Zur Theorie der Gesellschaftsspiele[1]).

Von

J. v. Neumann in Berlin.

Einleitung.

1. Die Frage, deren Beantwortung die vorliegende Arbeit anstrebt, ist die folgende:

n Spieler, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, spielen ein gegebenes Gesellschaftsspiel $\mathfrak{G}$. Wie muß einer dieser Spieler, S_m, spielen, um dabei ein möglichst günstiges Resultat zu erzielen?

Die Fragestellung ist allgemein bekannt, und es gibt wohl kaum eine Frage des täglichen Lebens, in die dieses Problem nicht hineinspielte; trotzdem ist der Sinn dieser Frage kein eindeutig klarer. Denn sobald $n > 1$ ist (d. h. ein eigentliches Spiel vorliegt), hängt das Schicksal eines jeden Spielers außer von seinen eigenen Handlungen auch noch von denen seiner Mitspieler ab; und deren Benehmen ist von genau denselben egoistischen Motiven beherrscht, die wir beim ersten Spieler bestimmen möchten. Man fühlt, daß ein gewisser Zirkel im Wesen der Sache liegt.

Wir müssen also versuchen, zu einer klaren Fragestellung zu kommen. Was ist zunächst ein Gesellschaftsspiel? Es fallen unter diesen Begriff sehr viele, recht verschiedenartige Dinge: von der Roulette bis zum Schach, vom Bakkarat bis zum Bridge liegen ganz verschiedene Varianten des Sammelbegriffes „Gesellschaftsspiel" vor. Und letzten Endes kann auch irgendein Ereignis, mit gegebenen äußeren Bedingungen und gegebenen Handelnden (den absolut freien Willen der letzteren vorausgesetzt), als Gesellschaftsspiel angesehen werden, wenn man seine Rückwirkungen auf die in ihm handelnden Personen betrachtet[2]). Was ist nun das gemeinsame Merkmal aller dieser Dinge?

---

[1]) Der Inhalt dieser Arbeit ist (mit einigen Kürzungen) am 7. XII. 1926 der Göttinger Math. Ges. vorgetragen worden.

[2]) Es ist das Hauptproblem der klassischen Nationalökonomie: was wird, unter gegebenen äußeren Umständen, der absolut egoistische „homo œconomicus" tun?

Man darf wohl annehmen, daß es dieses ist:

Ein Gesellschaftsspiel besteht aus einer bestimmten Reihe von Ereignissen, deren jedes auf endlich viele verschiedene Arten ausfallen kann. Bei gewissen unter diesen Ereignissen hängt der Ausfall vom Zufall ab, d. h.: es ist bekannt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die einzelnen möglichen Resultate eintreten werden, aber niemand vermag sie zu beeinflussen. Die übrigen Ereignisse aber hängen vom Willen der einzelnen Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *ab. D. h.: es ist bei jedem dieser Ereignisse bekannt, welcher Spieler* S_m *seinen Ausfall bestimmt, und von den Resultaten welcher anderer („früherer") Ereignisse er im Moment seiner Entscheidung bereits Kenntnis hat. Nachdem der Ausfall aller Ereignisse bereits bekannt ist, kann nach einer festen Regel berechnet werden, welche Zahlungen die Spieler* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *aneinander zu leisten haben.*

Es ist leicht, diese mehr qualitative Erklärung in die Form einer exakten Definition zu bringen. Diese Definition des Gesellschaftsspieles würde so lauten:

Um ein Gesellschaftsspiel $\mathfrak{G}$ *vollständig zu beschreiben, sind die folgenden Angaben notwendig, die zusammen die „Spielregel" ergeben:*

α) Es muß angegeben werden, wie viele vom Zufall abhängige Ereignisse oder „Ziehungen" und wieviel vom Willen der einzelnen Spieler abhängige Ereignisse oder „Schritte" erfolgen. Diese Anzahlen seien z *bzw.* s, *die „Ziehungen" bezeichnen wir mit* $E_1, E_2, \ldots, E_z$, *die „Schritte" mit* $F_1, F_2, \ldots, F_s$.

β) Es muß angegeben werden, auf wie viele Arten jede „Ziehung" E_μ *und jeder „Schritt"* F_ν *ausfallen kann. Diese Anzahlen seien* M_μ *bzw.* N_ν $(\mu = 1, 2, \ldots, z,\ \nu = 1, 2, \ldots, s)$. *Wir bezeichnen die betreffenden Resultate kurz mit ihren Nummern* $1, 2, \ldots, M_\mu$ *bzw.* $1, 2, \ldots, N_\nu$.

γ) Bei jeder „Ziehung" E_μ *müssen die Wahrscheinlichkeiten* $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(M_\mu)}$ *der einzelnen Resultate* $1, 2, \ldots, M_\mu$ *gegeben sein. Natürlich ist*

$$\alpha_\mu^{(1)} \geqq 0,\ \alpha_\mu^{(2)} \geqq 0, \ldots, \alpha_\mu^{(M_\mu)} \geqq 0,$$
$$\alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)} + \ldots + \alpha_\mu^{(M_\mu)} = 1.$$

δ) Bei jedem „Schritt" F_ν *muß erstens derjenige Spieler* S_m *angegeben sein, der den Ausfall dieses „Schrittes" bestimmt („dessen Schritt"* F_ν *ist):* $S_{(F_\nu)}$. *Ferner müssen die Nummern aller „Ziehungen" und „Schritte" angegeben sein, über deren Ausfall er im Momente seiner Entscheidung über* F_ν *Kenntnis hat. (Diese „Ziehungen" und „Schritte" nennen wir „früher" als* F_ν.)

Damit die ganze Sache möglich ist und zeitlich-kausal vorstellbar sei, darf es keine Zyklen $F_{\nu_1}, F_{\nu_2}, \ldots, F_{\nu_p}$, $F_{\nu_{p+1}} = F_{\nu_1}$ *geben, derart, daß stets* F_{ν_q} *„früher" ist, als* $F_{\nu_{q+1}}$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$.

ε) Schließlich müssen n Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gegeben sein. Jede von ihnen ist abhängig von $z + s$ Variablen, die bzw. die Werte

$$1, 2, \ldots, M_1; \quad 1, 2, \ldots, M_2; \quad \ldots; \quad 1, 2, \ldots, M_z;$$
$$1, 2, \ldots, N_1; \quad 1, 2, \ldots, N_2; \quad \ldots; \quad 1, 2, \ldots, N_s$$

durchlaufen. Diese Funktionen haben reelle Zahlen als Werte, und es gilt identisch

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n \equiv 0.$$

Wenn nun im Laufe einer zu Ende gespielten Partie die Resultate der z „Ziehungen" und der s „Schritte" bzw. $x_1, x_2, \ldots, x_z$, $y_1, y_2, \ldots, y_s$ ($x_\mu = 1, 2, \ldots, M_\mu$, $y_\nu = 1, 2, \ldots, N_\nu$; $\mu = 1, 2, \ldots, z$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$) waren, so erhalten die Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ voneinander[3] *die Summen*

$$f_1(x_1, \ldots, x_z, y_1, \ldots, y_s), \quad f_2(x_1, \ldots, x_z, y_1, \ldots, y_s), \quad \ldots,$$
$$f_n(x_1, \ldots, x_z, y_1, \ldots, y_s).$$

(Trotz der etwas langatmigen Beschreibung handelt es sich hier, wenn man genau zusieht, um recht einfache und klare Dinge. Übrigens hätten wir die Definition in mehreren Beziehungen etwas allgemeiner fassen können: so hätten wir z. B. zulassen können, daß die M_μ, N_ν und $\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \alpha_{M_\mu}^{(\mu)}$ von den Resultaten der „früheren" „Ziehungen" und „Schritte" abhängen, u. ä.; indessen überzeugt man sich leicht davon, daß dabei nichts wesentlich Neues herauskommt.)

2. Mit dieser Definition ist der Begriff des Gesellschaftsspieles genau umschrieben. Es tritt aber auch ganz klar in Erscheinung, was wir bereits am Anfang von 1. berührten, daß nämlich die Ausdrucksweise: „S_m sucht ein möglichst günstiges Resultat zu erzielen" eine recht unklare ist. Ein für den Spieler S_m möglichst günstiges Resultat ist offenbar ein möglichst großer Wert von f_m, aber wie soll überhaupt irgendein Wert von f_m durch S_m „erzielt" werden? S_m ist ja allein gar nicht in der Lage, den Wert von f_m festzulegen! f_m hängt von den Variablen $x_1, \ldots, x_z$, $y_1, \ldots, y_s$ ab, und von diesen wird nur ein Teil durch den Willen von S_m bestimmt (nämlich diejenigen y_ν, für die S_m den „Schritt" F_ν hat, d. h. $S_{(F_\nu)} = S_m$ ist); die übrigen Variablen hängen vom Willen der Mitspieler (nämlich alle übrigen y_ν) oder vom Zufall (nämlich alle x_μ) ab.

In unserem Falle ist der „unvoraussehbare" Zufall noch der leichter zu beherrschende Faktor. In der Tat: nehmen wir an, ein f_m hinge außer von jenen y_ν, die S_m bestimmt ($S_{(F_\nu)} = S_m$), nur von den x_μ (die vom

---

[3]) Die Identität

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n \equiv 0$$

drückt aus, daß die Spieler nur aneinander Zahlungen leisten, die Gesamtheit aber weder gewinnt noch verliert.

Zufall bestimmt werden) ab. Dann wird S_m jedenfalls das Folgende voraussehen können: Wenn ich auf eine bestimmte Weise spiele, so habe ich die und die Resultate (d. i. Werte von f_m) mit den und den Wahrscheinlichkeiten zu erwarten (die Wahrscheinlichkeiten $\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \alpha_{M_\mu}^{(\mu)}$ sind ja gegeben) — unabhängig davon, nach welchen Prinzipien die übrigen Spieler handeln! Wenn wir nun annehmen, daß unter „günstigstem Resultat" ein möglichst hoher Erwartungswert zu verstehen ist (und diese oder eine ähnliche Annahme muß gemacht werden, um die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden zu können[4])), so ist die Aufgabe prinzipiell gelöst. Denn es handelt sich um ein einfaches Maximumproblem: S_m muß die Werte der von ihm zu bestimmenden unter den Variablen y_ν so wählen, daß der (allein von diesen abhängige) Erwartungswert von f_m möglichst groß wird.

Dieser Typus von Gesellschaftsspielen ist es, der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der sog. „Theorie der Glücksspiele" behandelt wird. Ein charakteristisches Beispiel hierfür ist die Roulette: es sind $k+1$ Spieler da ($S_1, \ldots, S_k$ sind die „Pointeurs", S_{k+1} der „Bankier"), S_{k+1} hat überhaupt keinen Einfluß auf das Spiel[5]) und das Resultat von S_l, f_l, $(l = 1, 2, \ldots, k)$ ist allein vom Zufall und von seinen eigenen Handlungen abhängig[6]).

Schon der Name „Glücksspiele" zeigt, daß das Hauptgewicht auf die vom Zufall abhängigen Variablen x_μ, und nicht auf die vom Willen der Spieler abhängigen Variablen y_ν, gelegt wird. Aber gerade das ist es, was uns hier beschäftigen wird. Es soll versucht werden, die Rückwirkungen der Spieler aufeinander zu untersuchen, die Konsequenzen des (für alles soziale Geschehen so charakteristischen!) Umstandes, daß jeder Spieler auf die Resultate aller anderen einen Einfluß hat und dabei nur am eigenen interessiert ist.

I. Allgemeine Vereinfachungen.

1. Die in der Einleitung gegebene Definition des Gesellschaftsspieles ist ziemlich kompliziert, was angesichts des Umstandes, daß es beliebig verwickelte Gesellschaftsspiele geben kann, motiviert erscheinen mag. Trotz-

---

[4]) Die bekannten Einwände gegen den Erwartungswert (die seine Ersetzung durch die sog. moralische Hoffnung u. ä. erstreben), wollen wir unberücksichtigt lassen: es sind andere Schwierigkeiten, die den Gegenstand unserer Betrachtungen bilden.

