Entscheidungstheorie

Entscheidungstheoretische Ansätze zur Findung von individuellen Lösungen im Rahmen der neoklassischen Modellrechnung

Stefan Trappl

Institut für Financial Management, FHWien der WKW

1. Sept. 2014

1. Warum Entscheidungstheorie?
   - Wiederholung Modern Finance
   - Verbindung Finance - Entscheidungstheorie

2. Kern der Entscheidungstheorie
   - Arten von Entscheidungssituationen
   - Entscheiden unter Risiko
     - Erwartungswert
     - Risikoeinstellung
     - Von Neumann - Morgenstern - Nutzenfunktion

In Bachelorstudien haben Sie die Grundlagen der Corporate Finance (=Modern Finance, Finance, neoklassische Finanzierungstheorie) kennengelernt.
Mittels Entscheidungstheorie werden die Aussagen der Finance-Modelle mit individuellen Entscheidungen verbunden.
-> Zwei Lernziele

1. Wiederholung der Modern Finance
2. Einführung in die Entscheidungstheorie

Inhalt

!

Dieses Wissen wird aus dem Bachelor-Studium in den Finance-LV's vorausgesetzt. Wer hier Nachholbedarf hat unbedingt nachlernen!

Vier wesentliche Bereiche der neoklassischen Finance:

- Arbitrage-Freiheit und die Effiziente Märkte:
  - `Fama, Eugene (1970): Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, Journal of Finance, Vol. 25, Issue 2, S. 383-417.` (Nobelpreis 2014).
- Irrelevanz der Unternehmenskapitalstruktur:
  - `Modigliani, Franco; Miller, Merton H. (1958): The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment, The American Economic Review, Vol. 48, Issue 3, S. 261 - 298.` (Nobelpreis 1985, bzw. 1990).

- Portfolio-Theorie, Tobin Separation, Capital Asset Pricing Model:
  - Markowitz, Harry (1952): Portfolio Selection, Journal of Finance, Vol. 7, Issue 1, S. 77-91. (Nobelpreis 1990)
  - Sharpe, William F. (1964)Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journel of Finance, Vol. 19, Issue , S. 425-442. (Nobelpreis 1990).
- Optionspreistheorie:
  - Black, Fischer; Scholes, Myron (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Finance, Vol. 27, Issue 2, S. 399-417. (Nobelpreis 1997)

Inhalt

Die oben dargestellten Theorien liefern bestimmte Ergebnisse

- Kapitalstruktur: Je höher der Verschuldungsgrad, desto höher die erwartete Rendite, desto höher das Konkursrisiko
- Portfoliotheorie, CAPM: Je höher die erwartete Rendite, desto höher die erwartete Volatilität

!

Aber KEINE Aussage darüber warum Individuen eine bestimmte Kombination aus erwarteter Rendite/erwartetem Risiko wählen. Dies hängt aber von der Risikoeinstellung.
-> ENTSCHEIDUNGSTHEORIE

Inhalt

Man unterscheidet drei verschiedene Arten von Entscheidungssituationen:

- Entscheiden unter Sicherheit
- Entscheiden unter fundamentaler Unsicherheit
- Entscheiden unter Risiko

Einteilung nach `Knight, Frank (1921): Risk, Uncertainty and Profit, Boston.`

!

Wir interessieren uns hier ausschließlich für Entscheidungen unter Risiko

Inhalt

Bei Entscheidungen unter Risiko benötigt man folgende Informationen:

1. Angaben zu den verschiedenen **Szenario-Zuständen** x_i
2. Angaben zu den verschiedenen **Szenario-Eintrittswahrscheinlichkeiten** p_i

Damit kann man den **Erwartungswert** berechnen

Satz

$$E(W) = \sum (p_i * x_i)$$

Beispiel

Hypothetisches Würfelspiel

„Eine Zahl aussuchen, wenn diese erscheint Gewinn von 10€"

$x_{i=6} = \{10, 0, 0, 0, 0, 0\}$

$p_{i=6} = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$

$E(W) = 10 * \frac{1}{6} = 1,66€$

Interpretation dieses Ergebnisses:
Der faire Preis für diese Lotterie beträgt 1,66€

