Exercices

Sébastien Tran Tien

3 novembre 2024

Table des matières

1 Préambule **3**
1.1 Utilisation . . . 3
1.2 Provenance des exercices . . . 3

2 Première année **4**
2.1 Dénombrement . . . 4
2.2 Nombres complexes . . . 5
2.2.1 Exercices non géométriques . . . 5
2.2.2 Utilisation des nombres complexes en géométrie 6
2.3 Polynômes . . . 6
2.4 Algèbre linéaire . . . 6
2.4.1 Espaces vectoriels, sous-espaces . . . 6
2.4.2 Applications linéaires et matrices . . . 8
2.4.3 Déterminant et trace . . . 11
2.4.4 Résolution de systèmes linéaires . . . 13
2.5 Suites . . . 13
2.6 Fonctions . . . 14
2.7 Intégration sur un segment . . . 18
2.7.1 Généralités . . . 18
2.7.2 Sommes de Riemann . . . 19
2.7.3 Calcul de primitives . . . 20
2.8 Equation différentielles scalaires d'ordre 1 et 2 . . . 20

3 Deuxième année **22**
3.1 Intégration . . . 22
3.1.1 Généralités . . . 22
3.1.2 Intégrale fonction des bornes . . . 25
3.1.3 Intégrales à paramètre . . . 26
3.1.4 Convergence dominée et sommation L^1 . . . 30
3.2 Séries numériques . . . 31
3.3 Familles sommables . . . 36
3.4 Convexité . . . 37
3.5 Espaces vectoriels normés . . . 38
3.5.1 Normes . . . 38
3.5.2 Ouverts, fermés, densité . . . 42
3.5.3 Compacité . . . 43
3.5.4 Continuité linéaire . . . 44
3.5.5 Connexité par arcs . . . 44
3.5.6 Exponentielles d'endomorphismes . . . 45
3.6 Espaces préhilbertiens . . . 45

3.6.1 Produit scalaire, orthogonal et base orthonormée concrets 45
3.6.2 Un peu plus théoriques 46
3.6.3 Calcul d'infimum par distance à un sous-espace 50
3.7 Suites et séries de fonctions 52
3.7.1 Suites de fonctions 52
3.7.2 Séries de fonctions 54
3.7.3 Suites et séries de fonctions, contre-exemples 57
3.8 Séries entières 57
3.8.1 Rayon de convergence, éventuellement calcul de la somme. 57
3.8.2 Calcul de DSE 59
3.8.3 Equation différentielle 59
3.8.4 Autres 60
3.9 Probabilités 61
3.9.1 Probabilités 61
3.9.2 Variables aléatoires 65
3.10 Algèbre générale 71
3.10.1 Groupes 71
3.10.2 Anneaux, algèbres 71
3.11 Réduction 73
3.11.1 Éléments propres, polynôme caractéristique 73
3.11.2 Diagonalisabilité, trigonalisabilité 75
3.11.3 Fin, avec polynômes d'endomorphismes 79
3.12 Espaces euclidiens 81
3.12.1 Généralités et endomorphismes/matrices orthogonaux 81
3.12.2 Endomorphismes/matrices symétriques réels ; théorème spectral 84
3.13 Réduction d'isométries ($d = 2, 3$) et coniques 85
3.14 Calcul différentiel 86
3.14.1 Différentiabilité et calculs de différentielles 86
3.14.2 Extremas 86
3.14.3 EDP 87
3.14.4 Tout le reste 88
3.15 Équations différentielles 91
3.15.1 Pratique 91
3.15.2 Equations scalaires 91
3.15.3 Systèmes différentiels 93
3.15.4 Wronskien et Grönwall 94
3.15.5 Cas général ou équations non linéaires (HP) 95
3.16 Courbes et surfaces 96
3.16.1 Géométrie dans le plan, courbes 96
3.16.2 Surfaces 97
3.17 Inclassables, planches d'oraux ou Python 97

Chapitre 1

Préambule

1.1 Utilisation

Signification des symboles :

- ⚽ pour les exercices rapides de fin de colle.
- pour les exercices à tester.
- pour les exercices dont je suis content : complets et longs si on les pose sans indication (difficulté variable).
- HP = hors programme de CPGE années $\sim$ 2018.

Pour la version avec/sans solutions, version colleur complète avec remarques et références ou le fichier tex : demande par mail à sebastien.trantien@gmail.com

1.2 Provenance des exercices

Ce fichier est une compilation d'exercices provenant de diverses sources citées en bibliographie, ainsi que de planches d'oraux (RMS, BEOS, sources personnelles). Certains exercices ont été refaits à ma sauce. Les corrections sont de moi pour la plupart d'entre elles.
Merci de me signaler les coquilles !

Chapitre 2

Première année

2.1 Dénombrement

Exercice 1

On considère un rectangle de longueur n et de largeur 2. Déterminer P_n le nombre de façons de paver le rectangle avec des dominos 2×1.

Exercice 2

Soit $n, k \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de $\{1, \ldots, n\}$ en k parties.
   Dans la suite, on notera $S(n, k)$ le nombre de telles partitions. On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.
2. Que vaut $S(n, k)$ pour $k > n$?
3. Que vaut $S(n, 1)$?
4. Démontrer que $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.
5. En déduire un algorithme pour calculer $S(n, k)$.

Exercice 3

On note, pour $n, p \in \mathbf{N}^*$, $S(n, p)$ le nombre de surjections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, p\}$.

1. (a) Calculer $S(n, p)$ pour $p > n$.
   (b) Calculer $S(n, n)$.
   (c) Calculer $S(n, 1)$.
   (d) Calculer $S(n, 2)$.
2. Calculer $S(n+1, n)$.
3. Démontrer que, pour $n, p > 1$, nous avons :
$$S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1))$$
4. Démontrer que, pour $n, p \geqslant 1$, on a :
$$S(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

Exercice 4

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \mathbf{N}$, on note Γ_n^p le nombre de $n-$uplets $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers naturels tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$.

1. Déterminer $\Gamma_n^0, \Gamma_n^1, \Gamma_n^2, \Gamma_1^p$ et Γ_2^p.
2. Démontrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \mathbf{N}$,
$$\Gamma_{n+1}^p = \Gamma_n^0 + \Gamma_n^1 + \cdots + \Gamma_n^p$$
3. En déduire que
$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

2.2 Nombres complexes

2.2.1 Exercices non géométriques

Exercice 5

Soit $p \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tous $a, b \in \mathbf{C}$,
$$|a+b|^p \leqslant C_p(|a|^p + |b|^p).$$

Exercice 6

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Trouver module et argument de $z = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.

Exercice 7:

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

Exercice 8:

Soit $z \in \mathbf{C}$ de module 1. Montrer que $|1+z| \geqslant 1$ ou $|1+z^2| \geqslant 1$.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes complexes de l'unité.

1. Rappeler l'expression des éléments de $\mathbb{U}_n$.
2. Calculer
$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$$
3. En déduire la valeur de $\tan(\pi/8)$.

Exercice 10: Cas d'égalité dans l'IT et compréhension du sup

Déterminer $\sup\limits_{|z|\leqslant 1} |z^3 + 2iz|$.

Exercice 11:

Quelle est l'image du cercle unité privé de 1 par l'application $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 12: (DupXSupp1)

Soit $n \geqslant 3$ et $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les racines $n-$ièmes de l'unité avec $\omega_n = 1$.

1. Calculer, pour $p \in \mathbf{Z}$,
$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^p$$
2. Calculer
$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_k}$$

2.2.2 Utilisation des nombres complexes en géométrie ...

Exercice 13:

Soit A et B deux points distincts du plan. Soit s_O une similitude directe de centre l'origine O. On note $A' = s_O(A)$ et $B' = s_O(B)$.
On considère, de plus, s_A une similitude directe de centre A telle que $s_A(B) = B'$, et s_B une similitude directe de centre B telle que $s_B(A) = A'$. On note $P = s_A(O)$ et $Q = s_B(O)$.
Montrer que P et Q sont symétriques par rapport à O.

2.3 Polynômes

Exercice 14

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que :

1. $P(X^2 + 1) = P$,
2. $P(2X + 1) = P$).

Exercice 15

On pose $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Déterminer une relation de Bézout entre A et B.

2.4 Algèbre linéaire

2.4.1 Espaces vectoriels, sous-espaces

Exercice 16

On pose
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer une base de F
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^3$

Exercice 17

On pose
$$F = \left\{(x, y, x + y, 2x + y)\ ;\ (x, y) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 18

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que F et G ont un vecteur non nul en commun.

Exercice 19:

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que :
$$(\dim(F+G))^2 + (\dim(F \cap G))^2 \geqslant (\dim(F))^2 + (\dim(G))^2$$
Et étudier le cas d'égalité.

Exercice 20:

On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et
$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$$
et enfin, $G = E \backslash F$ le complémentaire de F.

1. F est-il un sous-espace vectoriel de E ? G est-il un sous-espace vectoriel de E ? Justifier la réponse.
2. Montrer que pour tout $g \in G$, $\mathrm{Vect}(g)$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 21:

On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0,\, f(0) = 0,\, f'(1) = 0 \right\}$$

et enfin, pour $k \in \{0,1,2\}$, $e_k : x \longmapsto x^k$ et

$$G = \left\{ a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 \,,\, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 22:

On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que la famille $(f_k)_{k \in \{1,\ldots,n\}}$, avec

$$f_k : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp(a_k x) \end{array} \right.$$

   est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$

2. On suppose, de plus, que les a_k sont strictement positifs. Montrer que la famille $(g_k)_{k \in \{1,\ldots,n\}}$, avec

$$g_k : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(a_k x) \end{array} \right.$$

   est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$

Exercice 23: Le même, pour interroger sur le Vandermonde

Soit $n \in \mathbf{N}*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer que la famille $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, avec

$$f_k : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp(a_k x) \end{array} \right.$$

est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.
(On pourra annuler une combinaison linéaire puis, en dérivant, se ramener à un Vandermonde)

2.4.2 Applications linéaires et matrices

Exercice 24

Montrer que P est inversible et donner son inverse, où :

1. $$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

2. $$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 25

Déterminer l'image de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 26:

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels. On considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P'(a_1), \dots, P^{(n)}(a_n)) \end{array} \right.$$

Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 27: Symétries, projections

1. Expression analytique de la symétrie par rapport à $\mathbf{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ parallèlement à $\mathbf{R}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$
2. Matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ parallèlement à la droite engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.
3. Matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ parallèlement à $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y = z\}$

Exercice 28:

Soit
$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\ker(p)$ et une base de $\operatorname{Im}(p)$. L'application p est-elle injective ? surjective ? Est-ce un automorphisme de $\mathbf{R}^3$?
4. Montrer que $\ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p) = \mathbf{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de $p \circ p$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Que conclure ?

Exercice 29:

Soit
$$s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x-3y, x+2y, 2x+2y+z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que s est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer $\ker(s)$ et $\operatorname{Im}(s)$. L'application s est-elle injective ? surjective ? Est-ce un automorphisme de $\mathbf{R}^3$?
4. Déterminer la matrice de $s \circ s$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Que conclure ?

Exercice 30

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E qui stabilise toute droite de E.
Montrer que u est une homothétie.

Exercice 31

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est un projecteur. Montrer que u et v commutent si et seulement si $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v.

Exercice 32: BEOS 3235 CCP PC 2017

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{C}-$espace vectoriel de dimension finie n.
On suppose que f est de rang 1 et que f^2 n'est pas l'endomorphisme nul.

1. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans E.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 33

Soit
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$
2. Montrer que $\ker(f) = \mathbf{R}_0[X]$
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$ puis montrer l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer que f est nilpotent.
5. On considère maintenant f comme un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$. Est-il surjectif ? Injectif ?

Exercice 34: Endomorphismes de carré nul

Soit E un $\mathbf{R}-$espace vectoriel de dimension finie n, et f un endormorphisme de E On note r le rang de f.

1. Montrer que
$$f^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$$
Quelle inégalité vérifie le rang de f ?
2. Soit E_1 un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. Montrer que f induit un isomorphisme de E_1 sur $\mathrm{Im}(f)$.
3. On suppose désormais que $f^2 = 0$.
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de E_1. Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_r, f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $E_1 \oplus \mathrm{Im}(f)$.
4. On complète $(e_1, \dots, e_r, f(e_1), \dots, f(e_r))$ (si nécessaire) par des vecteurs de $\ker(f)$ de façon à obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans la base obtenue ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.
6. (Exemple) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
Montrer que $f^2 = 0$ puis déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f est
$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 35:

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = I_n$.
A-t-on nécessairement $BA = I_n$?

2.4.3 Déterminant et trace

Exercice 36

Calculer, pour $a, b, c \in \mathbf{R}$, le déterminant suivant sous forme factorisée :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 37

Soit $a, b \in \mathbf{R}$. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 38

1. Vérifier que $(1, i)$ est une base du $\mathbf{R}-$espace vectoriel $\mathbf{C}$.

   Pour $a, b \in \mathbf{C}$, on note $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme du $\mathbf{R}-$espace vectoriel $\mathbf{C}$ donné par :

$$\varphi_{a,b}(z) = az + b\overline{z}$$

2. Déterminer la matrice dans la base $(1, i)$ de $\varphi_{a,b}$.
3. (a) En déduire que, pour tout f endomorphisme du $\mathbf{R}-$espace vectoriel $\mathbf{C}$, il existe un unique $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ tel que $f = \varphi_{a,b}$.
   (b) Exprimer en fonction de a et b le déterminant de $\varphi_{a,b}$.

Exercice 39:

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $AB = BA$ et $p, q \in \mathbf{R}$ tels que $p^2 - 4q \leqslant 0$. Montrer que

$$\det(A^2 + pAB + qB^2) \geqslant 0$$

Exercice 40

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(R)$ l'équation :

$$X = \mathrm{tr}(X)A + B$$

Exercice 41

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit p un projecteur de E. Donner une relation entre la trace et le rang de p.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
   Montrer que
$$f^2 = \mathrm{tr}(f)f$$
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$. Montrer que f est un projecteur.

2.4.4 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 42:

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+8z-7t &=& -2 \\ 3x+2y+12z-5t &=& 6 \\ -x+y+z-5t &=& -10 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+3z &=& 3 \\ 3x+y-5z &=& 0 \\ 4x-y+z &=& 3 \\ x+3y-13z &=& -6 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z+4t &=& 10 \\ 2x-y+z-t &=& 1 \\ 3x+y+4z+3t &=& 11 \\ -2x+6y+4z+10t &=& 18 \end{array}\right.$$

2.5 Suites

Exercice 43

$\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2+1} = ?$

Exercice 44

Rappeler une façon de voir que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$ diverge.