[5]) Er hat es auch nicht nötig, denn auf Grund der Spielregeln gewinnt er pro Partie $2 \cdot 70\,\%_0$ nach dem Umsatz.

[6]) Wie man auf Grund der vorhergehenden Fußnote vermuten wird, ist das in diesem Falle eindeutig zu erzielende Resultat für das Verhalten der Pointeurs ein recht triviales: sie müssen möglichst den Umsatz 0 haben, je näher sie ihm kommen, desto besser!

dem lassen sich alle in dieser Definition enthaltenen Gesellschaftsspiele auf eine viel einfachere Normalform bringen; sozusagen auf die einfachstdenkbare Form überhaupt. Wir behaupten nämlich:

Es genügt, Gesellschaftsspiele folgender Art zu betrachten:

Es ist $Z = 1$ (d. h. es findet nur eine „Ziehung" statt).

Es ist $s = n$, und zwar ist der ν-te „Schritt" der des Spielers S_ν $(S_{(F_\nu)} = S_\nu)$.

Die Relation „früher" besteht nie (d. h. jeder Spieler muß seine Dispositionen treffen, ohne etwas über die anderen oder die „Ziehung" zu wissen).

Das Spiel verläuft also so: Jeder Spieler S_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ wählt eine Zahl $1, 2, \ldots, N_m$ aus, ohne die Wahlen der übrigen zu kennen; und dann findet eine Ziehung statt, bei der die Zahlen $1, 2, \ldots, M$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M$ herauskommen können. Die Resultate der Spieler sind (wenn die „Ziehung" und die n „Schritte" $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ergaben):

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \; f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \; \ldots, \; f_n(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Daß diese scheinbar sehr weitgehende Einschränkung der Möglichkeiten in Wahrheit keine wesentliche ist, können wir so einsehen:

Die „Schritte" des Spielers S_m (die mit $S_{(F_\nu)} = S_m$) seien diejenigen mit den Nummern $\nu_1^{(m)}, \nu_2^{(m)}, \ldots, \nu_{\sigma_m}^{(m)}$. Es ist klar, daß die Annahme, S_m könnte schon vor Beginn des Spieles sagen, welche Wahlen er bei diesen Schritten treffen wird, eine unstatthafte ist; d. h. eine Beschränkung seiner Willensfreiheit und eine Änderung (Verschlechterung) seiner Chancen mit sich bringt. Denn der Entschluß von S_m bei jedem dieser „Schritte" wird ja im allgemeinen wesentlich dadurch beeinflußt werden, wie die Resultate derjenigen „Ziehungen" und „Schritte" waren, von denen er im Momente des Entschlusses Kenntnis hat.

Demgegenüber darf wohl angenommen werden, daß er bereits vor Anfang des Spieles auf die folgende Frage zu antworten weiß: Wie wird der $\nu_k^{(m)}$-te „Schritt" ausfallen $(k = 1, 2, \ldots, \sigma_m)$, wenn die Resultate aller „Ziehungen" und „Schritte" vorliegen, die „früher" als $\nu_k^{(m)}$ sind? D. h. daß der Spieler von vornherein weiß, wie er in einer genau umschriebenen Situation handeln wird; daß er mit einer fertigen Theorie ins Spiel geht. Selbst wenn dies bei einem Spieler nicht der Fall ist, leuchtet es wohl ein, daß eine derartige Annahme keineswegs seine Chancen verschlechtert.

Demgemäß definieren wir die „Spielmethode" des Spielers S_m folgendermaßen:

Um die „Spielmethode" eines Spielers S_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ vollständig zu beschreiben, sind die folgenden Angaben notwendig:

S_m habe, wie oben, die „Schritte" mit den Nummern $\nu_1^{(m)}, \nu_2^{(m)}, \ldots, \nu_{\sigma_m}^{(m)}$. Bei der Entschlußfassung zum $\nu_k^{(m)}$-ten „Schritte" ($k = 1, 2, \ldots, \sigma_m$) vorliegend, d. h. „früher" als dieser, seien die „Ziehungen" und „Schritte" mit den bzw. Nummern $\bar{\mu}_1^{(m,k)}, \bar{\mu}_2^{(m,k)}, \ldots, \bar{\mu}_{\alpha_{m,k}}^{(m,k)}$ und $\bar{\nu}_1^{(m,k)}, \bar{\nu}_2^{(m,k)}, \ldots, \bar{\nu}_{\beta_{m,k}}^{(m,k)}$.

Es muß dann für jede mögliche Kombination von Resultaten der genannten „Ziehungen" und „Schritte" (es sind ihrer offenbar nur endlich viele möglich) angegeben werden, wie der Entschluß von S_m über den $\nu_k^{(m)}$-ten „Schritt" lauten (d. h. wie dieser Schritt ausfallen) wird.

Man sieht sofort, daß es für S_m nur endlich viele Spielmethoden gibt, wir bezeichnen diese mit $\mathfrak{S}_1^{(m)}, \mathfrak{S}_2^{(m)}, \ldots, \mathfrak{S}_{\Sigma_m}^{(m)}$.

Nun zeigt man offenbar ganz leicht (und dabei kommt die Annahme von Einleitung 1., Definition des Gesellschaftsspieles δ, über das Fehlen von Zyklen zur Anwendung), daß der Verlauf des Spieles auf eine mögliche und eindeutige Weise beschrieben ist, wenn angegeben wird:

1. *Welcher „Spielmethoden" $\overline{\mathfrak{S}}^{(1)}, \overline{\mathfrak{S}}^{(2)}, \ldots, \overline{\mathfrak{S}}^{(n)}$ sich bzw. die Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bedienen.*

2. *Was die Resultate der „Ziehungen" $E_1, E_2, \ldots, E_z$ sind.*

Man beachte dabei die zwei folgenden Umstände: Erstens liegt es im Wesen des Begriffes der „Spielmethode", daß alles, was ein Spieler über die Handlungen seiner Mitspieler und dem Ausfall von „Ziehungen" erfahren oder folgern kann, bereits innerhalb der „Spielmethode" Berücksichtigung findet. Folglich muß die Wahl der Spielmethode selbst bei jedem Spieler in absoluter Unkenntnis der Wahlen der übrigen Spieler und der Resultate der „Ziehungen" erfolgen.

Zweitens ist hierdurch das getrennte Erfolgen der Ziehungen $E_1, E_2, \ldots, E_z$ (wobei bei E_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, Z$, die Zahlen $1, 2, \ldots, M_\mu$ mit den bzw. Wahrscheinlichkeiten $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(M_\mu)}$ herauskommen können) ganz gleichgültig geworden: die Spieler müssen ja unabhängig davon handeln, d. h. ihre „Spielmethoden" wählen. Dann hindert uns aber nichts, diese z Ziehungen zu einer einzigen Ziehung H zusammenzuziehen, wobei die Zahlenkomplexe

$$x_1, x_2, \ldots, x_z \qquad (x_\mu = 1, 2, \ldots, M_\mu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, z)$$

mit den bzw. Wahrscheinlichkeiten $\alpha_1^{(x_1)} \cdot \alpha_2^{(x_2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_z^{(x_z)}$ herauskommen können; oder was dasselbe ist: die Zahlen $1, 2, \ldots, M$ ($M = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_z$) mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, die wir $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M$ nennen wollen.

Wir können also 2. folgendermaßen modifizieren:

2'. *Es muß angegeben werden, was das Resultat der „Ziehung" H ist. (H kann die Resultate $1, 2, \ldots, M$ mit den bzw. Wahrscheinlichkeiten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M$ haben.)*

Nun sind die in 1. angegebenen Wahlen der Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (als „Schritte" aufgefaßt) und die in 2′. angegebene „Ziehung" (unter Berücksichtigung des Umstandes, daß jeder „Schritt" in absoluter Unkenntnis der übrigen Umstände erfolgt) dem ursprünglichen Gesellschaftsspiele $\mathfrak{G}$ vollkommen äquivalent; und sie bilden ihrerseits offenbar ein Gesellschaftsspiel $\mathfrak{G}'$, das in der Tat von der am Anfang dieses Paragraphen erwähnten einfachen Form ist.

2. Als letztes, von unserem Gesichtspunkt aus unwesentliches Element soll jetzt auch noch die „Ziehung" aus dem Spiele eliminiert werden; das geschieht dadurch, daß wir an Stelle der tatsächlichen Ergebnisse für die einzelnen Spieler ihre Erwartungswerte betrachten. Genauer:

Wenn die Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ die „Spielmethoden"

$$\mathfrak{S}^{(1)}_{u_1}, \mathfrak{S}^{(2)}_{u_2}, \ldots, \mathfrak{S}^{(1)}_{u_n} \qquad (u_m = 1, 2, \ldots, \Sigma_m, \quad m = 1, 2, \ldots, n)$$

wählten (wir können übrigens bereits davon absehen, daß es sich um „Spielmethoden" und nicht um eigentliche „Schritte" handelt, und einfach von den Wahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sprechen), und bei der „Ziehung" H die Zahl $v\ (= 1, 2, \ldots, M)$ herauskam, so seien die Ergebnisse für die Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bzw.

$$f_1(v, u_1, \ldots, u_n), \quad f_2(v, u_1, \ldots, u_n), \quad \ldots, \quad f_n(v, u_1, \ldots, u_n).$$

Wenn nun nur die Wahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bekannt sind, die „Ziehung" v aber noch nicht, so sind die Erwartungswerte der $f_1, f_2, \ldots, f_n$ diese:

$$g_m(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{v=1}^{M} \beta_v f_m(v, u_1, \ldots, u_n) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

(Aus $f_1 + f_1 + \ldots + f_n \equiv 0$ folgt $g_1 + g_2 + \ldots + g_n \equiv 0$.) Es ist ganz im Geiste der Methode der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wenn wir von der „Ziehung" überhaupt absehen und so tun, als ob es nur auf die Erwartungswerte $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ankäme. Damit gewinnen wir aber den folgenden, noch weiter schematisierten und vereinfachten Grundtypus des Gesellschaftsspieles.

Jeder der Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *wählt eine Zahl, und zwar* S_m *eine der Zahlen* $1, 2, \ldots, \Sigma_m$[7]) $(m = 1, 2, \ldots, n)$. *Jeder hat seinen Entschluß zu fassen, ohne über die Resultate der Wahlen seiner Mitspieler Kenntnis zu haben. Wenn sie die Wahlen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *getroffen haben*

---

[7]) Wir könnten auch noch alle Σ_m gleich machen, indem wir ein Σ annehmen, das nicht kleiner ist als irgend ein Σ_m, und jedesmal den Σ_m-ten Fall in $\Sigma - \Sigma_m + 1$ Unterfälle weiter teilen, von denen jeder genau dieselbe Wirkung hat, wie der ursprüngliche. Diese Vereinfachung ist aber unwesentlich.

($x_m = 1, 2, \ldots, \Sigma_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$), *so erhalten sie bzw. die folgenden Summen*:

$$g_1(x_1, \ldots, x_n), \quad g_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad g_n(x_1, \ldots, x_n).$$

(*Dabei ist identisch* $g_1 + g_2 + \ldots + g_n \equiv 0$.)

Damit ist diejenige Form der Spielregel erreicht, die (trotzdem sie, wie wir soeben zeigten, im wesentlichen nichts an Allgemeinheit verloren hat), nur noch die für uns wesentlichen Merkmale des Gesellschaftsspieles zeigt. Vom „Glücksspiel“ ist nichts mehr da: die Handlungen aller Spieler bestimmen das Resultat restlos (weil ja so operiert wird, als ob es ein jeder von ihnen nur auf den Erwartungswert abgesehen hätte). Aber dafür tritt das am Ende der Einleitung hervorgehende Prinzip in voller Schärfe in Erscheinung: jedes g_m hängt von allen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ab.