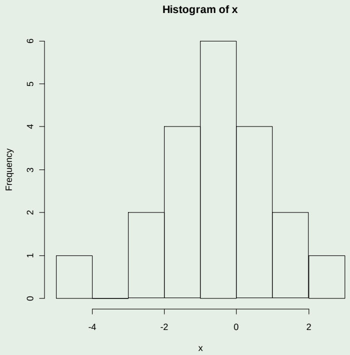
Interpretation dieses Ergebnisses:
Der faire Preis für diese Lotterie beträgt 1,66€
Bei wiederholtem Spiel wird man sich langfristig dem Erwartungswert 1,66€ annähern

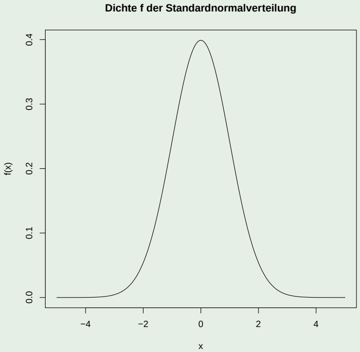
Interpretation dieses Ergebnisses:
Der faire Preis für diese Lotterie beträgt 1,66€
Bei wiederholtem Spiel wird man sich langfristig dem Erwartungswert 1,66€ annähern
ENTSCHEIDUNGSTHEORIE -> Wie viel bezahle ich für dieses Spiel?

!

EXKURS

Im oben dargestellten Spiel gibt es genau 6 Szenarien, die eintreten können. (Diskretes Entscheidungsmodell)
In der Realität gibt es meist unendlich viele (bzw. sehr große Anzahl) Szenarien (Kontinuierliches Entscheidungsmodell)





Wenn man den oben dargestellten Erwartungswert als Entscheidungskriterium heranzieht, entscheidet man einzig nach dem Erwartungswert einer Verteilung.

Wenn man den oben dargestellten Erwartungswert als Entscheidungskriterium heranzieht, entscheidet man einzig nach dem Erwartungswert einer Verteilung.
Dieser beträgt beim Beispiel oben 1,66€
Bei der dargestellten Normalverteilung genau 0€
Beim dargestellten Histogram -> Ausrechnen!

Wenn man den oben dargestellten Erwartungswert als Entscheidungskriterium heranzieht, entscheidet man einzig nach dem Erwartungswert einer Verteilung.
Dieser beträgt beim Beispiel oben 1,66€
Bei der dargestellten Normalverteilung genau 0€
Beim dargestellten Histogram -> Ausrechnen!
Dies würde bedeuten, man ist vollkommen äquivalent zwischen einer Fixzahlung und einer Lotterie in Höhe der Fixzahlung
Mathematisch ausgedrückt: Man entscheidet alleine aufgrund des ersten Moments einer Verteilung („Mittelwert“ μ)
$D = f(\sigma)$

Dies ist aber nicht realistisch: In der (Modell-)Realität zieht man eine sichere Zahlung einer Lotterie vor.
Dies gilt für höhere Beträge eher als für geringere Beträge

Dies ist aber nicht realistisch: In der (Modell-)Realität zieht man eine sichere Zahlung einer Lotterie vor.
Dies gilt für höhere Beträge eher als für geringere Beträge
Das heißt: Nicht nur der Erwartungswert wird herangezogen, sondern auch die Streuung der Szenarien
Mathematisch: Nicht nur das erste Moment wird bei Entscheidungen herangezogen, sondern auch das zweite Moment („Streuung“, Varianz, σ^2, =“Risiko“)
$D = f(\mu, \sigma)$

!

EXKURS
In finanzwirtschaftlichen Modellen wird nur das erste und zweite Moment herangezogen.
Zur Erklärung anderer Phänomene müssten das dritte und vierte Moment ebenfalls herangezogen werden.
So könnte zum Beispiel der Erfolg von Glücksspielen durch die Schiefe (Skewness, drittes Moment) der Verteilung erklärt werden.
Eine Lotterie hat einen negativen Erwartungswert, sowie eine positive Varianz -> rationale Individuen dürften keine Glücksspiele eingehen.
Durch die Schiefe (extrem hoher Gewinn, bei geringem Einsatz) lässt sich erklären warum Glücksspielanbieter trotzdem erfolgreich sind.

