1 Лабораторная работа №1

Цель работы - изучить постановку антагонистической игры двух лиц в нормальной форме; найти решение игры за обоих игроков в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку).

1.1 Постановка задачи и методические указания

Для игры, заданной матрицей c_{ij}, требуется найти оптимальные смешанные стратегии обоих игроков, сведя матричную игру к задаче ЛП (прямой для одного игрока и двойственной для другого).

Задачи ЛП следует решать симплекс-методом, приводя начальные, промежуточные и конечные симплекс-таблицы. По окончании алгоритма полученные решения необходимо проверить на допустимость.

1.2 Ход работы

Зададим матрицу стратегий:

[1]:
```
from IPython.core.display import display, HTML, Latex

C = matrix(SR, 4, 5, [8, 1, 17, 8, 1, 12, 6, 11, 10, 16, 4, 19, 11, 15, 2, 17,␣
↪19, 6, 17, 16])
C
```

[1]:
```
[ 8  1 17  8  1]
[12  6 11 10 16]
[ 4 19 11 15  2]
[17 19  6 17 16]
```

Сформулируем задачу линейного программирования для решения симплекс-методом для игрока A:

[2]:
```
A = C.transpose()
b = [1] * A.nrows()
c = [1] * A.ncols()

P = InteractiveLPProblem(A, b, c, constraint_type=[">="] * len(b),␣
↪problem_type="min", variable_type='>=')
```

Решим задачу ЛП симплекс-методом:

[3]:
```
P = P.standard_form()
Latex(P.run_simplex_method())
```

[3]:

$$
\begin{array}{|rcl|}
\hline
x_5 &=& -1 + 8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 17x_4 \\
x_6 &=& -1 + x_1 + 6x_2 + 19x_3 + 19x_4 \\
x_7 &=& -1 + 17x_1 + 11x_2 + 11x_3 + 6x_4 \\
x_8 &=& -1 + 8x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 17x_4 \\
x_9 &=& -1 + x_1 + 16x_2 + 2x_3 + 16x_4 \\
\hline
-z &=& 0 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\
\hline
\end{array}
$$

`The initial dictionary is infeasible, solving auxiliary problem.`

$$
\begin{array}{|rcl|}
\hline
x_5 &=& -1 + x_0 + 8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 17x_4 \\
x_6 &=& -1 + x_0 + x_1 + 6x_2 + 19x_3 + 19x_4 \\
x_7 &=& -1 + x_0 + 17x_1 + 11x_2 + 11x_3 + 6x_4 \\
x_8 &=& -1 + x_0 + 8x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 17x_4 \\
x_9 &=& -1 + x_0 + x_1 + 16x_2 + 2x_3 + 16x_4 \\
\hline
w &=& 0 - x_0 \\
\hline
\end{array}
$$

`Entering:` x_0`. Leaving:` x_5`.`

$$
\begin{array}{|rcl|}
\hline
x_0 &=& 1 + x_5 - 8x_1 - 12x_2 - 4x_3 - 17x_4 \\
x_6 &=& 0 + x_5 - 7x_1 - 6x_2 + 15x_3 + 2x_4 \\
x_7 &=& 0 + x_5 + 9x_1 - x_2 + 7x_3 - 11x_4 \\
x_8 &=& 0 + x_5 - 2x_2 + 11x_3 \\
x_9 &=& 0 + x_5 - 7x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 \\
\hline
w &=& -1 - x_5 + 8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 17x_4 \\
\hline
\end{array}
$$

`Entering:` x_1`. Leaving:` x_6`.`

$$
\begin{array}{|rcl|}
\hline
x_0 &=& 1 - \frac{1}{7}x_5 + \frac{8}{7}x_6 - \frac{36}{7}x_2 - \frac{148}{7}x_3 - \frac{135}{7}x_4 \\
x_1 &=& 0 + \frac{1}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6 - \frac{6}{7}x_2 + \frac{15}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \\
x_7 &=& 0 + \frac{16}{7}x_5 - \frac{9}{7}x_6 - \frac{61}{7}x_2 + \frac{184}{7}x_3 - \frac{59}{7}x_4 \\
x_8 &=& 0 + x_5 - 2x_2 + 11x_3 \\
x_9 &=& 0 + x_6 + 10x_2 - 17x_3 - 3x_4 \\
\hline
w &=& -1 + \frac{1}{7}x_5 - \frac{8}{7}x_6 + \frac{36}{7}x_2 + \frac{148}{7}x_3 + \frac{135}{7}x_4 \\
\hline
\end{array}
$$