Der aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannte Fall: g_m hängt nur nur von x_m ab (was natürlich nicht für alle m eintreten kann), erscheint nun als vollkommen trivial.

II. Der Fall $n = 2$.

1. Weiter können wir zunächst in der bisherigen Allgemeinheit nicht kommen, es erweist sich vielmehr als zweckmäßig, jetzt den einfachsten Fall für n zu betrachten. Der Fall $n = 0$ ist sinnlos, der Fall $n = 1$ (wegen $g_1 + \ldots + g_n \equiv 0$) ebenfalls, beidemal ist kein eigentliches Gesellschaftsspiel vorhanden. Es ist also der Fall $n = 2$, der nun in Frage kommt.

Da $g_1 + g_2 \equiv 0$ ist, kann $g_1 = g$, $g_2 = -g$ gesetzt werden. Dann lautet die Beschreibung des allgemeinen 2-Personen-Spieles so:

Die Spieler S_1, S_2 *wählen irgendwelche der Zahlen* $1, 2, \ldots, \Sigma_1$ *bzw.* $1, 2, \ldots, \Sigma_2$ *und zwar jeder ohne die Wahl des anderen zu kennen. Wenn sie die Zahlen* x *bzw.* y *gewählt haben, so erhalten sie die Summen* $g(x, y)$ *bzw.* $-g(x, y)$.

Dabei kann nun $g(x, y)$ jede beliebige Funktion (definiert für $x = 1, 2, \ldots, \Sigma_1$, $y = 1, 2, \ldots, \Sigma_2$!) sein.

Es ist leicht, sich ein Bild von den Tendenzen zu machen, die in einem solchen 2-Personen-Spiele miteinander kämpfen: Es wird von zwei Seiten am Werte von $g(x, y)$ hin und her gezerrt, nämlich durch S_1, der ihn möglichst groß, und durch S_2, der ihn möglichst klein machen will. S_1 gebietet über die Variable x, und S_2 über die Variable y. Was wird geschehen?

2. Wenn S_1 die Zahl x ($x = 1, 2, \ldots, \Sigma_1$) gewählt hat, so hängt sein Resultat $g(x, y)$ auch noch von der Wahl y des S_2 ab, ist aber jedenfalls $\geqq \mathrm{Min}_y\, g(x, y)$. Und diese untere Grenze kann durch geeignete Wahl von x gleich $\mathrm{Max}_x\, \mathrm{Min}_y\, g(x, y)$ (und nicht größer!) gemacht werden. D. h. wenn S_1 es will, so kann er $g(x, y)$ (unabhängig von S_2!) jedenfalls

$$\geqq \mathrm{Max}_x\, \mathrm{Min}_y\, g(x, y)$$

machen. Ebenso zeigt man: wenn S_2 es will, so kann er $g(x, y)$ (unabhängig von S_1!) jedenfalls

$$\leqq \mathrm{Min}_y\, \mathrm{Max}_x\, g(x, y)$$

machen.

Wenn nun

$$\mathrm{Max}_x\, \mathrm{Min}_y\, g(x, y) = \mathrm{Min}_y\, \mathrm{Max}_x\, g(x, y) = M$$

ist, so folgt aus dem Obigen, sowie daraus, daß S_1 das $g(x, y)$ möglichst groß und S_2 es möglichst klein machen will, daß $g(x, y)$ den Wert M haben wird. Denn S_1 hat das Interesse, es groß zu machen, und kann verhindern, daß es kleiner als M wird; S_2 hingegen hat das Interesse, es klein zu machen und kann verhindern, daß es größer als M wird. Folglich wird es den Wert M haben.

Nun ist zwar allgemein

$$\mathrm{Max}_x\, \mathrm{Min}_y\, g(x, y) \leqq \mathrm{Min}_y\, \mathrm{Max}_x\, g(x, y),$$

aber es besteht keineswegs stets das $=$-Zeichen. Es ist vielmehr leicht, solche $g(x, y)$ anzugeben, bei denen das $<$-Zeichen gilt, wo also diese Überlegung versagt. Das einfachste derartige Beispiel ist das folgende:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \Sigma_2 = 2, \qquad & g(1,1) = 1, \quad g(1,2) = -1, \\ & g(2,1) = -1, \quad g(2,2) = 1. \end{aligned}$$

(Es ist offenbar $\mathrm{Max\,Min} = -1$ und $\mathrm{Min\,Max} = 1$.)

Ein anderes Beispiel ist die sog. „Morra“ [8]):

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \Sigma_2 = 3, \quad & g(1,1) = 0, \quad g(1,2) = 1, \quad g(1,3) = -1, \\ & g(2,1) = -1, \quad g(2,2) = 0, \quad g(2,3) = 1, \\ & g(3,1) = 1, \quad g(3,3) = -1, \quad g(3,3) = 0. \end{aligned}$$

(Auch hier ist $\mathrm{Max\,Min} = -1$ und $\mathrm{Min\,Max} = 1$.)

Daß diese Schwierigkeit auftritt, kann man sich auch so klarmachen:

$\mathrm{Max}_x\, \mathrm{Min}_y\, g(x, y)$ ist das beste Resultat, das S_1 erzielen kann, wenn ihn S_2 vollkommen durchschaut: wenn S_2, sooft S_1 x spielt, ein solches y

---

[8]) Auch „Verbrecher-Bakkarat“ oder „Knobeln“ genannt. In der üblichen Formulierung heißen 1, 2, 3 „Papier“, „Stein“, „Schere“ („Papier verdeckt den Stein, Stein schleift die Schere, Schere schneidet das Papier“).

spielt, das $g(x, y) = \mathrm{Min}_y\, g(x, y)$ wird. (Auf Grund der Spielregeln durfte S_2 nicht wissen, was S_1 spielen wird, er mußte also aus anderen Gründen wissen, wie S_1 spielt, das ist es, was wir mit „durchschauen" andeuten wollen.) Ebenso ist $\mathrm{Min}_y\, \mathrm{Max}_x\, g(x, y)$ das beste Resultat, das S_2 erzielen kann, wenn ihn S_1 durchschaut hat. Wenn die beiden Zahlen gleich sind, so bedeutet dies: es ist gleichgültig, welcher von den beiden Spielern der feinere Psychologe ist, das Spiel ist so unempfindlich, daß immer dasselbe herauskommt. Es ist klar, daß dies bei den beiden angeführten Spielen nicht der Fall ist: hier kommt alles darauf an, den Gegner zu durchschauen, zu erraten, ob er 1 oder 2 (bzw. 1, 2 oder 3) wählen wird.

Die Verschiedenheit der zwei Größen Max Min und Min Max bedeutet eben, daß von den zwei Spielern S_1 und S_2 nicht jeder gleichzeitig der klügere sein kann.

3. Es gelingt aber trotzdem mittels eines Kunstgriffes, die Gleichheit der zwei oben erwähnten Ausdrücke zu erzwingen.

Zu diesem Zwecke werden die Verhaltungsmöglichkeiten der Spieler S_1, S_2 folgendermaßen erweitert: Es wird von S_1 nicht verlangt, daß er sich am Anfang des Spieles für irgendeine der Zahlen $1, 2, \ldots, \Sigma_1$ entscheide. Er soll nur Σ_1 Wahrscheinlichkeiten

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\Sigma_1} \quad (\xi_1 \geqq 0, \xi_2 \geqq 0, \ldots, \xi_{\Sigma_1} \geqq 0,\ \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\Sigma_1} = 1)$$

angeben und sodann die Zahlen $1, 2, \ldots, \Sigma_1$ aus einer Urne mit den Wahrscheinlichkeiten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\Sigma_1}$ ziehen. Er wählt dann die gezogene Zahl. Dies scheint zwar eine Beeinträchtigung seines freien Entschlusses zu sein: denn nicht er bestimmt x; ist es aber nicht: denn will er unbedingt ein bestimmtes x haben, so kann er $\xi_x = 1$, $\xi_u = 0$ (für $u \neq x$) festsetzen. Demgegenüber schützt er sich gegen das „Durchschaut-werden": denn wenn etwa $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}$ ist, so vermag niemand (selbst er nicht!) vorauszusagen, ob er 1 oder 2 wählen wird!

Ebenso soll S_2 verfahren: auch er wählt nur Σ_2 Wahrscheinlichkeiten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\Sigma_2}$, und verfährt entsprechend.

Die Gesamtheit der $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\Sigma_1}$ wollen wir mit ξ und die Gesamtheit der $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\Sigma_2}$ mit η bezeichnen. Wenn S_1 ξ und S_2 η wählt, so hat S_1 den Erwartungswert

$$h(\xi, \eta) = \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} g(p, q)\, \xi_p \eta_q$$

und S_2 den Erwartungswert $-h(\xi, \eta)$. Die neue Funktion $h(\xi, \eta)$ umfaßt die alte $g(x, y)$ offenbar im folgenden Sinne: wenn $\xi_x = \eta_y = 1$ und $\xi_u = \eta_v = 0$ (für $u \neq x$, $v \neq y$) ist, so ist $h(\xi, \eta) = g(x, y)$.

Nun können wir für $h(\xi, \eta)$ genau dieselben Überlegungen anstellen, wie vorhin für $g(x, y)$. Wenn S_1 ξ gewählt hat, so ist sein Erwartungswert mindestens $\mathrm{Min}_\eta h(\xi, \eta)$; er kann also den minimalen Erwartungswert $\mathrm{Max}_\xi \mathrm{Min}_\eta h(\xi, \eta)$ (unabhängig von S_2!) erzwingen. Ebenso kann S_2 verhindern, daß der Erwartungswert von S_1 den maximalen Wert $\mathrm{Min}_\eta \mathrm{Max}_\xi h(\xi, \eta)$ übersteigt. Wieder ist

$$\mathrm{Max}_\xi \mathrm{Min}_\eta h(\xi, \eta) \leqq \mathrm{Min}_\eta \mathrm{Max}_\xi h(\xi, \eta),$$

und es fragt sich, ob stets das $=$-Zeichen gilt.

Man beachte, daß wir diesmal bessere Aussichten haben als bei $g(x, y)$: denn $g(x, y)$ konnte irgendeine Funktion sein, während $h(\xi, \eta)$ eine Bilinearform ist! Trotzdem also $h(\xi, \eta)$ eigentlich eine Verallgemeinerung von $g(x, y)$ ist, ist es als Funktion von viel einfacherem Typus als dieses. In der Tat werden wir im Abschnitt 3 beweisen, daß die Relation

$$\mathrm{Max}_\xi \mathrm{Min}_\eta h(\xi, \eta) = \mathrm{Min}_\eta \mathrm{Max}_\xi h(\xi, \eta)$$

(Max_ξ erstreckt über alle ξ mit $\xi_1 \geqq 0, \ldots, \xi_{\Sigma_1} \geqq 0$, $\xi_1 + \ldots + \xi_{\Sigma_2} = 1$, Min_η erstreckt über alle η mit $\eta_1 \geqq 0, \ldots, \xi_{\Sigma_2} \geqq 0$, $\eta_1 + \ldots + \eta_{\Sigma_1} = 1$) für alle Bilinearformen $h(\xi, \eta)$ besteht.

