

---

## SULLA PREFERIBILITÀ

Author(s): Bruno de Finetti

Source: *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, Novembre-Dicembre 1952, Nuova Serie, Anno 11, No. 11/12 (Novembre-Dicembre 1952), pp. 685-709

Published by: EGEA SpA

Stable URL: <https://www.jstor.org/stable/23236169>

---

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact [support@jstor.org](mailto:support@jstor.org).

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <https://about.jstor.org/terms>



JSTOR

is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*

# SULLA PREFERIBILITÀ

---

## 1. *Introduzione.*

Le discussioni sulle inesauribili questioni concernenti la preferibilità (e quindi l'utilità, la sua misurabilità, la nozione derivantene di indipendenza dei beni, ecc.) hanno ripreso con nuovo vigore e in parte almeno con nuovo significato negli ultimi anni, specialmente in seguito ai concetti espressi al riguardo da von Neumann e Morgenstern nella ben nota opera sulla *Theory of Games* (1).

Scopo del presente lavoro, nella sua prima parte dedicata a tale argomento, è di prospettare i termini della questione nel loro significato logico, e di presentare in tale quadro tesi e idee vecchie e nuove, in particolare quelle mie rispettivamente anteriori e posteriori ai contributi di von Neumann e Morgenstern. Principalmente mi propongo di lumeggiare la gamma dei punti di vista quali si sono manifestati nel recente colloquio sulle « Applicazioni della teoria del rischio all'economia » (2).

Nella seconda parte mi occupo della nozione di « preferibilità » in un ambito diverso, e cioè non più fra « situazioni » economiche ben determinate, ma fra « condizioni » economiche. Intendiamo, per « condizione » economica, un determinato complesso di circostanze che rende « tecnicamente possibili » tutto un insieme di « situazioni economiche »; determinano, ad es., una « condizione » economica, l'insieme di tutte le

---

(1) NEUMANN J. von e MORGENSTERN O. - *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Un. Press, (2ª ed.) 1947; l'argomento particolare cui ci riferiamo è stato esposto e tradotto in forma assiomatica nel modo più soddisfacente e convincente da J. MARSCHAK, in *Rationality, Uncertainty, Utility*, "Econometrica", vol. 18 (2), Apr. 1950.

(2) Tenuto a Parigi dal 12 al 17 maggio 1952 per iniziativa del Centre Nat. Rech. Scient.; vi presentarono comunicazioni G. T. Guilbaud, L. J. Savage, K. J. Arrow, B. de Finetti, M. Friedman, M. Allais, H. Wold, P. A. Samuelson, P. Massé et G. Morlat, J. Marschak, R. Frisch, M. Boiteux, F. Divisia, J. Ville, D. van Dantzig.

« situazioni » ottenibili da una data pensando di alterare comunque la ripartizione dei singoli beni fra i consumatori lasciando inalterate le quantità prodotte, oppure pensando anche di alterare le quantità prodotte in modo compatibile con l'attrezzatura produttiva esistente, ecc. Anche tale questione deriva da discussioni al citato colloquio, e precisamente è stata posta da Guilbaud in un intervento nella discussione sulla comunicazione che avevo ivi presentata (3).

## **Parte prima - Preferibilità tra situazioni economiche**

### *2. Superamento del contrasto?*

Nel discorso di chiusura del nominato Colloquio di Parigi, Ragnar Frisch esprime la sua soddisfazione nel trovare universalmente accolta e applicata l'idea di una utilità misurabile, contro la quale tante critiche e diffidenze si erano levate per lungo tempo da Pareto ad oggi. Si è dunque avuto realmente un superamento del contrasto? Una decisione che diede ragione agli uni e torto agli altri?

In particolare, per riferirmi al mio caso personale (insignificante come tale, ma di cui meglio so di poter analizzare i vari aspetti), c'è stato, e in qual senso, un cambiamento d'opinione sull'argomento?

A mio avviso la risposta è « no », o, per dir meglio « più no che sì »; è necessario chiarir bene i termini della questione per mostrare cosa ciò significhi. Intanto, per sintetizzare la risposta in modo provvisorio prima di concretarla in analisi precise, si potrebbe dire che la situazione è questa. La concezione di von Neumann e Morgenstern (che, per riguardo alla particolare questione qui trattata, si riduce in certo senso a quella della « speranza morale » di Daniele Bernoulli, fornisce una nozione di « utilità » (misurabile) che può essere accettata da coloro che respingevano i modi di definirla basati su altro ordine di idee (e in particolare io l'accetto). Ma con ciò il contrasto non è affatto superato, tant'è vero che lo stesso Frisch e altri autori che accettavano da prima la misurabilità dell'utilità, risolvevano la disputa chiedendosi se la nozione di « utilità » nel senso strettamente tecnico corrispondente alla nuova definizione coincida o no con quella in cui credevano (e tuttora essi credono e gli altri no).

---

(3) FINETTI B. de, *Rôle de la Théorie des Jeux dans l'Economie, et rôle des probabilités personnelles dans la Théorie des Jeux*; tanto il testo delle comunicazioni che quello degli interventi nella discussione sono in corso di stampa negli Atti del Colloquio.

Più che di una decisione del vecchio contrasto, si ha quindi l'introduzione di un elemento nuovo non necessariamente collegato all'uno o all'altro dei punti di vista contrapposti.

### 3. Il « punto di vista operativo ».

Prima di entrare nel merito del contrasto occorre richiamare le premesse concettuali da tener presenti. Le questioni sulla possibilità di definire una misura dell'utilità dipendono infatti in gran parte dal modo più o meno rigido d'intendere l'esigenza del rigore scientifico nelle definizioni.

La forma più rigida (cui ritengo indispensabile attenersi se non si vuol far uso di termini mal definiti e dire quindi frasi che non hanno un significato univoco) è quella sempre più chiaramente affermata nella fisica: il punto di vista *operativo*. Una nozione non può esser definita mediante « spiegazioni » più o meno abili, ma soltanto direttamente con riferimento agli esperimenti che permettono di precisarla. Per definire una *qualità*, occorre precisare quale esperimento s'intende di dover fare per decidere se la qualità sussiste o no; per passare a una *comparazione*, occorre precisare quale esperimento s'intende di dover fare per stabilire se una relazione sussiste in un senso o in quello opposto; per giungere infine a definire una *grandezza* occorre stabilire quali mezzi sperimentali si adottano per ottenere la misura. Si badi: non sono, queste, delle precisazioni pratiche che si voglia raccomandare di « aggiungere » a una definizione per consentire o agevolarne l'utilizzazione empirica; vanno intese, al contrario, come premesse di ordine logico, in quanto i procedimenti sperimentali di decisione o di misura sono il presupposto per l'introduzione stessa del concetto teorico.

La forma meno rigida, per andare all'estremo opposto, starebbe nel pensare che una qualità possa venir definita per lo stesso significato più o meno vago di un aggettivo nel linguaggio corrente o mediante quello altrettanto vago o quasi di circonlocuzioni esplicative, che data una qualità sia implicito farne una comparazione, e quindi sorga spontanea una idea di misura. Fra gli estremi, tutte le varianti corrispondenti a transigere sull'esigenza rigorosa in modo più o meno largo su certi o certi altri punti. Il pericolo di tale modo di pensare e procedere è stato ripetutamente illustrato: un medesimo vocabolo del linguaggio comune è spesso suscettibile di vari significati ciascuno dei quali dà luogo ad un

concetto scientifico ben distinto (4), oppure l'«intensità» di una comparazione può condurre a scale ben diverse di misura (5); tuttavia non è superfluo insistere sull'esigenza del punto di vista operativo, non solo perchè tuttora poco sentita fuori dell'ambito delle scienze fisiche, ma anche perchè certe tendenze di logici moderni mi sembra contengano un involontario pericolo di regresso.

E' infatti molto diffusa la tendenza a presentare singole dottrine scientifiche come costruzioni autonome astratte i cui termini sono introdotti arbitrariamente senza riferimento ad alcuna interpretazione concreta, e il cui collegamento ad applicazioni reali appare all'ultimo momento come qualcosa di accidentale e di male afferrabile. Anche la logica si preoccupa in tal caso solo dell'aspetto formale della trattazione, trascurando il compito essenziale dell'agganciamento tra significato sostanziale e apparecchiatura formale, sia all'inizio perchè si vuol prescindere, sia alla fine perchè lo si perde di vista.

Come esempio di tale pericoloso atteggiamento vorrei citare il volume di Carnap sui fondamenti della probabilità (6): opera magistrale sotto molti aspetti e certo utile al progresso delle discussioni, eppure sconcertante dal punto di vista di cui ci occupiamo. Sia nel discutere in generale sul modo di sostituire a una nozione prescientifica (*Explicandum*, come lui dice) una nozione scientifica (*Explicatum*), sia nell'applicazione concreta di tali concetti alla definizione della probabilità, risulta notevole lo squilibrio fra la completezza meticolosa nelle precisazioni di carattere formale e la cura sommaria nelle analisi dei punti sostanzialmente fondamentali.

