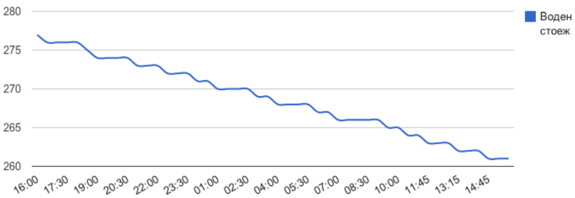
Рекурсивни програми

21 ноември 2025 г.

Редици, индуктивни дефиниции, индукция, рекурсия

Какво е редица от числа?

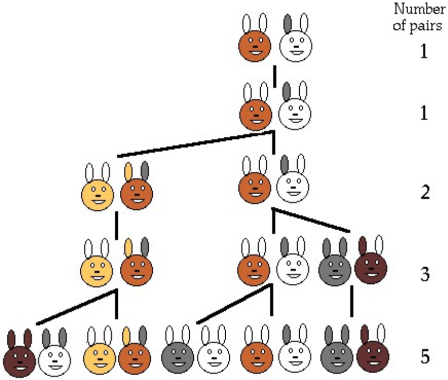
- Серия от измервания



Фигура: Нивото на река Дунав в см.

$a_0 = 280cm$	$a_1 = 275cm$	$a_2 = 271cm$	$a_3 = 272cm$	…

Описание на феномен?



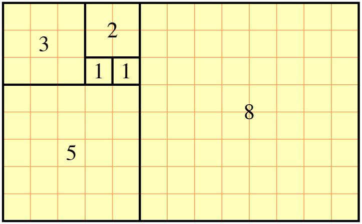
Leonardo Fibonacci
(c. 1170 – c. 1250)

$a_0 = 1$

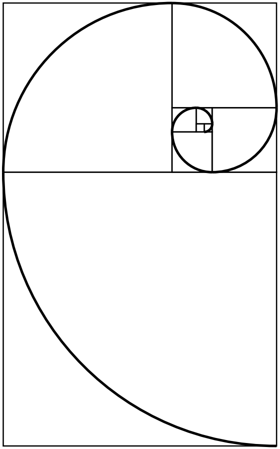
$a_1 = 1$

$a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$

Изчисление?



$a_0 = 1$
$a_1 = 1$
$a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$



Явна vs. индуктивна дефиниция на елементите на редица

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, \dots$$

- явна дефиниция

$$\{a_i\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_i = 2 + 4 + \dots + 2i = \sum_{k=1,\dots,i} 2k$$

- индуктивна дефиниция

$$\{a_i\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_0 = 0$$
$$a_i = a_{i-1} + 2i$$

a

Явна vs. индуктивна дефиниция на елементите на редица

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, \ldots$$

- явна дефиниция

$$\left\{a_i\right\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_i = 2 + 4 + \ldots + 2i = \sum_{k=1,..,i} 2k$$

- индуктивна дефиниция

$$\left\{a_i\right\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_0 = 0$$
$$a_i = a_{i-1} + 2i$$

a

Явна vs. индуктивна дефиниция на елементите на редица

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, \ldots$$

- явна дефиниция

$$\left\{a_i\right\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_i = 2 + 4 + \ldots + 2i = \sum_{k=1,..,i} 2k$$

- индуктивна дефиниция

$$\left\{a_i\right\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_0 = 0$$
$$a_i = a_{i-1} + 2i$$

a

От дефиниция до програма: наивен подход

```
void print_first_n (int n)
{
  for (int i = 0; i <= n; i++)
  {
    int sum = 0;
    for (int k = 1; k <= i; k++)
    //calculate 2+4+..+2*k
    {
      sum = sum + 2*k;
    }
    cout << "a[" << i << "]="
         << sum << endl;
  }
}
```

$$\{a_i\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_i = 2 + 4 + \ldots + 2i = \sum_{k=1,\ldots,i} 2k$$

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 0 + 2$$
$$a_2 = 0 + 2 + 4$$
$$a_3 = 0 + 2 + 4 + 6$$
$$\ldots$$

Използваме връзката между членовете на редицата

```
void print_first_n (int n)
{
  int a_i = 0;

  for (int i = 0; i <= n; i++)
  {
    cout << "a[" << i << "]=" << a_i << endl;

    a_i = a_i + 2*i;
  }
}
```

$$\left\{a_i\right\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_i = a_{i-1} + 2i$$

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 0 + 2 = 2$$
$$a_2 = 2 + 4 = 6$$
$$a_3 = 6 + 6 = 12$$
...

Индуктивни дефиниции и рекурсивни функции

```
int a (int i)
{
  if (i == 0)
    return 0;

  return a(i-1) + 2*i;
}
```

$$\{a_i\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_0 = 0$$
$$a_i = a_{i-1} + 2i$$

```
void print_first_n (int n)
{
  for (int i = 0; i <= n; i++)
  {
    cout << "a["<< i << "]=" << a(i) << endl;
  }
}
```

Доказателство по индукция

Теорема. За членовете на редицата $\{a_i\}_{\infty}^{i=0}$, дефинирани по следния начин:

$a_0 = 0$
$a_i = a_{i-1} + 2i$

е изпълнено, че $a_i = i(i+1)$, за всяко $n \in \mathcal{N}$.