4. Wir setzen (unter Vorwegnahme des Resultates)

$$\mathrm{Max}_\xi \mathrm{Min}_\eta h(\xi, \eta) = \mathrm{Min}_\eta \mathrm{Max}_\xi h(\xi, \eta) = M.$$

Die Menge derjenigen ξ, für die $\mathrm{Min}_\eta h(\xi, \eta)$ seinen Maximalwert M annimmt, sei $\mathfrak{A}$; die Menge derjenigen η, für die $\mathrm{Max}_\xi h(\xi, \eta)$ seinen Minimalwert M annimmt, sei $\mathfrak{B}$. Aus diesen Definitionen folgen dann die folgenden Relationen ohne weiteres:

1. *Wenn ξ zu $\mathfrak{A}$ gehört, so ist stets $h(\xi, \eta) \geqq M$.*
2. *Wenn η zu $\mathfrak{B}$ gehört, so ist stets $h(\xi, \eta) \leqq M$.*
3. *Wenn ξ nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört, so gibt es ein η mit $h(\xi, \eta) < M$.*
4. *Wenn η nicht zu $\mathfrak{B}$ gehört, so gibt es ein ξ mit $h(\xi, \eta) > M$.*
5. *Wenn ξ zu $\mathfrak{A}$ und η zu $\mathfrak{B}$ gehört, so ist $h(\xi, \eta) = M$.*

Auf Grund dieser Relationen 1. bis 5. ist man wohl berechtigt zu erklären:

S_1 bzw. S_2 muß jedenfalls einen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Komplex ξ bzw. einen zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Komplex η wählen, einerlei welchen. Eine Partie hat für S_1 bzw. S_2 den Wert M bzw. $-M$.

Ein 2-Personen-Spiel ist offenbar als „gerecht" zu bezeichnen, wenn $M = 0$ ist; und als „symmetrisch", wenn die Spieler S_1, S_2 dieselben Rollen haben. D. h. wenn bei Vertauschung von ξ und η (dies setzt natürlich $\Sigma_1 = \Sigma_2$ voraus) sich auch $h(\xi, \eta)$ und $-h(\xi, \eta)$ vertauschen, also wenn

$$h(\xi, \eta) = -h(\eta, \xi)$$

oder, was dasselbe ist,

$$g(x, y) = -g(y, x)$$

ist. Also: wenn die Bilinearform $h(\xi, \eta)$, oder auch die Matrix $g(x, y)$, schiefsymmetrisch ist. In diesem Falle ist es natürlich auch „gerecht", was man so einsehen kann:

$$-\operatorname{Max}_\xi \operatorname{Min}_\eta h(\xi, \eta) = \operatorname{Min}_\xi \operatorname{Max}_\eta -h(\xi, \eta) = \operatorname{Min}_\xi \operatorname{Max}_\eta h(\eta, \xi)$$
$$= \operatorname{Min}_\eta \operatorname{Max}_\xi h(\xi, \eta),$$

d. h.

$$-M = M, \quad M = 0$$ [9]).

Man überzeugt sich leicht, daß in unseren zwei Beispielen (in 2.) $M = 0$ ist, und zwar umfaßt $\mathfrak{A}$ nur $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}$ bzw. $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \frac{1}{3}$, und $\mathfrak{B}$ $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$ bzw. $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \frac{1}{3}$. D. h.: beide Spiele sind gerecht (die „Morra" ist sogar symmetrisch), und in beiden muß jeder Spieler alle Zahlen durcheinander wählen, und zwar alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, noch auf den folgenden Umstand mit Nachdruck hinzuweisen. Trotzdem im Abschnitte 1. der Zufall (durch die Einführung der Erwartungswerte und Streichung der „Ziehungen") aus den zu betrachtenden Gesellschaftsspielen eliminiert wurde, ist er hier wieder von selbst aufgetreten: selbst wenn die Spielregel keinerlei „hazarde" Elemente enthält (d. h. Ziehungen aus Urnen) — wie etwa die beiden Beispiele aus 2. —, ist es doch unumgänglich notwendig, das „hazarde" Element, bei der Angabe der Verhaltungsmaßregeln für die Spieler, wieder in Betracht zu ziehen. Das Zufallsabhängige („hazarde", „statistische") liegt so tief im Wesen des Spieles (wenn nicht im Wesen der Welt) begründet, daß es gar nicht erforderlich ist, es durch die Spielregel künstlich einzuführen: auch wenn in der formalen Spielregel davon keine Spur ist, bricht es sich von selbst die Bahn.

---

[9]) Dabei ist Max Min = Min Max benützt worden, d. h. unser relativ tiefer Satz über Bilinearformen. Trivial, d. h. aus Max Min $\leqq$ Min Max, folgt hier offenbar nur

$$\operatorname{Max}\operatorname{Min} \leqq 0, \quad \operatorname{Min}\operatorname{Max} \geqq 0.$$

Während der endgültigen Abfassung dieser Arbeit wurde mir die Note von Herrn E. Borel in den Comptes rendus vom 10. Jan. 1927 (Sur les systèmes de formes linéares ... et la théorie du jeu, S. 52–55) bekannt. Borel formuliert die auf Bilinearformen bezügliche Frage für ein symmetrisches 2-Personen-Spiel und stellt fest, daß keine Beispiele für Max Min < Min Max bekannt sind.

Unser vorstehendes Resultat beantwortet seine Fragestellung.

III. Beweis des Satzes Max Min = Min Max.

1. Wir ändern etwas unsere Bezeichnungen ab, indem wir für Σ_1, Σ_2 bzw. $M+1$, $N+1$ schreiben, und für $g(p,q)$ α_{pq}. Wir haben dann:

$$h(\xi,\eta)=\sum_{p=1}^{M+1}\sum_{q=1}^{N+1}\alpha_{pq}\,\xi_p\,\eta_q\,.$$

Infolge der Bedingungen

$$\xi_1+\ldots+\xi_M+\xi_{M+1}=1,\qquad \eta_1+\ldots+\eta_N+\eta_{N+1}=1$$

ist der Komplex ξ bereits durch $\xi_1,\ldots,\xi_M$ bestimmt, und ebenso der Komplex η bereits durch $\eta_1,\ldots,\eta_N$. Es ist dann (wir haben keinen Anlaß, die Koeffizienten zu bestimmen):

$$h(\xi,\eta)=\sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{N}u_{pq}\,\xi_p\,\eta_q+\sum_{p=1}^{M}v_p\,\xi_p+\sum_{q=1}^{N}w_q\,\eta_q+r\,.$$

Wir werden auch hiervon nur einen Teil benutzen, indem wir stetige Funktionen zweier Variablenreihen $f(\xi,\eta)$ mit der folgenden Eigenschaft untersuchen werden:

(K). *Wenn* $f(\xi',\eta)\geqq A$, $f(\xi'',\eta)\geqq A$ *ist, so ist auch für jedes* $0\leqq\vartheta\leqq 1$, $\xi=\vartheta\xi'+(1-\vartheta)\xi''$ (*d.h.* $\xi_p=\vartheta\xi'_p+(1-\vartheta)\xi''_p$, $p=1,2,\ldots,M$) $f(\xi,\eta)\geqq A$. *Wenn* $f(\xi,\eta')\leqq A$, $f(\xi,\eta'')\leqq A$ *ist, so ist auch für jedes* $0\leqq\vartheta\leqq 1$, $\eta=\vartheta\eta'+(1-\vartheta)\eta''$ (*d.h.* $\eta_q=\vartheta\eta'_q+(1-\vartheta)\eta''_q$, $q=1,2,\ldots,N$) $f(\xi,\eta)\leqq A$.

(Daß das sowohl in den ξ wie in den η lineare $h(\xi,\eta)$ diese Eigenschaft (K) hat, ist klar.) Für diese Funktionen $f(\xi,\eta)$ werden wir beweisen:

$$\mathrm{Max}_\xi\,\mathrm{Min}_\eta\,f(\xi,\eta)=\mathrm{Min}_\eta\,\mathrm{Max}_\xi\,f(\xi,\eta),$$

wobei Max_ξ über $\xi_1\geqq 0,\ldots,\xi_M\geqq 0$, $\xi_1+\ldots+\xi_M\leqq 1$ und Min_η über $\eta_1\geqq 0,\ldots,\eta_N\geqq 0$, $\eta_1+\ldots+\eta_N\leqq 1$ zu erstrecken ist. Dies können wir auch so schreiben:

$$\mathop{\mathrm{Max}_{\xi_1}}_{\substack{\xi_1\geqq 0\\ \xi_1\leqq 1}}\ \mathop{\mathrm{Max}_{\xi_2}}_{\substack{\xi_2\geqq 0\\ \xi_1+\xi_2\leqq 1}}\ldots\mathop{\mathrm{Max}_{\xi_M}}_{\substack{\xi_M\geqq 0\\ \xi_1+\ldots+\xi_M\leqq 1}}\ \mathop{\mathrm{Min}_{\eta_1}}_{\substack{\eta_1\geqq 0\\ \eta_1\leqq 1}}\ \mathop{\mathrm{Min}_{\eta_2}}_{\substack{\eta_2\geqq 0\\ \eta_1+\eta_2\leqq 1}}\ldots\mathop{\mathrm{Min}_{\eta_N}}_{\substack{\eta_N\geqq 0\\ \eta_1+\ldots+\eta_N\leqq 1}} f(\xi,\eta)$$

$$=\mathop{\mathrm{Min}_{\eta_1}}_{\substack{\eta_1\geqq 0\\ \eta_1\leqq 1}}\ \mathop{\mathrm{Min}_{\eta_2}}_{\substack{\eta_2\geqq 0\\ \eta_1+\eta_2\leqq 1}}\ldots\mathop{\mathrm{Min}_{\eta_N}}_{\substack{\eta_N\geqq 0\\ \eta_1+\ldots+\eta_N\leqq 1}}\ \mathop{\mathrm{Max}_{\xi_1}}_{\substack{\xi_1\geqq 0\\ \xi_1\leqq 1}}\ \mathop{\mathrm{Max}_{\xi_2}}_{\substack{\xi_2\geqq 0\\ \xi_1+\xi_2\leqq 1}}\ldots\mathop{\mathrm{Max}_{\xi_M}}_{\substack{\xi_M\geqq 0\\ \xi_1+\ldots+\xi_M\leqq 1}} f(\xi,\eta).$$

2. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$M^{\xi_r}f(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta_1,\ldots,\eta_s)=\mathop{\mathrm{Max}_{\xi_r}}_{\substack{\xi_r\geqq 0\\ \xi_1+\ldots+\xi_r\leqq 1}} f(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta_1,\ldots,\eta_s),$$

$$M^{\eta_s}f(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta_1,\ldots,\eta_s)=\mathop{\mathrm{Min}_{\eta_s}}_{\substack{\eta_s\geqq 0\\ \eta_1+\ldots+\eta_s\leqq 1}} f(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta_1,\ldots,\eta_s).$$

Wie man sieht, hebt M^{ξ_r} bzw. M^{η_s} die Abhängigkeit des f von ξ_r bzw. η_s auf. Wir wollen beweisen: wenn f der Bedingung (K) (in 1.) genügt, so ist

$$M^{\xi_1} M^{\xi_2} \ldots M^{\xi_p} M^{\eta_1} M^{\eta_2} \ldots M^{\eta_q} f$$
$$= M^{\eta_1} M^{\eta_2} \ldots M^{\eta_q} M^{\xi_1} M^{\xi_2} \ldots M^{\xi_p} f.$$

Der Beweis ist offenbar geführt, wenn die zwei folgenden Behauptungen bewiesen sind:

α) Wenn $f = f(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s)$ stetig ist und die Eigenschaft (K) hat, so gilt dasselbe von $M^{\xi_r} f$ und $M^{\eta_s} f$.

β) Wenn $f = f(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s)$ stetig ist und die Eigenschaft (K) hat, so ist

$$M^{\xi_r} M^{\eta_s} f = M^{\eta_s} M^{\xi_r} f.$$

Zuerst beweisen wir α). Es genügt aber $M^{\xi_r} f$ zu betrachten: für $M^{\eta_s} f$ verlaufen die Überlegungen ebenso.

Es ist

$$M^{\xi_r} f(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s) = f^*(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \eta, \ldots, \eta_s)$$
$$= \underset{\substack{\xi_r \geqq 0 \\ \xi_1 + \ldots + \xi_r \leqq 1}}{\mathrm{Max}_{\xi_r}} f(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s).$$

Daß aus der Stetigkeit von f die von f^* folgt, ist klar. Es müssen noch die zwei Eigenschaften in (K) untersucht werden.