`Entering:` x_2`. Leaving:` x_1`.`

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
x_0 = 1 - x_5 + 2x_6 + 6x_1 - 34x_3 - 21x_4 \\
x_2 = 0 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{7}{6}x_1 + \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_7 = 0 + \frac{5}{6}x_5 + \frac{1}{6}x_6 + \frac{61}{6}x_1 + \frac{9}{2}x_3 - \frac{34}{3}x_4 \\
x_8 = 0 + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6 + \frac{7}{3}x_1 + 6x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\
x_9 = 0 + \frac{5}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6 - \frac{35}{3}x_1 + 8x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
\hline
w = -1 + x_5 - 2x_6 - 6x_1 + 34x_3 + 21x_4 \\
\hline
\end{array}
$$

`Entering:` x_3`. Leaving:` x_0`.`

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
x_3 = \frac{1}{34} - \frac{1}{34}x_5 + \frac{1}{17}x_6 + \frac{3}{17}x_1 - \frac{1}{34}x_0 - \frac{21}{34}x_4 \\
x_2 = \frac{5}{68} + \frac{19}{204}x_5 - \frac{1}{51}x_6 - \frac{37}{51}x_1 - \frac{5}{68}x_0 - \frac{247}{204}x_4 \\
x_7 = \frac{9}{68} + \frac{143}{204}x_5 + \frac{22}{51}x_6 + \frac{559}{51}x_1 - \frac{9}{68}x_0 - \frac{2879}{204}x_4 \\
x_8 = \frac{3}{17} + \frac{25}{51}x_5 + \frac{35}{51}x_6 + \frac{173}{51}x_1 - \frac{3}{17}x_0 - \frac{223}{51}x_4 \\
x_9 = \frac{4}{17} + \frac{73}{51}x_5 - \frac{10}{51}x_6 - \frac{523}{51}x_1 - \frac{4}{17}x_0 - \frac{235}{51}x_4 \\
\hline
w = 0 - x_0 \\
\hline
\end{array}
$$

`Back to the original problem.`

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
x_3 = \frac{1}{34} - \frac{1}{34}x_5 + \frac{1}{17}x_6 + \frac{3}{17}x_1 - \frac{21}{34}x_4 \\
x_2 = \frac{5}{68} + \frac{19}{204}x_5 - \frac{1}{51}x_6 - \frac{37}{51}x_1 - \frac{247}{204}x_4 \\
x_7 = \frac{9}{68} + \frac{143}{204}x_5 + \frac{22}{51}x_6 + \frac{559}{51}x_1 - \frac{2879}{204}x_4 \\
x_8 = \frac{3}{17} + \frac{25}{51}x_5 + \frac{35}{51}x_6 + \frac{173}{51}x_1 - \frac{223}{51}x_4 \\
x_9 = \frac{4}{17} + \frac{73}{51}x_5 - \frac{10}{51}x_6 - \frac{523}{51}x_1 - \frac{235}{51}x_4 \\
\hline
-z = -\frac{7}{68} - \frac{13}{204}x_5 - \frac{2}{51}x_6 - \frac{23}{51}x_1 + \frac{169}{204}x_4 \\
\hline
\end{array}
$$

`Entering:` x_4`. Leaving:` x_7`.`

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
x_3 = \frac{68}{2879} - \frac{173}{2879}x_5 + \frac{115}{2879}x_6 - \frac{873}{2879}x_1 + \frac{126}{2879}x_7 \\
x_2 = \frac{179}{2879} + \frac{95}{2879}x_5 - \frac{163}{2879}x_6 - \frac{4796}{2879}x_1 + \frac{247}{2879}x_7 \\
x_4 = \frac{27}{2879} + \frac{143}{2879}x_5 + \frac{88}{2879}x_6 + \frac{2236}{2879}x_1 - \frac{204}{2879}x_7 \\
x_8 = \frac{390}{2879} + \frac{786}{2879}x_5 + \frac{1591}{2879}x_6 - \frac{11}{2879}x_1 + \frac{892}{2879}x_7 \\
x_9 = \frac{553}{2879} + \frac{3462}{2879}x_5 - \frac{970}{2879}x_6 - \frac{39827}{2879}x_1 + \frac{940}{2879}x_7 \\
\hline
-z = -\frac{274}{2879} - \frac{65}{2879}x_5 - \frac{40}{2879}x_6 + \frac{554}{2879}x_1 - \frac{169}{2879}x_7 \\
\hline
\end{array}
$$

Entering: x_1. Leaving: x_9.

