\ln(a \times b)=\ln(a)+\ln(b)=f(a)+f(b)$

综上，函数$f: R^+ \to R$ 是半群$(R^+, \times)$到半群$(R, +)$上的一个同构。

9.3 半群的积与商

5. 证明定理 1：如果$(S, *)$和$(T, *')$是半群，那么$(S \times T, *'')$是一个半群，其中$*''$由$(s_1, t_1) *'' (s_2, t_2)=(s_1 * s_2, t_1 *' t_2)$定义。

证：$\forall (s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3) \in S \times T$，有$s_1, s_2, s_3 \in S$ 和$t_1, t_2, t_3 \in T$。

设$(S, *)$和$(T, *')$是半群，所以$*$和$*'$均为结合的二元运算：

$(s_1 * s_2) * s_3=s_1 * (s_2 * s_3)$；

$(t_1 * t_2) * t_3=t_1 * (t_2 * t_3)$。

∴$((s_1, t_1) *'' (s_2, t_2)) *'' (s_3, t_3)$

$= (s_1 * s_2, t_1 *' t_2) *'' (s_3, t_3)$

$= ((s_1 * s_2) * s_3, (t_1 *' t_2) *' t_3)$

$= (s_1 * (s_2 * s_3), t_1 *' (t_2 *' t_3))$

$=(s_1, t_1) *'' (s_2 * s_3, t_2 *' t_3)$

$= (s_1, t_1) *'' ((s_2, t_2) *'' (s_3, t_3))$

∴ $*''$是 $S \times T$ 上结合的二元运算。

∴$(S \times T, *'')$是半群。

18. 证明：半群上的两个同余关系的交是一个同余关系。

证：设半群上的两个同余关系为 R 和 S，即 R 和 S 也是等价关系。

由教材 P176 定理 5(c)，R∩S 也是等价关系。

设$a(\mathrm{R}\cap\mathrm{S})b$且$a^{'}(\mathrm{R}\cap\mathrm{S})b^{'}$，由∩的定义，得$\begin{cases} a\,\mathrm{R}\,b\text{且}a^{'}\,\mathrm{R}\,b^{'} \\ a\,\mathrm{S}\,b\text{且}a^{'}\,\mathrm{S}\,b^{'} \end{cases}$；

因为 R 和 S 是同余关系，所以$\begin{cases} (a*a^{'})\,\mathrm{R}\,(b*\,b^{'}) \\ (a*a^{'})\,\mathrm{S}\,(b*\,b^{'}) \end{cases}$；

由∩的定义，得$(a*a^{'})\,(\mathrm{R}\cap\mathrm{S})\,(b*\,b^{'})$。

得证。

28. 证明或反证：Z_4与第 24 题中的半群 S 是同构的。

证：观察半群 S 的运算表（P395）和Z_4的运算表（P392），发现二者主对角线上的情况不同。

S 表的主对角线全为 a，但Z_4表的主对角线有[0]和[2]两个不同元素。S 和Z_4之间无法定义相应的一一对应的函数满足同构的要求。所以 S 和Z_4不是同构的。

（注：24 题的半群同构于 P399-表 9.5；Z4 同构于同构于 P399-表 9.7；P403 例 17，表 9.5 与表 9.6-9.8 不是同构的。）

9.4 群

21. 设 G 是一个有限群，单位元是 e。证明：$\forall a\in\mathrm{G}$，存在非负整数 n，使得$a^n=e$。

证：考虑序列e，a^1，a^2，…，因为 G 是有限群，所以该序列中并非所有项都不同。设 $\mathrm{i}\le\mathrm{j}$，有$a^i=a^j$。由于群上的二元运算是结合的，有$\mathrm{e}^{\mathrm{i}}=(a^{-1})^ia^i$=$(a^{-1})^ia^j=a^{j-i}=e$. 设 n=$\mathrm{i}-\mathrm{j}\ge 0$。得证。

25. 设 G 是一个群，$H=\{x|x\in G,\forall y\in G,xy=yx\}$。证明：H 是 G 的一个子群。

证：

- $\forall \mathrm{x}\in\mathrm{H}$，$\mathrm{x}\in\mathrm{G}$. 因此 $\mathrm{H}\subseteq\mathrm{G}$。
- 设 G 的单位元为 e，$\forall\mathrm{y}\in\mathrm{G}$，有$ey=ye$，所以 $\mathrm{e}\in\mathrm{H}$。
- $\forall\mathrm{x,y}\in\mathrm{H}$，根据 H 的定义，$\forall\mathrm{z}\in\mathrm{G}$，有$\begin{cases} xz=zx \\ yz=zy \end{cases}$。