Erstens sei

$$f^*(\xi_1', \ldots, \xi_{r-1}', \eta_1, \ldots, \eta_s) \geqq A, \quad f^*(\xi_1'', \ldots, \xi_{r-1}'', \eta_1, \ldots, \eta_s) \geqq A,$$

Die f^* entsprechen Maximalwerten von f in endlichen Intervallen, die, da f stetig ist, angenommen werden; etwa für ξ_r' bzw. ξ_r''. Dann ist

$$f(\xi_1', \ldots, \xi_r', \eta_1, \ldots, \eta_s) \geqq A, \quad f(\xi_1'', \ldots, \xi_r'', \eta_1, \ldots, \eta_s) \geqq A,$$

und weil f dem (K) genügt (wir setzen $\xi_1 = \vartheta \xi_1' + (1-\vartheta)\xi_1'', \ldots, \xi_{r-1}' = \vartheta \xi_{r-1}' + (1-\vartheta)\xi_{r-1}''$ und $\xi_r = \vartheta \xi_r' + (1-\vartheta)\xi_r''$)

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s) \geqq A.$$

Dabei folgt aus

$$\xi_r' \geqq 0, \quad \xi_1' + \ldots + \xi_r' \leqq 1, \quad \xi_r'' \geqq 0, \quad \xi_1'' + \ldots + \xi_r'' \leqq 1$$

sofort

$$\xi_r \geqq 0, \quad \xi_1 + \ldots + \xi_r \leqq 1.$$

Also ist für das Maximum f^* um so mehr

$$f^*(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \eta_1, \ldots, \eta_s) \geqq A.$$

Zweitens sei

$$f^*(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \eta_1', \ldots, \eta_s') \leqq A, \quad f^*(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \eta_1'', \ldots, \eta_s'') \leqq A.$$

Wegen der Maximaleigenschaft von f^* gilt für alle ξ_r mit

$$\xi_r \geqq 0, \quad \xi_1 + \ldots + \xi_r \leqq 1$$

dann

$$f^*(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1', \ldots, \eta_s') \leqq A, \quad f(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1'', \ldots, \eta_s'') \leqq A.$$

Da f dem (K) genügt, hat dies wieder

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s) \leqq A$$

$(\eta_1 = \vartheta\eta_1' + (1-\vartheta)\eta_1'', \ldots, \eta_s = \vartheta\eta_s' + (1-\vartheta)\eta_s'')$ zur Folge; und da das für alle oben genannte ξ_r gilt,

$$f^*(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \eta_1, \ldots, \eta_s) \leqq A.$$

Damit ist unsere Behauptung α) restlos bewiesen.

3. Weiter soll nun gezeigt werden, daß stets (d. h. für alle $\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{s-1}$) $M^{\xi_r} M^{\eta_s} f = M^{\eta_s} M^{\xi_r} f$ ist. Wenn wir in $f(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s)$ die Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{s-1}$ festhalten, so genügt es, als Funktion von ξ_r, η_s allein, offenbar auch noch der Bedingung (K). Es bleibt also übrig zu beweisen (wir schreiben ξ, η für ξ_r, η_s):

Wenn $f(\xi, \eta)$ eine stetige Funktion ist, und wenn aus $f(\xi', \eta) \geqq A$, $f(\xi'', \eta) \geqq A$ für $\xi' \leqq \xi \leqq \xi''$ $f(\xi, \eta) \geqq A$ folgt, und aus $f(\xi, \eta') \leqq A$, $f(\xi, \eta'') \leqq A$ für $\eta' \leqq \eta \leqq \eta''$ $f(\xi, \eta) \leqq A$ folgt, so ist

$$\underset{0 \leqq \xi \leqq a}{\mathrm{Max}_\xi} \; \underset{0 \leqq \eta \leqq b}{\mathrm{Min}_\eta} f(\xi, \eta) = \underset{0 \leqq \eta \leqq b}{\mathrm{Min}_\eta} \; \underset{0 \leqq \xi \leqq a}{\mathrm{Max}_\xi} f(\xi, \eta).$$

(Wir schreiben a und b für $1 - \xi_1 - \ldots - \xi_{r-1}$ bzw. $1 - \eta_1 - \ldots - \eta_{s-1}$.)

Die zu beweisende Behauptung kann auch so formuliert werden: Es gibt einen „Sattelpunkt“ ξ_0, η_0 $(0 \leqq \xi_0 \leqq a,\ 0 \leqq \eta_0 \leqq b)$, d. h. $f(\xi_0, \eta)$ nimmt in $0 \leqq \eta \leqq b$ sein Minimum für $\eta = \eta_0$ an, und $f(\xi, \eta_0)$ nimmt in $0 \leqq \xi \leqq a$ sein Maximum für $\xi = \xi_0$ an.

In der Tat ist erstens jedenfalls

$$\mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta f(\xi, \eta) \leqq \mathrm{Min}_\eta \, \mathrm{Max}_\xi f(\xi, \eta),$$

und zweitens folgt aus der soeben formulierten Behauptung

$$\mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta f(\xi, \eta) \geqq \mathrm{Min}_\eta f(\xi_0, \eta) = f(\xi_0, \eta_0)$$

$$\mathrm{Min}_\eta \, \mathrm{Max}_\xi f(\xi, \eta) \leqq \mathrm{Max}_\xi f(\xi, \eta_0) = f(\xi_0, \eta_0),$$

also

$$\mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta f(\xi, \eta) = \mathrm{Min}_\eta \, \mathrm{Max}_\xi f(\xi, \eta) = f(\xi_0, \eta_0).$$

Es gilt also, zwei ξ_0, η_0 von der genannten Beschaffenheit zu finden.

ξ sei fest gegeben, für welche Werte von η in $0 \leqq \eta \leqq b$ nimmt $f(\xi, \eta)$ sein Minimum an? Die Antwort ist leicht: Wegen der Stetigkeit von f ist diese Menge abgeschlossen und wegen der zweiten Voraussetzung über f (aus $f(\xi, \eta') \leqq A$, $f(\xi, \eta'') \leqq A$ folgt $f(\xi, \eta) \leqq A$ für alle $\eta' \leqq \eta \leqq \eta''$) ist sie konvex; die einzigen abgeschlossenen und konvexen Zahlenmengen sind aber die Intervalle (mit Endpunkten). Diese Menge wird also ein Teilintervall des Intervalles $0, b$ sein; wir nennen es $K'(\xi)$, $K''(\xi)$.

Wenn η fest gegeben ist, so sieht man ebenso ein, daß diejenigen ξ in $0 \leqq \xi \leqq a$, für die $f(\xi, \eta)$ sein Maximum annimmt, ein Teilintervall (mit Endpunkten) von $0, a$ bilden; wir nennen es $L'(\eta)$, $L''(\eta)$.

Offenbar ist stets $K'(\xi) \leqq K''(\xi)$, $L'(\eta) \leqq L''(\eta)$. Ferner folgt aus der Stetigkeit von $f(\xi, \eta)$, daß $K'(\xi)$, $L'(\eta)$ nach unten, und $K''(\xi)$, $L''(\eta)$ nach oben halbstetige Funktionen sind[10]).

Nun sei wieder ξ^* fest gegeben. Wir bilden die Menge aller ξ^{**} mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein η^*, so daß $f(\xi^*, \eta)$ seinen Minimalwert (in $0 \leqq \eta \leqq b$) in $\eta = \eta^*$ annimmt, und $f(\xi, \eta^*)$ seinen Maximalwert (in $0 \leqq \xi \leqq a$) in $\xi = \xi^{**}$ annimmt. D. h.: die Vereinigungsmenge aller Intervalle $L'(\eta^*) \leqq \xi^{**} \leqq L''(\eta^*)$, wenn η^* das ganze Intervall $K'(\xi^*) \leqq \eta^* \leqq K''(\xi\ )$ durchläuft.

Im Intervalle $K'(\xi^*) \leqq \eta^* \leqq K''(\xi^*)$ nimmt die nach unten halbstetige Funktion $L'(\eta^*)$ ihr Minimum und die nach oben halbstetige Funktion $L''(\eta^*)$ ihr Maximum an; also hat die Menge der ξ^{**} sowohl ein kleinstes als auch ein größtes Element. Sie enthält aber auch jedes dazwischen liegende ξ', was man sich so klarmachen kann: Wäre das nicht der Fall, so läge jedes Intervall $L'(\eta^*)$, $L''(\eta^*)$ ganz vor oder ganz nach ξ', und es gäbe solche von jeder Sorte (die zum kleinsten bzw. größten ξ^{**} gehörigen). Da η^* ein Intervall durchläuft, hätten die beiden Sorten von η^* einen gemeinsamen Häufungspunkt η'. Da in beliebiger Nähe von η' also sowohl $L'(\eta^*) \leqq \xi'$ als auch $L''(\eta^*) \geqq \xi'$ vorkommt (und L', L'' nach unten bzw. oben halbstetig ist), muß $L'(\eta') \leqq \xi'$, $L''(\eta') \geqq \xi'$ sein; d. h. ξ' gehört doch zu einem der Intervalle: zu $L'(\eta')$, $L''(\eta')$.

---

[10]) Wir wollen den Beweis für $K'(\xi)$ skizzieren, für die drei anderen Funktionen geht er ebenso.

Wenn $K'(\xi) = 0$ ist, ist die Behauptung trivial, da stets $K'(\zeta) \geqq 0$ ist; es sei also $K'(\xi) > 0$. Für $0 \leqq \eta \leqq K'(\xi) - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ ist stets $f(\xi, \eta) \neq \mathrm{Min}_\eta f(\xi, \eta)$, und da $f(\xi, \eta)$ stetig ist, $f(\xi, \eta) \leqq \mathrm{Min}_\eta f(\xi, \eta) - \delta$ (für ein geeignetes $\delta > 0$). Wenn also ζ genügend nahe bei ξ liegt, so ist noch immer $f(\zeta, \eta) \leqq \mathrm{Min}_\eta f(\zeta, \eta) - \frac{1}{2}\delta$ (weil sowohl $f(\zeta, \eta)$ als auch $\mathrm{Min}_\eta f(\zeta, \eta)$ stetig ist); d. h. $f(\zeta, \eta)$ nimmt sein Minimum (in η, für $0 \leqq \eta \leqq b$) in $0 \leqq \eta \leqq K'(\xi) - \varepsilon$ nirgends an. Also muß $K(\zeta) \geqq K(\xi) - \varepsilon$. Das ist aber gerade die behauptete Halbstetigkeit nach unten.

Unsere ξ^{**} bilden also ein Teilintervall (mit Endpunkten) von $0, a$, wir nennen es $H'(\xi^*)$, $H''(\xi^*)$. $H'(\xi^*)$ ist das Minimum der $L'(\eta^*)$, $H''(\xi^*)$ das Maximum der $L''(\eta^*)$, für $K'(\xi^*) \leqq \eta^* \leqq K''(\xi^*)$. Man sieht leicht ein, daß wieder $H'(\xi^*)$ nach unten und $H''(\xi^*)$ nach oben halbstetig ist (dies folgt aus den entsprechenden Eigenschaften von $K'(\xi^*)$, $K''(\xi^*)$ und $L'(\eta^*)$, $L''(\eta^*)$).

Wir sind offenbar am Ziele, wenn wir ein ξ^* $(0 \leqq \xi^* \leqq a)$ ausfindig machen können, welches gleichzeitig ein ξ^{**} ist, d. h. eines mit $H'(\xi^*) \leqq \xi^* \leqq H''(\xi^*)$.

Gäbe es kein solches ξ^*, so läge jedes Intervall $H'(\xi^*)$, $H''(\xi^*)$ ganz vor oder ganz nach ξ^*, und es gäbe solche von jeder Sorte (nämlich $\xi^* = a$ bzw. $\xi^* = 0$). Da ξ^* ein Intervall durchläuft, hätten die beiden Sorten von ξ^* einen gemeinsamen Häufungspunkt ξ'. Da in beliebiger Nähe von ξ' also sowohl $H'(\xi^*) \leqq \xi^*$ also auch $H''(\xi^*) \geqq \xi^*$ vorkommt (und H', H'' nach unten bzw. nach oben halbstetig ist), muß $H'(\xi') \leqq \xi'$, $H''(\xi') \geqq \xi'$ sein; d. h. ξ' gehört doch zum Intervalle $H'(\xi')$, $H''(\xi')$.