#### 4. Il caso della «preferibilità».

Avremo ancora da fare delle osservazioni di carattere generale riguardo alle definizioni e al punto di vista operativo, ma risulterà più chiaro sviluppare sul caso concreto che qui interessa, quello cioè della preferibilità, e su qualche altro che ci si presenterà congiuntamente.

Il modo di procedere contrario al punto di vista operativo consisterebbe nel pretendere di aver introdotto la nozione di utilità per il fatto di aver dato esempi e spiegazioni atti a dare un'idea di ciò che si pensa

---

(4) Particolarmente istruttive le considerazioni chiare ed elementari di O. CHISINI, *Qualità, numeri indici e grandezze*, "Period. di Matematiche", S. IV, Vol. 19 (5), 1939; soprattutto conformi al significato della frase nel testo i chiarimenti (a pag. 239) sulle diverse accezioni di «caldo».

(5) V. ad es. in seguito (n. 6, a) le considerazioni sull'esempio della "velocità".

(6) CARNAP R., *Logical Foundations of Probability*, Chicago Un. Press, 1950

di avere in mente, e spiegare poi, ad es., che la scelta fra diversi beni o situazioni viene fatta in base alla maggiore utilità. Benchè nessuno ormai sostenga la validità di un tal modo di « ragionare », mi sembra che le concezioni cui si riferiscono le critiche che vedremo non abbiano in realtà fondamento diverso.

Il modo di procedere conforme al punto di vista operativo consiste invece nel definire la « preferibilità », o « maggior utilità », in base al fatto osservabile delle scelte, e nel passare eventualmente a considerare una « misura dell'utilità » se esistono circostanze osservabili che consentano di definirla e soltanto sulla base di esse. Così si giunge a veri concetti scientifici, desunti dai fatti e utili a descrivere i fatti; altrimenti si inventano pseudoconcetti vuotamente metafisici.

La definizione di « preferibilità » non presenta alcun punto dubbio nella sua essenza; qualche discussione sarà richiesta solo per osservazioni di natura complementare. Nell'essenza, si tratta semplicemente di constatare se, di due situazioni possibili  $A$  e  $B$ , potendo scegliere, un dato individuo preferisce  $A$  o  $B$ ; se le situazioni sono punti del piano (p. es. quantità di due beni) si ottengono le linee d'indifferenza; nello spazio (p. es. tre beni) superficie d'indifferenza; in generale, nello spazio a più dimensioni corrispondente a un numero qualunque di beni o a situazioni economiche comunque altrimenti caratterizzate, si avranno varietà d'indifferenza.

##### 5. Considerazioni critiche.

Alcuni punti o aspetti vanno brevemente trattati per il loro nesso con discussioni recenti.

a) *L'« idealizzazione » nelle definizioni operative.* In ogni definizione « operativa » si presenta un dilemma: o la si applica all'esperienza bruta e ogni minima imprecisione impedisce di costruire una teoria razionale, o si idealizza qualcosa e la teoria non risulta più basata, come si vorrebbe, sulla realtà. Nel caso nostro, per costruire la teoria, occorre (come per ogni nozione comparativa) che sussistano le proprietà transitiva ecc. atte ad assicurare l'ordinamento totale. Ma, se la definizione si basa sul comportamento *effettivo* di un individuo, può ben darsi che in tre esperimenti successivi preferisca  $A$  a  $B$ , poi  $B$  a  $C$ , ed infine  $C$  ad  $A$  (se il divario non è netto e la scelta dipende da oscillazioni di gusti); la stessa incongruenza può apparire se la decisione è fatta con criteri statistici (come rilevato da Guilbaud (7)). Se invece esigiamo siano ri-

(7) GUILBAUD G. T., *Sur une difficulté de la Théorie du Risque*, Comun. al Colloquio, v. (2).



spettate quelle che si considerano normalmente esigenze razionali, essa non è valida che per individui *ideali* o che si comportano come tali e non ha più la base nella realtà effettiva (è questa l'obiezione di Fréchet per un caso analogo (8)).

A mio avviso, il primo modo di vedere non costituisce un rafforzamento del rigore cui s'ispira il punto di vista operativo, ma un tranello che lo renderebbe ovunque inoperante. Nessuna teoria sarebbe possibile se dovesse render conto dei dati effettivi, inclusi ad es. gli errori di osservazione! Il punto di vista operativo deve esser seguito col massimo rigore *concettualmente*, ma non può nè deve impedire quel necessario grado d'idealizzazione senza del quale l'unica conclusione « teorica » sarebbe che non si potrà mai dir nulla di nulla (9).

Per chiarire concretamente, ecco come applicherei tali concetti nel caso in questione (nonchè, analogamente, ad es., in quello della probabilità con riferimento alle citate critiche del Fréchet). La definizione di preferibilità è basata sull'esperimento, quello della « scelta » (dettagli, come prova unica o ripetizione statistica, possono costituire varianti ad libitum). Nella costruzione della teoria consideriamo solo individui *coerenti*, stabilendo per libera convenzione di chiamar così quelli i cui giudizi soddisfano certe condizioni « naturali ». Non possiamo escludere che esistano individui che cadono in « incoerenze », e allora gli atteggiamenti possibili sono due. O riteniamo che tali incoerenze sono fatti accidentali o accessori, nel senso che corrispondono non ad una convinzione voluta ma a svista di cui ciascuno si correggerebbe se resone attento o a volubilità momentanee ecc.: ed allora ci limiteremo a teorizzare le opinioni « coerenti » ed attribuiremo ogni deviazione alla scelta non sufficientemente precisa da parte di un individuo di una ben determinata fra tali opinioni. O riteniamo invece che esista da parte di certi individui (pochi o molti) un modo di comportarsi sistematicamente e consapevolmente diverso, e potrà valer la pena di cambiare la teoria, o allargandola per includere tale caso, o aggiungendone una diversa (restando almeno in parte all'arbitrio se modificare il significato precedente di « coerenza » o se qualificare di « teoria del comportamento incoerente »

---

(8) Cioè: riguardo agli assiomi per una teoria delle probabilità soggettive; v. FRÉCHET R. M., *Rapport général sur les travaux du Colloque de Calcul des Probabilités*, "Act. Sci. Ind." n. 1146, Hermann, Paris, 1951 (concetto meglio precisato in corrispondenza successiva sull'argomento).

(9) Tale punto di vista sull'argomento generale delle definizioni e della logica scientifica si trova sviluppato nella comunicazione ai "Troisièmes Entretiens de Zurich" (1951): B. de FINETTI, *Expérience et Théorie dans l'élaboration et dans l'application d'une doctrine scientifique* (Atti in corso di stampa).

il nuovo ramo). Se si abbandonasse il postulato della transitività, non si potrebbe ad es. prevedere cosa farebbe l'individuo immaginato qualora potesse scegliere tra  $A$ ,  $B$  e  $C$  simultaneamente: ragioni del genere mostrano come la scelta dei postulati di « coerenza » abbia il valore spesso di esigenza *logica* più che psicologica (come secondo i dubbi dei critici).

b) *Il « soggettivismo » in definizioni operative.* Nel nostro caso è ovvio che la preferenza si riferisce a un individuo, ai suoi gusti e alle sue opinioni. Non esiste una « utilità » di un bene come grandezza fisica ad esso inerente, all'infuori del rapporto con un individuo che lo desidera. Perciò l'esperimento preso a base della definizione concerne il comportamento di un individuo (come ogni nozione di psicologia, che, per aver senso dal punto di vista operativo, deve venir definita in base al comportamento; o behavior, da cui behaviorismo). Quando si tratta invece di grandezze fisiche, è ovvio che l'esperimento si rende quanto possibile indipendente dalla persona dell'osservatore il cui influsso non sarebbe che un fattore di errore; di qui la frequente associazione d'idee, che definizione operativa significhi definizione obiettiva. Da ciò obiezioni specialmente contro la definizione soggettiva della probabilità. Invece definizione operativa è definizione che penetra a individuare mediante l'esperimento l'essenza intima di un concetto, oggettiva se oggettiva, soggettiva se soggettiva.