Доказателство.

- За $i = 0$ свойството е изпълнено по дефиниция, тъй като $a_0 = 0 = 0(0+1)$.
- Нека свойството $a_i = i(i+1)$ е изпълнено за някое $i \in \mathcal{N}$. Искаме да покажем, че $a_{i+1} = (i+1)(i+1+1)$ (заместваме i с $i+1$). По дефиниция имаме $a_{i+1} = a_i + 2(i+1)$. Като заместим a_i с $i(i+1)$ (което сме допуснали), получваме $a_{i+1} = i(i+1) + 2(i+1) = (i+1)(i+2)$, което е търсеното свойство за a_{i+1}.

Прилики / разлики?

```
int a (int i)
{
  if (i == 0)
    return 0;

  return a(i-1) + 2*i;
}
```

Теорема. За членовете на редицата $\{a_i\}_{\infty}^{i=0}$, дефинирани по следния начин:

$$a_i = a_{i-1} + 2i$$

е изпълнено, че $a_i = i(i+1)$, за всяко $n \in \mathcal{N}$.

Доказателство.

- За $i = 0$ свойството е изпълнено по дефиниция, тъй като $a_0 = 0 = 0(0+1)$.
- Нека свойството е изпълнено за $a_{i-1} = (i-1)i$ при $i > 0$. Искаме да покажем, че $a_i = i(i+1)$ (заместваме $i-1$ с i). По дефиниция имаме $a_i = a_{i-1} + 2i$. Като заместим a_{i-1} с $(i-1)i$ (което сме допуснали), получаваме $a_i = (i-1)i + 2i = i(i-1+2) = i(i+1)$, което е търсеното свойство за a_i.

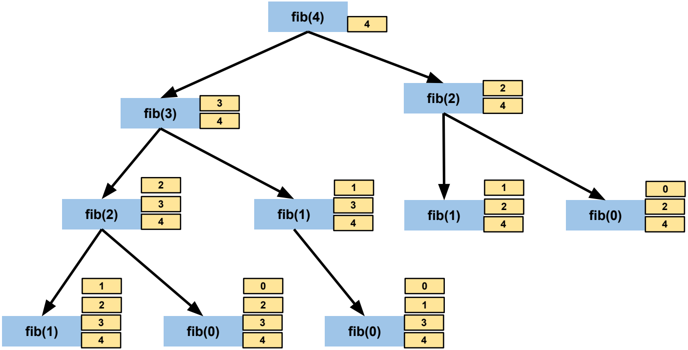
n-то число на Фибоначи

```
int fib_n (int n)
{
  if (n == 0)
    return 1;
  if (n == 1)
    return 1;

  return fib_n(n-2) + fin_n(n-1);
}
```

$$\left\{a_i\right\}_{\infty}^{i=0}$$

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 1$$
$$a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$$

n-то число на Фибоначи




```
int fib_n (int n)
{
  if (n <= 1)
    return 1;
  return fib_n(n-2) + fin_n(n-1);
}
```

Факториел

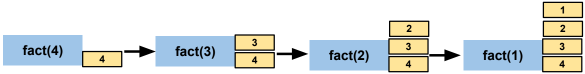
```
long fact_rec (long n)
{
  if (n <= 1)
    return 1;

  return n*fact_rec(n-1);
}

long fact_iter (long n)
{
  long result = 1;
  while (n > 1)
  {
    result *= n;
    n--;
  }
  return result;
}
```

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n \leq 1 \\ n \times (n-1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$0! = 1$$

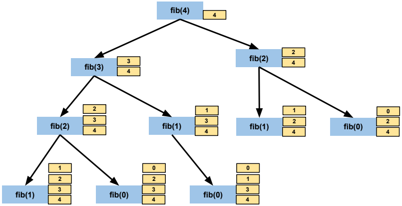
$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

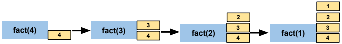
Факториел




```
long fact_rec (long n)
{
  if (n <= 1)
    return 1;
  return n*fact_rec(n-1);
}
```

Сравнение






```
void fib_n (int n)
{
  if (n <= 1)
    return 1;
  return fib_n(n-2) + fin_n(n-1);
}
```

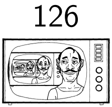
```
long fact_rec (long n)
{
  if (n <= 1)
    return 1;
  return n*fact_rec(n-1);
}
```

Wirth.,N.,“Algorithms + Data Structures = Programs”, Prentice Hall,1976

Разлагане на прости делители

$$252 = ?$$

Разлагане на прости делители

$$252 = 2.$$ 

Разлагане на прости делители

```
void print_divs (int n)
{
  if (n <= 1)
    return;

  int i = 2;
  while (i <= n && n % i != 0)
    i++;

   cout << i << ",";
   print_divs(n/i);
}
```

20677

$351509 = 17.$ 

899

$20677 = 23.$ 

31

$899 = 29.$ 

...