Damit ist aber die letzte Behauptung (und somit auch die Behauptung β) bewiesen. Wir haben also unseren Satz restlos bewiesen.

IV. Der Fall $n = 3$.

Nachdem wir in den Abschnitten II, III den Fall $n = 2$ erledigt haben, wenden wir uns dem nächst komplizierten Falle $n = 3$ zu.

Es liege also ein 3-Personen-Spiel vor, das im Sinne der Beschreibung am Ende des Abschnittes I durch drei Funktionen g_1, g_2, g_3 von drei Variablen x, y, z $(x = 1, 2, \ldots, \Sigma_1,\ y = 1, 2, \ldots, \Sigma_2,\ z = 1, 2, \ldots, \Sigma_3)$ charakterisiert ist; dabei gilt identisch

$$g_1 + g_2 + g_3 \equiv 0.$$

Es war im Falle $n = 2$ möglich, den Wert einer Partie für jeden Spieler S_1, S_2 zwingend zu bestimmen, es ergab sich:

$$\text{Wert für } S_1 = \quad \operatorname{Max}_\xi \operatorname{Min}_\eta \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} g(p,q)\,\xi_p \eta_q = \operatorname{Max}_\xi \operatorname{Min}_\eta \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} g_1(p,q)\,\xi_p \eta_q,$$

$$\text{Wert für } S_2 = -\operatorname{Min}_\eta \operatorname{Max}_\xi \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} g(p,q)\,\xi_p \eta_q = \operatorname{Max}_\eta \operatorname{Min}_\xi \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} g_2(p,q)\,\xi_p \eta_q,$$

wobei gilt

$$\text{Wert für } S_1 + \text{Wert für } S_2 = 0.$$

Versuchen wir nun auch im Falle $n = 3$ die Werte einer Partie für die drei Spieler S_1, S_2, S_3 zu berechnen! Nehmen wir etwa an, diese Werte wären bzw. w_1, w_2, w_3. Dann ist es klar, daß diese Werte, um allgemein und ohne jede weitere Erörterung befriedigend zu sein, die folgende Eigenschaft haben müßten: Keine zwei Spieler dürfen in der Lage sein, sich durch Koalition beim Spiele einen größeren Erwartungswert verschaffen zu können, als die Summe der ihnen zugeteilten „Werte einer Partie“. Ferner muß $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ sein: denn die Spieler leisten ja nur Zahlungen aneinander.

Wenn aber

$$\mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} (g_1(pqr) + g_2(pqr)) \, \xi_{pq} \eta_r = M_{1,2},$$

$$\mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} (g_1(pqr) + g_3(pqr)) \, \xi_{pr} \eta_q = M_{1,3},$$

$$\mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} (g_2(pqr) + g_3(pqr)) \, \xi_{qr} \eta_p = M_{2,3}$$

gesetzt wird (die ξ_{pq} bilden ein System von Wahrscheinlichkeiten, ebenso die η_r; analog für ξ_{pr}, η_q und ξ_{qr}, η_p), so können S_1 und S_2, dadurch daß sie koalieren, ein gewöhnliches 2-Personen-Spiel gegen S_3 spielen und sich dabei (nach dem vorhin Gesagten) den Erwartungswert $M_{1,2}$ erzwingen; ebenso S_1 und S_3 den Erwartungswert $M_{1,3}$; und S_2 und S_3 den Erwartungswert $M_{2,3}$. Also muß

$$w_1 + w_2 \geqq M_{1,2}, \quad w_1 + w_3 \geqq M_{1,3}, \quad w_2 + w_3 \geqq M_{2,3},$$
$$w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

sein. Dies ist offenbar dann und nur dann möglich, wenn

$$M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} \leqq 0$$

ist.

Nun ist, wie wir in 2. zeigen werden, stets

$$M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} \geqq 0,$$

und es ist leicht, Beispiele anzugeben, wo das $>$-Zeichen gilt. Ein solches 3-Personen-Spiel ist z. B. das folgende:

$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = 3$. *Wenn es unter den* x_1, x_2, x_3 (*d. h. den Wahlen der* S_1, S_2, S_3, *wir schrieben dafür bisher auch* x, y, z) *zwei solche gibt, daß* $x_\mu = \nu$, $x_\nu = \mu$ *ist, so bilden* μ, ν *ein „echtes Paar“. Es gibt offenbar entweder kein echtes Paar oder ein einziges.*

Wenn es kein „echtes Paar“ gibt, so sei $g_1 = g_2 = g_3 = 0$. *Wenn es ein „echtes Paar“ gibt, so sei es* μ, ν, *und die dritte der Zahlen* 1, 2, 3 *sei* λ. *Dann sei* $g_\mu = g_\nu = 1$, $g_\lambda = -2$.

Bei diesem Spiele ist offenbar $M_{1,2} = M_{1,3} = M_{2,3} = 2$ (irgend zwei koalierte S_μ, S_ν können, indem sie ν bzw. μ wählen, ein „echtes Paar“ bilden und dadurch dem dritten, S_λ, die Summe 2 abnehmen!), also $M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} = 6 > 0$.

Der Sinn des Versagens eines jeden Wertungsversuches bei diesem Spiele ist offenbar der folgende: Um die Summe 2 zu gewinnen, brauchen sich nur irgendwelche der drei Spieler zusammenzutun, sie können dann den dritten ohne weiteres ausplündern, trotzdem die Spielregel absolut symmetrisch, d. h. das Spiel formal gerecht ist[11]). Aus der Symmetrie würde folgen, daß der Wert für jeden Spieler gleich 0 sein muß, dies ist aber offenbar falsch: Zwei Spieler brauchen nur zu wollen, und sie können sich dann den Gewinn 2 verschaffen! Wie ist dieser Widerspruch aufzulösen?

2. Gehen wir systematisch vor. Es ist stets

$$M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} \geqq 0\,.^{12)}$$

Denn es ist offenbar:

$$M_{1,2} = \mathrm{Max}_\xi\, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} (g_1(pqr) + g_2(pqr))\, \xi_{pq}\, \eta_r$$

(auf Grund unseres Satzes über 2-Personen-Spiele)

$$= \quad \mathrm{Min}_\eta\, \mathrm{Max}_\xi \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} (g_1(pqr) + g_2(pqr)\, \xi_{pq}\, \eta_r$$

$$= -\,\mathrm{Max}_\eta\, \mathrm{Min}_\xi \sum_{p=1}^{\Sigma_1} \sum_{q=1}^{\Sigma_2} \sum_{r=1}^{\Sigma_3} g_3(pqr)\, \xi_{pq}\, \eta_r\,,$$

wir müssen also

$$\mathrm{Max}_{\eta'}\, \mathrm{Min}_{\xi'} \sum_{p,q,r} g_3(pqr)\, \xi'_{pq}\, \eta'_r + \mathrm{Max}_{\eta''}\, \mathrm{Min}_{\xi''} \sum_{p,q,r} g_2(pqr)\, \xi''_{pr}\, \eta''_q$$
$$+ \mathrm{Max}_{\eta'''}\, \mathrm{Min}_{\xi'''} \sum_{p,q,r} g_1(pqr)\, \xi'''_{qr}\, \eta'''_p \leqq 0$$

beweisen, d. h. für alle Systeme $\overline{\eta}'$, $\overline{\eta}''$, $\overline{\eta}'''$

$$\mathrm{Min}_{\xi'} \sum_{p,q,r} g_3(pqr)\, \xi'_{pq}\, \overline{\eta}'_r + \mathrm{Min}_{\xi''} \sum_{p,q,r} g_2(pqr)\, \xi''_{pr}\, \overline{\eta}''_q$$
$$+ \mathrm{Min}_{\xi'''} \sum_{p,q,r} g_1(pqr)\, \xi'''_{qr}\, \overline{\eta}'''_p \leqq 0\,.$$

---

[11]) Man sieht hieran, daß unser Beispiel alles andere als ein Fall von „Pathologie" von Spielen ist: es ist vielmehr ein in praxi recht häufiger und charakteristischer Fall. Im Einklang damit werden wir in IV, 3. und V, 1. sehen, daß es sogar der allgemeine Fall des 3-Personen-Spieles ist.

[12]) Inhaltlich ist dies ohne weiteres klar: S_2 und S_3 können in Koalition gegen S_1 bestenfalls $M_{2,3}$ erzwingen, also S_1 für sich allein (gegen alle) bestenfalls $-M_{2,3}$ (wegen unseres Satzes über das 2-Personen-Spiel); ebenso kann S_2 für sich allein bestenfalls $-M_{1,3}$ erzwingen. Koaliert können aber S_1 und S_2 bestenfalls $M_{1,2}$ erzwingen; „l'union fait la force", d. h.

$$-M_{2,3} - M_{1,3} \leqq M_{1,2}\,, \qquad M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} \geqq 0\,.$$

Dies ist aber der Fall, es genügt ja

$$\xi'_{pq} = \bar{\eta}'''_q \bar{\eta}''_q, \qquad \xi''_{pr} = \bar{\eta}'''_r \bar{\eta}'_r, \qquad \xi'''_{qr} = \bar{\eta}''_q \bar{\eta}'_r$$

zu setzen, dann wird (wegen $g_1 + g_2 + g_3 \equiv 0$)

$$\sum_{p,q,r} g_3(pqr)\bar{\eta}'_r\bar{\eta}''_q\bar{\eta}'''_p + \sum_{p,q,r} g_2(pqr)\bar{\eta}'_r\bar{\eta}''_q\bar{\eta}'''_p + \sum_{p,q,r} g_1(pqr)\bar{\eta}'_r\bar{\eta}''_p\bar{\eta}'''_q = 0.$$

Daß das Zeichen $>$ wirklich vorkommt, haben wir gesehen, der Fall des Zeichens $=$ ist also als ein ausgearteter Grenzfall anzusehen.

Nehmen wir nun an, der Spieler S_1 erhebt Anspruch auf einen Gewinn von w_1 pro Partie. Wie kann er seinen Anspruch durchsetzen? Offenbar auf zwei Wegen.

Erstens kann er versuchen allein zu spielen. Dann gerät er im wesentlichen in ein 2-Personen-Spiel, in dem er auf der einen Seite steht und S_2, S_3 auf der anderen (koaliert). Der Wert dieses Spieles für ihn ist also $-M_{2,3}$ pro Partie. Diese Lösung kommt also nur für $w_1 \leqq -M_{2,3}$ in Frage; nehmen wir daher $w_1 > -M_{2,3}$ an.

Dann bleibt nur die zweite Möglichkeit übrig: er muß versuchen S_2 oder S_3 zum Bundesgenossen zu bekommen. Da er im Bunde mit S_2 oder S_3 pro Partie die Summe $M_{1,2}$ oder $M_{1,3}$ gewinnen kann, aber davon w_1 für sich behalten will, so kann er S_2 die Summe $M_{1,2} - w_1$ pro Partie als Preis des Bündnisses anbieten, und S_3 die Summe $M_{1,3} - w_1$. Es ist jedoch vollkommen ausgeschlossen, daß S_2 oder S_3 dieses Angebot annimmt, wenn sie miteinander verbündet mehr als $(M_{1,2} - w_1) + (M_{1,3} - w_1)$ pro Partie gewinnen können. D. h. wenn

$$(M_{1,2} - w_1) + (M_{1,3} - w_1) < M_{2,3}, \quad w_1 > \frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{1,3} - M_{2,3})$$

ist.