c) *La struttura d'ordine della preferibilità.* Generalmente, definita la « preferibilità » ed ammessa la proprietà transitiva ecc., si considera senz'altro lecito pensare che risultino definite le linee (o superficie, ecc.) d'indifferenza e si possano introdurre degli « indici d'utilità » (funzioni crescenti nel senso della preferibilità, e aventi come linee ecc. di livello quelle d'indifferenza). Dal punto di vista teorico c'è una lacuna: occorrerebbe qualche postulato in più (sul tipo, per esprimersi elementarmente, del « postulato di continuità della retta »); su ciò si basa una critica di von Neumann-Morgenstern (op. cit., pp. 631-632). E' però facile togliere la lacuna e quindi l'obiezione imponendo una restrizione che appare particolarmente naturale esprimendola con riferimento all'analogo comportamento delle « quantità ». Per semplicità poniamoci nel piano (quantità  $x$  e  $y$  di due beni); date due situazioni  $x_1, y_1$  ed  $x_2, y_2$ , vediamo in base a quale naturale restrizione è lecito asserire che l'ordine di preferenza tra le situazioni intermedie (quanto a preferibilità) tra le due considerate consente di porle in corrispondenza ordinata biunivoca coi numeri reali di un intervallo. Si scelgono  $x', y'$  e  $x'', y''$  in modo che  $x'$  sia minore e  $x''$  maggiore sia di  $x_1$  che di  $x_2$  (id. per  $y$ ), e si considerino i punti del segmento  $x' + t(x'' - x'), y' + t(y'' - y')$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Basta am-



mettere che al crescere di tutte le quantità la preferibilità aumenta per stabilire che, sul segmento, la preferibilità cresce con  $t$ . Ma ogni altro punto (di preferibilità compresa tra quelle di  $x_1, y_1$  e  $x_2, y_2$ , e quindi a fortiori fra quelle di  $x', y'$  e  $x'', y''$ ) determina un valore  $t=t_0$  di separazione fra quelli dei punti del segmento preferibili o no; basta quindi ammettere la proprietà archimedeica per concludere che il punto  $t=t_0$  del segmento è addirittura indifferente a quello dato (precisamente: basta ammettere che non può essere  $A$  preferibile a  $B$  se l'aggiunta di quantità comunque piccole rende viceversa  $B$  preferibile ad  $A$ ).

E questa non si può neppure dire una restrizione o un'ipotesi: in astratto può dirsi una convenzione per precisare il senso della preferibilità; in concreto è piuttosto l'ammissione del fatto che è già un'idealizzazione parlare di preferibilità quando la differenza è impercettibile (p. es. di un grammo di pane in più!), e sarebbe insensato spingersi oltre (considerando quelle che, in confronto alle differenze rivelabili dalla diversità di  $t$ , sarebbero a dirsi differenze infinitesime).

#### 6. La « misurabilità » dell'utilità.

Con le ultime considerazioni rimane giustificata la possibilità d'introdurre degli indici d'utilità, in modo che fra due situazioni sia preferibile la prima, o la seconda, o siano indifferenti, a seconda che l'indice di questa sia maggiore, minore o uguale all'altro; non è questo però che s'intende dicendo che l'utilità è misurabile. Ciò significherebbe invece che, fra gli infiniti indici così definibili (qualunque funzione crescente di uno di essi), ve n'è uno rispondente a requisiti intrinsecamente significativi.

Cosa può dirci il « punto di vista operativo »? che, se l'esperimento è quello che definisce la preferibilità, esso basta a definire soltanto la preferibilità in quanto comparazione, e null'altro. Per l'eventuale ulteriore passo, a volerlo fare sensatamente, ammesso che sia possibile, occorre ricorrere ad esperimenti d'altro tipo.

a) *Confronti non operativi*. Spesso ci si contenta di notare che è abbastanza spontaneo aggiungere a dei confronti di preferibilità un'indicazione dell'intensità della preferenza (non solo si dice che  $A$  è preferibile a  $B$  e  $C$  a  $D$ , ma è maggiormente preferibile  $C$  a  $D$  che non  $A$  a  $B$ ). Perchè non basare allora una definizione quantitativa sulla risposta a domande del genere? Questa non è soltanto l'idea primitiva per la definizione dell'utilità, ma la base più o meno vaga di tendenze attuali; domande del genere fanno parte ad es. di un questionario diffuso dopo il

citato Colloquio di Parigi da alcuni partecipanti per sondare comparativamente i punti di vista in merito.

Qualcuno potrebbe pensare che il difetto di un tale metodo stia nel carattere *soggettivo* del confronto su cui si basa (e allora non vi sarebbe ragione di respingerlo se quello adottato per definire la preferibilità è parimenti soggettivo). Ma qui il fatto è un altro: si tratta non di una questione ben posta pur dipendendo dai gusti di un individuo, ma di una questione non chiaramente definita. Per chiarire il concetto con un esempio ove nulla v'è di soggettivo, pensiamo di chiedere « se c'è maggior divario fra una velocità di 20 e di 30 km/h o di 30 e 40 »; l'interrogato può legittimamente pensare sia di dover rispondere che è uguale (pensando alle velocità), o che è maggiore nel primo caso (pensando all'aumento relativo, 50 % anziché 33 %), o che è maggiore nel secondo (pensando all'aumento di forza viva, da 9 a 16 anziché da 4 a 9), ecc. Una frase del genere, insomma, non ha di per sé un significato univoco (anche quando nessun fattore soggettivo interviene nella risposta).

Un tentativo di formulazione più significativa consiste nel chiedere se « sarebbe maggiore il piacere di passare a *B* trovandosi in *A*, o di passare a *D* trovandosi in *C* »; ma quale criterio si può introdurre per confrontare il piacere fra due situazioni che si escludono? Non è possibile decidere con una effettiva scelta, che può essere fatta solo nella situazione reale, sia *A* o *C*; manca la possibilità di confronto operativo, esiste *no bridge* per confrontare le due intensità di piacere.

b) *La « soglia » del percepibile*. Un concetto leggermente più elaborato consiste nel basarsi sulla « soglia minima percettibile »: si ammette di poter determinare, in ogni punto, qual'è l'ampiezza dell'aumento o diminuzione di utilità che riesce impercettibile a un individuo; come scala si adotta allora quella in cui tale soglia si mantiene costante. Così si è proceduto in psicologia, pervenendo ad enunciare la « legge di Fechner »; e se, come qui, la nozione è prossochè fine a sè stessa, poco male. Ma credere di avere un concetto scientificamente ben definito sarebbe altra cosa. Il limite fra percettibile e impercettibile è non solo vagamente definibile, ma vi è una contraddizione fra l'idealizzazione richiesta per definire la preferibilità (anche per differenza minima) e quella che vorrebbe procedere oltre rimangiandosi tale premessa (giungendo a contraddizioni anche formali, perchè da *A* indistinguibile da *B*, e *B* da *C*, non scende che lo sono *A* e *C*: noti paradossi « pratici » del continuo segnalati da Poincaré ecc.).

c) *Utilità e « speranza morale »*. Si ha invece una nozione perfettamente accettabile secondo il punto di vista operativo quando ci si

basi sulla definizione di von Neumann-Morgenstern; unica osservazione da fare (una precisazione, non una critica) è che essa richiede la considerazione di scelte in un ambito ampliato, e cioè non solo fra le diverse situazioni economiche ma anche fra le loro combinazioni probabilistiche. Il concetto non è così nuovo, potendosi trovarlo implicitamente nella « speranza morale » di Daniele Bernoulli, e più esplicitamente nelle ricerche di F. Plumpton Ramsay (10); nuovo è tuttavia come fondamento di una compiuta trattazione economica.

Una combinazione probabilistica di due (o analogamente tre o più) situazioni economiche  $A$  e  $B$  è la « situazione » consistente nell'avere una certa probabilità  $p$  di ottenere  $A$  e la probabilità  $q=1-p$  di ottenere  $B$ ; indicheremo tale combinazione con  $pA+qB$ . Se  $C$  è una situazione di utilità intermedia fra quelle di  $A$  e  $B$ , e si consente di ammettere alla comparabilità anche le combinazioni probabilistiche,  $C$  sarà ugualmente utile ad una certa combinazione probabilistica  $pA+qB$ : diremo allora che la « differenza di utilità » fra  $A$  e  $C$  e quella tra  $C$  e  $B$  stanno tra loro come  $p$  e  $q$ . Adottando tale misura dell'utilità, l'utilità si combina linearmente con le probabilità: dette  $a, b, c$  le utilità di  $A, B, C$ , sarà nel caso detto  $c = pa+qb$ ; in particolare,  $C$  ha utilità media tra  $A$  e  $B$  se è equivalente ad avere  $A$  o  $B$  con probabilità 50% e 50%.

Naturalmente, per assicurare tali proprietà occorre qualche ulteriore postulato. Dell'aspetto tecnico non tratteremo; gli aspetti concettuali esigono diverse considerazioni, che saranno svolte nel n. 7.