Man unterscheidet zwischen drei verschiedenen Risikoeinstellungen

- Risikofreude
- Risikoneutralität
- Risikoaversion

In der neoklassischen Finanztheorie geht man davon aus, dass Individuen immer risikoavers entscheiden.
Das heißt u.a. sie bevorzugen eine fixe Auszahlung gegenüber einer Lotterie.

Die Tatsache, dass Individuen nicht nur streng nach dem Erwartungswert sondern auch nach dem Risiko entscheiden, haben erstmals John von Neumann und Oskar Morgenstern formalistisch dargestellt.

Von Neumann, John; Morgenstern, Oskar (1944): Theory of Games and Economic Behavior, Princeton.

Wesentliche Aussage: Menschen entscheiden nicht nach dem Erwartungswert, sondern nach dem Erwartungsnutzen. Dazu werden Geldbeträge in Nutzenbeträge umgewandelt.

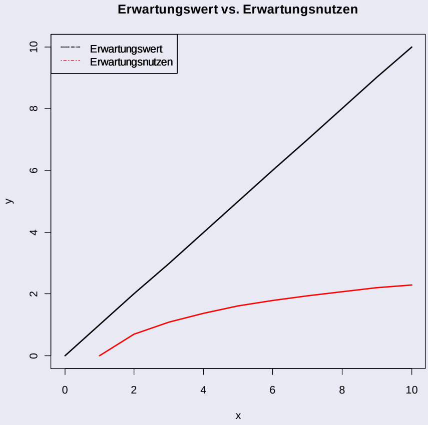
Für die Gültigkeit des Nutzentheorems müssen folgende Voraussetzungen eingehalten werden:

- Vollständige Ordnung: Platzierungsreihenfolge muss vorhanden sein.
- Stetigkeit: Wenn gilt $A>B$ und $B>C$, dann muss auch gelten $xB + yC = A$.
- Unabhängigkeit: Wenn gilt $A>B$, dann muss auch gelten $A+C > B+C$.

Satz

$$E(U) = \sum (p_i * f(x_i))$$

Folgerung



Folgende Arten von Nutzenfunktionen sind gebräuchlich:

- Lineare Nutzenfunktion
  - Risiko-neutral (=Gerade, daher unrealistisch)

Satz

$U(x) = a + b * x$

- Logarithmische Nutzenfunktion
  - Fallende absolute Risikoaversion (=realistisch)

Satz

$U(x) = ln(x)$

- exponentielle Nutzenfunktion
  - Konstante absolute Risikoaversion (=tlw. realistisch)

Satz

$U(x) = b - e^{-a*x}$

Das Arrow-Pratt-Maß zur Bestimmung der absoluten Risikoaversion (ARA):

Satz

$$ARA(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

(Dieses benötigen wir später zur Berechnung bei konkreten Beispielen)

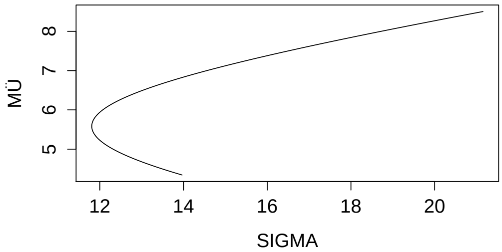
Anwendung der Entscheidungstheorie auf die Portfoliotheorie

!