Wir können also sagen: S_1 hat gar keine Aussicht, einen Anspruch w_1 durchzusetzen, der

$$> -M_{2,3}, \quad > \frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{1,3} - M_{2,3})$$

ist. Die zweite Zahl ist $\geqq$ als die erste (wegen $M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} \geqq 0$), also muß jedenfalls

$$w_1 \leqq \frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{1,3} - M_{2,3}) = \bar{w}_1$$

sein. Ebenso kann gezeigt werden: es muß

$$w_2 \leqq \frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{2,3} - M_{1,3}) = \bar{w}_2,$$

$$w_3 \leqq \frac{1}{2}(M_{1,3} + M_{2,3} - M_{1,2}) = \bar{w}_3$$

sein.

Nun sind aber diese oberen Grenzen für die Ansprüche der drei Spieler, $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3$, ohne weiteres realisierbar. Denn wenn sich etwa S_1, S_2 verbünden, so können sie (gegen S_3) den Gewinn $M_{1,2} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2$ erzielen; und ebenso können sich S_1, S_3 bzw. S_2, S_3 durch ein Bündnis die Gewinne $M_{1,3} = \overline{w}_1 + \overline{w}_3$ bzw. $M_{2,3} = \overline{w}_2 + \overline{w}_3$ pro Partie sichern. Also: die höchstmöglichen und dabei dennoch vollkommen motivierten Ansprüche der drei Spieler S_1, S_2, S_3 sind bzw. $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3$ (als Gewinn pro Partie).

3. Inwiefern ist aber diese Wertung mit der in 1. erkannten Unmöglichkeit einer allgemeinen Wertung vereinbar? Wenn $M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} = 0$ ist, so besteht ja keine Schwierigkeit: dann ist

$$\overline{w}_1 = -M_{2,3}, \quad \overline{w}_2 = -M_{1,3}, \quad \overline{w}_3 = -M_{1,2},$$

d. h. jeder Spieler kann seinen Ansprüchen allein, auch ohne Hilfe eines anderen (und einer möglichen Koalition seiner Gegner trotzend), Geltung verschaffen. Es können also alle drei Spieler ihre Ansprüche gleichzeitig durchsetzen, demgemäß ist auch

$$\overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 = 0.$$

Anders ist es für $M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} > 0$. Wegen

$$\overline{w}_1 > -M_{2,3}, \quad \overline{w}_2 > -M_{1,3}, \quad \overline{w}_3 > -M_{1,2}$$

kann dann kein Spieler seinen Anspruch allein durchsetzen, und wegen

$$\overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 = \frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3}) > 0$$

können niemals alle drei zugleich befriedigt werden. Aber wegen

$$\overline{w}_1 + \overline{w}_2 = M_{1,2}, \qquad \overline{w}_1 + \overline{w}_3 = M_{1,3}, \qquad \overline{w}_2 + \overline{w}_3 = M_{2,3}$$

ist jedes Paar von Spielern, welches sich (zum Ausplündern des dritten) verbündet, des Erfolges gewiß: sie können ihre Ansprüche voll befriedigen, der dritte wird freilich pro Partie nur bzw. $-M_{2,3}, -M_{1,3}, -M_{1,2}$ erhalten, und daher um $\frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3})$ hinter seinem motivierten Anspruch zurückbleiben.

Dies kann auch so formuliert werden: Jeder der drei Spieler S_1, S_2, S_3 muß trachten, sich mit einem anderen Spieler zu verbünden. Wenn ihm das gelingt, so erhält er pro Partie die bzw. Summe

$$\frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{1,3} - M_{2,3}), \qquad \frac{1}{2}(M_{1,2} + M_{2,3} - M_{1,3}),$$

$$\frac{1}{2}(M_{1,3} + M_{2,3} - M_{1,2}),$$

wenn es ihm aber nicht gelingt (d. h. wenn die zwei anderen koalieren), so erhält er bzw. nur

$$-M_{2,3}, \quad -M_{1,3}, \quad -M_{1,2}.$$

Eine noch etwas variierte Beschreibung des Sachverhaltes, die vielleicht die prägnanteste ist, ist die folgende:

α) *Eine Partie hat für die Spieler S_1, S_2, S_3 die bzw. „Grundwerte“*

$$v_1 = \frac{1}{3}(M_{1,2} + M_{1,3} - 2M_{2,3}), \qquad v_2 = \frac{1}{3}(M_{1,2} + M_{2,3} - 2M_{1,3}),$$

$$v_3 = \frac{1}{3}(M_{1,3} + M_{2,3} - 2M_{1,2}).$$

Das ist eine regelrechte Wertung da $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ ist.

β) *Aber über die „Grundwerte“ hinaus besteht für irgend zwei Spieler, die sich gegen den dritten verbünden, die Möglichkeit, je $\frac{1}{6}D$ zu gewinnen, während der dritte (gleichfalls über seinen „Grundwert“ hinaus) $\frac{1}{3}D$ verliert. Dabei ist*

$$D = M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} > 0 \text{ [13]}.$$

(Auch der zuerst behandelte Fall $D = M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} = 0$ kann in diese Formulierung mit einbezogen werden: α) ist das dortige Resultat und β) fällt wegen $D = 0$ fort.)

Man sieht an dieser Lösung sofort: das 3-Personen-Spiel ist etwas wesentlich anderes als das von zwei Personen. Die eigentliche Spielmethode der einzelnen Spieler tritt zurück: sie bietet nichts Neues, da die (unbedingt eintretende) Bildung von Koalitionen das Spiel zu einem 2-Personen-Spiele macht. Aber der Wert der Partie für einen Spieler hängt nicht nur von der Spielregel ab, er wird vielmehr ganz entscheidend dadurch beeinflußt (wenigstens, sobald $D > 0$ ist), welche der drei an sich gleichmöglichen Koalitionen S_1, S_2; S_1, S_3; S_2, S_3 zustande gekommen ist. Es macht sich geltend, was dem schablonenmäßigen und ganz ausgeglichenen 2-Personen-Spiele noch völlig fremd ist: der Kampf.

V. Ansätze für $n > 3$.

1. Für $n > 3$ ist es bis jetzt nicht gelungen, allgemeingültige Resultate zu erzielen. Der beste Wegweiser, der hier zur Verfügung steht, mag die Analogie zu den bereits erledigten Fällen $n = 2, 3$ sein; diese sollen deshalb hier noch einmal zusammengestellt werden:

---

[13]) Es ist übrigens

$$v_1 = -M_{2,3} + \frac{1}{3}D, \qquad v_2 = -M_{1,3} + \frac{1}{3}D, \qquad v_3 = -M_{1,2} + \frac{1}{3}D.$$

$n = 2$. *Es wird definiert:*

$$M = \mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p,q} g_1(p\,q)\,\xi_p\,\eta_q \ ^{14)}.$$

Das Spiel hat für die Spieler S_1, S_2 die bzw. Werte M, $-M$ pro Partie.

$n = 3$. *Es wird definiert:*

$$M_{1,2} = \mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p,q,r} (g_1(p\,q\,r) + g_2(p\,q\,r))\,\xi_{pq}\,\eta_r$$

$$M_{1,3} = \mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p,q,r} (g_1(p\,q\,r) + g_3(p\,q\,r))\,\xi_{pr}\,\eta_q$$

$$M_{2,3} = \mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p,q,r,} (g_2(p\,q\,r) + g_3(p\,q\,r))\,\xi_{qr}\,\eta_p \ ^{14)}$$

$$D = M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3}.$$

Es ist $D \geqq 0$, und es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob $D = 0$ oder $D > 0$ ist.

$D = 0$. *In diesem Falle hat das Spiel für S_1, S_2, S_3 die bzw. Werte $-M_{2,3}$, $-M_{1,3}$, $-M_{1,2}$ pro Partie.*

$D > 0$. *In diesem Falle hat das Spiel für S_1, S_2, S_3 die bzw. „Grundwerte“ $-M_{2,3} + \frac{1}{3}D$, $-M_{1,3} + \frac{1}{3}D$, $-M_{1,2} + \frac{1}{3}D$ pro Partie. Zu den „Grundwerten“ ist aber noch ein weiteres Glied zu addieren, um die richtigen Werte zu erhalten; dieses rührt daher, daß irgend zwei Spieler, die sich gegen den dritten verbünden (einerlei welche zwei!), sich über den „Grundwert“ hinaus noch einen Gewinn von je $\frac{1}{6}D$ pro Partie verschaffen können, während der dritte Spieler $\frac{1}{3}D$ pro Partie (über seinen Grundwert hinaus) verliert.*

Aus dieser Zusammenstellung sieht man klar: der Fall $n = 2$ und der Fall $n = 3$, $D = 0$ gehören zum selben Typus. Dagegen repräsentiert der Fall $n = 3$, $D > 0$ (wie bereits am Schlusse von IV festgestellt wurde) einen neuen Typus. Wir wollen diese zwei Typen als den eindeutigen bzw. den symmetrisch-mehrdeutigen bezeichnen; es ist wohl zu erkennen, was mit diesen Benennungen gemeint ist.

Besteht nun Aussicht, daß sich auch für $n > 3$ alle Gesellschaftsspiele auf diese zwei Typen bringen lassen? Oder hat man mit der Möglichkeit neuer Komplikationen zu rechnen? Es wäre insbesondere das Auftreten von asymmetrisch-mehrdeutigen Typen ins Auge zu fassen, d. h. von solchen, bei denen die entscheidenden Koalitions-Möglichkeiten nicht mehr

---

[14]) Die Max_ξ und Min_η sind zu erstrecken über alle Systeme von Wahrscheinlichkeiten, d. h. wir verlangen

alle $\xi_p \geqq 0$, $\sum_p \xi_p = 1$; alle $\xi_{pq} \geqq 0$, $\sum_{pq} \xi_{pq} = 1$; usw.

und analog

alle $\eta_p \geqq 0$, $\sum_p \eta_p = 1$; usw.

symmetrisch über alle Spieler verteilt sind. (Bei $n=3$ ist das ja nicht der Fall: die eventuellen Asymmetrien der Spielregel gehen völlig in den „Grundwerten" der drei Spieler auf, zur Koalitionsbildung aber sind alle Spieler gleichfähig: denn alle drei Koalitionen S_1, S_2; S_1, S_3; S_2, S_3 kommen gleichmäßig in Betracht.) Diese Frage soll im folgenden etwas näher betrachtet werden.

2. Um ein allgemeines n-Personen-Spiel zu charakterisieren, führen wir die folgenden Konstanten ein:

$$M_{\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k\}} = \mathrm{Max}_\xi \, \mathrm{Min}_\eta \sum_{p_1=1}^{\Sigma_1} \sum_{p_2=1}^{\Sigma_2} \cdots$$

$$\sum_{p_n=1}^{\Sigma_n} (g_{\mu_1}(p_1, \ldots, p_n) + \ldots + g_{\mu_k}(p_1, \ldots, p_n)) \xi_{p_{\mu_1}, \ldots, p_{\mu_k}} \eta_{p_{\nu_1}, \ldots, \nu_{n-k}},$$

wobei $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ irgendwelche k verschiedene unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ sind und $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-k}$ die übrigen (Max_ξ ist zu nehmen für alle $\xi_{p_{\mu_1}, \ldots, p_{\mu_k}} \geqq 0$, $\sum \xi_{p_{\mu_1}, \ldots, p_{\mu_k}} = 1$, und Min_η für alle $\eta_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}} \geqq 0$, $\sum \eta_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}} = 1$). $M_{\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k\}}$ ist offenbar diejenige Summe, deren Gewinn pro Partie die koalierten Spieler $S_{\mu_1}, \ldots, S_{\mu_k}$ gegen die koalierten Spieler $S_{\nu_1}, \ldots, S_{\nu_{n-k}}$ erzwingen können (das Spiel ist ja nur ein 2-Personen-Spiel).