### 7. *Il comportamento di fronte al rischio.*

La definizione di utilità secondo von Neumann-Morgenstern viene a collegare ed anzi a basare tale nozione su una teorizzazione del comportamento di fronte a decisioni aleatorie, o, più brevemente, di fronte al rischio. I postulati sui quali von Neumann e Morgenstern basano una teoria razionale del comportamento di fronte al rischio non sono dissimili da quelli ben naturali che si devono ammettere per la preferibilità; tuttavia l'accettazione della « coerenza », nel senso da essi voluto, nel nuovo campo, non pare altrettanto generalmente facile. Vi sono infatti Autori che ritengono di dover basare una teoria razionale su basi del tutto diverse, e vi sono motivi, anche accettando questa teoria, per considerare come più essenziali i fattori di differenziazione fra comportamento razionale e comportamento effettivo in dipendenza da circostanze accessorie. Infine, anche prescindendo da ogni circostanza del genere,

(10) F. P. RAMSAY, *The Foundations of Mathematics*, London, 1931.

va osservato che la nozione di utilità definita in tal modo non corrisponde necessariamente agli intendimenti di chi attribuisce ad essa un significato diretto. Esaminiamo in dettaglio tali punti in ordine inverso.

a) *L'utilità in senso probabilistico*. Supponiamo intanto adunque accettate le premesse che consentono di costruire la definizione di utilità secondo von Neumann-Morgenstern. Le discuteremo in seguito; osserviamo soltanto, per ora, che la scala dell'utilità esprime in sostanza la propensione o avversione dell'individuo giudicante ad assumersi dei rischi. Si avrà una « utilità » rapidamente decrescente con il crescere della quantità nel caso di un individuo prudente che scambierebbe con un milione certo un biglietto che gli dia 50 % di probabilità di vincerne 10 (diremo che il primo milione ha per lui la stessa utilità dei 9 successivi), mentre avremo ad es. una utilità costante se lo scambierebbe con 5 milioni (uguale utilità dei primi 5 e secondi 5: scommessa in base alla « speranza matematica »).

Per chi (come me; cfr. nn. precedenti) non riconosce un significato alla misura dell'utilità in altre accezioni, nulla può esservi in contrario a chiamare *utilità* quella così definita; chi invece vi attribuisca un significato diretto, non collegato alla predisposizione per i rischi, deve protestare e chiedere una denominazione diversa per il nuovo concetto. E' stata infatti proposta quella di « funzione generatrice delle scelte aleatorie » (Tintner e altri AA.).

b) *Circostanze accessorie*. Supponiamo ancora di accettare le premesse di von Neumann-Morgenstern come base di una teoria del « comportamento razionale », o « coerente »; sussiste comunque il fatto che in tale campo (delle scelte fra situazioni aleatorie) il comportamento effettivo sembra dover scostarsene più che non nel campo usuale (di scelte fra situazioni determinate), e per varie ragioni. La decisione di accettare o no una scommessa o altro rischio si scosta spesso da quel che vorrebbe il teorico criterio di preferibilità che rappresenta il comportamento di massima dell'individuo; ciò ad es. per desiderio di tentare la sorte di quando in quando, o per maggior facilità a rischiare quanto fosse eventualmente stato vinto al gioco, o per circostanze di contorno più o meno invitanti (compagnia, esempio, imitazione, ambiente, modalità e divertimento del gioco, sensazione di euforia o depressione, ecc.). Non che circostanze analoghe non si presentino anche fuori del campo del rischio, ma qui costituiscono più la normalità che l'eccezione. Ne deriva un certo dubbio nella significatività della definizione basata sulla preferenza (e che presuppone una coerenza nella preferenza, ossia rispetto dei postulati); se non si giunge (il che riterrei eccessivo) a rigettare l'impo-

stazione, è ben cercar di ridurre l'indeterminazione pratica precisando bene le modalità in cui deve immaginarsi prospettata la scelta affinché il responso si possa prevedere per quanto possibile significativo.

c) *Impostazioni diverse*. Quanto agli Autori che rigettano addirittura l'impostazione in quanto schema teorico per darsi a creare degli schemi diversi, alcuni (come Allais) pensano di allargarlo ritenendo di dovervi far rientrare quelle che al punto precedente avevano chiamato circostanze accessorie, ed altri (come Shackle) immaginano addirittura schemi ispirati a concetti del tutto nuovi. Sarebbe lungo e fuori luogo passare in rassegna tutti i diversi punti di vista, ciò che del resto è stato fatto recentemente e in modo esauriente da Arrow, al cui lavoro (11) rinvio. Mi limiterò a qualche osservazione.

Quanto alla considerazione delle « circostanze accessorie », mi sembra costituisca argomento di studio interessante ma meglio adatto a rimanere un esame complementare di circostanze accessorie anzichè a dar luogo a uno sconvolgimento dello schema teorico. Ciò porta, senza alcuna utilità, ad incorporare nello schema, rendendolo torbido e farraiginoso, tutto ciò che di nebuloso c'è ed è bene ne resti al di fuori. Circostanze accessorie esistono anche nel caso di scelte non aleatorie: anche le compere (in ispecie di oggetti superflui, per capriccio ecc.) dipendono spesso in pratica da circostanze analoghe (compagnia, esempio, presentazione in vetrina, euforia o depressione, aver vinto o guadagnato facilmente del denaro, ecc. ecc.), eppure non ci sarebbe convenienza a rigettare lo schema teorico generale della preferibilità come punto di partenza per lo studio dell'economia. Le circostanze accessorie, qui come altrove, esistono, ed è bene studiarle, ma a parte.

Quanto alle costruzioni radicalmente diverse, penso non abbiano altra giustificazione che quella storica: di apparire in un'epoca in cui nel campo delle concezioni sulla probabilità sussistono paurosi disorientamenti, tali da scoraggiare chi dovrebbe riconoscere in tale teoria il fondamento per le proprie dottrine.

#### 8. *Comportamento probabilistico e suoi assiomi.*

Possiamo semplicemente chiamare « comportamento probabilistico » quello conforme alla impostazione di von Neumann-Morgenstern (quale accennata in n. 6, c e n. 7, a), dato che si basa su condizioni che appa-

(11) KENNETH J. ARROW, *Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk Taking Situations*, « *Econometrica* », Oct. 1951.



iono ovvie a chi tenga presente la nozione di probabilità. Come detto, non intendiamo qui entrare in una discussione tecnica degli assiomi, e basterà quindi dirne il significato sostanzialmente consistente in una estensione in senso probabilistico della proprietà transitiva: « ogni combinazione  $pA + qB$  ha utilità intermedia fra quelle di  $A$  e  $B$  » ( $pA + qB$  essendo la situazione di ottenere o  $A$  o  $B$  con le probabilità rispettive - non nulle -  $p$  e  $q = 1 - p$ ). Basta, in fondo, tale ammissione (con altre più formali) per definire come « coerente » il comportamento di fronte al rischio corrispondente alla formulazione di von Neumann-Morgenstern. Sembrerebbe che ciò non sia suscettibile di dubbi o discussioni, tanto l'ammissione appare ovvia. Ma vi sono dei punti da esaminare.

a) *Nesso con la definizione di probabilità.* Anzitutto un'osservazione intesa non a contrastare l'impostazione di von Neumann-Morgenstern ma a completarne la visione. In essa infatti la nozione di probabilità viene accettata come qualcosa di già noto in precedenza (e precisamente adottando la « perfectly well founded interpretation of probability as frequency in long runs », che « gives directly the necessary numerical foothold » (3.3.3), p. 19). A parte le critiche ripetutamente sviluppate contro tale concezione, tutt'altro che « well founded » a mio avviso, vi sono una ragione negativa ed una positiva per suggerire una via diversa. Ragione negativa: che sulla scelta possono influire le probabilità quali sono valutate dall'individuo in questione, ossia le probabilità in senso soggettivo, e non le frequenze future effettive a lui ignote non corrispondenti a tali previsioni soggettive. Ragione positiva: che per definire le probabilità soggettive servono proprio dei metodi di scelta uguali a quelli atti a definire la preferenza (12). Di qui l'utilità di una fusione delle due definizioni (nel senso, del resto, già abbozzato da Ramsay).

b) *Gli assiomi di L. J. Savage.* A tale compito, di incorporare l'impostazione di von Neumann-Morgenstern in uno schema unitario più vasto comprendente anche i principi della probabilità e costituente una teorizzazione completa del comportamento di fronte al rischio, si è accinto L. J. Savage. Egli ha finora riassunto il suo sistema in una comunicazione al citato Colloquio di Parigi, ed anche in una conferenza te-

(12) Per la definizione, v. p. es. B. de FINETTI, *La prévision. etc.*, "Ann. Inst. H. Poincaré", 1937; per i nessi qui accennati v. le considerazioni finali in B. de FINETTI, *Recent Suggestions for the Reconciliation of Theories of Probability*, "Proc. 2nd Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability", Calif. Un. Press, 1951.



nuta a Milano (13). Mentre un esame approfondito sarà più utile dopo apparsane un'esposizione più completa, dovevo qui segnalarlo come esempio di impostazione ispirata ai concetti auspicati nel precedente punto *a*. Aggiungerò soltanto che l'esposizione del Savage ha un carattere molto accentuato di rigore logico-formale e di astrattezza, ciò che comporta sia dei vantaggi che degli svantaggi. Al vantaggio sostanziale della perfezione matematica va aggiunto quello contingente di una migliore prevedibile efficacia nel mondo scientifico angloamericano, scarsamente proclive alla penetrazione di idee che non siano state preventivamente confezionate in forma « assiomatica ». Come svantaggio c'è in genere una certa difficoltà nell'individuare e separare ciò che è essenziale e significativo da ciò che è accessorio e formale; inoltre, nel caso in oggetto, la commistione delle questioni sull'utilità da una parte e sulla probabilità dall'altra, guadagnerebbe ad essere abbandonata più presto non appena fissatane l'unica scaturigine (14). Essenziale è comunque che è stata compiuta con successo la costruzione di una teoria unitaria che, partendo da condizioni di natura astratta, conduce alle conclusioni precise di von Neumann-Morgenstern.