$$\begin{array}{|rcrcrcrcrcr|}
\hline
x_3 & = & \frac{773}{39827} & - & \frac{3443}{39827}x_5 & + & \frac{1885}{39827}x_6 & + & \frac{873}{39827}x_9 & + & \frac{1458}{39827}x_7 \\
x_2 & = & \frac{1555}{39827} & - & \frac{4453}{39827}x_5 & - & \frac{639}{39827}x_6 & + & \frac{4796}{39827}x_9 & + & \frac{1851}{39827}x_7 \\
x_4 & = & \frac{803}{39827} & + & \frac{4667}{39827}x_5 & + & \frac{464}{39827}x_6 & - & \frac{2236}{39827}x_9 & - & \frac{2092}{39827}x_7 \\
x_8 & = & \frac{5393}{39827} & + & \frac{10860}{39827}x_5 & + & \frac{22013}{39827}x_6 & + & \frac{11}{39827}x_9 & + & \frac{12336}{39827}x_7 \\
x_1 & = & \frac{553}{39827} & + & \frac{3462}{39827}x_5 & - & \frac{970}{39827}x_6 & - & \frac{2879}{39827}x_9 & + & \frac{940}{39827}x_7 \\
\hline
-z & = & -\frac{3684}{39827} & - & \frac{233}{39827}x_5 & - & \frac{740}{39827}x_6 & - & \frac{554}{39827}x_9 & - & \frac{2157}{39827}x_7 \\
\hline
\end{array}$$

The optimal value: $\frac{3684}{39827}$. An optimal solution: $\left(\frac{553}{39827}, \frac{1555}{39827}, \frac{773}{39827}, \frac{803}{39827}\right)$.

[4]:
```
D = P.final_dictionary()

W = -D.objective_value()
g = 1/W

solution = D.basic_solution()

x = [i * g for i in solution]
print(x)
```

```
[553/3684, 1555/3684, 773/3684, 803/3684]
```

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока A: $\left(\frac{553}{3684}, \frac{1555}{3684}, \frac{773}{3684}, \frac{803}{3684}\right)$.

Сформулируем задачу ЛП для игрока B:

[5]:
```
B = C
b = [1] * B.nrows()
c = [1] * B.ncols()

P = InteractiveLPProblem(B, b, c, constraint_type=["<="] * len(b),␣
↪problem_type="max", variable_type='>=')
```

[6]:
```
P = P.standard_form()
Latex(P.run_simplex_method())
```

[6]:

$$\begin{array}{|rcrcrcrcrcr|}
\hline
x_6 & = & 1 & - & 8x_1 & - & x_2 & - & 17x_3 & - & 8x_4 & - & x_5 \\
x_7 & = & 1 & - & 12x_1 & - & 6x_2 & - & 11x_3 & - & 10x_4 & - & 16x_5 \\
x_8 & = & 1 & - & 4x_1 & - & 19x_2 & - & 11x_3 & - & 15x_4 & - & 2x_5 \\
x_9 & = & 1 & - & 17x_1 & - & 19x_2 & - & 6x_3 & - & 17x_4 & - & 16x_5 \\
\hline
z & = & 0 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 \\
\hline
\end{array}$$

Entering: x_1. Leaving: x_9.

$$\begin{array}{|rcrcrcrcrcrcr|}
\hline
x_6 &=& \frac{9}{17} &+& \frac{8}{17}x_9 &+& \frac{135}{17}x_2 &-& \frac{241}{17}x_3 && &+& \frac{111}{17}x_5 \\
x_7 &=& \frac{5}{17} &+& \frac{12}{17}x_9 &+& \frac{126}{17}x_2 &-& \frac{115}{17}x_3 &+& 2x_4 &-& \frac{80}{17}x_5 \\
x_8 &=& \frac{13}{17} &+& \frac{4}{17}x_9 &-& \frac{247}{17}x_2 &-& \frac{163}{17}x_3 &-& 11x_4 &+& \frac{30}{17}x_5 \\
x_1 &=& \frac{1}{17} &-& \frac{1}{17}x_9 &-& \frac{19}{17}x_2 &-& \frac{6}{17}x_3 &-& x_4 &-& \frac{16}{17}x_5 \\
\hline
z &=& \frac{1}{17} &-& \frac{1}{17}x_9 &-& \frac{2}{17}x_2 &+& \frac{11}{17}x_3 && &+& \frac{1}{17}x_5 \\
\hline
\end{array}$$

Entering: x_3. Leaving: x_6.