$\therefore\forall\mathrm{z}\in\mathrm{G}$，$\mathrm{(xy)z=x(yz)=x(zy)=(xz)y=(zx)y=z(xy)}$且 $\mathrm{xy}\in\mathrm{G}$

所以 $\mathrm{xy}\in\mathrm{H}$。

- $\forall x \in H$，$x^{-1} \in G$ 且 $x \cdot x^{-1}=x^{-1} \cdot x = e$。由 H 定义知：$\forall y \in G$，则 $x^{-1} \cdot y = x^{-1} \cdot y \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot (y \cdot x) \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot (x \cdot y) \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x \cdot y \cdot x^{-1} = y \cdot x^{-1}$。所以$x^{-1} \in H$。

综上，H 为 G 的子群。

27. 设A_n是S_n中所有偶置换的集合，证明：A_n是S_n的一个子群。

证：S_n是 n 个字母上的对称群（P401 例 7 有定义）。其中每个元素是这 n 个字母上的一个置换，其单位元是恒等置换 I，二元运算为关系的合成。置换有两类：奇置换、偶置换，I 为偶置换。

- A_n是S_n中所有偶置换的集合，所以 $I \in A_n$；
- 任意偶置换的合成仍然是偶置换；
- 任意偶置换的逆仍然是偶置换；

所以，A_n是S_n的一个子群。

31. 证明: 函数 $f(x)=|x|$是从非零实数群 G 到正实数群G'的一个同态，其中群 G 和G'中的运算是乘法。

证：$f(x)$是处处定义的。

$\forall x, y \in G$，$f(x \times y) = |x \times y| = |x| \times |y| = f(x) \times f(y)$。

所以 $f(x)$：$G \rightarrow G'$是同态。

9.5 群的积与商

22. 设 N 是群 G 的一个子群，$a \in G$，定义

$$a^{-1}Na = \{a^{-1}na | n \in N\},$$

证明：N 是 G 的一个正规子群当且仅当$\forall a \in G$，$a^{-1}Na = N$。

证：N 是 G 的一个正规子群 iff $\forall a \in G, aN = Na$ iff $\forall a \in G, Na \subseteq aN$① 且$aN \subseteq Na$②：

① $\forall a \in G, Na \subseteq aN$ iff $\forall a \in G, \forall n \in N, \exists n' \in N, na = an'$ iff $\forall a \in G$, $\forall n \in N, n' = a^{-1}na \in N$ iff $\forall a \in G$, $\forall n' \in a^{-1}Na$(由$a^{-1}Na$定义), $n' \in N$ iff $\forall a \in G, a^{-1}Na \subseteq N$;

② $\forall a \in G, aN \subseteq Na$ iff $\forall a \in G, \forall n \in N, \exists n' \in N, an = n'a$ iff $\forall a \in G$, $\forall n \in N, \exists n' \in N, n = a^{-1}n'a \in a^{-1}Na$ iff $\forall a \in G, N \subseteq a^{-1}Na$;

$\therefore \forall a \in G, Na \subseteq aN$且$aN \subseteq Na$ iff $\forall a \in G, a^{-1}Na \subseteq N$且$N \subseteq a^{-1}Na$ iff $\forall a \in G$，$a^{-1}Na = N$。

得证。

32. 设 G 是一个阿贝尔群，N是 G 的一个子群，证明：G/N是一个阿贝尔群。

证：∵G 为阿贝尔群且 N 为 G 的子群。∴$\forall a \in G, \forall n \in N,\ an=na$。
所以$\forall a \in G, aN = Na$。N 为 G 的正规子群。
由定理 4，可根据 N 定义 G 上的同余关系 R，N=[e] (e 为 G 的单位元)，得商群 G/R。
由定理 3 知，G/R 可以表示为 G/N，G/R 的运算⊛可用 N 表示：$\forall a,b \in G,\ (aN)(bN) = [a] \circledast [b] = [ab] = [ba] = [b] \circledast [a] = (bN)(aN)$。
∴G/N是一个阿贝尔群。

常晓斌，陈梓潼
2022/10/15