*c) Confutazioni mediante paradossi.* E' interessante infine riferire un'obiezione basata su un paradosso, sia per esaminarne la natura, sia per rendere avvertiti come ciò che sembra ovvio in generale possa poi apparire dubbio su casi particolari e come a sua volta il dubbio possa riconoscersi ingiustificato. E' stato Morlat a presentare (sempre al Colloquio di Parigi) un esempio contro gli assiomi di Savage e quindi contro il comportamento probabilistico. Si tratta di un caso in cui, sostituendo in una combinazione  $pA + qB$  una situazione  $A$  con altra  $A'$  preferibile, si otterrebbe una combinazione  $pA' + qB$  non preferibile (contro i postulati). E' naturalmente questione di apprezzamento, e quindi soggettiva, il dire quale situazione sia preferibile, ma in effetti è tale apprezzamento che ci si propone di studiare; sta di fatto che, sottoponendo l'esempio al giudizio di un soggetto qualunque, è quasi certo che la risposta risulta contraria a quella « giusta » secondo gli assiomi. Il Morlat (ed altri francesi, come Allais e Massé) interpretano tale fatto

(13) L. J. SAVAGE, *Une axiomatisation du comportement raisonnable face à l'incertitude*; la conferenza sullo stesso argomento a Milano ebbe luogo il 10 aprile 1952 all'Ist. Studi Economici.

(14) Ciò per due motivi. Primo: la nozione di probabilità, depurata dai fattori che influiscono sull'utilità, appartiene ad un piano logico che vorrei dire "superiore". Secondo: le esigenze per la costruzione di tutto il calcolo delle probabilità richiedono vasti sviluppi riguardanti la probabilità da sola.

come prova che i postulati di Savage (e in genere quindi il comportamento probabilistico) non rispondono realmente al modo di giudicare degli individui, nonostante che la loro formulazione astratta a parole o in formule possa sembrare ad essi accettabile come ovvia. Ma non è questa la sola conclusione possibile: in ogni campo (anche nella geometria, come è ben noto!) si possono costruire esempi ingannevoli (rette parallele, aree uguali, ecc., che all'occhio non lo sembrano), ed è ben lecito attribuire anche nel caso presente alla capziosità dell'esempio il paradosso della risposta, e ritenere valida per contro la risposta al quesito formulato esplicitamente in termini generali. Il paradosso concernerebbe, in altri termini, non la validità del principio ma la facoltà di valutare correttamente i termini della sua applicazione in qualche caso; nell'esempio in questione, il tranello deriva dalla minor immediatezza di percezione della differenza, p. es., tra una probabilità del 50% e 51 % che tra zero e 1 %.

Più chiaro risulterà l'atteggiamento descritto, citando un caso personale. Nell'inchiesta col questionario menzionato al n. 6, *a*, alcune domande erano probabilmente intese a confermare simili « paradossi » nelle risposte; dico « probabilmente » perchè, al fine di non influenzare la risposta che si desiderava, basata sul giudizio sintetico e non su preconcetti e calcoli teorici, ho cercato di non riflettere ai tranelli. Ho però spiegato nell'accompagnatoria che ogni scostamento tra le mie risposte e i postulati del comportamento probabilistico sarebbe da me attribuito a deficienze delle mie capacità di valutazione, deficienze che non mi rifiuto di far scoprire e analizzare attraverso l'inchiesta; mi rifiuterei invece di veder interpretata una mia possibilissima deficienza come prova che il comportamento di una persona « ragionevole » (come erano qualificati i destinatari del questionario) non rispetta i postulati (mentre, al contrario, dichiaro che se mi fossi trovato a dover decidere « razionalmente » mi sarei basato sui postulati che accetto e avrei eseguito dei calcoli anzichè affidarmi a stime grossolane e fallaci).

#### 9. *Valore, Utilità, Convessità relativa.*

Per determinare la funzione « Utilità » (in senso probabilistico) basta definirla come funzione  $u(x)$  nel caso in cui  $x$  sia il valore, o importo di denaro, generico, purchè s'intenda indicare il tal modo l'utilità di quella, fra le situazioni ottenibili con l'importo  $x$ , la cui utilità è massima. Prendiamo dalle varianti d'interpretazione effettiva, che non influiscono sulla trattazione: si potrà interpretare il valore  $x$  nel senso di patrimonio, o di reddito, o di importo da spendere in un dato momento, e le situazioni

ottenibili potranno essere quelle che lo sono in base a un dato vigente sistema di prezzi oppure, volendo, si potrà immaginare una ripercussione sui prezzi della destinazione dell'importo  $x$  stesso, e così via.

L'introduzione della funzione  $u(x)$  serve a ricondurre il più generale comportamento coerente in senso probabilistico a quello classico basato sulla speranza matematica (ossia: sulla nozione di scommessa *equa*); tutto si riduce ad eseguire i computi in termini della  $u$  anzichè in termini della  $x$ . Sotto l'aspetto matematico, la trattazione si riconduce a quella delle "medie associative" (15) e delle loro proprietà; in particolare ci saranno di aiuto nel seguito i nessi con valori e scarti quadratici medi messi in luce da A. Chimenti (16).

E' facile vedere che il comportamento probabilistico nell'intorno di un certo valore  $x$  dipende dal grado di convessità relativa della  $u$  ivi, per convessità relativa intendendo il rapporto  $-u''/2u'$  fra le derivate seconda e prima (metà, perchè risulterà più comodo). Indicheremo con  $\lambda(x)$  il reciproco ( $\lambda = -2u'/u''$ ) della convessità relativa (per avere una grandezza avente le dimensioni di un « valore » anzichè di un reciproco di valore). Il significato di  $\lambda$ , ed insieme le caratteristiche di un comportamento probabilistico per scommesse di lieve entità, sono messi in luce dalle seguenti relazioni (tutte valide asintoticamente per  $h \rightarrow 0$ ) (17).

a) Il rischio di guadagnare o perdere  $h$  a condizioni pari ( $\pm h$  con prob.  $1/2$  e  $1/2$ ) equivale a una perdita certa  $h^2/\lambda$ ;

b) per rendere tale operazione indifferente, la probabilità di vincita deve superare quella di perdita di  $d = h/\lambda$  (quindi: guadagno  $\pm h$  con prob. risp.  $(1 \pm d)/2$ );

c) il prezzo di un guadagno  $h$  (perdita se  $h < 0$ ) con probabilità  $p$  vale  $ph(1 + h/\lambda)$ ;

d) in generale, una scommessa comportante un guadagno aleatorio  $X$  (con  $X$  certamente compreso tra  $\pm h$ ) risulta vantaggiosa, svan-

(15) A. KOLMOGOROFF, *Sur la notion de moyenne*, "Rend. Lincei", 1930; O. CHISINI, *Sul concetto di media*, « Period. di Matematiche », 1929; B. de FINETTI, *Sul concetto di media*, "Giorn. Ist. It. Attuari", 1931.

(16) CHIMENTI, *Disuguaglianze tra medie associative*, « Statistica », 1947.

(17) Per la dimostrazione, basta osservare che

$$u(x+h) = u + hu' + \frac{1}{2}h^2(u'' + \epsilon)$$

(indicando brevemente con  $u, u', u''$  i valori in  $x$ , e con  $\epsilon$  una funzione di  $h$  tendente a zero con  $h$ ); si ha così ad es. per la a:

$u(x-h) + u(x+h) = 2u + (x-d)h^2(u'' + \epsilon) = 2du' + d^2(u'' + \epsilon)$ , ecc.  
la risposta che si desiderava, basa sul giudizio sintetico e non su precon-

taggiata, indifferente, a seconda che  $\sigma^2$  è minore, maggiore od uguale a  $-\lambda m$  ( $m$  e  $\sigma$ , speranza matematica e scarto quadratico medio di  $X$ ).