$$\begin{array}{|rcrcrcrcrcrcr|}
\hline
x_3 &=& \frac{9}{241} &+& \frac{8}{241}x_9 &+& \frac{135}{241}x_2 &-& \frac{17}{241}x_6 && &+& \frac{111}{241}x_5 \\
x_7 &=& \frac{10}{241} &+& \frac{116}{241}x_9 &+& \frac{873}{241}x_2 &+& \frac{115}{241}x_6 &+& 2x_4 &-& \frac{1885}{241}x_5 \\
x_8 &=& \frac{98}{241} &-& \frac{20}{241}x_9 &-& \frac{4796}{241}x_2 &+& \frac{163}{241}x_6 &-& 11x_4 &-& \frac{639}{241}x_5 \\
x_1 &=& \frac{11}{241} &-& \frac{17}{241}x_9 &-& \frac{317}{241}x_2 &+& \frac{6}{241}x_6 &-& x_4 &-& \frac{266}{241}x_5 \\
\hline
z &=& \frac{20}{241} &-& \frac{9}{241}x_9 &+& \frac{59}{241}x_2 &-& \frac{11}{241}x_6 && &+& \frac{86}{241}x_5 \\
\hline
\end{array}$$

Entering: x_2. Leaving: x_8.

$$\begin{array}{|rcrcrcrcrcrcr|}
\hline
x_3 &=& \frac{117}{2398} &+& \frac{37}{1199}x_9 &-& \frac{135}{4796}x_8 &-& \frac{247}{4796}x_6 &-& \frac{135}{436}x_4 &+& \frac{1851}{4796}x_5 \\
x_7 &=& \frac{277}{2398} &+& \frac{559}{1199}x_9 &-& \frac{873}{4796}x_8 &+& \frac{2879}{4796}x_6 &-& \frac{1}{436}x_4 &-& \frac{39827}{4796}x_5 \\
x_2 &=& \frac{49}{2398} &-& \frac{5}{1199}x_9 &-& \frac{241}{4796}x_8 &+& \frac{163}{4796}x_6 &-& \frac{241}{436}x_4 &-& \frac{639}{4796}x_5 \\
x_1 &=& \frac{45}{2398} &-& \frac{78}{1199}x_9 &+& \frac{317}{4796}x_8 &-& \frac{95}{4796}x_6 &-& \frac{119}{436}x_4 &-& \frac{4453}{4796}x_5 \\
\hline
z &=& \frac{211}{2398} &-& \frac{46}{1199}x_9 &-& \frac{59}{4796}x_8 &-& \frac{179}{4796}x_6 &-& \frac{59}{436}x_4 &+& \frac{1555}{4796}x_5 \\
\hline
\end{array}$$

Entering: x_5. Leaving: x_7.

$$\begin{array}{|rcrcrcrcrcrcr|}
\hline
x_3 &=& \frac{2157}{39827} &+& \frac{2092}{39827}x_9 &-& \frac{1458}{39827}x_8 &-& \frac{940}{39827}x_6 &-& \frac{12336}{39827}x_4 &-& \frac{1851}{39827}x_7 \\
x_5 &=& \frac{554}{39827} &+& \frac{2236}{39827}x_9 &-& \frac{873}{39827}x_8 &+& \frac{2879}{39827}x_6 &-& \frac{11}{39827}x_4 &-& \frac{4796}{39827}x_7 \\
x_2 &=& \frac{740}{39827} &-& \frac{464}{39827}x_9 &-& \frac{1885}{39827}x_8 &+& \frac{970}{39827}x_6 &-& \frac{22013}{39827}x_4 &+& \frac{639}{39827}x_7 \\
x_1 &=& \frac{233}{39827} &-& \frac{4667}{39827}x_9 &+& \frac{3443}{39827}x_8 &-& \frac{3462}{39827}x_6 &-& \frac{10860}{39827}x_4 &+& \frac{4453}{39827}x_7 \\
\hline
z &=& \frac{3684}{39827} &-& \frac{803}{39827}x_9 &-& \frac{773}{39827}x_8 &-& \frac{553}{39827}x_6 &-& \frac{5393}{39827}x_4 &-& \frac{1555}{39827}x_7 \\
\hline
\end{array}$$

The optimal value: $\frac{3684}{39827}$. An optimal solution: $\left(\frac{233}{39827}, \frac{740}{39827}, \frac{2157}{39827}, 0, \frac{554}{39827}\right)$.

[7]:
```
D = P.final_dictionary()

Z = D.objective_value()
h = 1/Z

solution = D.basic_solution()
```

```python
v = [i * h for i in solution]
print(v)
```

```
[233/3684, 185/921, 719/1228, 0, 277/1842]
```

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока B: $\left(\frac{233}{3684}, \frac{185}{921}, \frac{719}{1228}, 0, \frac{277}{1842}\right)$.