Offenbar ist $M_{\{\}} = 0$. Ferner folgt aus unserem Satze über 2-Personen-Spiele, daß $M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}} = - M_{\{\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}\}}$ ist. Schließlich seien $\mu_1, \ldots, \mu_k$; $\nu_1, \ldots, \nu_l$; $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-k-l}$ drei zueinander komplementäre Teilmengen von $1, 2, \ldots, n$. Wenn die Spieler $S_{\mu_1}, \ldots, S_{\mu_k}$, ferner $S_{\nu_1}, \ldots, S_{\nu_l}$ und $S_{\varrho_1}, \ldots, S_{\varrho_{n-k-l}}$ fest koaliert sind, so ist dies ein 3-Personen-Spiel, und es ist (wir versehen die auf dieses letztere Spiel bezüglichen Größen mit einem Akzent)

$$M'_{1,2} = M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k, \nu_1, \ldots, \nu_2\}}$$

$$M'_{2,3} = M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-k-l}\}} = - M_{\{\nu_1, \ldots, \nu_l\}},$$

$$M'_{2,3} = M_{\{\nu_1, \ldots, \nu_l, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-k-l}\}} = - M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}}.$$

Nach unseren Resultaten über 3-Personen-Spiele ist aber

$$M'_{1,2} + M'_{1,3} + M'_{2,3} \geqq 0,$$

d. h.

$$M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k, \nu_1, \ldots, \nu_l\}} \geqq M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}} + M_{\{\nu_1, \ldots, \nu_l\}}.$$

Zusammenfassend kann also gesagt werden:

Ein gegebenes n-Personen-Spiel ordnet jeder Teilmenge $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ von $1, 2, \ldots, n$ eine Konstante $M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}}$ zu (nämlich diejenige Summe, deren Gewinn pro Partie die Koalition der Spieler $S_{\mu_1}, \ldots, S_{\mu_k}$ gegen die Koalition der übrigen erzwingen kann). Das System der Konstanten $M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}}$ erfüllt stets die folgenden drei Bedingungen:

1. $M_{\{\}} = 0$.

2. $M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}} + M_{\{\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}\}} = 0$, *wenn* $\mu_1, \ldots, \mu_k$ und $\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}$ *komplementäre Teilmengen von* $1, 2, \ldots, n$ *sind.*

3. $M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k, \nu_1, \ldots, \nu_l\}} \geqq M_{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}} + M_{\{\nu_1, \ldots, \nu_l\}}$, wenn $\mu_1, \ldots, \mu_k$ und $\nu_1, \ldots, \nu_l$ *elementfremde Teilmengen von* $1, 2, \ldots, n$ *sind*[15]).

Es ist nicht schwer, die Umkehrung zu beweisen, d. h. zu jedem System von Zahlen $M_{\{\mathfrak{M}\}}$ ($\mathfrak{M}$ durchläuft alle 2^n Teilmengen von $1, 2, \ldots, n$), das den Bedingungen 1.—3. genügt, ein Gesellschaftsspiel anzugeben, bei dem die genannten Konstanten eben diese Werte $M_{\{\mathfrak{M}\}}$ haben. Wir sehen davon ab, hier ein solches Beispiel — das keineswegs tiefliegend ist — durchzudiskutieren.

3. Ich glaube die Vermutung aussprechen zu dürfen, daß die Wert- und Koalitionsverhältnisse bei einem Gesellschaftsspiele durch diese 2^n Konstanten allein bestimmt sind. Für $n = 2, 3$ ist das, wie wir sahen, der Fall[16]), für $n > 3$ steht der allgemeine Beweis noch aus. Denn während bei $n = 2$ überhaupt nicht koaliert werden kann und bei $n = 3$ nur auf eine Art (nämlich „zwei gegen einen“), wachsen die Möglichkeiten für $n = 3$ rasch an: schon bei $n = 4$ muß man entscheiden, ob Koalitionen „drei gegen einen“ oder „zwei gegen zwei“ sich bilden werden, d. h. bei welchen Bündnissen die daran beteiligten Spieler die besten Chancen haben werden. Bei $n = 4$ gelingt noch die Diskussion der Hauptfälle (allein auf Grund der $M_{\{\mathfrak{M}\}}$!), aber eine befriedigende allgemeine Theorie fehlt zur Zeit noch.

Wenn unsere Vermutung richtig ist, so haben wir damit alle Gesellschaftsspiele auf eine letzte natürliche Normalform gebracht: jedes System von 2^n Konstanten $M_{\{\mathfrak{M}\}}$, die den Bedingungen 1.—3. genügen, stellt eine Klasse „taktisch äquivalenter“ Gesellschaftsspiele vor[17]).

---

[15]) Inhaltlich ist diese Behauptung ebenso klar, wie die in Fußnote [12]) S. 313 betrachtete.

[16]) Es ist für $n = 2$

$$M_{\{\}} = 0, \qquad M_{\{1\}} = M, \qquad M_{\{2\}} = -M, \qquad M_{\{1,2\}} = 0;$$

und für $u = 3$

$$M_{\{\}} = 0, \quad M_{\{1\}} = -M_{2,3}, \quad M_{\{2\}} = -M_{1,3}, \quad M_{\{3\}} = -M_{1,2}, \quad M_{\{1,2\}} = M_{1,2},$$
$$M_{\{1,3\}} = M_{1,3}, \quad M_{\{2,3\}} = M_{2,3}, \quad M_{\{1,2,3\}} = 0.$$

[17]) Eine gewisse Normierungsmöglichkeit für die $M_{\{\mathfrak{M}\}}$ besteht noch darin, daß man, in Analogie zu den „Werten“ (einer Partie) für $n = 2$ und den „Grundwerten“ für $n = 3$, „Grundwerte“ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ für die Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ einführt. Für den darüber hinausgehenden Teil des Spieles erhält man dann natürlich die neuen Konstanten

$$M^*_{\{\mathfrak{M}\}} = M_{\{\mathfrak{M}\}} - \sum_{p \text{ in } \mathfrak{S}} v_p.$$

(Fortsetzung der Fußnote 17 auf nächster Seite.)

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, daß in einem demnächst erscheinenden Nachtrage eine numerische Berechnung von einigen bekannten 2-Personen-Spielen erfolgen soll (Poker, allerdings mit gewissen schematisierenden Vereinfachungen, Bakkarat). Die Übereinstimmung der dabei herauskommenden Resultate mit den bekannten Faustregeln der Spieler (so z. B. der Beweis der Notwendigkeit des „Bluffens" beim Poker) kann als eine empirische Bestätigung der Resultate unserer Theorie angesehen werden.

Man wählt die v_p zweckmäßigerweise so, daß

$$M^*_{\{1\}} = M^*_{\{2\}} = \dots = M^*_{\{n\}}, \qquad v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$$

ist, d. h. jeder Spieler für sich allein gleichstark ist, und nur in den Koalitionsmöglichkeiten Unterschiede bestehen.

(Aus 1.—3. folgert man leicht, daß der gemeinsame Wert der

$$M^*_{\{1\}}, M^*_{\{2\}}, \dots, M^*_{\{n\}} \leqq 0$$

ist; wenn er $= 0$ ist, so sind alle $M^*_{\mathfrak{M}} = 0$, d. h. das Spiel — nach Auszahlung der „Grundwerte" — eindeutig. Er gibt somit eine Art Maß für die Mehrdeutigkeit des Spieles, d. h. die taktischen Möglichkeiten, die es bietet).

(Eingegangen am 24. 7. 1927.)

$$f^{(1)}\begin{Bmatrix} o_1, o_2, \ldots, o_n \\ e_1, e_2, \ldots, e_n \end{Bmatrix} \tag{78}$$

$$= \sum_{a_i} \left(\omega_1(a_1)\cdot\omega_1(*)^{(c-1)}\right)_{e_1}\cdot\left(\omega_2(a_2)\cdot\omega_2(*)^{(c-1)}\right)_{e_2}\cdot\ldots\cdot\left(\omega_n(a_n)\cdot\omega_n(*)^{(c-1)}\right)_{e_n}.$$

$a_i = 1, 2$; $i = 2, \ldots, n$; $a_1 = 1$; wenn $e_i \neq e_k$, so ist $o_i \neq o_k$; wenn $e_i = e_k$, so ist $a_i =$ oder $\neq a_k$, je nachdem $o_i =$ oder $\neq o_k$ ist. Alle $f^{(1)}\begin{Bmatrix} o_1 \ldots o_n \\ e_1 \ldots e_n \end{Bmatrix}$, deren Indizes diesen Ungleichungen nicht genügen, sind null. Es ist z. B. $\omega_i(*)^{(4)} = \omega_i(*)\cdot\omega_i(*)\cdot\omega_i(*)\cdot w_i(*)$; $\omega_i(*)^{(0)} = 1$.

Im übrigen gilt für die Zusammensetzung der Symbole $\omega_i(a_i)$ und $\omega_i(*)$ zu wirklichen Zahlen dieselbe Rechenregel wie in (50) und (27a). c ist die Anzahl der verschiedenen Zahlwerte, die sich unter $e_1, e_2, \ldots, e_n$ finden. Beispiel: $f^{(1)}\begin{Bmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 1, 1 \end{Bmatrix} = 0$; $f^{(1)}\begin{Bmatrix} 1, 2, 1 \\ 1, 1, 1 \end{Bmatrix} = \sum_{a_i} \omega_1(a_1)\cdot\omega_2(a_2)\cdot\omega_3(a_3)$, da $c = 1$ ist. Da $o_3 = o_1$, so ist $a_3 = a_1 = 1$; da $o_1 \neq o_2$, so ist $a_1 \neq a_2$; also muß $a_2 = 2$ sein. $f^{(1)}\begin{Bmatrix} 1, 2, 1 \\ 1, 1, 1 \end{Bmatrix} = \omega^{(1)}(1, 2, 1)$ (nach 77); ebenso $f^{(1)}\begin{Bmatrix} 1, 2, 2, 1, 2, 1 \\ 1, 1, 1, 1, 1, 1 \end{Bmatrix} = \omega^{(1)}(1, 2, 2, 1, 2, 1)$ usw. Es genügt, die Behauptung (76) an einem Beispiel zu illustrieren. Sei etwa — im Gegensatz zu unsrer Voraussetzung (74) —

$$f^{(1)}\begin{Bmatrix} 1, 2, 2, 3, 1, 1 \\ 1, 2, 2, 3, 1, 1 \end{Bmatrix} = 1.$$

Nach (78) wird:

$$f^{(1)}\begin{Bmatrix} 1, 2, 2, 3, 1, 1 \\ 1, 2, 2, 3, 1, 1 \end{Bmatrix} = \omega^{(1)}(1, *, *, *, 1, 1)\cdot[\omega^{(1)}(*, 1, 1, *, *, *)$$
$$+ \omega^{(1)}(*, 2, 2, *, *, *)]\cdot\omega^{(1)}(*, *, *, *, *, *).$$

Da die $\omega^{(1)}$ Wahrscheinlichkeiten sind, die der Gleichung (55a) unterliegen, so folgt, daß jeder Faktor des vorstehenden Produkts gleich 1 sein muß, wenn das ganze Produkt den Wert 1 hat. Es genügt, den Faktor $[\omega^{(1)}(*, 1, 1, *, *, *) + \omega^{(1)}(*, 2, 2, *, *, *)] = 1$ herauszugreifen.

Nach (77) und (77a) können wir schreiben:

$$\sum_{a_i} \omega^{(1)}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_6) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$
$$(a_i = 1, 2;\ i = 2, \ldots, 6;\ a_1 = 1;\ a_2 = a_3).$$

Ziehen wir diese Gleichung von (55a) ab, so folgt:

$$\sum_{a_i} \omega^{(1)}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_6) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 6),$$
$$(a_i = 1, 2;\ i = 2, \ldots, 6;\ a_1 = 1;\ a_2 \neq a_3).$$

Da nun die $\omega^{(1)}$ Wahrscheinlichkeiten sind, folgt

$$\omega^{(1)}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_6) = 0, \quad \text{wenn} \quad a_2 \neq a_3.$$