EXKURS
Wir erstellen ein Markowitz-Portfolio mit 2 Assets:
Asset A: $\mu = 0,05; \sigma = 0,14$
Asset B: $\mu = 0,09; \sigma = 0,21$
Die beiden Assets haben normalverteilte Renditen, die mit n=1000 simuliert werden (=leichte Abweichungen)

Bei der Portfoliotheorie wird entscheidet man alleine aufgrund der ersten beiden Momente der Verteilung:

- Erwartungswert: μ
- Standardabweichung (=Risiko): σ



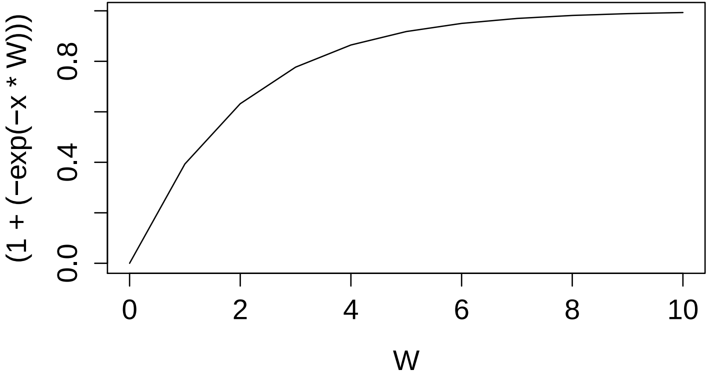
Der Plot zeigt die Efficient Frontier der 2 Assets
Welches Portfolio soll gewählt werden? -> Anwendung der Entscheidungstheorie

Voraussetzungen für die Anwendung der Nutzenfunktion auf neoklassische Entscheidungssituationen:
Da es dort nur 2 Momente gibt, dürfen auch nur Nutzenfunktionen mit max. 2 Momenten verwendet werden.
Beispiele:

- Lineare Nutzenfunktion (Risikoneutralität)
- quadratische Nutzenfunktion (nur im Bereich pos. Steigung realistisch)
- Verteilung unterliegt Normalverteilung + konkave Nutzenfunktion (Normalverteilung hat für sich nur 2 Momente -> Voraussetzung schon durch Verteilung gedeckt, weiters muss nur die Risikoaversion abgebildet werden -> konkave Nutzenfunktion

Neoklassik:(log)-Normalverteilung bei den Renditen aus (empirisch realistisch. Kritisch, weil zu schwere Enden (4. Moment): Mandelbrot
Nutzenfunktion + Komponenten müssen individuell festgestellt werden (Empirische Erhebung)

Beispiel:
Exponentielle Nutzenfunktion: $U(W) = 1 - e^{-a*W}$



Der Nutzenerwartungswert lässt sich hier besonders leicht ermitteln: Bei Normalverteilung gilt für den Nutzenerwartungswert:

Satz

$$E\left[U\left(W\right)\right] = U\left(\mu - \frac{ARA}{2} * \sigma^2\right)$$

(Beweis: `Freund, R. (1956): The Introduction of Risk into a Programming Model. Econometrica, Vol. 5, Issue 1, S. 253 - 256`)

Der Nutzenerwartungswert lässt sich hier besonders leicht ermitteln: Bei Normalverteilung gilt für den Nutzenerwartungswert:

Satz

$$E\left[U\left(W\right)\right] = U\left(\mu - \frac{ARA}{2} * \sigma^2\right)$$

(Beweis: `Freund, R. (1956): The Introduction of Risk into a Programming Model. Econometrica, Vol. 5, Issue 1, S. 253 - 256`)

Die absolute Risikoaversion lässt sich aus der oben dargestellten Formel ableiten:

Satz

$$ARA\left(w\right) = -\frac{u''\left(w\right)}{u'\left(w\right)}$$

!

$$U(W) = 1 - e^{-r*W}$$

$$U(W) = r * e^{-r*W}$$

$$U(W) {=} 0 * e^{-r*W} + r * -r * e^{-r*W} = -r^2 * e^{-r*W}$$

!

$$U(W) = 1 - e^{-r*W}$$

$$U(W) = r * e^{-r*W}$$

$$U(W) = 0 * e^{-r*W} + r * -r * e^{-r*W} = -r^2 * e^{-r*W}$$

!