Exercice 45

Rappeler pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbf{R}$ les suites $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbf{N}}$ divergent, et le redémontrer.

Exercice 46: Suite arithmético-géométrique

Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par

$$u_0 = a,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_0 = b,\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

Etudier ces deux suites.

Exercice 47: avec un peu de séries pour la forme

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$$

1. Vérifier que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Etablir : $\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} \geqslant 2\sqrt{n}$$

   Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $v_n = |u_n - n|$.
3. Pour $n \in \mathbf{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et u_n et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
4. En déduire un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$.
5. Quelle sont les natures des séries $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{u_n}$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{\sqrt{u_n}}$?

Exercice 48: application de Cesaro

On considère $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites numériques convergentes, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. On pose pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1}$$

1. On suppose $\ell_1 = \ell_2 = 0$. Etudier la convergence de (w_n).
2. On ne suppose plus $\ell_1 = \ell_2$. Etudier la convergence de (w_n).

Exercice 49:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique dont les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

2.6 Fonctions

Exercice 50: Formule de Stirling en admettant Wallis

Le but de cet exercice est d'établir $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

1. (a) Soit Φ la fonction définie par
$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) - x$$
Montrer que Φ est positive sur $[0,1[$.

   (b) Soit ψ la fonction définie par
$$\psi(x) = \Phi(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$
Montrer que ψ est négative sur $[0,1[$. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$,
$$0 \leqslant \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

   (c) En considérant la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{1}{2n+1}$, déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:
$$0 \leqslant \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

2. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par
$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$$
et
$$b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}$$
   (a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes, et que leur limite commune ℓ est strictement positive.

   (b) Justifier que, pour les grandes valeurs de n, $\frac{1}{\ell}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ peut être considéré comme une expression approchée de $n!$.

3. On donne la formule de Wallis :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{n\left(\prod_{k=1}^{n} 2k-1\right)^2} = \pi$$
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$
et en déduire que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Exercice 51:

On pose $f : x \mapsto (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. On le note D_f. Vérifier que f est dérivable en tout point de D_f, et y calculer sa dérivée f'.
2. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. f est-elle prolongeable par continuité en $-\frac{\pi}{2}$?
   On note $\tilde{f}$ le prolongement de f à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 52: Méthode de Newton, convergence linéaire

Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$. On suppose $b - a \leqslant 1$.
On note

$$F : \left| \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$$

1. (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = 0$
   (b) Montrer que $|f''|$ admet un maximum sur $[a,b]$ et que $\min\limits_{x\in[a,b]} f'(x) > 0$

   On note $C = \dfrac{\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min_{x\in[a,b]} f'(x)}$. On suppose $C > 2$.

   (c) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$:

$$|F(x) - \alpha| \leqslant \frac{C}{2}|x - \alpha|$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.

Exercice 53: Méthode de Newton, convergence quadratique

Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$. On suppose $b - a \leqslant 1$.
On note

$$F : \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$$

1. (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = 0$
   (b) Montrer que $|f''|$ admet un maximum sur $[a,b]$ et que $\min\limits_{x\in[a,b]} f'(x) > 0$

   On note $C = \dfrac{\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min_{x\in[a,b]} f'(x)}$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$:

$$|F(x) - \alpha| \leqslant \frac{C}{2}|x - \alpha|^2$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$.
   On suppose que l'on prend u_0 assez proche de α, au sens où $|u_0 - \alpha| < \frac{2}{C}$.
   Montrer qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.

Exercice 54: Méthode de Newton avec égalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$. On suppose $b - a \leqslant 1$.
On note

$$F : \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$$

1. (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = 0$
   (b) Montrer que $|f''|$ admet un maximum sur $[a,b]$ et que $\min\limits_{x\in[a,b]} f'(x) > 0$

   On note $C = \dfrac{\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min_{x\in[a,b]} f'(x)}$. On suppose $C > 2$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe un réel $z \in [\min(\alpha,x), \max(\alpha,x)]$ tel que

$$F(x) - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x - \alpha)^2$$

   En déduire que

$$\forall x \in [a,b], \qquad |F(x) - \alpha| \leqslant \frac{C}{2}|x - \alpha|$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.
   (b) Montrer que $u_{n+1} - \alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(u_n - \alpha)^2$

Exercice 55

Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}$ continue. On note $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ le cerle unité.

1. Montrer qu'il existe z et z' dans $\mathbf{U}$ diamétralement opposés tels que $f(z) = f(z')$
2. Montrer qu'il existe z et z' dans $\mathbf{U}$ se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que $f(z) = f(z')$

Exercice 56

Idées d'autres exercices :

1. Grönwall, par exemple majorer $|y(t)|$ si $|y'(t)| \leqslant \alpha|y(t)|$, en déduire que si l'EDO $y' = F(t, y)$ admet une (des) solutions sur $[0, T]$ avec F globalement lipschitz en y, alors deux solutions associées à la même condition initiale sont égales sur $[0, T]$.
2. Montrer que $f : x \longmapsto e^{-1/x^2}$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ (avec obligatoirement le théorème de limite de la dérivée ; cet exercice est forcément fait dans leur cours mais c'est juste pour vérifier).
3. L'exercice de la section équations différentielle du type $y' + ay \longrightarrow 0$.
4. L'exercice 4 du Gourdon est bien. Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante de réels postifs x_n telle que pour tout n, $f^{(n)}(x_n) = 0$.
5. L'exercice suivant de :

   Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que pour tout $k = 0, \dots, n-1$, on ait $\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins n fois.

2.7 Intégration sur un segment

2.7.1 Généralités

Exercice 57: IPP

Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $f'' \geqslant 0$ sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Exercice 58: Riemann-Lebesgue cas $\mathcal{C}^1$

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 59

Soit $f, g : [0, 1] \longmapsto \mathbf{R}_+$ continues et telles que $fg \geqslant 1$ sur $[0, 1]$. Montrer que

$$1 \leqslant \int_0^1 f \int_0^1 g$$

Exercice 60:

On cherche à montrer que
$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-u\sin(x)}\,\mathrm{d}x = 0$$

1. Pour $u \in \mathbf{R}$, montrer que
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-u\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$
et en déduire
$$\int_0^{\pi} e^{-u\sin(x)}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$
2. Montrer que
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$$
3. Conclure.

Exercice 61:

Montrer que
$$\lim_{u\to+\infty} e^{-u^2}\int_0^{u} e^{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 62: Inégalité de Poincaré 1D

Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ s'annulant en a. Montrer :
$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$
Cas d'égalité ?

Exercice 63

Soit $f : [-1,1] \longmapsto \mathbf{R}$ continue ne s'annulant pas sur $[-1,1]$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant 4$$

2.7.2 Sommes de Riemann

Exercice 64

Etude de la convergence de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Calcul de la limite éventuelle.

Exercice 65

Etude de la convergence de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin(\frac{k\pi}{n}), \quad n \in \mathbf{N}^*$. Calcul de la limite éventuelle.

2.7.3 Calcul de primitives

Exercice 66

Une primitive de arccos ? arcsin ? arctan ?

Exercice 67

Calculer, sur un intervalle à préciser, une primitive de

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x^2-1}$.

Exercice 68:

Calculer une primitive de

$$f : x \longmapsto \frac{e^{x/2}\cosh(x/2)}{\cosh(x)}$$

à l'aide du changement de variable $u = e^x$. On rappelle que :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2.8 Equation différentielles scalaires d'ordre 1 et 2

Voir aussi la section *équations différentielles*, sous-section *pratique*.

Exercice 69:

Résoudre les équations différentielles suivantes sur un intervalle à préciser :

1. $y' - xy = x$
2. $y' + 2x = 4e^x + \sin(x) + \cos(x)$
3. $y' = y\tan(x) + \sin(x)$
4. $xy' - 2y = -\ln(x)$

Exercice 70: BEOS 3813 TPE PC 2016

Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f'(x)f(-x) = 1$$

Exercice 71:

Résoudre l'équation différentielle suivante sur un intervalle ne contenant pas -1.

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x} \qquad (*)$$

et étudier le prolongement éventuel à $\mathbf{R}$.

Chapitre 3

Deuxième année

3.1 Intégration

3.1.1 Généralités

Exercice 72: Fonctions de signe constant, simples

Etudier la convergence de :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\ln(t)}{(1+t^4)^3}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t-\sqrt{t^2+1})\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2\,\mathrm{d}t$

Exercice 73: Fonctions de signe constant, discussion selon le paramètre

Condition nécessaire et suffisante sur ...

1. ... $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ pour que $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. ... $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 74: Fonctions positives un peu plus compliquées (avec un DL, ...)

Etudier la convergence :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^4+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh(t)-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cosh(\sqrt{t})-\cos(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 75

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 76

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (Pour le calcul, indiquer éventuellement de procéder au changement de variable $u = \arctan(t)$).

Exercice 77:

1. Montrer que l'intégrale suivante est convergente :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
2. Effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, et en déduire la valeur de l'intégrale.
3. Retrouver ce résultat en effectuant une IPP.

Exercice 78

Etudier pour $n \in \mathbf{N}$ la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Calculer I_n (on pourra chercher une relation de récurrence liant I_{n+1} et I_n.

Exercice 79:

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que ces intégrales convergent et que $I = J$.
2. En factorisant par t^2 dans l'intégrale $I+J$ et en effectuant le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$, déterminer la valeur commune de I et J.

Exercice 80: Fonctions de signe non constant

Etudier la convergence de :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(\cos\left(\frac{1}{t}\right))\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{1} \ln(\cos\left(\frac{1}{t}\right))\,\mathrm{d}t$

Exercice 81:, BEOS 2326 Centrale PC 2016

1. Soit $f :]0,1[\longmapsto \mathbf{R}$ continue croissante telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire, pour $\alpha > 0$, un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}$$

Exercice 82: BEOS 4529 Mines MP 2018

Soit $\alpha > 0$ et $f : [1,+\infty[\longmapsto \mathbf{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 83: Fonction Gamma 1

On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de Γ est $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer
$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
et en déduire
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $g_t : x \in \mathbf{R}_+^* \longmapsto t^{x-1}$ est convexe. En déduire que Γ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
4. On admet que Γ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que
$$\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

Exercice 84: Fonction de signe non constant

Etudier la convergence de :
$$\int_1^{+\infty} \ln(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}) \, \mathrm{d}t$$

3.1.2 Intégrale fonction des bornes

Exercice 85

Soit f une fonction positive intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x t f(t) dt = 0.$$

Exercice 86:

Etude et représentation graphique de

$$f : x \longmapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 87: BEOS 2507 Centrale PC 2016

On étudie l'intégrale
$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f aux bornes de son intervalle de définition.
3. Etudier les variations de f.

3.1.3 Intégrales à paramètre

Exercice 88: BEOS 3516 Mines PC 2017

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 89:

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est bien définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour $x \in \mathbf{R}$, exprimer $F'(x)$ comme une intégrale à paramètre.
2. Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer $F'(x)$ et en déduire une expression explicite de $F(x)$.

Exercice 90:

Pour $x \in \mathbf{R}_+$, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$. Est-elle définie pour $x < 0$?
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
3. F est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 91: Fonction Gamma, bis

1. Montrer que, pour $x > 0$, la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer la fonction Gamma, définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et que l'on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

3. Montrer

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

et en déduire

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

4. Montrer Γ est une fonction convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
5. Établir :

$$\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

6. Déterminer la limite de Γ en $+\infty$.

Exercice 92:

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2}\arctan(x) + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire la valeur de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 93: BEOS 4622 Mines MP 2018 - Calcul de (la moitié) de l'intégrale de Gauss

Soit

$$F : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire que la fonction $x \longmapsto F(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ est constante sur $\mathbf{R}$
3. Conclure sur la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 94

Pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, on pose :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} e^{-tx} \, dx$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et déterminer une formule explicite pour $F'(t)$.
3. Déterminer une formule explicite pour $F(t)$.
4. Calculer $\lim_{t \to 0} F(t)$.

Exercice 95:

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

On considère

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \, dt \end{array} \right.$$

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner $F'(x)$.
3. Calculer explicitement $F'(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.
4. En déduire :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$$

5. Donner l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
6. Conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 dt$

Exercice 96:

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^2)^n}$$

1. Montrer que F_n est dérivable sur tout segment $[a,b] \subset \mathbf{R}_+^*$, puis sur $\mathbf{R}_+^*$ et que

$$\forall x > 0, \quad F_n'(x) = -2nxF_{n+1}(x)$$

2. En déduire une expression de $F_n(x)$.

Exercice 97:

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^n}$$

Montrer que F_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, exprimer $F_n'(x)$ en fonction de $F_{n+1}(x)$ et en déduire une expression de $F_n(x)$.

Exercice 98: BEOS 3234 CCP PC 2017

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

et

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel x convenable.

1. Montrer que G est bien définie sur $\mathbf{R}$. On admet que F l'est aussi.
2. Pour $x > 0$, prouver l'égalité $G(x) = xG(1)$.
3. Pour $x \in \mathbf{R}$, montrer l'encadrement $0 \leqslant G(x) - F(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$.
   En déduire que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} xG(1)$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée seconde est donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad F''(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

5. Montrer que F est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 4y = \pi - 4xG(1)$$

   sur $]0, +\infty[$.
6. En déduire une expression de F sur $]0, +\infty[$ puis sur $\mathbf{R}$.

Exercice 99: Intégrale de Dirichlet

On considère la fonction F donnée pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad F(x) = C - \arctan(x)$$

3. En considérant la suite $(F(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$, déterminer la valeur de C.
4. En considérant la suite $(F(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbf{N}^*}$, Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

3.1.4 Convergence dominée et sommation L^1

Exercice 100

Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \, \mathrm{d}t$$

Exercice 101

Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + e^x}$$

Exercice 102

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 103

Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \cos(x/n) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$$

Exercice 104

Déterminer la limite de :

1. $u_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t$
2. $v_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}t$

sachant que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 105

Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$ on pose :

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p e^{-nt}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t$$

1. (a) Montrer que S_n est bien définie.
   (b) Pour $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^*$, on pose

   $$T(a,b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} \, \mathrm{d}t$$

   Calculer $T(a,b)$.
2. On veut montrer, de deux façons différentes, que

   $$S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$$

   (a) *Première méthode :* le montrer en utilisant le théorème d'intégration terme à terme.
   (b) *Deuxième méthode :* montrer que , pour tout $n \in \mathbf{N}$,

   $$S_0 = p! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n$$

   puis, que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et conclure.