YOURWALLPAPER.COM

Сортиране с рекурсия?

1	13	4	2	10	11	10

Пряка селекция

8	13	4	2	10	11	10

8	13	4	2	10	11	10

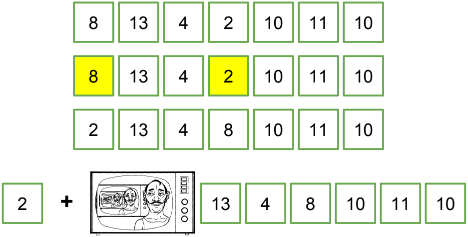
2	13	4	8	10	11	10

2 + 

13	4	8	10	11	10

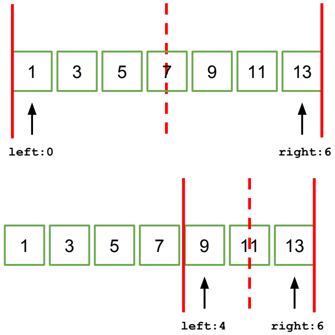
Сортиране с пряка селекция

```
void ssort (int arr[], int n)
{
  if (n <= 1)
    return;

  //find the INDEX OF the minimal
  //element of the array
  int minelIx = 0;
  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (arr[minelIx] < arr[i])
      minelIx = i;

  //swap the minimal element and
  //the element at position 0
  int tmp = a[0];
  a[0] = arr[minelIx];
  arr[minelIx] = tmp;

  //sort the "tail" of the array
  ssort (arr+1,n-1);
}
```



Да припомним двоичното търсене

```
bool findrec (int x, int a[], int size)
{
  if (size == 0)
  {
    return false;
  }
  if (size == 1)
  {
    return a[0] == x;
  }
  if (a[size/2] > x)
  {
    return findrec (x,a,size/2);
  }
  if (a[size/2] < x)
  {
    return findrec (x,a+(int)ceil(size/2.0),ceil(size/2.0)-1);
  }
  return true;
}
```



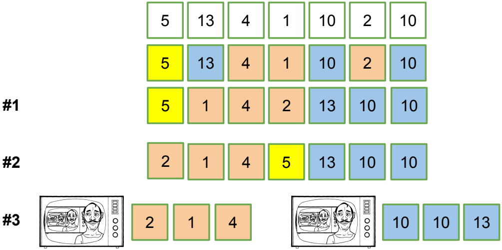
Бързо сортиране

	5	13	4	1	10	2	10
	5	13	4	1	10	2	10
#1	5	1	4	2	13	10	10
#2	2	1	4	5	13	10	10

#3  2 1 4  10 10 13

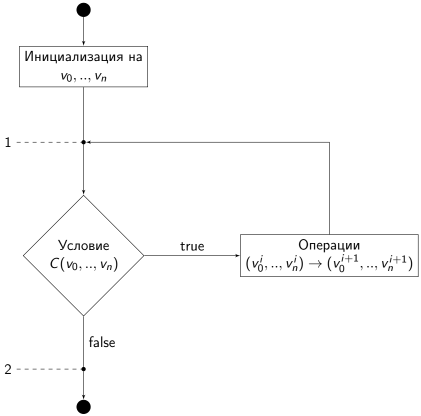
Бързо сортиране

```
bool qsort (int a[], int size)
{
  if (size <= 1)
    return;

  //1
  int nsmaller
    = split (a+1,size-1,a[0]);

  //2
  swap (a[0],a[nsmaller]);

  //3
  qsort(a,nsmaller);
  qsort(a+nsmaller+1,size-nsmaller-1);
}
```



Опашкова рекурсия

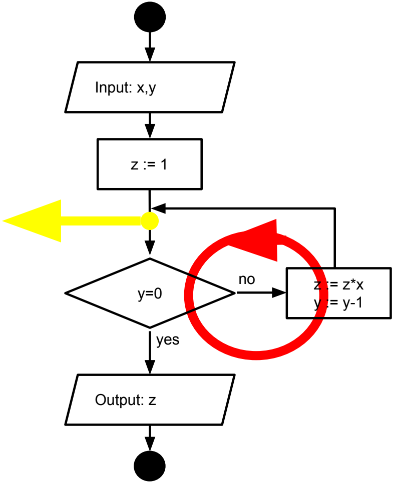
Обобщение на "цикъл"



$$(v_0^0, .., v_n^0) \rightarrow (v_0^1, .., v_n^1) \rightarrow \ldots \rightarrow (v_0^k, .., v_n^k)$$

x^y

#	x	y	z
0	2	5	1
1	2	4	2
2	2	3	4
3	2	2	8
4	2	1	16
5	2	0	32



Опашкова рекурсия

```
int sum(int a[], unsigned int size)
{
  if(size==0)
    return 0;
  return a[0] + sum(a+1,size-1);
}

int sumiter(int a[], unsigned int size, int accum)
{
  if(size==0)
    return accum;
  return sumiter(a+1,size-1,accum+a[0]);
}

//...
int arr[] = {...};
sumiter(arr,10,0);
```

Благодаря за вниманието!