Si noterà che, per  $h \rightarrow 0$ , in prima approssimazione vale addirittura la regola della speranza matematica; la correzione fornita da  $\lambda$  (in forma generale dalla (d), e dalle (a)-(c) in casi particolari) serve come seconda approssimazione.

E' poi facile vedere come, supponendo di assegnare o determinare sperimentalmente, in base a una delle (a)-(d), il valore di  $\lambda$  corrispondente alle diverse  $x$ , si costruisce la  $u$  integrando l'equazione differenziale

le  $u''/u' = 2/\lambda$ , da cui  $u = \int e^{-2 \int \frac{1}{\lambda(x)} dx}$  (con due costanti d'integrazione corrispondenti all'inessenziale trasformazione lineare  $u = A + Bu_0$ ). In particolare, per  $\lambda = \text{cost.}$  si avrebbe  $u = K - e^{-2x/\lambda}$ ; si avrebbe  $u = \log x$  per  $\lambda = 2x$ , e, più in generale,  $u = x^{1-2c}$  per  $\lambda = x/c$  (con  $c = 1/2$ , caso prec.).

Ancora due osservazioni (con riferimento a discussioni al Colloquio di Parigi, su idee risp. di Allais e di Massé).

a) *Decisioni basate « sull'utilità e il rischio »*. Le decisioni di fronte al rischio, nel comportamento probabilistico, dipendono soltanto dal *valor medio dell'utilità*  $u$ ; perchè non potrebbero dipendere anche — è stato obiettato — dal suo scarto quadr. medio? Supponiamo ciò avvenenga, e precisamente la scelta dipenda (asintoticamente) da  $\mu\bar{u} - s^2$  anzichè da  $\bar{u}$  ( $\bar{u}$  val. medio,  $s$  sc. q. medio,  $\mu$  funzione di  $u$ ); basterà determinare  $v(u)$  tale che  $v''/v' = 2\mu$  (stesso problema, v. sopra) per ricondursi al caso probabilistico adottando la funzione  $v[u(x)]$  in luogo della  $u(x)$ . L'ipotesi non conduce dunque a un caso nuovo: rivela soltanto che la  $u$  era stata scelta erroneamente (oppure in base ad altre concezioni, punti  $a$  o  $b$  del n. 6 anzichè  $c$ , e manca la concordanza). Precisamente, sarebbe stata scelta una convessità relativa più grande o più piccola di quella corrispondente all'effettivo grado di avversione al rischio: in formule, la relazione sarebbe:

$$\left( \frac{d^2v}{dx^2} \middle| \frac{dv}{dx} \right) = \left( \frac{d^2u}{dx^2} \middle| \frac{du}{dx} \right) + \frac{du}{dx} \left( \frac{d^2v}{d^2u} \middle| \frac{dv}{du} \right)$$

Naturalmente, si elimina così la parte sistematica del supposto effetto, concernente la correzione di 2° ordine, rispondendo con ciò a quanto di sostanzialmente legittimo poteva esservi nel dubbio suesposto: supporre infatti che una formula del tipo  $\mu\bar{u} - s^2$  valga effettivamente (non asintoticamente) sarebbe ovviamente assurdo (per  $d$  abbastanza grande, risulterebbe preferibile perdere senz'altro un'utilità  $d$  che la possibilità di vincerla o perderla con prob.  $1/2$  e  $1/2$ ).

b) *Nesso con la teoria asintotica del rischio*. Un motivo per cercare modi di comportamento razionali di fronte al rischio diversi da quello probabilistico, consisterebbe, secondo alcuni Autori, nel cercar d'ispirarsi ai concetti della teoria del rischio nelle assicurazioni (e in particolare alla teoria assintotica, sviluppata da Lundberg, Cramèr, ecc. (18), ed esposta in modo semplificato in miei lavori) (19). Invece il criterio del « livello di rischio » cui essa conduce risulta proprio coincidente con l'attuale « comportamento probabilistico » con la scelta di  $\lambda$  costante (ossia, come detto,  $u = K - e^{-2x/\lambda}$ ).

#### 10. Beni indipendenti (in senso probabilistico).

Un concetto legato all'esistenza di una misura dell'utilità è quello di indipendenza (e di concorrenza o complementarità) dei beni, che ha dato luogo a tante discussioni (20). Esso ha senso infatti soltanto se si sceglie una particolare  $u$ ; altrimenti, considerando la  $u$  definita a meno di una trasformazione crescente, il massimo cui si può giungere è la condizione di « pseudoindipendenza » (21).

Vediamo ora qual'è il significato che viene ad assumere l'indipendenza qualora la si definisca in base all'utilità in senso probabilistico. Consideriamo le quantità  $x$  e  $y$  di due beni  $A$  e  $B$ , e precisamente le situazioni  $x_1, y_1, x_1, y_2, x_2, y_1, x_2, y_2$ , le cui utilità indicheremo con la  $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ . L'indipendenza si ha quando (per tutte le coppie  $x_1, x_2$  e  $y_1, y_2$ ) si ha  $u_{11} - u_{12} - u_{21} + u_{22} = 0$ , ossia quando la media di  $u_{11}$  e  $u_{22}$  è la stessa che quella di  $u_{12}$  e  $u_{21}$ . In termini probabilistici, si ha quindi *indipendenza* se è indifferente avere il diritto con probabilità  $1/2$  e  $1/2$  *alla prima o l'ultima oppure alle due intermedie fra tali situazioni*, o, in altre parole, se, date comunque una quantità del bene  $A$  ed una del bene  $B$ , cui si abbia diritto con probabilità del 50%, sono indifferenti le due varianti: di ottenere certamente un solo dei due premi (prob. 50% che sia l'uno o l'altro), o di ottenerli entrambi o niente (prob. 50%

(18) LUNDBERG, comunicazioni ai Congr. Int. Attuari di Vienna (1909) e Stoccolma (1930) e articoli in "Skandinav. Aktuarietidskrift" 1930 e 1932; H. CRAMER, *On the Mathematical Theory of Risk*, « Skandia », Stoccolma, 1930; LAURIN, *An Introduction into Lundbergs Theory of Risk*, « Skand. Akt. » 1930.

(19) B. de FINETTI, *Sul problema dei pieni*, "Giorn. Ist. It. Attuari" 1940; per ulteriori sviluppi v. J. DURBORDIEU, *Théorie mathématique du Risque*, etc. Gauthier-Villars, Paris, 1952; discussioni in articoli di G. OTTIVANI e B. TEDESCHI nel "Giorn. Ist. It. Attuari", risp. 1940 e 1951.

(20) Cfr. p. es. E. ZACCAGNINI, *I limiti dell'economia matematica*, Gior. Economisti", 1950.

(21) B. de FINETTI, *Sui campi di ofelimità*, "Riv. It. Sc. Econ", 1935.



di ciascuna alternativa). Si ha invece *complementarità* se, in tali condizioni, si preferisce « entrambi o niente », *concorrenza* nel caso opposto di « assicurarsi l'uno o l'altro ».

E' questa interpretazione, in termini finiti e in forma espressiva, che mi sembra meglio atta a lumeggiare il significato dell'indipendenza e le questioni cui dà luogo, così come si presenta la situazione dopo l'introduzione della nozione di utilità in senso probabilistico. Di tale questione mi sono occupato in una comunicazione al Congresso Int. dei Matematici, Cambridge (Mass.), 1950 (22), ove ho indicato anche la condizione differenziale, quindi locale, espressa mediante pendenza e curvatura delle linee d'indifferenza e traiettorie ortogonali. Precisamente, il « grado di convessità relativa » (nel senso del precedente n. 9) lungo la normale alla linea d'indifferenza, dev'essere uguale, perchè si abbia indipendenza, all'espressione  $K_1 + K_n(1 - q^2)/q$ , dove  $K_1$  e  $K_n$  indicano risp. la curvatura delle linee d'indifferenza e delle loro traiettorie ortogonali, e  $q$  la pendenza della linea d'indifferenza. Per dimostrarlo basta scrivere le espressioni esplicite di  $K_1$ ,  $K_n$  e  $K_r$  = convessità relativa mediante le derivate prime e seconde,  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u''_{xx}$ ,  $u''_{xy}$ ,  $u''_{yy}$  dell'utilità  $u(x, y)$ : si hanno tre espressioni lineari nelle  $u''$ , da cui per combinazione lineare si ricava la condizione predetta equivalente alla  $u''_{xy} = 0$ .

E' curioso osservare come intervengano qui le traiettorie ortogonali delle linee d'indifferenza, benchè esse non abbiano alcun significato (per la critica al concetto di « linee di preferenza » cfr. (23); naturalmente esse intervengono solo in modo apparente, chè complessivamente la formula ha per forza carattere invariante rispetto a cambiamenti d'unità di misura sugli assi.