Exercice 106

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue.
Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) \, \mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$$

3.2 Séries numériques

Exercice 107: Niveau 1, séries à termes positifs

Déterminer la nature de la série de terme général suivant :

1. $\dfrac{3n+2}{n^3}$
2. $\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$
3. $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $\ln(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1})$
5. $\dfrac{2^n}{1+n!}$
6. $\dfrac{1}{n^2\ln(n)}$
7. $\dfrac{\ln(n)}{n}$
8. $\dfrac{n!}{n^n}$
9. $\ln(1+\dfrac{2}{n})-\dfrac{1}{n}$

Exercice 108: Niveau 2, DLs très simples ou équivalents directs

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt{n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(\frac{\pi}{\sqrt{n}})$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln(\cos(\frac{1}{2n}))$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln(1-\frac{1}{\sqrt{1+n}})$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^2}$

Exercice 109: Niveau 3

Nature de la série de terme général suivant (éventuellement en fonction du paramètre) :

1. $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$
2. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
3. $\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n - \dfrac{n}{n+1} e^a$

Exercice 110: (BEOS 2394 Banque PT 2016) Niveau 3

Nature de la série de terme général suivant en fonction du paramètre réel α :

$$\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$$

Exercice 111: Niveau 4, MP - utilise théorèmes de MP

Déterminer la nature de $\sum u_n$ où u_n égale :

1. $\dfrac{1}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}\right)^{\alpha}}$
2. $(-1)^n \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(n-p)}$

Exercice 112:

On note, pour $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} \,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_n pour tout $n \geqslant 3$ (on pourra effectuer le changement de variable $t = 1 + x$).
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_n I_n$.

Exercice 113:

Existence et calcul de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

Exercice 114:

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln(n)}$
2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n (\ln(n))^2}$

Exercice 115: BEOS 3226 Banque PT 2017

Pour $a \in \mathbf{R}^*$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{1+(na)^2}$.

1. Etudier la convergence de la série. La somme est notée $h(a)$.
2. Etudier les variations de h, puis sa limite en $+\infty$.
3. Soit $a \in \mathbf{R}^*$. Prouvez que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{1+((k+1)a)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+(ta)^2} \leqslant \frac{1}{1+(ka)^2}$$

4. Donner un équivalent de $h(a)$ quand $a \to 0$.

Exercice 116:

Soit $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ une série à termes positifs convergente.

1. Nature de la série de terme général $v_n = \frac{1}{n}\sqrt{u_n}$.
2. Nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n}\sqrt[3]{u_n}$.

Exercice 117: Convergence et somme d'une série d'intégrales généralisées

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$ existe.
2. Existence et calcul de

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} I_n$$

Exercice 118:

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. Calculer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
2. Existence et calcul de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!}$$

Exercice 119:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que, si $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$ est absolument convergente, alors les séries $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} v_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} w_n$ le sont aussi.

   Dans ce cas, que dire de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$?
2. Montrer que, si $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$ est convergente mais pas absolument convergente, il se peut que $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} v_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} w_n$ divergent.
3. Sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Exercice 120:

Condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$, $a > 0$ et $b > 0$ pour que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} - \alpha \ln(n)$$

soit convergente.

Exercice 121: Nature des séries selon un paramètre

Nature des séries suivantes, selon le(s) paramètre(s) :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-n^\alpha} \int_1^n e^{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin(\pi\sqrt[3]{n^3 + \lambda n^\alpha}), \quad \lambda \neq 0,\ \alpha \leqslant 2$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$

Exercice 122:

Existence et calcul de :

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+4)}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$

Exercice 123:

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. Comparer les nature des séries de termes généraux respectifs u_n et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 124: BEOS 4319 Banque PT 2018

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite à termes positifs.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{1+nu_n}$ lorsque
   (a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$
   (b) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}$
   (c) $u_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe m entier tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est à termes strictement positifs.
2. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$?
3. (a) Montrer que si $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (b) En déduire la nature de $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ en fonction de $\sum u_n$.
4. Montrer que $\sum \frac{u_n}{1+u_n^2}$ peut diverger et peut converger.

Exercice 125:

Soit (u_n) une suite à termes positifs décroissante. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Exercice 126:

Soit (a_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = a > 0$. Etudier la série $\sum\limits_n \dfrac{1-a_n}{n}$.

Exercice 127:

Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$$

3.3 Familles sommables

Exercice 128

Existence et calcul de :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

Exercice 129

Soit $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$.

1. Montrer que la famille des $(z^{pq})_{p,q \in \mathbf{N}^*}$ est sommable et calculer la somme de ses termes.
2. En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{1-z^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n$$
où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

Exercice 130

1. Pour quels $\alpha > 0$ la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q \geqslant 1}$ est-elle sommable ?
2. Pour quels $\alpha > 0$ la famille $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{p,q \geqslant 1}$ est-elle sommable ?
3. Soit $a, b > 1$. La famille $\left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{p,q \geqslant 0}$ est-elle sommable ?

Exercice 131

La famille suivante est-elle sommable ?
$$\left(\frac{1}{np(n+p)}\right)_{n,p \in \mathbf{N}^*}$$

3.4 Convexité

Exercice 132:

Soit f une application convexe et majorée sur $\mathbf{R}$. Montrer que f est constante. Le résultat est-il toujours valable si on suppose maintenant f convexe majorée sur $\mathbf{R}_+$?

Exercice 133:

Soit f une application convexe sur un intervalle non majoré I.

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ possède une limite, éventuellement égale à $+\infty$, quand $x \to +\infty$.
2. Dans le cas où cette limite est finie, disons $\ell \in \mathbf{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ admet une limite, éventuellement égale à $-\infty$, quand $x \to +\infty$.

Exercice 134: Inégalité de Jensen discrète

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ convexe, $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs vérifiant
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Montrer que
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Exercice 135:

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \cdot + a_n)$$

Exercice 136:

Montrer que $f : x \longmapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
En déduire que pour tous $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ réels strictement positifs, on a

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} b_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)}$$

Exercice 137:

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application deux fois dérivable. On suppose que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x)f''(x) \geqslant f'(x)^2$$
2. On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. Montrer que $\ln \circ f$ est convexe.
3. f est-elle convexe ?

Exercice 138: Une version de l'inégalité de Jensen

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et $\Phi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ convexe. Montrer que

$$\Phi\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \Phi \circ f(t)\,\mathrm{d}t$$

3.5 Espaces vectoriels normés

3.5.1 Normes

Exercice 139:

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on pose pour tout $A = (a_{ij})$:

$$\|A\|_1 = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$$

1. Montrer que ce sont bien des normes et qu'elles sont équivalentes.
2. (a) Déterminer le plus petit réel α tel que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \|AB\|_1 \leqslant \alpha \|A\|_1 \|B\|_1$$

   (b) Déterminer le plus petit réel β tel que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \|AB\|_\infty \leqslant \beta \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Exercice 140:

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et $N(f) = \displaystyle\int_0^1 e^x |f(x)| \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que N est une norme.
2. On pose pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

   En utilisant la suite (f_n), déterminer si les normes N et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes sur E.

Exercice 141:

On note E le $\mathbf{R}$-ev des applications continues bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, muni de $\| \cdot \|_\infty$.

1. $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geqslant 0\}$ est-elle fermée dans E ?
2. $U = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) > 0\}$ est-elle ouverte dans E ?

Exercice 142:

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et ν_1, ν_2 les applications de E dans $\mathbf{R}$ définies, pour toute $f \in E$, par

$$\nu_1(f) = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| \, \mathrm{d}t$$

et

$$\nu_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \, \mathrm{d}t$$

Montrer que ν_1 et ν_2 sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 143:

Soit E un evn et Ω un ouvert de E.

1. Montrer que pour tout $a \in E$, la partie $\{a + x\ ,\ x \in \Omega\}$ est un ouvert de E.
2. En déduire que pour toute partie A de E, la partie $\{a + x\ ,\ (a, x) \in A \times \Omega\}$ est un ouvert de E.

Exercice 144:

Soit E, F et G des evn, $A \subset E$ et $B \subset F$ avec A et B non vides, et $f : A \longleftrightarrow G$ et $g : B \longrightarrow G$ deux applications.
On note

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & f(x) + g(y) \end{array} \right.$$

Montrer que φ est continue sur $A \times B$ si et seulement si f est continue sur A et g est continue sur B.

Exercice 145:

On note $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R})$ et N, N' et N'' les applications de E dans $\mathbf{R}$ définies, pour $f \in E$, par

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$N'(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

et

$$N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$$

1. Montrer que N, N' et N'' sont des normes sur E.
2. Montrer que N est dominée par N' et N' est dominée par N''.
3. Comparer N, N' et N'' pour la relation d'équivalence entre normes.

Exercice 146:

On note

$$N : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} \end{array} \right.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbf{R}^2 2$.
2. La comparer à la norme euclidienne, en donnant le meilleur encadrement possible.
3. Donner une expression explicite de $N(x, y)$ en fonction de x et de y et à l'aide de fonctions usuelles, représenter graphiquement la boule unité pour N. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 147:

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R}) \mid f(0) = 0\}$.
Pour $f \in E$, on note

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

et

$$\nu(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)|$$

Montrer que N et ν sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 148:

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et, pour $f \in E$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

1. Montrer que ce sont des normes et les comparer.
2. Etudier pour chacune si $\Omega = \{f \in E \mid \forall t \in [0,1],\ f(t) > 0\}$ est une partie ouverte.

Exercice 149: (BEOS 1331 CCP MP 2015)

Soit E le $\mathbf{R}$-ev des suites réelles convergeant vers 0, muni de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Soit $(u_n) \in E$, montrer que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{u_n}{2^n}$ converge.
3. Montrer que l'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n} \end{array} \right.$$
est continue sur E.

Exercice 150: (BEOS 4619 TPE MP 2018)

Soit E un evn.

1. Soit F un sev de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sev.
2. Soit F un hyperplan. Montré que F est fermé ou dense dans E.

Exercice 151: BEOS 4595 Mines MP 2018

Soit $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$ un polynôme à coefficients réels simplement scindé.
Soit $Q = X^n + b_1 X^{n-1} + \ldots + b_{n-1} X + b_n$ un polynôme à coefficients réels.
Montrer que si les b_i sont assez proches des a_i alors Q est simplement scindé.

Exercice 152:

Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose $N(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$.

1. Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, vérifier que $N(P)$ est bien défini. Puis, vérifier que $(\mathbf{R}[X], N)$ est bien un evn.
   Pour $n \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$ on pose $u_n(P) = P^{(n)}(0)$ et $v(P) = P'$.
2. Les applications u_n et v sont-elles continues sur $(\mathbf{R}[X], N)$?

Exercice 153: Un cas particulier simple du théorème de Riesz

Soit $E = \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\}$.

1. Vérifier que E muni de $\|(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n|$ est un evn.
2. Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $(e_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $e_n^{(k)} = 0$ si $n \neq k$ et $e_n^{(n)} = 1$.
   En utilisant les suites $(e_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte.

Exercice 154: Distance à un sous-espace de dimension finie

Soit E un evn et F un sev de dimension finie de E. Pour $x \in E$, on pose $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$. Montrer que $d(x,F)$ est atteinte.

3.5.2 Ouverts, fermés, densité

Exercice 155:

Soit E le $\mathbf{R}-$ev des applications bornées de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, et

$$A = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1],\, e^{f(x)} \geqslant 2 + f(x)\}$$

Montrer que A est une partie fermée non bornée de E.

Exercice 156: (

Soit E le $\mathbf{R}$-ev des suites réelles bornées, muni de la norme $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n|$.

1. Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ des suites presque nulles.
2. On note c_0 l'ensemble des suites réelles de limite nulle, et μ l'opérateur de moyenne sur E :

$$\mu : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (u_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \end{array}\right.$$

   (a) Vérifier que μ est bien un endomorphisme continu de E. Trouver le plus petit réel κ tel que
   $$\forall (u_n) \in E, \quad \|\mu(u_n)\|_\infty \leqslant \kappa \|(u_n)\|_\infty$$
   (b) Montrer que $\mu(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}) \subset c_0$.
   (c) En utilisant les questions précédentes, retrouver le théorème de Cesaro.

Exercice 157:

On note E le $\mathbf{R}$-ev des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, et on note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions continues et monotones de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $\mathcal{M}$ est un fermé d'intérieur vide.

Exercice 158:

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, et on note

$$A = \{f \in E, \mid f(0) = 0 \,\text{et}\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1\}$$

1. Montrer que A est fermée dans E.
2. Montrer que, pour $f \in E$, si $f(0) = 0$ et $\|f\|_\infty \leqslant 1$, alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t < 1$
3. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in [0,1]$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + 1/n & \text{si } x \geqslant \alpha \\ (1/\alpha + 1/\alpha n)\, x & \text{si } x < \alpha \end{cases}$$

   Montrer qu'on peut trouver α tel que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$.

   En déduire la distance de 0 à A (on rappelle qu'il s'agit de $\inf\limits_{f \in A} \|f\|_\infty$).

Exercice 159

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On rappelle que son graphe est :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))\,,\, x \in \mathbf{R}\}$$

1. Montrer que, si f est continue sur $\mathbf{R}$, alors Γ_f est fermé dans $\mathbf{R}^2$.
2. Montrer que, si f est bornée et Γ_f est fermé dans $\mathbf{R}^2$, alors f est continue sur $\mathbf{R}$.
3. Et si f est non bornée ?

3.5.3 Compacité

Exercice 160

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte non vide de E, et $f : K \longrightarrow K$ une application $\rho-$lipschitzienne.

1. Montrer que, si $\rho < 1$, alors f admet un point fixe.
2. Montrer que, si $\rho = 1$ et K est convexe, alors f admet un point fixe.

   Indication : considérer, pour $a \in K$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : x \longmapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x)$.

Exercice 161: Pseudo-Kakutani

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie non vide, compacte et convexe de E.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $u(K) \subset K$. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u^{(n)} = \frac{1}{n}(\mathrm{id} + u + \ldots + u^{n-1})$$

   Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} u^{(n)}(K) \neq \varnothing$.

   Montrer que si $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} u^{(n)}(K)$, alors $u(x) = x$.

2. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent deux à deux, et telle que pour tout $i \in I$, $u_i(K) \subset K$. Montrer qu'il existe dans K un point fixe commun à tous les u_i.

3.5.4 Continuité linéaire

Exercice 162:

1. Soit Φ une forme linéaire positive sur $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$, c'est-à-dire une forme linéaire telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}), \quad f \geqslant 0 \Rightarrow \Phi(f) \geqslant 0$$

   Montrer que Φ est continue, trouver le plus petit réel κ tel que $|\Phi| \leqslant \kappa \|\cdot\|_\infty$, et donner un exemple d'une telle forme linéaire.