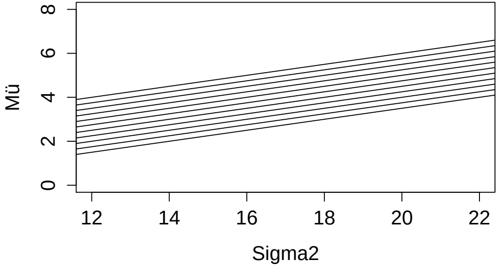
$$ARA = -\frac{-r^2 * e^{-r*W}}{r * e^{-r*W}} = r$$

Das heißt, wir können wieder zurück zu Formel

$$E\left[U\left(W\right)\right] = U\left(\mu - \frac{ARA}{2} * \sigma^2\right)$$

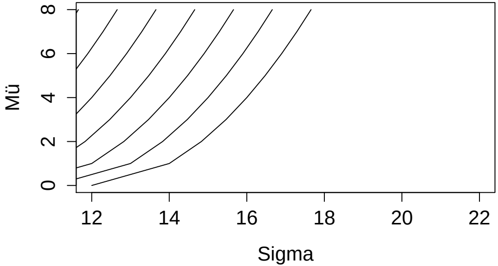
mit $ARA = r$
Das heißt wir haben die Nutzenfunktion in ein μund σ^2 Konzept überführt.
Nächster Schritt: Den Nutzenerwartungswert $E\left[U\left(W\right)\right]$maximieren.
Die Efficient Frontier zeigt uns Erwartungswert μ Risiko σ Kombinationen ($\approx$Bündel), die erreichbar sind.
Welche der Kombination ist die „Beste“?

Unsere Nutzenfunktion wird dargestellt in einem
$\mu - \sigma^2 - \textit{Diagramm}$:



Die dargestellten Geraden zeigen Indifferenzkurven. Der Verlauf jeder Kurve liefert für sich den selben Nutzen

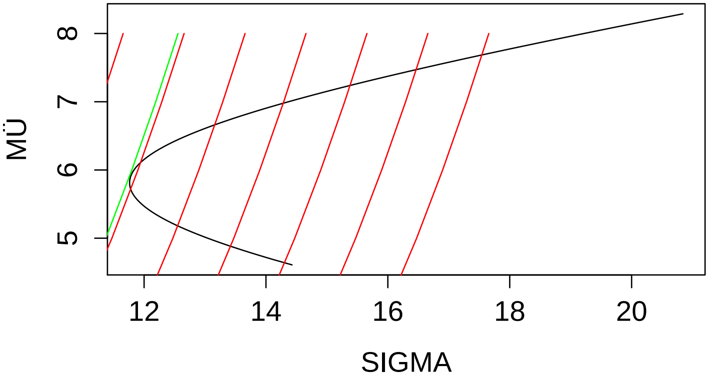
In der Portfoliotheorie entscheidet man allerdings nach $\mu - \sigma$ (nicht $\mu - \sigma^2$)
Daher werden die Varianzen σ^2 in Standardabweichungen σ transformiert:



Dieses Diagramm ist nun vollkommen äquivalent mit dem Diagramm aus der Portfoliotheorie.
-> beide Funktionen in das gleiche Diagramm einzeichnen

Die Abbildung zeigt in rot die Indifferenzkurven und in schwarz die Efficient Frontier aus der Portfoliotheorie

Die grüne Indifferenzkurve ist jene, die die Efficient Frontier tangiert = höchster Nutzen!



Abschließender Schritt: Wie kann ich dieses Portfolio formal erfassen?
Erwartungsnutzenformel:

$$E\left[U\left(W\right)\right] = U\left(\mu - \frac{ARA}{2} * \sigma^2\right)$$

Portfolio-Erwartungswertformel für μ:

$$E\left(W\right) = \sum\left(p_i * x_i\right)$$

Portfolio-Varianz für σ^2:

$$\sigma^2\left(W\right) = \sum\left(\sigma_i^2 * p_i\right) + 2 * COV_i$$

Eingesetzt:

$$E\left[E\left(W\right)\right] = x_1 * p_1 + x_2 * (1 - p_1) - \frac{ARA}{2} * \sigma_1^2 * p_1^2 + \sigma_2^2 * (1 - p_1) + 2 * COV_{1,2}$$

Den maximalen Nutzenerwartungswert erhält man durch 1. Ableitung nach p (=0) und auflösen nach p:

$$p_1 = \frac{\frac{x_1 - x_2}{ARA} + \left(\sigma_2^2 - COV_{1,2}\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 * COV_{1,2}}$$