Notiamo ancora in qual modo, data la famiglia delle linee d'indifferenza (e supposta soddisfatta la condizione di « pseudoindipendenza »), si possa costruire graficamente la scala dell'utilità  $u$  che conduce al caso di indipendenza. Basta tracciare due parallele all'asse  $x$  (oppure all'asse  $y$ ), e prendere come punto di partenza una qualunque linea d'indifferenza  $u_0$ . Dall'intersezione di  $u_0$  con la prima retta portiamo un segmento verticale fino alla seconda: per il punto d'incontro passa

---

(22) B. de FINETTI, *La nozione di « beni indipendenti » in base ai nuovi concetti per la misura della « utilità »*, « Proc. Int. Congr. Math. », Vol. 1, p. 558, ed. Amer. Math. Soc., 1952. La "trattazione più dettagliata" che annunciavo ivi in preparazione per il « Giornale degli economisti » è la presente nota (ampliata, dato il ritardo, per discutere soprattutto argomenti dibattuti nel Colloquio di Parigi).

(23) V. op. cit. (21).



una linea d'indifferenza che chiamiamo  $u_1$ . Così da essa costruiamo  $u_2$ , poi  $u_3$ , ecc. (e analogamente all'indietro  $u_{-1}$ ,  $u_{-2}$ , ecc.); le linee così individuate corrispondono a incrementi costanti di utilità (possiamo prendere ad es.  $u_h = h$ , in generale  $u_h = a + bh$ ).

#### 11. Osservazioni conclusive.

Dopo svolte le considerazioni che intendevamo presentare, giova ripetere anzitutto qual'è l'atteggiamento cui rispondono. Sulla questione della misurabilità dell'utilità, conferma della posizione negativa finchè la questione si pone nell'ambito non probabilistico, accettazione di una risposta positiva quando si entri in detto ambito (e si accettino, come io accetto ma altri può non accettare e di fatto non accetta, opportuni postulati di "coerenza"). In tale ambito le nozioni soggette a discussione (come l'indipendenza) acquistano un significato dipendente dalla impostazione probabilistica, e strettamente collegato ad essa.

Tale concezione, che abbiamo spesso menzionato col nome di von Neumann e Morgenstern, riguarda — ripetiamo — la sola teoria preliminare dell'utilità, e non ha attinenza con la parte sostanziale della teoria di detti Autori concernente i giochi di strategia. Il mio punto di vista riguardo a tale teoria è esposto nella citata comunicazione al Colloquio di Parigi; altro lavoro espositivo, in cui ho cercato di esporre i lineamenti essenziali della teoria dei giochi in modo accessibile ai non matematici, è apparso recentemente (24).

### Parte seconda - Preferibilità fra condizioni economiche

#### 12. Concetto di « condizione » economica.

Riprendiamo anzitutto i chiarimenti, già dati riassuntivamente nel n. 1, sul significato in cui usiamo i termini di "situazione" ben determinata quando si specificano in modo preciso ed univoco tutte le circostanze (quantità di beni e servizi, ecc.) da cui dipende il grado di soddisfazione economica di un dato individuo ("situazione generale"). Limitandosi al caso in cui si considerino dei beni, dati  $m$  beni ed  $n$  individui, la situazione individuale di ciascuno è definita dalle  $m$  quantità  $x_1 \dots x_m$  di beni; ve n'è quindi  $\infty^m$ , immaginabili come punti di uno spazio a  $m$  dimensioni. La situazione generale è definita dalle  $nm$  quantità  $x_i^{(h)}$  (dei beni  $i = 1, 2, \dots, m$  per gli individui  $h = 1, 2, \dots, n$ ); ve n'è quindi  $\infty^{nm}$ , immaginabili come punti di uno spazio a  $nm$  dimensioni (di cui i pre-

(24) B. de FINETTI, *Il rischio e le decisioni economiche*, in « Rivista Bancaria », Lug.-Sett. 1952.

cedenti sono proiezioni, o componenti adottando la terminologia degli spazi-prodotto).

Intenderemo la nozione di "condizione economica" nel senso più generico, così che essa corrisponda a quella di insieme di situazioni (insieme di punti qualunque nello spazio delle situazioni). Naturalmente, in pratica, tale estrema libertà sarà limitata dal fatto che non si considereranno insieme la cui definizione appaia del tutto artificiosa, ma solo insieme corrispondenti a circostanze economicamente significative: resta però che potrà trattarsi di circostanze più o meno restrittive, ed è questo il senso in cui importava chiarire la genericità del significato.

Anche qui, potremo considerare sia condizioni individuali (insiemi di situazioni individuali) che condizioni generali (insiemi di situazioni generali).

Esempi di condizioni individuali: quella di avere un dato reddito (in regime di prezzi dati: situazioni possibili tutti gli insiemi di merci acquistabili), o un dato mezzo di produzione (con cui siano realizzabili a scelta diverse produzioni ecc.). Esempi di condizioni generali: quella di assegnate quantità degli  $m$  beni (nell'es. precedente), o di assegnate possibilità di trasformazione di beni in altri o di maggior produzione di certi a scapito di altri, o di assegnato reddito globale (per acquisti da altre collettività a prezzi assegnati), ecc. ecc.

### 13. *Preferibilità tra condizioni economiche.*

Per definire la preferibilità nel campo delle condizioni economiche non si richiede alcun criterio concettuale nuovo: si tratta di ricondursi alla preferibilità fra situazioni economiche, il che è immediato nel caso delle condizioni individuali, un po' più complesso nel caso delle condizioni generali.

Chi abbia la facoltà di scegliere fra un insieme di situazioni sceglierà, per definizione, quella preferibile a tutte; perciò l'utilità di una condizione economica individuale altro non è che l'utilità massima tra le situazioni che essa consente (e ciò sia che si tratti di utilità misurabili, o che di esse non si creda far uso).

Per giungere alla comparabilità di condizioni economiche generali dobbiamo premettere qualche considerazione sulla comparabilità di situazioni economiche generali. Date due situazioni,  $P'$  e  $P''$  (punti dello spazio, ad  $nm$  dimensioni se ci si riferisce all'esempio del n. 12, delle situazioni generali), potremo decidere, in base alle nozioni precedenti, se per uno (diciamo: l' $h$ -esimo) degli  $n$  individui della collettività considerata è preferibile  $P'$  o  $P''$ , e, considerando tutti gli  $n$  individui, potremo

avere tre casi: o tutti trovano preferibile  $P'$ , o tutti  $P''$ , oppure alcuni l'una e alcuni l'altra situazione. Nei due primi casi diremo preferibile  $P'$  e risp.  $P''$ , nel terzo diremo che non v'è preferibilità.

Infatti, anche introdotte  $n$  utilità (relative agli  $n$  individui), se tali funzioni assumono quali valori maggiori in  $P'$  e quali in  $P''$ , non avrebbe alcun senso voler decidere la preferenza p. es. in base alla *somma* di esse (origine e unità di misura di ciascuna, anche nell'ipotesi di misurabilità, sono arbitrarie indipendentemente l'una dalle altre), o in base al numero degli individui che preferiscono una situazione (sarebbe facile creare "miglioramenti" fittizi a forza di cambiamenti che rovinino uno alla volta gli individui a beneficio degli altri), o così via. L'unico significato di preferibilità non privo di senso è quello di preferibilità all'unanimità; su di esso del resto è basato il concetto di *optimum*, che è una situazione "di cui non ne esiste una preferibile (nel senso detto)", ossia in cui "non è possibile avvantaggiare tutti gli individui".

Per parlare di optimum occorre naturalmente considerare le situazioni *nell'ambito di una condizione*: si potrà dire che la situazione  $P$  costituisce un *optimum rispetto alla condizione C*, se tutte le situazioni preferibili (sottinteso: all'unanimità) alla  $P$  sono al di fuori delle possibilità consentite da  $C$  (per es.: richiederebbero quantità di certe merci superiori al totale esistente o a quello producibile ecc. a seconda delle condizioni supposte).

Data una condizione  $C$ , esistono (in generale  $\infty^{n-1}$ , essendo  $n$  sempre il numero degli individui) situazioni di *optimum* (25); riferendosi (per semplicità di esposizione, senza effettiva restrizione delle ipotesi) al caso di utilità misurabile, potremo dire che si tratterà dei punti in cui diviene massima  $u_1$  (utilità del primo individuo; è inessenziale del resto quale) a parità di utilità per tutti gli altri (massimi relativi di una delle  $u$  rispetto alle altre).