2. L'évaluation en 0 :

$$\mathrm{ev}_0 : \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}) \left| \begin{array}{ccc} \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

   est-elle continue sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$? Pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 163:

Soit E un evn distinct de $\{0\}$.
On définit la norme suivante sur l'ensemble des endomorphismes continus $\mathcal{L}_c(E)$:

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme et qu'elle est sous-multiplicative, i.e.

$$\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E), \qquad \|u \circ v\| \leqslant \|u\| \|v\|$$

Montrer qu'il n'existe pas de couple (u, v) d'endomorphismes continus sur E tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}$.

3.5.5 Connexité par arcs

Exercice 164

Soit I un intervalle réel. On note $A = \{(x,y) \in I^2 \mid x < y\}$.

1. Montrer que A est connexe par arcs dans $\mathbf{R}^2$
2. En déduire que toute application continue injective de I dans R est strictement monotone.

3.5.6 Exponentielles d'endomorphismes

Exercice 165: ⚽

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $e^A = I_2$.
A-t-on $A = 0$?

3.6 Espaces préhilbertiens

3.6.1 Produit scalaire, orthogonal et base orthonormée concrets

Exercice 166: BEOS 4321 Banque PT 2018

On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$. On pose :

$$\Theta : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

et

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_0^1 \left(f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\right)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

1. Montrer que Θ est un produit scalaire
2. Montrer que Φ est un produit scalaire
3. Trouver $m, M \in \mathbf{R}^*$ tels que pour tout $f \in \boldsymbol{E}$,

$$m\Phi(f,f) \leqslant \Theta(f,f) \leqslant M\Phi(f,f)$$

(avec bien sûr $m \geqslant 0$...)

Exercice 167:

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et $N : E \longmapsto \mathbf{R}$ définie pour tout $f \in E$, par

$$N(f) = \left(\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t + f(0)f(1)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que N est une norme sur E (on pourra montrer qu'elle découle d'un produit scalaire).

Exercice 168

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et, pour $f, g \in E$,

$$(f \mid g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.
2. Quel est l'orthogonal de la droite engendrée par $t \longmapsto 1$?
3. Quel est l'orthogonal de $G := \{g \in E \mid g(0) = 0\}$?

Exercice 169: BEOS 508 Banque PT 2013

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et

$$\forall f, g \in E, \quad (f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ définit bien un produit scalaire sur E.
2. On pose
$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R}) \mid f'' = f\}$$
Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.

Exercice 170: Polynômes de Laguerre - BEOS 3781 Banque PT 2017

On note $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbf{R}) \mid \int_0^{+\infty} f^2(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \right\}$

1. Montrer que, pour $a, b \in \mathbf{R}$,
$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$
2. Montrer que :
$$\varphi : \left| \begin{array}{lcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$
est définie, et constitue un produit scalaire.
3. On définit les fonctions L_n pour $n \in \mathbf{N}$ par :
$$L_0(x) = 1 \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$$
Montrer que L_n est un polynôme de degré n.
4. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthonormale.

3.6.2 Un peu plus théoriques

Exercice 171

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, strictement positive.
On définit sur $\mathbf{R}[X]$ un produit scalaire par $(P \mid Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de $\mathbf{R}[X]$ pour ce produit scalaire, échelonnée en degré.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une telle base. Montrer que les P_n sont tous scindés sur $\mathbf{R}$, à racines simples.
3. On fixe $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P_n.
   Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2n-1}[X], \qquad \int_0^1 f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

Exercice 172

Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs unitaires de E, tels que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i)^2 \qquad (*)$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 173: BEOS 1602 Mines-Ponts MP 2015 - Pareil en plus compliqué

Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'éléments de E, telle que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i)^2$$

1. Montrer que $\|e_n\|^2 \leqslant 1$.
2. Montrer que $\|e_n\| = 1$.
3. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 174: ⚽ BEOS 1765 Mines-Ponts MP 2015

Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien. Montrer que $\{(x,y) \in E^2 \mid (x,y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2.

Exercice 175: RMS 600/497 Mines MP 2017 - BEOS 3170 CCP MP 2017 Familles obtusangles

Soit E un espace euclidien de dimension n. Une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est dite obtusangle lorsque

$$\forall i \neq j, \qquad (x_i \mid x_j) < 0$$

1. Montrer que si $(x_1, \ldots, x_p)$ est obtusangle et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels quelconques, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\| \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| x_i \right\|$$

   En déduire que $p \leqslant n+1$.
2. Montrer qu'il existe une famille $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ de vecteurs unitaires vérifiant, pour tout $i \neq j$, $(u_i \mid u_j) = -\frac{1}{n}$.
3. Montrer que si $u_1, \ldots, u_{n+1}$ sont des vecteurs unitaires et α est un réel strictement négatif vérifiant, pour tout $i \neq j$, $(u_i \mid u_j) = \alpha$, alors $\alpha = -\frac{1}{n}$.

Exercice 176: Pareil, preuve par récurrence

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)$.
Soit $p \geqslant 2$ et $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille de vecteurs de E tels que

$$\forall (i,j) \in [1,p],\ i \neq j \Rightarrow (e_i | e_j) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de cardinal $p-1$ est libre.

Exercice 177

On pose $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, et on le munit de la norme de la convergence uniforme.
Soit $a \in]0,1[$, $p \in \mathbf{R}_+^*$ et $\ell : E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\ell(f) = \int_0^a x^p f(x)\, \mathrm{d}x$$

1. Montrer que ℓ est une forme linéaire continue, et déterminer sa norme triple $|||\ell||| := \sup\limits_{\|f\|=1} |\ell(f)|$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de $g \in E$ tel que

$$\forall f \in E, \qquad (g \mid f) = \ell(f)$$

3. CNS sur $h \in E$ pour qu'il existe $g \in E$ tel que

$$\forall f \in E, \qquad \ell(f) = (g \mid f)$$

Exercice 178: BEOS 4307 ENS CR MP 2018

On pose $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, sur lequel on définit :

$$(f \mid g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que, pour tout $h \in E$,

$$\left(h \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 0\right) \Rightarrow h = 0$$

2. Montrer que $(E, (\cdot \mid \cdot))$ est un espace préhilbertien réel.
   Soit $a \in]0,1[$, $p \in \mathbf{R}_+^*$ et $\ell : E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\ell(f) = \int_0^a x^p f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Montrer que ℓ est une forme linéaire continue, et déterminer sa norme triple $|||\ell||| := \sup\limits_{\|f\|=1} |\ell(f)|$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de $g \in E$ tel que

$$\forall f \in E, \qquad (g \mid f) = \ell(f)$$

   On pose $F = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$. Soit $h \in F$ et $\ell_1 : F \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\ell_1(f) = \int_0^a h(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. CNS sur h pour qu'il existe $g \in F$ tel que

$$\forall f \in F, \qquad \ell_1(f) = (g \mid f)$$

   On pose, pour $f, g \in F$,

$$(f \mid g)_1 = \int_0^1 [f(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,\mathrm{d}x$$

   On vérifie sans peine qu'il s'agit d'un produit scalaire sur F.
6. F est-il fermé au sens de la norme dérivant de ce produit scalaire ?

Exercice 179: ⚽ BEOS 2716 Ulm MP 2016

Soit E un espace euclidien. Une famille orthonormée totale est-elle une base de E ?

Exercice 180: BEOS 3625 Mines MP 2017

On note E l'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, et, pour $f, g \in E$,

$$(f \mid g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

1. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.
2. On pose $e_0 : t \longmapsto 1$ et, pour $k \geqslant 1$, $e_k : t \longmapsto \sqrt{2}\cos(kt)$. Interpréter $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (f \mid e_k) e_k$.
3. Montrer que $\sum_{k \geqslant 0} (f \mid e_k)^2$ converge.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|f - p \circ \cos\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
5. Montrer que $\|f - S_n(f)\|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et déterminer la somme de $\sum_{k \geqslant 0} (f \mid e_k)^2$.

Exercice 181: BEOS 4452 ENS MP 2018 - convergence faible dans un Hilbert, Radon-Riesz

Soit H un espace préhilbertien réel. On dit que $(u_n) \in H^{\mathbf{N}}$ vérifie (F) si :

$$\exists u \in H, \forall v \in H, \quad (u_n \mid v) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (u \mid v)$$

1. Sous ces hypothèses, montrer que

$$\|u_n - u\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \|u_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \|u\|$$

2. Soit $w \in H \backslash \{0\}$ fixé. On pose, pour $u \in H$,

$$f(u) = \|u\|^2 - |(w \mid u)|^{\frac{3}{2}}$$

   Montrer que f atteint son minimum sur H.

Exercice 182: BEOS 3983 Mines MP 2018

Soit E un espace préhilbertien réel et u, v des vecteurs unitaires avec $u \neq -v$.
Montrer que

$$\{\|x\| \,;\, x \in E \text{ tel que } (u \mid x) = (v \mid x) = 1\}$$

admet un minimum et le déterminer.

3.6.3 Calcul d'infimum par distance à un sous-espace

Exercice 183: BEOS 2375 Centrale PC 2016

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et S_n le sous-espace des matrices symétriques réelles.
On pose $\lambda = \inf\limits_{M\in S_n} \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2$ où $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

1. Prouver l'existence de λ et la calculer.
2. On pose
$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
et on note λ_α l'infimum associé.
Montrer de deux manières que $\lim_{\alpha\to 0} \lambda_\alpha = 0$.

Exercice 184

Calculer
$$\inf\left\{\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(t^2 - (at+b)\right)^2 \,\mathrm{d}t\,,\ (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}$$

Exercice 185

Calculer
$$\inf\left\{\int_0^{+\infty} t^2\left(\ln(t) - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t\,,\ (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}$$

Exercice 186: BEOS 2393 Banque PT 2016

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbf{R})$. On considère
$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Pour $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, on pose
$$I(a,b,c) = \int_{-1}^{1}\left(|x| - ax^2 - bx - c\right)^2 \,\mathrm{d}x$$
   (a) Trouver (a,b,c) pour que $I(a,b,c)$ soit minimal.
   (b) Calculer le minimum en question.

Exercice 187

Evaluer
$$\inf_{a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{R}} \int_0^{+\infty} \exp(-x)(1 + a_1x + \ldots + a_nx^n)^2\,\mathrm{d}x$$

3.7 Suites et séries de fonctions

3.7.1 Suites de fonctions

Exercice 188

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose
$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme de (f_n) sur tout $[0,a]$ pour $0 \leqslant a < 1$.

Exercice 189:

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1. (a) Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$.
   (b) En calculant f_n', montrer que f_n atteint son maximum en $x = \frac{n}{n+1}$.
   (c) Montrer que $f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$
   (d) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. (a) Etudier la convergence simple de (g_n) sur $[0,1]$.
   (b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad |\sin(\pi x) - \sin(\pi)| \leqslant \pi|x-1|$$
   en déduire que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$$
   puis que : $\|g_n\|_\infty \leqslant \pi\|f_n\|_\infty$.
   (c) Conclure quant à la convergence uniforme de (g_n) sur $[0,1]$.

Exercice 190: Une version moins détaillée du précédent

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1. Etudier la convergence simple de (g_n) sur $[0,1]$.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad |\sin(\pi x) - \sin(\pi)| \leqslant \pi|x-1|$$
   en déduire que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$$
4. Conclure quant à la convergence uniforme de (g_n) sur $[0,1]$.

Exercice 191:

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbf{R}_+$.
2. Soit $a > 0$. Montrer qu'il y a convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$.
3. Calculer $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.
   En déduire qu'il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 192

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 2]$, on pose $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 2[$. Y a-t-il convergence simple sur $[0, 2]$?
2. (a) Montrer que :
   $$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$
   (b) En déduire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 2[$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 2-a]$.

Exercice 193: BEOS 3063 CCE Mines PC 2017

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n : x \longmapsto \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$.
2. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?
3. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
5. Déterminer un équivalent de u_n (on pourra effectuer un changement de variable).

Exercice 194: CCP MP 2018

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 195

On pose $f_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

1. Etudier la convergence simple puis uniforme de (f_n).
2. La limite f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$? Les fonctions f_n sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$?
3. Rappeler le théorème de dérivation d'une suite de fonctions. Montrer que ses hypothèses ne sont pas toutes vérifiées.

Exercice 196:

Soit f continue sur $\mathbf{R}$, F une primitive de f. On pose, pour $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{nx}{2}\left(F(x+\frac{1}{n}) - F(x-\frac{1}{n})\right)$$

Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbf{R}$.

3.7.2 Séries de fonctions

Exercice 197

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Calculer $S(1)$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
3. Montrer que, pour $x > 0$, $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.

Exercice 198: BEOS 4067 Mines PC 2018

1. Montrer qu'on définit bien une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ par les relations :

$$\forall x \in [0,1], \quad u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1], \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

3. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$. La fonction limite sera notée u.
4. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la fonction u n'est pas identiquement nulle.

Exercice 199:

Etude de la somme de la série de fonctions donnée par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

Exercice 200

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f et les variations de f sur ce domaine.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f admet une limite en 0 (éventuellement infinie), et déterminer cette limite (Indication. Procéder par l'absurde : supposer que cette limite ℓ est finie, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x > 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} \leqslant \ell$ et en déduire une contradiction).
5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f et exprimer sa dérivée $k-$ième.
6. Montrer que f est convexe.

Exercice 201:

On considère, pour $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Etudier la continuité, puis la dérivabilité de f. On fera une étude particulière pour la dérivabilité en 0.

Exercice 202:

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 203

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$$

1. Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$, puis quand $x \to -\infty$.

Exercice 204: BEOS 4428 CCP MP 2018

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs, telle que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On note f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

et g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x}$$

1. Montrer que f et g sont bien définies et continues sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 205:

Montrer que, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} e^z$$

Exercice 206: BEOS 4284/4338 Centrale MP 2018 : le même, version matricielle

Soit $p \in \mathbf{N}$. Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $u_n(A) = \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$.

1. Si A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, montrer que $(u_n(A))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.
2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^p$.
   On note S la sphère unité associée, et pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, $N(A) = \max_{X\in S} \|AX\|$.
   (a) Montrer que N est une norme.
   (b) Montrer qu'elle est sous-mutiplicative, i.e. que :
   $$\forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R}), \qquad N(AB) \leqslant N(A)N(B)$$
3. Généraliser la question 1 au cas A quelconque.

Exercice 207:

Soit $x \in]0,\pi[$ fixé. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où

$$u_n : t \longmapsto t^{n-1}\sin(nx)$$

1. Etudier la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[0,1]$.
2. Etudier la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[0,1[$.
3. On pose $S_n(t) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p(t)$, calculer explicitement $S_n(t)$.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ est convergente et calculer sa valeur.

3.7.3 Suites et séries de fonctions, contre-exemples

Exercice 208: CU vers une fonction dérivable alors que (f_n') diverge

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(nx)}{n} \end{array} \right.$$

3.8 Séries entières

3.8.1 Rayon de convergence, éventuellement calcul de la somme.

Exercice 209

Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n} a_n z^n$ où

1. $a_n = \ln(1+\dfrac{1}{n})$
2. $a_n = \dfrac{n^2}{3^n+n}$
3. $a_n = \sin(n\theta)$
4. $a_n = \cos(n\theta)$
5. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$
6. $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
7. $a_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$
8. a_n est la $n-$ième décimale de $\sqrt{2}$
9. a_n est le nombre de diviseurs de n
10. a_n est la somme des diviseurs de n

Exercice 210:

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Déterminer les rayons de convergence de $\sum a_n^2 z^n$ et $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 211

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Que dire du rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ où

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Exercice 212:

On considère la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 2} a_n x^n$ où

$$a_n = \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Déterminer son rayon de convergence et étudier le comportement aux bornes.

Exercice 213

Rayon de convergence et somme de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 214: BEOS 3359 CCE Mines PC 2017

On considère la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n$$

Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

Exercice 215: BEOS 4139 Mines MP 2018

Rayon de convergence et somme de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$$

où $\theta \in \mathbf{R}$.

Exercice 216: BEOS 4208 TPE MP 2018

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, où (a_n) est une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} S_n z^n$.

1. Montrer que $R' \leqslant R$.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} S_n z^n$ est le produit de Cauchy de deux séries entières que l'on explicitera. En déduire une autre relation entre R et R'.
3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$, en précisant le domaine de validité de la formule.
4. Donner une exemple de suite (a_n) pour laquelle $R = R' = 1$, un exemple avec $R > 1$ et $R' = 1$, et un exemple avec $R = R' > 1$.

1. $0 \leqslant a_n \leqslant S_n$ donc $R \geqslant R'$.
2. On trouve $R' \geqslant \min(R, 1)$;

   En effet, b_n est le TG du produit de Cauchy de (a_n) et la suite constante égale à 1.
3. Ici $R = 1$. On a donc $1 \geqslant R' \geqslant 1$ donc $R' = 1$. Par produit de Cauchy (par exemple), on trouve :

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

   (on peut aussi utiliser Fubini discret)
4. Pour $R' = R = 1$ on peut prendre $a_n = \frac{1}{n}$ par exemple.

   Pour $R > 1$ et $R' = 1$ on peut prendre $a_n = \frac{1}{2^n}$, de sorte que $R = \frac{1}{2}$ et $S_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{n+1}} \sim 1$ donc $R' = 1$.

   Pour $R = R' > 1$ on peut prendre la suite nulle, alors $R = R' = +\infty$.

3.8.2 Calcul de DSE

Exercice 217:

Déterminer les DSE des fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + x + x^2)$
2. $(\arcsin(x))^2$
3. $\sin^2(x)$

3.8.3 Equation différentielle

Exercice 218: BEOS 4349 Mines-Télécom PC 2018/RMS 864 Mines PC 2016

On définit f par

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est développable en série entière, et préciser le rayon de cette série.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. En déduire le développement en série entière de f.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 219:

On pose

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f possède un développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ?
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f puis calculer le développement en série entière de f.
3. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

3.8.4 Autres

Exercice 220: BEOS 4551 Mines MP 2018 - Principe des zéros isolés

Soit $(z_p)_{p\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite de complexes non nuls qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \qquad f(z_p) = 0$$

   Montrer que $a_n = 0$ pour tous $n \in \mathbf{N}$.
2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout p ?

Exercice 221: BEOS 4579 Mines MP 2018

Soit (a_n) une suite de complexes non nuls telle qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+k}}{a_n}\right| = \ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Exercice 222:

Soit $1 + \sum_{n \geqslant 1} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul, et S la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Montrer que $1/S$ est développable en série entière autour de l'origine.

Indication : commencer par montrer qu'une série entière $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement s'il existe $q > 0$ tel que $|u_n| \leqslant q^n$ pour tout n.

Exercice 223: BEOS 4305 Centrale MP 2018

On note $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon supérieur à 1 telle que les a_n soient tous réels, $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. On note f sa somme sur le disque unité ouvert D.
On suppose, de plus, que f est injective sur D.

1. Montrer que, pour tout $z \in D$,
$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbf{R}$$
2. Montrer que, pour tout $z \in D$,
$$\Im(z) > 0 \Leftrightarrow \Im(f(z)) > 0$$
($\Im(z)$ = partie imaginaire de z)
3. Soit $0 < r < 1$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer, en fonction de n et r, la quantité :
$$\int_0^{\pi} \Im(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) \, \mathrm{d}\theta$$
4. En remarquant que $|\sin(n\theta)| \leqslant n \sin(\theta)$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$, montrer que $|a_n| \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
5. Vérifier que $z \longmapsto \frac{z}{(1-z)^2}$ est développable en série entière et vérifier que celle-ci vérifie les hypothèses de l'énoncé. En déduire que la majoration obtenue est optimale.

Exercice 224: HP

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 1$. On note f sa somme sur le disque ouvert de convergence. On suppose que tous les a_n soient des entiers relatifs et que f est bornée sur le disque unité.
Montrer que f est une fonction polynomiale.

3.9 Probabilités

3.9.1 Probabilités

Exercice 225

Un apprenant récalcitrant lance 5 chaises sur son professeur malveillant. Lors de chaque lancer, la probabilité que l'élève atteigne sa cible est égale à 0,4. On suppose que les 5 lancers sont indépendants et on note X le nombre de chaises que le professeur reçoit sur la tête.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
2. Quelle est la probabilité que le professeur reçoive
   (a) Exactement deux chaises sur la tête
   (b) Au moins une chaise sur la tête
   (c) Au plus une chaise sur la tête
3. Calculer $E(X)$ puis interpréter le résultat obtenu.
4. On suppose maintenant que cet apprenant très énervé lance n chaises sur son médiateur des apprentissages. Combien de chaises doit-il lancer pour avoir plus de 99% de chances d'atteindre au moins une fois ce fonctionnaire malveillant ?

Exercice 226: BEOS 4241 Mines-Télécom PC 2018

Soit 2 urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires.
On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2.
Soit l'évènement B_n : « tirer une blanche au $n-$ième tirage » et p_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer p_1.
2. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Calculer p_n en fonction de n.

Exercice 227

Des boules en nombre infini numérotées 1,2,. . . sont placées successivement et indépendamment les unes des autres dans trois boîtes.

1. On note, pour $n \geqslant 2$, A_n l'évènement : « deux des trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsque l'on place la $n-$ième boule ».
   Calculer $\boldsymbol{P}(A_n)$.
2. Montrer que l'évènement A : « toutes les boules sont dans la même boîte » est négligeable.
3. On note, pour $k \geqslant 3$, B_k l'évènement : « les trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsque l'on place la $k-$ième boule ».
   Calculer $\boldsymbol{P}(B_k)$ en utilisant la formule des probabilités totales, puis calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \boldsymbol{P}(B_k)$. Interpréter.

Exercice 228: BEOS 4590 Mines PC 2018 - Deux fois pile

On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p. On note A_n l'évènement "au $n-$ième lancer, on fait pour la première fois deux piles consécutifs". On note a_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant les cas suivant le résultat du premier lancer, trouver une relation reliant a_{n+2} à a_{n+1} et a_n.
3. Pourquoi est-il quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs ?
4. Déterminer, pour $p = 2/3$, le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 229: BEOS 4252 Mines MP 2018

On munit $\{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme. Pour $d \mid n$, on note

$$A_d = \{k \in \{1, \dots, n\} \,;\, d \mid k\}$$

1. Calculer $\boldsymbol{P}(A_d)$.
2. Si $p_1, \dots, p_r$ sont les diviseurs premiers de n, montrer que les A_{p_i} pour $1 \leqslant i \leqslant r$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire la valeur de l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$.
4. Pour $d \mid n$, on note
$$B_d = \{k \in \{1, \dots, n\} \,;\, \gcd(k, n) = d\}$$
Calculer $\boldsymbol{P}(B_d)$ et en déduire la formule :
$$n = \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$
puis :
$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Exercice 230: BEOS 4551 Mines MP 2018

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Quelle valeur doit prendre $\lambda \in \mathbf{R}$ pour que $\boldsymbol{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$ définisse une loi de probabilité sur $\mathbf{N}^*$?
2. On note, pour $p \in \mathcal{P}$, $A_p = p\mathbf{N}^*$.
   Montrer que les A_p sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité définie précédemment.
3. Montrer que
   $$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p} = \{1\}$$
   En déduire que
   $$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$
4. La famille des $\left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathcal{P}}$ est-elle sommable ?
5. (Bonus) Peut-on construire une loi de probabilité sur $\mathbf{N}^*$ muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbf{N}^*)$ telle que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\boldsymbol{P}(m\mathbf{N}^*) = \frac{1}{m}$?

Exercice 231

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.
On note A_n l'évènement : "les n premières boules tirées sont rouges", avec la convention $\boldsymbol{P}(A_0) = 1$.

1. Calculer $\boldsymbol{P}_{A_{n-1}}(A_n)$.
2. En déduire, par formule des probabilités composées, la valeur de $\boldsymbol{P}(A_n)$.
3. Déterminer la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges.
4. Cette probabilité reste-elle la même si, au lieu de remettre la boule accompagnée de *deux* autres boules de la même couleur, on la remet accompagnée de *trois* autres boules de la même couleur ?

Exercice 232

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.
On note A_n l'évènement : « les n premières boules tirées sont rouges », avec la convention $\boldsymbol{P}(A_0) = 1$.

1. Calculer $\boldsymbol{P}_{A_{n-1}}(A_n)$.
2. En déduire, par formule des probabilités composées, que
$$\boldsymbol{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$
3. On rappelle la formule de Stirling
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
Déterminer la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges.
4. Cette probabilité reste-elle la même si, au lieu de remettre la boule accompagnée de *deux* autres boules de la même couleur, on la remet accompagnée de *trois* autres boules de la même couleur ?

Exercice 233: Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille d'évènements. On définit :
$$\liminf_{n\in\mathbf{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcap_{p=n}^{+\infty} A_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$$
Concrètement, $\liminf_{n\in\mathbf{N}} A_n$ correspond à l'ensemble des éléments qui sont dans une infinité de A_n et $\limsup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ correspond à l'ensemble des éléments qui sont dans tous les A_n à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $\liminf\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$ et $\limsup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$ sont bien des évènements.
2. Montrer que $\liminf\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n \leqslant \limsup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$
3. On suppose que $\sum_{n\in\mathbf{N}} \boldsymbol{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\limsup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ est négligeable.
4. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants, et que. Montrer que $\limsup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ est presque sûr.

3.9.2 Variables aléatoires

Généralités et moments

Exercice 234

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
Montrer que
$$\boldsymbol{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\boldsymbol{P}(X > n)$$

Exercice 235: Un petit calcul

On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables numérotées de 1 à N.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise, et on note X le plus grand numéro obtenu.

1. Calculer $\boldsymbol{P}(X \leqslant k)$ et en déduire $\boldsymbol{E}(X)$.
2. Calculer
$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\boldsymbol{E}(X)}{N}$$

Exercice 236

On considère n marins qui, après une nuit de festivités, retournent sur leur navire et rentrent chacun aléatoirement et indépendamment les uns des autres[a] dans une des r cabines du bateau. On suppose qu'ils choisissent une cabine selon la loi uniforme. Quel est le nombre moyen de cabines vides ?

a. cela sous-entend indépendamment *tous* les uns des autres, i.e. les évènements associés sont mutuellement indépendants

Exercice 237: Des petits calculs

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent une loi de géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose
$$A = \begin{bmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$$
Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?
2. **BEOS 2917 Centrale PC 2016**
Une poule pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Chaque oeuf a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'éclore, indépendante des autres oeufs.
On note Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.
Déterminer la loi de Z.
3. **BEOS 2302 Mines PC 2016**
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.
   (a) Trouver la loi du couple (U, V) .
   (b) En déduire les lois de U et de V.
4. **BEOS 2510 Mines PC 2016**
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telles que $X \leqslant Y$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi conditionnelle de X par rapport à l'événement $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.
Montrer que $Y - X + 1$ et X suivent la même loi.

Exercice 238: BEOS 3069 CCP PC 2017

Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable X suit une loi $G_{\mathbf{N}}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et si pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{P}(X = k) = pq^k$ avec $q = 1 - p$. On note $X \sim G_{\mathbf{N}}(p)$.

1. Soit $X \sim G_{\mathbf{N}}(p)$. On pose $S = X + 1$. Quelle est la loi de S ? En déduire l'espérance de X.
2. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $G_{\mathbf{N}}(p)$. On note $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z et donner son espérance.
3. On lance une pièce avec une probabilité de faire Pile égale à $p \in]0,1[$.
   Pour tout entier naturel non nul i on note F_i l'événement "on obtient Face au ième lancer". Les lancers sont indépendants.
   Soit T la variable aléatoire qui donne le nombre de Face avant le premier Pile. Exprimer $(T = k)$ en fonction de F_i.
   Déterminer la loi de T et son espérance.
4. On reprend X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $G_{\mathbf{N}}(p)$. On note $M = \min(X, Y)$ et $D = |X - Y|$.
   Calculer $\boldsymbol{P}(M = k,\ D = i)$ et en déduire la loi de D.

Exercice 239: BEOS 3483 Centrale PC 2017 - Deux fois pile

On effectue des lancers indépendants d'une pièce, avec une probabilité $2/3$ d'obtenir pile.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs (et l'expérience s'arrête).
Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 240:

1. Soit X une variable aléatoire discrète réelle, $a \in \mathbf{R}$ et $t > 0$.
   Montrer que
   $$P(X \geqslant a) \leqslant e^{-ta}\boldsymbol{E}(e^{tX})$$
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées prenant les valeurs -1 et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
   On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Montrer que, pour tout $t > 0$,
   $$\boldsymbol{E}(e^{tS_n}) = \boldsymbol{E}(e^{tX_1})^n \leqslant e^{nt^2/2}$$
   et en déduire, pour $a > 0$,
   $$\boldsymbol{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-a^2/2n}$$
   (b) Donner en particulier une majoration de $\boldsymbol{P}(S_{10} \geqslant 6)$ et comparer à la valeur exacte.

Exercice 241

Soit X une variable aléatoire discrète centrée de variance σ^2 finie.