Può giovare a chiarire la visione l'introdurre lo *spazio delle utilità*, spazio  $U$  a  $n$  dimensioni (quanti gli individui), le cui coordinate cartesiane rappresentino le  $n$  utilità  $u_1 \dots u_n$ : ogni situazione  $P$  ha certe utilità e corrisponde quindi a un punto di  $U$ , ma in generale naturalmente infiniti punti  $P$  sono rappresentati da un medesimo punto di  $U$ . Data ora una condizione  $C$ , si potranno distinguere i punti di  $U$  a seconda che corrispondono ad almeno una situazione  $P$  compatibile con  $C$ , o a nessuna. L'insieme dei primi si potrà chiamare addirittura «insieme  $C$  di  $U$ ». Per semplicità conviene sempre considerare appartenente a  $C$  ogni punto con utilità tutte inferiori a quelle di un punto di  $C$  (ciò

(25) B. de FINETTI, *Problemi di « optimum »*, « Giorn. Ist. It. Attuari », 1937.

equivale, per chiarire con un esempio, ad includere fra le "situazioni ottenibili con un dato reddito" tutte quelle ottenibili con un reddito minore, pensando cioè sempre possibile una distruzione di utilità, o, matematicamente, pensando che la equazione "somma di prezzi per quantità uguale reddito" vada sostituita con la disuguaglianza "minore o uguale". Allora i punti di optimum sono quelli corrispondenti ai punti di contorno dell'insieme  $C$  in  $U$ : i punti che dividono i complessi di utilità raggiungibili, nella condizione  $C$ , dagli  $n$  individui, da quelli irraggiungibili.

Date ora due condizioni economiche  $C'$  e  $C''$ , in qual senso si potrà chiedere se e quale sia preferibile? Restando nel medesimo ordine d'idee sempre seguito, la risposta è agevole:  $C'$  è preferibile a  $C''$  se l'insieme  $C'$  in  $U$  contiene l'insieme  $C''$  (allora infatti ogni situazione di optimum rispetto a  $C''$  è possibile in  $C'$  ed anzi, se non è di optimum anche ivi, migliorabile per tutti); se invece esiste sia una parte di  $C'$  esterna a  $C''$  che una di  $C''$  esterna a  $C'$ , un confronto univoco non esiste. Esiste però la possibilità di specificare il confronto relativamente a circostanze ulteriori. Se, cioè, sappiamo non soltanto che ci si trova nella condizione  $C'$ , ma precisamente in una certa situazione  $P$  (che, salvo incongruenze, dovrebbe essere un optimum rispetto a  $C'$ ), allora per decidere se il passaggio a  $C''$  è preferibile basta vedere se  $C''$  è compatibile con  $P$ : se no, non si ha preferibilità; se sì, e  $P$  è interno, si ha preferibilità; se sì, ma  $P$  è sul contorno di  $C''$  (è di optimum anche rispetto a  $C''$ ), si ha indifferenza.

Nel caso in cui non sussiste una preferibilità incondizionata tra due condizioni  $C'$  e  $C''$ , è possibile un confronto di preferibilità per zone, a senso inverso nelle zone ove il contorno di  $C'$  è interno a  $C''$  e in quelle ove viceversa il contorno di  $C''$  è interno a  $C'$ .

#### 14. Osservazioni.

Devo dire anzitutto in qual senso le considerazioni ora svolte si ricollegano alle discussioni accennate nel n. 1 (v. nota in calce (3)). Nella comunicazione ivi menzionata al Colloquio di Parigi avevo tra l'altro tratteggiato i concetti in base ai quali ritengo utile l'applicazione della teoria dei giuochi nel senso di von Neumann-Morgenstern ai problemi dell'economia quali vengono prospettati dal punto di vista dell'optimum. Tra l'altro si presentava il problema di spiegare cosa debba intendersi « preferibile » per una « coalizione », (cioè per quanto interessa a tal fine, per un gruppo di più individui) se si abbandona il metro del valore (o della "utilità trasferibile" supposta da von Neumann-Morgenstern). Il Guilbaud, nel soffermarsi su tale punto, mi sembra immaginasse di do-

ver dare alla nozione di preferibilità un senso più complicato di quello che intendevo, che mi sembra rispondente allo scopo, e che qui ho meglio chiarito.

Aggiungo che nei casi pratici più usuali (sia in genere, sia per l'accennato problema delle coalizioni) il confronto è ancora più immediato ed elementare. Esso si riconduce infatti al medesimo confronto di valori monetari ogni qual volta il gruppo di individui che si considera sia in presenza di un mercato a prezzi fissi (cioè, non influenzabili da essi nell'ambito delle loro possibilità): allora infatti ogni situazione è scambiabile con ogni altra che si trovi in parità di valore monetario. E « situazione più vantaggiosa », « condizione più vantaggiosa », significano null'altro che "convertibile in maggior valore monetario".

Altre osservazioni riguardano l'uso delle utilità (in senso probabilistico) congiuntamente per gli  $n$  individui. Anzitutto, il fatto di usarle nella rappresentazione dello spazio  $U$  non è essenziale: anche sostituendole con « indici » arbitrari, cioè con funzioni crescenti qualunque, il modello non muta dal punto di vista poco meno che topologico in cui serve (si conservano i « piani paralleli agli assi »); viceversa, anche introducendole, origine e unità di misura sugli assi sono arbitrarie (e quindi il modello è significativo, ammessa la misurabilità dell'utilità, a meno di dilatazioni secondo gli assi). Non ha senso confrontare, insomma, utilità di diversi individui (e quindi sommarle, ecc.); non ha neppure senso quindi parlare di utilità trasferibili, il che significherebbe considerare possibili solo delle trasformazioni su un iperpiano (somma delle  $u = \text{costante}$ ). Non v'è ragione per ritenere possibile un insieme di operazioni economiche soggette a un tale vincolo lineare (nè per ritenere uno dei vincoli lineari del genere privilegiato rispetto agli altri). Ciò non fa che ripetere cenni del n. 13, con particolare riguardo all'uso di "utilità trasferibili" nella trattazione di von Neumann e Morgenstern (che però mostrano di riconoscere la debolezza di tale assunto e la necessità di sganciarne la trattazione (26)).

Resta tuttavia la possibilità di considerare situazioni « allineate » rispetto all'utilità: date ad es. due situazioni  $P'$  e  $P''$ , un punto  $P$  per cui tutte le utilità siano la semisomma di quelle corrispondenti di  $P'$  e  $P''$  si trova nella posizione media tra quelle rispetto alle utilità (per i punti corrispondenti dello spazio  $U$ , quello corrispondente a  $P$  è il punto di mezzo del segmento  $P'P''$ ); più in generale, considerando le medie ponderate delle  $u$  coi pesi  $p'$  e  $p'' = 1 - p'$ , si ottiene il punto del segmento  $P'P''$  a distanze dagli estremi nel rapporto di  $p''$  a  $p'$ . Il signifi-

---

(26) Op. cit. (1), 66.1.1, p. 604 (i nn. 66.1.1., e analogamente altrove, indicano i paragrafi nel sistema degli AA.).

cato probabilistico è il solito: la situazione  $P$ , in tali condizioni, è equivalente per tutti gli individui a quella consistente nel giocare a testa e croce se ha da valere la  $P'$  o la  $P''$  (per  $p' \neq 1/2$ , anziché testa e croce si tratterà di un gioco con probabilità  $p'$  e  $p'' = 1 - p$ ). Si badi:  $P'$  e  $P''$  sono situazioni generali; sarebbe erroneo (e facile, non prestando sufficiente attenzione!) pensare che si tratti per gli  $n$  individui di scegliere fra situazioni individuali  $P'$  e  $P''$  analoghe per ciascuno di essi.

Ed ecco una considerazione che si presenta al riguardo. Data una condizione economica  $C$ , è ovvio che, se si ammettono combinazioni aleatorie, ogni combinazione aleatoria di situazioni compatibili con  $C$  è ancor essa compatibile con  $C$ . Ad es., se  $P'$  e  $P''$  sono situazioni compatibili con la condizione  $C$ , è compatibile anche la « situazione » consistente nel decidere a testa e croce fra  $P'$  e  $P''$ . Nello spazio  $U$  delle utilità, ciò significa che, includendo nella nostra considerazione anche le combinazioni aleatorie, l'insieme  $C$  è certamente convesso (insieme a due punti, contiene cioè tutti i punti del segmento che li congiunge).

E' però opportuno rilevare che le "combinazioni aleatorie" di situazioni possono in certo senso assimilarsi a situazioni vere e proprie ma solo fino a un certo punto. La situazione consistente nel decidere fra  $P'$  e  $P''$  a testa e croce è qualcosa di intermedio fra  $P'$  e  $P''$  finché la moneta non viene gettata; dopo che la scelta è avvenuta, la situazione è effettivamente  $P'$  oppure  $P''$ . Il ragionamento precedente sarebbe interpretato in senso troppo deciso se si concludesse senza riserve che ogni condizione  $C$  deve rappresentare un insieme convesso.

BRUNO DE FINETTI

*Trieste*, Università.