1. Montrer que, pour $a, b > 0$,
$$\boldsymbol{P}(X \geqslant a) \leqslant \boldsymbol{P}\left[(X+b)^2 \geqslant (a+b)^2\right]$$
2. En déduire
$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$
et comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 242: Pot pourri sur les permutations

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire qui, à une permutation de $\mathfrak{S}_n$, associe sa signature ? Sa variance, son espérance ?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire qui, à une permutation de $\mathfrak{S}_n$, associe son nombre de points fixes ? Sa variance, son espérance ?
3. On note S_n le nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2, S_{n+1} = S_n + nS_{n-1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{n}{2k}$$
   (c) Calculer la probabilité p_n qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ soit une involution.
   Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 243: ⚽

A quelle condition une variable aléatoire discrète X est-elle indépendante d'elle-même ?

Exercice 244: RMS 128-3-119 ENS ULCR MP 2017

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On suppose qu'il existe des réels $a \geqslant 0$ et $b \neq 0$ tels que $X \sim aX + b$. Montrer que X est presque surement constante.

Exercice 245: RMS 128-3-338 ENS PSI 2017

On dispose d'une pièce de monnaie pipée mais on ignore comment.
Déterminer comment réaliser avec cette pièce une expérience aléatoire de probabilité $1/2$.

Exercice 246: BEOS 3671 ENS MP 2017

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $X_i \sim U(\{1, \ldots, n\})$.
   On considère la variable aléatoire $S_n = (1\,X_1)(1\,X_2)\cdots(1\,X_n)$ à valeurs dans $\mathfrak{S}_n$.
   Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer $\boldsymbol{P}(S_n = \sigma)$.
2. Soit S_n une variable aléatoire à valeurs dans $\mathfrak{S}_n$, vérifiant $S_n \sim U(\mathfrak{S}_n)$.
   Notons X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes de S_n, à valeurs dans $\mathbf{N}$.
   Montrer que
   $$\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{P}(X_n = 0) = \frac{1}{e}$$

Fonctions génératrices

Exercice 247: BEOS 3375 Mines-Télécom PC 2017

Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) pour que la somme suive une loi uniforme ?

Exercice 248: Essentiellement le même

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$. Calculer la fonction génératrice de $X + Y$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que
   $$\forall n \geqslant 6, \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = 0$$
   Montrer que la fonction génératrice de $X + Y$ ne peut pas être de la forme
   $$G_{X+Y}(t) = a(1 + t + t^2 + \ldots + t^{10})$$
   où $a \in \mathbf{R}^*$.
3. Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) pour que la somme suive une loi uniforme ?

Exercice 249

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et Y une autre variable aléatoire, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que X et Y sont indépendantes.
Soit Z la variable aléatoire valant 0 si X vaut 0, et Y si X vaut 1.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Quelle est la fonction génératrice de Z ? Son espérance ? Sa variance ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X = i \mid Z = 0)$, pour $i = 0, 1$.

Exercice 250: BEOS 3110 Centrale PC 2017

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Donner la loi de S_n.
2. Dans quelle mesure peut-on dire que S_n/n est proche de p ? Démontrer l'énoncé de cours utilisé.
3. Soit $t \in \mathbf{N}$. On lui associe la variable aléatoire

$$N_t = \operatorname{card}\{k \in \mathbf{N}^* \mid S_k \leqslant t\}$$

On remarque alors l'égalité :

$$(N_t = k) = (S_k = t) \cap (S_{k+1} > t)$$

Déterminer la loi de N_t.

4. Déterminer la fonction génératrice de N_t et en déduire que N_t est fini presque surement.

Exercice 251: RMS 638/764 Mines MP 2017

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ admettant des moments à tous les ordres.

1. Montrer que la fonction génératrice de X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.
2. On suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \boldsymbol{P}(X=n) = \frac{1}{k!}$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 252: RMS 139/156 ENS Ulm MP 2017

On rappelle, ou pas, qu'une suite de variables aléatoires (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire X si

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \boldsymbol{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, strictement positives, toutes d'espérance 1.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^n X_k$.
Montrer que (P_n) converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\prod_{k=1}^n \boldsymbol{E}(\sqrt{X_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication : pour montrer le sens direct, on pourra prouver puis utiliser l'inégalité de Paley-Zygmund :
• Si X est une variable aléatoire discrète réelle à valeurs strictement positives, admettant un moment d'ordre 2, alors pour tout $\lambda \in]0,1[$,

$$\boldsymbol{P}(X \geqslant \lambda \boldsymbol{E}(X)) \geqslant \frac{(1-\lambda)^2 \boldsymbol{E}(X)^2}{\boldsymbol{E}(X^2)}$$

3.10 Algèbre générale

3.10.1 Groupes

Exercice 253: ⚽

Montrer que tout groupe G tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$ est abélien.

Exercice 254

Soit S un ensemble non vide muni d'une loi interne associative, telle que pour tous $a, b \in S$, les équations $a \cdot x = b$ et $y \cdot a = b$ admettent une solution.

Montrer que S est un groupe.

Exercice 255: ⚽

Montrer que $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, est le plus grand sous-groupe borné de $\mathbf{C}^*$.

Exercice 256: BEOS 4247 Mines MP 2018

Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe un groupe de cardinal n non commutatif.

Exercice 257: BEOS 4527 ENS MP 2018 - adapté

1. Montrer que les sous-groupes de $\mathbf{R}$ sont soit finis soit denses.
2. Montrer que $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ est dense si et seulement si $\frac{a}{b}$ est irrationnel.
3. Classifier les sous-groupes de $\mathbb{U}$.

3.10.2 Anneaux, algèbres

Exercice 258: BEOS 4025 Mines-Télécom MP 2018

1. Détermminer les morphismes d'anneaux continus de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
2. Même question, mais en retirant l'hypothèse de continuité.

Exercice 259: BEOS 2718 CCP MP 2016

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle radical de I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}^*,\ x^n \in I\}$$

1. (a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal et qu'il contient I.
   (b) Trouver le radical de deux idéaux simples de A.
2. (a) Soit I et J des idéaux de A. Montrer que
   $$I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$$
   (b) Soit I et J des idéaux de A. Montrer que
   $$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$
   (c) Soit I un idéal de A. Montrer que
   $$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$$
   (d) Déterminer le radical d'un idéal de $\mathbf{Z}$.

Exercice 260: Adapté de BEOS 4550 Mines MP 2018

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier a premier avec n,
   $$a^{\varphi(n)} \equiv 1\ (n)$$
2. Montrer que pour tout a entier
   $$a^p \equiv a\ (p)$$

Exercice 261: Autour des carrés de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

Questions indépendantes. Cf. BEOS 5517 et 5659.

Soit p un nombre premier.

1. Soit $a \in \{1, \ldots, p-1\}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $b \in \{1, \ldots, p-1\}$ tel que $ab \equiv 1\ (p)$.
   (b) Quels sont les a tels que $b = a$?
2. **(Question à revoir)** On suppose de plus $p \geqslant 3$. On pose :
   $$\mathcal{C} = \left\{x^2\ ;\ x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \backslash \{0\}\right\}$$
   Montrer que $\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \mid x^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}\right\}$

Exercice 262

Soit A un anneau, on note 1 son neutre pour la loi multiplicative. Soit $x \in A$ nilpotent.

1. Montrer que $1 - x$ est inversible.
2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, simplifier l'expression

$$U_n := \prod_{k=0}^{n}(1 + x^{2^k})$$

Exercice 263: BEOS 3200 Mines MP 2017

Soit a un nombre impair positif et n un entier supérieur à 3.

1. Montrer que
$$a^{2^{n-2}} \equiv 1\ (2^n)$$
2. En déduire les entiers n pour lesquels le groupes des inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ est cyclique.

Exercice 264: BEOS 4150 ENS MP 2018

Soit A un anneau commutatif possédant n diviseurs de zéro, avec $n > 1$.

1. Montrer que A a au plus $(n+1)^2$ éléments.
2. Trouver une infinité d'anneaux A ayant exactement $(n+1)^2$ éléments, où n est le nombre de diviseurs de diviseurs de 0 dans A (bien comprendre que n n'est plus fixé).

Exercice 265

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que
$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$
2. Soit K un corps (commutatif) fini. Montrer que le groupe multiplicatif K^* est cyclique.

Exercice 266

Les polynômes cyclotomiques sont à coefficients entiers.

3.11 Réduction

3.11.1 Éléments propres, polynôme caractéristique

Exercice 267

Elements propres de
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 268:

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ ayant une limite nulle en $+\infty$, et T l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbf{R}_+, \qquad T(f)(x) = f(x+1)$$

Déterminer le spectre de T.

Exercice 269

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On pose $B = A - I_3$.

1. Déterminer le rang et les valeurs propres de B.
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 270

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer le rang de $A + I_3$, et en déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.
2. Trouver toutes les valeurs propres de A.
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 271

On pose
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres de A.
2. Calculer $(A - 3I_3)^2$ et en déduire une base de $\ker(A - 3I_3)^2$.
3. Montrer que $\ker(A - 3I_3)^2$ et $\ker(A + I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
4. A est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$ où
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
6. Déterminer B^n pour $n \in \mathbf{N}$.
7. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 272

1. On pose
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Déterminer les valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On considère l'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \end{array} \right.$$
Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés (on pourra éventuellement utiliser la question précédente)

3.11.2 Diagonalisabilité, trigonalisabilité

Suis-je diagonalisable/trigonalisable ?

Exercice 273: ⚽

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que AB soit diagonalisable.
Montrer que BA l'est aussi.

Exercice 274

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de rang 1.

1. Donner une expression du polynôme caractéristique de A.
2. En déduire que $\det(A + I_n) = 1 + \mathrm{tr}(A)$.
3. Discuter, suivant la valeur de $\mathrm{tr}(A)$, de la diagonalisabilité de A.

Exercice 275

On pose, pour $m \in \mathbf{R}$,

$$A_m = \begin{bmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle diagonalisable ?
2. Donner, selon les valeurs de m, le polynôme minimal de A_m.

Exercice 276

A quelle condition sur les réels a, b, c, d, e, f la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 277

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(R)$, $M \longmapsto \mathrm{tr}(M)I_n - M$.
Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 278: BEOS 1425 Banque PT 2015

On note $E = \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{C}$ considéré comme un espace vectoriel réel.

1. Montrer que
$$E = \left\{\varphi_{a,b} : z \longmapsto az + b\bar{z},\ (a,b) \in \mathbf{C}^2\right\}$$
2. Exprimer en fonction de a et b le déterminant et la trace de $\varphi_{a,b}$.
3. Déterminer une CNS sur a, b pour que $\varphi_{a,b}$ soit diagonalisable.

Exercice 279

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et u l'application qui, à $P \in \mathbf{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de u.
3. u est-elle diagonalisable ?

Exercice 280

Soit $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de rang 2, de trace nulle et telle que $A - I_n$ ne soit pas inversible.

1. A admet-elle 0 pour valeur propre ?
2. Déterminer le spectre de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 281

Soit $n \geqslant 2$. Soit f l'application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ par

$$f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X - 1)P'$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer le spectre de f.
   f est-elle diagonalisable ?

Exercice 282

Soit $n \geqslant 2$ et

$$A = \begin{bmatrix} b & & a \\ & \ddots & \\ a & & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

avec $a \neq 0$.

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où tous les coefficients sont égaux à 1.
   Exprimer A, puis A^2, en fonction de I_n et J.
   En déduire un polynôme annulateur de A.
2. A est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? Déterminer ses éléments propres.
3. Calculer $\det(A)$.

Exercice 283

Condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbf{C}$ pour que

$$M = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

Exercice 284: Version détaillée du précédent

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbf{C}$ pour que

$$M_z = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

1. On suppose que M_z n'est pas diagonalisable.
   (a) Justifier que χ_{M_z} admet au moins une racine double, que l'on notera $t \in \mathbf{C}$.
   (b) Justifier que $\chi'_{M_z}(t) = 0$ et montrer que l'on a $t^2 = z$.
   (c) Montrer que $z \in \{0, 1\}$.
2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que M_z soit diagonalisable.

Exercice 285:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et
$$B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.
2. Discuter de la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Applications

Exercice 286

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable. On note $C(A)$ son commutant :

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid AM = MA\}$$

Déterminer la dimension de $C(A)$.

Exercice 287

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme f de E dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
2. On suppose, dans cette question seulement, que f est un endomorphisme de E diagonalisable. Justifier que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.
3. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$\mathrm{Im}(f^k) \oplus \ker(f^k) = E$$

Exercice 288:

Soit $p > 1$ et $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ une famille de p éléments d'un corps K. On note

$$C = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

la matrice circulante associée.

1. Calculer le déterminant de C lorsque $K = \mathbf{C}$ (on diagonalisera la matrice circulante U associée à $(0, 1, 0, \dots, 0)$).
2. Calculer le déterminant de C lorsque $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ avec p premier (on pourra admettre, pour cette question, le théorème de Cayley-Hamilton).

3.11.3 Fin, avec polynômes d'endomorphismes

Exercice 289: ⚽

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle qu'il existe $P \in \mathbf{K}[X]$ annulant A et tel que $X \nmid P$.
Montrer que A est inversible.

Exercice 290

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :
$$A^3 = A^2 - 4A + 4I_n \quad \text{et} \quad A \neq I_n.$$

1. Montrer que 1 est la seule valeur propre réelle possible de A. Quelles peuvent être les valeurs propres complexes de A ?
2. A est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?
3. On suppose désormais que 1 n'est pas valeur propre de A.
   (a) Déterminer le polynôme minimal de A sur $\mathbf{R}$, puis sur $\mathbf{C}$.
   (b) Montrer que $A^2 + I_n = 0$ et en déduire que n est pair.

Exercice 291: ⚽ **BEOS 4268 Centrale MP 2018**

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension finie n, où $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit f un endomorphisme de E.

1. Rappeler pourquoi f admet un polynôme annulateur non nul sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Donner la définition de $\exp(f)$. Montrer que $\exp(f)$ est un polynôme en f.
3. Montrer que, si f est bijectif, alors f^{-1} est encore un polynôme en f.

Exercice 292:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :
$$A^3 - 3A - 4I_n = 0$$

Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 293: BEOS 4438 X MP 2018

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, à coefficients positifs, et telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

On dit que P est stochastique (sur les lignes).

1. Montrer que 1 est valeur propre de P
2. Montrer que le spectre de P est inclus dans le disque du plan complexe de centre $m := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{ii}$ et de rayon $1 - m$.
3. On suppose de plus que $m > 0$ et que 1 est valeur propre simple.
   Montrer que la suite $(P^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers une matrice stochastique.

Exercice 294:

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n et λ une valeur propre de u. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{Id})^2$
2. $E_\lambda(u) \bigoplus \operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}) = E$
3. $E_\lambda(u)$ possède un supplémentaire $u-$stable.
4. La dimension de $E_\lambda(u)$ égale la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de u.
5. λ est racine simple du polynôme minimal de u

Montrer que, dans ces conditions, $\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id})$ est le seul supplémentaire de $E_\lambda(u)$ stable par u.

Exercice 295:

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = BA$.
Etudier la diagonalisabilité de la matrice par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

Exercice 296: $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K)$ si et seulement si $m = n$

Soit K un corps de caractéristique différente de 2.
On veut montrer que $\mathrm{GL}_n(K)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_m(K)$ si et seulement si $m = n$.

1. Supposons que G soit un sous-groupe de $GL_n(K)$ tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = I_n$. Montrer qu'alors, $|G| \leqslant 2^n$.
2. Achever la preuve.

Exercice 297

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ telle qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ vérifiant $M^k = I_2$.
Montrer que $M^{12} = I_2$

3.12 Espaces euclidiens

3.12.1 Généralités et endomorphismes/matrices orthogonaux

Exercice 298: BEOS 4390 CCP PC 2018

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ du produit scalaire défini par $(M \mid N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$.
Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(x) - 1 & 4 \\ -2 & \sinh(x) \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} \cosh(x) + 1 & 3 \\ 6 & -\sinh(x) \end{bmatrix}$$

1. A-t-on $(A \mid B) = 0$?
2. Montrer que l'espace des matrices symétriques $S_2(\mathbf{R})$ et celui des matrices antisymétriques $A_2(\mathbf{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
3. Déterminer la distance de A à $S_2(\mathbf{R})$.

Exercice 299: BEOS 2294 CCP PC 2016

Dans $\mathbf{R}^3$, soit p la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$.
Déterminer la matrice de p dans la base canonique, puis celle de s, la symétrie orthogonale par rapport à P.
p est-elle une isométrie ? s est-elle une isométrie ?

Exercice 300: ⚽

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que $\ker(A) = \ker({}^tA)$.
   Comparer $\ker(A)$ et $\ker(A^2)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si
   $$\forall X \in \mathbf{R}^n, \qquad (AX \mid X) = 0$$
   où $(\cdot \mid \cdot)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 301: BEOS 920 Télécom Sud Paris PT 2014 / BEOS 745 CCE Mines PC 2014

Soit $A \in O_n(\mathbf{R})$.
Montrer que la somme de tous les coefficients de A est inférieure à n.

Bonus : étudier le cas d'égalité si on suppose de plus que tous les coefficients de A sont positifs.

Exercice 302:

CNS sur $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ pour que

$$M = \begin{bmatrix} 2a^2 - 1 & 2ba & 2ac \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{bmatrix}$$

soit la matrice d'une retournement.

Exercice 303: BEOS 4479 CCP PC 2018

Soit E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x, y \in E, \qquad (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Calculer, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $(f(e_i + e_j) \mid f(e_i - e_j))$.
2. Montrer qu'il existe un réel positif α tel que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad \|f(e_i)\| = \alpha$$
3. On suppose de plus que f n'est pas l'endomorphisme nul.
   f est-il bijectif ? Est-ce un automorphisme orthogonal ?

Exercice 304: BEOS 3812 TPE PC 2017

Soit E un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x, y \in E, \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

1. Montrer que f conserve la norme.
2. Montrer que f conserve le produit scalaire.
3. Montrer que f est linéaire.
4. Qu'en déduire sur f ?

Exercice 305: BEOS 3443 Mines MP 2017

Soit E un espace euclidien, et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\| \leqslant \|x\|$$

On définit l'adjoint de f, noté f^*, par :

$$\forall x, y \in E, \qquad (f^*(x) \mid y) = (x \mid f(y))$$

1. Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x) = (a \mid x)$$

2. Montrer que f^* est bien défini et que c'est un endomorphisme de E
3. Montrer que :

$$\forall x \in E, \qquad \|f^*(x)\| \leqslant \|x\|$$

puis que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x \Rightarrow f^*(x) = x$$

4. Montrer que

$$E = \ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$$

Exercice 306: BEOS 4331 Mines MP 2018, entre autres ...

Soit E un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E.

Etudier la convergence (simple) de la suite de terme général $v_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u^j$.

On commencera par montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus^{\perp} \ker(u - \mathrm{Id}) = E$.

Exercice 307: BEOS 2685 Centrale MP 2016

On note $SO_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices spéciales orthogonales, et F_n le sous-espace vectoriel qu'elles engendrent.
Considérons le produit scalaire $(A \mid B) := \mathrm{tr}({}^t AB)$.

1. Pour $n = 2$, montrer que

$$F_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} ;\, a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

2. On suppose désormais $n \geqslant 3$.
   (a) Montrer que :

   $$\forall A \in A_n(\mathbf{R}), \qquad \exp(A) \in SO_n(\mathbf{R})$$

   (b) Montrer que $A_n(\mathbf{R})^{\perp} = S_n(\mathbf{R})$.
   (c) Montrer que $F_n = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 308: RMS 294/235 X MP 2017

Déterminer toutes les formes linéaires $u : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ qui sont invariantes par conjugaison par toute matrice orthogonale, i.e. telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \forall P \in O_n(\mathbf{R}), \quad u(P^{-1}MP) = u(M)$$

Exercice 309

Idées d'exercices supplémentaires :

- Réduction des endomorphismes normaux.

3.12.2 Endomorphismes/matrices symétriques réels ; théorème spectral

Exercice 310: ⚽

Réduire

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(et expliciter une base de réduction)

Exercice 311: ⚽ BEOS 3486 Centrale PC 2017

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul. On pose $A = X\,{}^tX$.
Justifier que A est diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.

Exercice 312: ⚽ BEOS 4030 Mines-Télécom PT 2018

Soit A une matrice symétrique réelle telle que $A^3 = I_n$.
Déterminer A

Exercice 313: ⚽ BEOS 3070 CCP PC 2017

Soit A une matrice symétrique réelle telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.
3. En déduire A.

Exercice 314: BEOS 1538 Centrale PC 2015

Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$ telle qu'il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^m = I_n$.

1. Montrer que $A^2 = I_n$.
2. On note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A. Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme u ?

Exercice 315: Orthodiagonalisation simultanée

Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que deux endomorphismes symétriques de E qui commutent sont diagonalisables dans une même base orthonormée.
2. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes symétriques de E qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle les matrices des f_i sont toutes diagonales.

Exercice 316

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E, de trace nulle.

1. Montrer l'existence de $x \in \boldsymbol{E}$ non nul tel que $(u(x) \mid x) = 0$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 317

On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne standard sur $\mathbf{R}^n$.
On pose, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\|A\| = \sup\{\|AX\|_2 \mid \|X\|_2 = 1\}$$

On admettra que l'on définit bien ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Montrer que

$$\|A\| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$$

où

$$\rho({}^tAA) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}({}^tAA)\}$$

Exercice 318: 🖅RMS 219/267 X MP 2017

Soit

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M^2) \end{array} \right.$$

Trouver la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont l'image par f est incluse dans $\mathbf{R}_-$.

Exercice 319: RMS 291/233 X MP 2017

On appelle état de $S_n(\mathbf{R})$ toute matrice de $S_n(\mathbf{R})$ de trace 1, à valeurs propres positives.

1. Caractériser (géométriquement) les états S tels que $S^2 = S$. On les appelle les états purs.
2. Montrer que l'ensemble des états est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$.
3. Montrer que les points extrémaux de l'ensemble des états sont les états purs (un état est dit extrémal lorsqu'il ne peut s'exprimer comme barycentre à coefficients strictement positifs de deux états distincts).

3.13 Réduction d'isométries ($d = 2, 3$) et coniques

Exercice 320

Déterminer A la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé par $(1,-2,0)$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 321: BEOS 3441 Banque PT 2017

Soit $a > 0$. On considère la courbe définie par les conditions $x > 0$, $x^2 - y^2 = a^2$.

1. Déterminer un paramétrage de cette courbe.
2. Déterminer un paramétrage de la normale en tout point M de la courbe.
3. On note C_M le cercle tangent à la courbe en M centré sur l'axe (Oy).
   Donner une équation de C_M.
4. Soit $A(a\sqrt{2},0)$. Montrer que les tangentes à C_M passant par A sont orthogonales.

3.14 Calcul différentiel

3.14.1 Différentiabilité et calculs de différentielles

Exercice 322:

Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est dérivable en tout point selon toutes les directions , mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 323

Déterminer les différentielles des applications suivantes :

1. $$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$
2. $$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^k \end{array}$$
3. $$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

3.14.2 Extremas

Exercice 324

Soit f l'application définie sur R^2 par

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3$$

La fonction f possède-t-elle des extremums locaux ?

Exercice 325: PT

Extremums locaux de $f : (x, y) \longmapsto (2 + \cos(x))(2 + \cos(y))$

Exercice 326

On note $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 16\}$ et f l'application définie sur D par

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 3$$

Montrer que f possède des extremums globaux sur D et les déterminer.

Exercice 327

Soit $f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$$

Montrer que f admet un maximum global et le déterminer.

3.14.3 EDP ...

Exercice 328

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$f + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a \quad (E)$$

où $a \in \mathbf{R}$.

Indication : effectuer le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

Exercice 329

Déterminer les fonctions $f : (\mathbf{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Indication : on effectuera le changement de variable $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Exercice 330

Soit $h \in \mathcal{C}^2(] - 1, 1[, \mathbf{R})$. On pose, pour (x, y) convenable, $f(x, y) = h(\frac{y}{x})$.
Déterminer les applications h telles que f soit solution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}$$

3.14.4 Tout le reste

Exercice 331

Soit U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in U,\ \forall t \in [0,1], \quad (1-t)x + ty \in U$$

Une application $f : U \to \mathbf{R}$ est dite convexe sur U si :

$$\forall x, y \in U,\ \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

1. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ différentiable sur U. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si

$$\forall x, y \in U, \quad df(x) \cdot (y - x) \leqslant f(y) - f(x)$$

2. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ différentiable et convexe sur U. On suppose qu'elle admet un point critique $a \in U$. Que dire de a ?
3. Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n et $B \in \mathbf{R}^n$. On suppose que A est symétrique. On définit l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ par

$$f(X) = \frac{1}{2}(AX|X) - (B|X)$$

Montrer que f est convexe sur $\mathbf{R}^n$ si et seulement si

$$\forall X \in \mathbf{R}^n, \quad (AX|X) \geqslant 0$$

En déduire que, si A a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors f admet un minimum atteint en un unique point que l'on précisera.

Exercice 332:

Soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & M^3 \end{array} \right.$$

Pour $M \in M_n(\mathbf{R})$ on note $\|M\| = tr(M^t M)$ et on admet l'on définit ainsi une norme sous-multiplicative sur $M_n(\mathbf{R})$ au sens où :

$$\forall M_1, M_2 \in M_n(\mathbf{R}), \quad \|M_1 M_2\| \leqslant \|M_1\| \|M_2\|$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $M_n(\mathbf{R}$.
2. Montrer que l'application $N : \mathcal{L}(M_n(\mathbf{R})) \to \mathbf{R}$ définie par $N(u) = \sup_{M \neq 0} \frac{\|u(M)\|}{\|M\|}$ est bien définie et définit une norme sur $\mathcal{L}(M_n(\mathbf{R}))$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que :
$$N(df(M) - 3Id_{\mathcal{L}(M_n(\mathbf{R}))}) \leqslant 6\|M - I_n\| + 3\|M - I_n\|^2$$
4. Soit B la boule ouverte dans $M_n(\mathbf{R})$ de centre I_n et de rayon $\frac{1}{3}$. Montrer que pour tout $M \in B$,
$$N(\frac{1}{3}df(M) - Id_{\mathcal{L}(M_n(\mathbf{R}))}) < 1$$
et en déduire que $df(M)$ est un isomorphisme de $M_n(\mathbf{R})$ dans $M_n(\mathbf{R})$.
5. Pour $M \in B$ on pose $g(M) = f(M) - 3M$. Montrer que pour tous $M, P \in B$,
$$\|g(M) - g(P)| \leqslant \frac{7}{3}\|M - P\|$$
6. En déduire que f est injective sur B.

Exercice 333:

On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et on note E^* le dual de E. On pose :

$$D = \{d \in E^* \mid \forall f, g \in E,\, d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f)\}$$

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^*.
2. Montrer que D n'est pas réduit à $\{0\}$.
3. Soit $d \in D$ et h une fonction constante. Que vaut $d(h)$?
4. Soit $f \in E$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$$
Vérifier que $x \longmapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$ appartient à E.
5. Soit $d \in D$. Etablir l'existence de $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ tels que
$$\forall f \in E, \qquad d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$
6. Déterminer la dimension de D.

Exercice 334: Identité d'Euler

Soit Ω un cône ouvert de $\mathbf{R}^2$ et doit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que f est homogène de degré m ($m \in \mathbf{N}$) lorsque :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ \forall t > 0, \quad f(tx,ty) = t^m f(x,y)$$

1. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que f est $m-$homogène si et seulement si

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mf$$

2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ et homogène de degré m. Montrer que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m(m-1)f$$

3. Déterminer les polynômes P à deux indéterminées vérifiant :

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = 4P$$

Exercice 335: BEOS 4548 Mines MP 2018

On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne canonique.
Soit $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ différentiable, telle que sa différentielle en tout point est injective, et vérifiant

$$\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective. On introduira pour cela l'application $g : x \longmapsto \|f(x) - a\|^2$.

Exercice 336:

Soit $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^1, $k-$contractante ($0 < k < 1$).
On pose $g : x \longmapsto x + f(x)$.
Montrer que g est bijective et que sa différentielle en tout point est inversible.

Exercice 337: RMS 617/742 Mines MP 2017

1. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad e^{tA} \in O_n(\mathbf{R})$$

2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbf{R})$ en I_n.

Exercice 338:

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on pose $f(M) = (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \dots, \mathrm{tr}(M^n))$.

1. Montrer que f est différentiable et calculer $df(M) \cdot H$ pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que le rang de $df(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donc le polynôme minimale égale le polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3.15 Équations différentielles

3.15.1 Pratique

Exercice 339

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

Exercice 340:

Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}$

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1 + x^2}$$

Exercice 341

Résoudre sur $\mathbf{R}$ le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= -x + 3y + e^t \\ y' &= -2x + 4y \end{cases}$$

Exercice 342

Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$y'' + y = \tan^2(t)$$

3.15.2 Equations scalaires

Exercice 343: BEOS 4390 CCP PC 2018

Le but de l'exercice est de déterminer les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ de

$$xy'' + xy' - y = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer un réel α tel que $x :\longmapsto x^\alpha$ soit solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. Soit $G : x \longmapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Etudier les variations de G sur $\mathbf{R}_+^*$.
4. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $s : x \longmapsto xf(x)$.
   Montrer que s est solution de (E) si et seulement si f' est solution d'une équation du premier ordre que l'on précisera.
5. Résoudre cette équation du premier ordre sur $\mathbf{R}_+^*$.
6. Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ à l'aide la fonction G.

Exercice 344:

Soit f une solution définie sur $\mathbf{R}$ de $(E) :\ y'' - (x^4+1)y = 0$, telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

1. Justifier l'existence de f.
2. Montrer que $g = f^2$ est convexe.
3. Montrer que $f \geqslant 1$ sur $\mathbf{R}_+$.
4. $t \longmapsto \frac{1}{g(t)}$ est-elle intégrable sur $\mathbf{R}_+$?
5. Montrer que $h : x \longmapsto f(x)\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}$ est solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 345:

Soit f une fonction bornée et uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.
On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, (E_n) l'équation :

$$y' - ny = -nf$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution bornée sur $\mathbf{R}_+$, que l'on notera φ_n.
2. Montrer que φ_n est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.
3. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 346: BEOS 4532 Mines MP 2018

Soit $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = a$$

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

Exercice 347

Soit $\alpha > 0$ et $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} f'(t) + \alpha f(t) = 0$$

Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Exercice 348: BEOS 2270 Mines MP 2016

1. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ et $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} f'(t) + \alpha f(t) = 0$$

   Montrer que, si $\Re(\alpha) > 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$
2. Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} f''(t) + f'(t) + f(t) = 0$$

   Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
3. Généraliser.

Exercice 349:

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$.

1. On pose $g = f'' + f$. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f(x) = f(0)\cos(x) + f'(0)\sin(x) + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

2. On suppose que $f'' + f \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}$. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

Exercice 350

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + q(t)y = 0$ où $q : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ est une fonction continue strictement négative sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que la seule solution réelle bornée de (E) sur $\mathbf{R}$ est la fonction nulle.
2. Montrer qu'une solution non nulle s'annule au plus une fois sur $\mathbf{R}$.

Exercice 351:

Soit $q : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \geqslant 0$, $q(x) \geqslant \alpha$.
Démontrer qu'il existe une solution f de l'équation différentielle $y'' - q(x)y = 0$ sur $\mathbf{R}_+$ telle que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3.15.3 Systèmes différentiels

Exercice 352:

Soit $A \in M_2(\mathbf{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Sp}(A)$ pour que toutes les solutions du système différentiel $X' = AX$ tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 353:

On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que toutes les solutions de $Y' = AY$ soient toutes de norme constante.

Exercice 354: Théorème de Floquet

On considère un système différentiel sur $\mathbf{C}^n$ $(E)\ :\ Y' = A(t)Y$ où $A : \mathbf{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est une fonction continue $T-$périodique.
Montrer qu'il existe une solution non nulle V de (E) et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad V(t+T) = \lambda V(t)$$

3.15.4 Wronskien et Grönwall

Exercice 355: EDO sur le Wronskien, et calcul du wronskien

1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $p, q : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continues.
   On considère l'équation $(E)\ :\ y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.
   Soit deux solutions u et v de (E) sur (I). Déterminer une équation différentielle vérifiée par le wronskien de u et v, et en déduire une expression du wronskien en fonction de sa valeur en un point arbitraire de I.
2. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ continue.
   On considère le système différentiel $(E)\ :\ Y' = A(t)Y$.
   Soit $y_1, \ldots, y_n$ n solutions de (E) sur (I). Déterminer une équation différentielle vérifiée par le wronskien des $y_1, \ldots, y_n$, et en déduire une expression du wronskien en fonction de sa valeur en un point arbitraire de I.

Exercice 356

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + q(t)y = 0$ où $q : \mathbf{R}_+ \longmapsto \mathbf{R}$ est une fonction continue intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

1. Soit y une solution bornée de (E). Etudier le comportement de $y'(t)$ quand $t \to +\infty$.
2. Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

Exercice 357: Zéros entrelacés

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et où $p, q : I \longmapsto \mathbf{R}$ sont continues sur I.

1. Montrer qu'une solution non nulle f de (E) a un nombre fini de zéros dans tout segment de I.
2. Soit f et g deux fonctions qui forment une base de solutions de (E) sur I. Soit $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de f. Montrer que g s'annule en un unique point de $]t_1, t_2[$.

3.15.5 Cas général ou équations non linéaires (HP)

Exercice 358: Zéros isolés - POSABLE EN ADAPTANT AU PROGRAMME

Soit une équation différentielle $(E)\ :\ y'' = F(t, y, y')$ telle que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, et qui admet la fonction nulle pour solution (c'est le cas si elle est linéaire, ou, plus généralement, si $F(t, 0, 0) = 0$).
Montrer que toute solution non identiquement nulle a ses zéros isolés.

Exercice 359: HP - NON ADAPTABLE AU PROGRAMME

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $F : I \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $f, g : I \longmapsto \mathbf{R}$ deux solutions de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$ sur I. On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$.
Montrer que pour tout $t \in I$, $f(t) < g(t)$.

Exercice 360: HP - NON ADAPTABLE AU PROGRAMME

Soit $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $T-$périodique en la variable de temps, y une solution de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$ sur $\mathbf{R}$.
Montrer que la suite $(y(kT))_{k\in\mathbf{N}}$ est strictement monotone ou constante, et que, dans ce dernier cas, y est une solution $T-$périodique.

Exercice 361

Montrer que pour l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$ $y' = \sqrt{|y|}$, il n'y a pas unicité au problème de Cauchy.

3.16 Courbes et surfaces

3.16.1 Géométrie dans le plan, courbes

Exercice 362: BEOS 1444 Banque PT 2015

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit un cercle de rayon R tangent à l'axe des abscisses en un point T d'abscisse t et M le point d'intersection du cercle avec l'autre tangente au cercle issue de O.

1. Tracer la figure.
2. Déterminer les coordonnées de M.
3. Etudier la trajectoire de M quand t varie.

Exercice 363: BEOS 4321 Banque PT 2018

Soit Γ un cercle $A, N \in \Gamma$, et H le projeté de A sur la tangente à Γ en un point M.

1. Paramétrer le problème et calculer les coordonnées de H.
2. Déterminer l'aire maximale du triangle MHN.

Exercice 364: BEOS 1413 Banque PT 2015

Soit l'ensemble de points $\Gamma : x^2 - y^2 = 1$.

1. Tracer les asymptotes à cette courbe.
2. Tracer la courbe.
3. Déterminer une paramétrisation $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ à l'aide des fonctions $\cosh(t)$ et $\sinh(t)$.
4. Déterminer une équation cartésienne d'une normale à la courbe au point de paramètre t.
5. En déduire la développée de $\gamma(t)$.
6. Faire l'étude et tracer la développée de $\gamma(t)$.

Exercice 365

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \ln(x)$ en lequel le rayon de courbure est minimum en valeur absolue.

Exercice 366:

Soit (C) la courbe en coordonnées cartésiennes donnée par :

$$\begin{cases} x(t) &= 3t^2 \\ y(t) &= 2t^3 \end{cases}$$

où $t \in \mathbf{R}$.

Etude et représentation. Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à (C).

Exercice 367

Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(\cos(x))$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Calculer l'abscisse curiviligne s quand 0 est l'origine des abscisses curvilignes et l'orientation celle des x croissants.
2. Donner une relation entre R et s.
3. Tracer (Γ) et sa développée.

3.16.2 Surfaces

Exercice 368

Déterminer les plans à la fois tangents à (S) d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et contenant la droite (D) de système d'équations cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & z+2 \end{array} \right.$$

Exercice 369

On note (S) la surface d'équation :

$$x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$$

1. Déterminer les plans tangents à (S) qui sont parallèles au plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. En chacun des points de contact obtenus, étudier localement la position relative de la surface (S) et de son plan tangent.
3. (Bonus) Etudier la position relative globale de la surface (S) et du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

3.17 Inclassables, planches d'oraux ou Python

Exercice 370: BEOS 4555 CCP PC 2018

- (Exercice majeur)

  On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et E_1 le sous-espace vectoriel constitué des fonctions continues $1-$périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
  On définit, pour f dans E, la fonction $u(f)$ par :

  $$u(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  1. Vérifier que u est en endomorphisme de E.
  2. (a) Montrer que, pour $h_a : t \longmapsto e^{at}$, on a $u(h_a) = K_a h_a$ où K_a est une constante valant $\frac{e^a-1}{a}$ si $a \neq 0$. Préciser la valeur de K_a si $a = 0$.
     (b) On pose, pour $a \in \mathbf{R}^*$, $\varphi(a) = \frac{e^a-1}{a}$. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$.

     Montrer que tout réel strictement positif est valeur propre de u.
  3. (a) Montrer que $f \in \ker(u)$ si et seulement si $f \in E_1$ et $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
     (b) Montrer que $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E_1.
     (c) Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $c_k : t \longmapsto \cos(2\pi k t)$.
     Montrer que, si $k \neq l$, alors $(c_k \mid c_l) = 0$.
     (d) Montrer que $\ker(u)$ n'est pas de dimension finie.

- (Exercice mineur)

  On pose, pour $x > 0$,

  $$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx)}$$

  1. Sur quel intervalle G est-elle bien définie ? Sur quel intervalle est-elle continue ?
  2. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 371: BEOS 4157 CCP PC 2018

- (Exercice majeur)

  1. Soit
  $$g : \left|\begin{array}{ccc}]-\infty,0[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\exp\frac{1}{x}+\exp(x) \end{array}\right.$$
  Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.
  2. Soit
  $$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\exp y+y\exp(x) \end{array}\right.$$
  Montrer que, si (x,y) est un point critique, alors $x<0$, $xy=1$ et $g(x)=0$.
  Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.
  3. Soit $a\in\mathbf{R}^*$ et $h : x\longmapsto f(-1+ax,-1+x)$.
  Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $h(x)$ en 0.
  4. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
  5. Notons $D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|\leqslant 1 \text{ et } |y|\leqslant 1\right\}$.
  Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

- (Exercice mineur)

  Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ où E est un $R-$espace vectoriel de dimension impaire.
  1. Si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, que vaut $f^n(x)$?
  2. Supposons que $f^3-f^2+f-\mathrm{Id}=0$.
  Montrer que f admet une unique valeur propre réelle.

Exercice 372: BEOS 3487 Centrale PC 2017

On pose $f : x\longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe à l'aide de Python.
2. Pour $a,b\in\mathbf{N}$ tels que $0<a<b$, résoudre l'équation $a^b=b^a$.
3. Montrer que pour tout $x\geqslant e$, l'équation $x^y=y^x$ d'inconnue $y\in]1,e]$ admet une unique solution, notée $\phi(x)$.
4. Montrer que la fonction $\phi : [e,+\infty[\longrightarrow]1,e]$ ainsi définie est continue, puis de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Soit $t>0$. Montrer que
$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < e < \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}$$
6. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction
$$\psi : x\longmapsto 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^n$$
Tracer le graphe de ψ avec Python.

Exercice 373: BEOS 3484 Centrale PC 2017

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n\sqrt{1-t}}$$
et
$$J_n = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n\sqrt{1-t}}$$

1. Montrer que les deux intégrales sont bien définies pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Tracer I_n pour $1 \leqslant n \leqslant 50$.
3. Etudier la monotonie et la convergence de (I_n).
   Déterminer sa limite.
4. Tracer les points de coordonnées $(\ln(n), \ln(I_n))$ pour $100 \leqslant n \leqslant 1000$.
5. Conjecturer pour quel(s) entier(s) naturel(s) α la suite de terme général $n^\alpha I_n$ converge vers une limite non nulle.
6. Tracer les suites de termes généraux $n^\alpha I_n$ et $n^\alpha J_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant 50$. Que peut-on en déduire ?
7. Démontrer que
$$n^\alpha(I_n - J_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
8. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,
$$\ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x}$$

Bibliographie

[Amr09] Mohammed AMRANI. *Intégrale de Riemann théorie et pratique : avec exercices corrigés*. Paris : Hermann, 2009. ISBN : 2705669248.

[Bal09] Stéphane BALAC. *Algèbre et analyse cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009. ISBN : 2880748283.

[Châ15] Philippe CHÂTEAUX. *Exercices*. 2015.

[Des01] Claude DESCHAMPS. *Mathématiques 2e année : cours et exercices corrigés, 2e année MP, PC, PSI*. Paris : Dunod, 2001. ISBN : 2100054120.

[Fab] Lycée FABERT. *Polycopiés d'exercices de PSI**.

[Fre10a] Julien FRESLON. *Mathématiques exercices incontournables : MPSI-PCSI-PTSI*. Paris : Dunod, 2010. ISBN : 2100547674.

[Fre10b] Julien FRESLON. *Mathématiques exercices incontournables : PC, PSI, PT*. Paris : Dunod, 2010. ISBN : 2100534246.

[Gau09] Christian GAUTIER. *Mathématiques tout-en-un : ECS 2e année : cours et exercices corrigés*. Paris : Dunod, 2009. ISBN : 978-2-10-053975-8.

[Gav10] Sylvie GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles cours et exercices corrigés*. Paris : Dunod SMAI, 2010. ISBN : 210053050X.

[Gou08] Xavier GOURDON. *Analyse mathématiques pour MP*. Paris : Ellipses, 2008. ISBN : 2729837590.

[Lar12] Cécile LARDON. *Mathématiques : méthodes et exercices ECE 2e année*. Paris : Dunod, 2012. ISBN : 2100576690.

[Mer99] Xavier MERLIN. *MéthodiX analyse : 300 méthodes, 250 exercices corrigés*. Paris : Ellipses, 1999. ISBN : 2729899014.

[Mon08] MONIER. *Les méthodes et exercices de mathématiques MPSI*. Paris : Dunod, 2008. ISBN : 2100516760.

[Mon09] MONIER. *Mathématiques méthodes et exercices : PC-PSI-PT*. Paris : Dunod, 2009. ISBN : 2100534211.

[Pel18] Rémi PELLERIN. *Exercices de colle*. 2018.

[Ram] Edmond RAMIS.

[Riv78] Jacques RIVAUD. *Exercices d'algèbre linéaire : à l'usage des étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques et du premier cycle des universités*. Paris : Vuibert, 1978. ISBN : 2711721507.

[Rou15] Vidian ROUSSE. *Mathématiques : exercices incontournables : ECS 1re année*. Paris : Dunod, 2015. ISBN : 2100712284.

[Sau] François SAUVAGEOT. *Polycopiés d'exercices, de cours, d'oraux ...*