SPIELTHEORETISCHE BEHANDLUNG EINES OLIGOPOLMODELLS MIT NACHFRAGETRÄGHEIT

TEIL I: BESTIMMUNG DES DYNAMISCHEN PREISGLEICHGEWICHTS

von

REINHARD SELTEN

Frankfurt/M.

Dieser Artikel ist der erste Teil einer zweiteiligen Untersuchung. Der zweite Teil wird auf den Ergebnissen des ersten Teils aufbauen; er wird durch den Untertitel »Teil II: Eigenschaften des dynamischen Preisgleichgewichts« gekennzeichnet sein.

1. Das Problem der Nachfrageträgheit

Das Problem der Nachfrageträgheit wird in der oligopoltheoretischen Literatur zwar gelegentlich erwähnt oder angedeutet[1], aber fast niemals analytisch behandelt[2]. Einigen Unternehmensspielen liegen Oligopolmodelle zugrunde, in denen die Nachfrageträgheit eine wichtige Rolle spielt; als Beispiel sei auf das Planspiel der Farbwerke Hoechst A. G. hingewiesen, in dem die Absatzmengen unter anderem auch von

[1] *Kaldor* spricht in diesem Zusammenhang von »buyers' inertia«, während *Bain* den Ausdruck »customer inertia« benutzt. Vergleiche hierzu: *N. Kaldor,* Market Imperfection and Excess Capacity, »Economica«, New Series, II (1935), S. 33–50, wiederabgedruckt in: *G. Stigler* und *K. Boulding* (Herausgeber), Readings in Price Theory, Chicago-Homewood (Ill.), 1952, S. 384–403, insbesondere S. 399, und *J. S. Bain,* Barriers to New Competition, 2nd Printing, Cambridge (Mass.) 1962, S. 127–130.

[2] Mir ist ein Artikel bekannt, in dem das optimale Verhalten einer Unternehmung bei Nachfrageträgheit im Rahmen eines mathematischen Modells untersucht wird: *M. J. Farrell,* An Application of Activity Analysis to the Theory of the Firm, »Econometrica«, 22 (1954), S. 291–302. – Auf S. 301–302 berührt *Farrell*

den Absatzmengen der Vorperiode abhängen[1]. In einem vom Verfasser für Forschungszwecke entwickelten einfachen Oligopolspiel wird die Nachfrageträgheit im wesentlichen in derselben Weise berücksichtigt wie in dem Oligopolmodell, das im Folgenden behandelt wird[2].

Der Begriff der Nachfrageträgheit hat zunächst nichts anderes zum Inhalt als die Ungültigkeit der in der herkömmlichen Theorie üblichen Annahme, daß die Reaktionsgeschwindigkeit der Nachfrager unendlich groß ist. Die Gründe dafür, daß die Nachfrager nicht sofort reagieren, müssen nicht immer dieselben sein. Es kann sein, daß Preisänderungen nicht sofort bemerkt werden, daß eingespielte Absatzwege nur ungern aufgegeben werden, daß die Abnehmer eine gewisse Loyalität den Lieferanten gegenüber empfinden oder daß Einkaufsgewohnheiten nur langsam geändert werden.

Wenn von Marktunvollkommenheiten die Rede ist, denkt man in erster Linie an das Phänomen der Produktdifferenzierung. Auch die Produktdifferenzierung kann zur Nachfrageträgheit beitragen, indem sie die Umstellung von dem Produkt eines Anbieters auf das Produkt eines anderen erschwert. Obwohl das hier behandelte Modell in dieser Weise als das Modell eines heterogenen Marktes verstanden werden kann, muß doch betont werden, daß die Produktdifferenzierung keineswegs eine notwendige Voraussetzung der Nachfrageträgheit ist. Mangelnde Markttransparenz, Starrheit der Absatzwege, Kundentreue und eine gewisse Beharrlichkeit der Einkaufsgewohnheiten können ebenso gut auf homogenen wie auf heterogenen Märkten vorkommen.

Bei der Formulierung des hier behandelten Modells kam es uns vor allem darauf an, den homogenen Fall zu erfassen. Die Möglichkeit der Interpretation im Sinne eines heterogenen Marktes unterliegt insofern einer Einschränkung, als unser Modell eine wichtige Eigenschaft hat, die wir »Quasihomogenität« nennen wollen, um so der Tatsache Ausdruck zu verleihen, daß ein heterogener Markt in dieser Eigenschaft in vieler Hinsicht an einen homogenen Markt erinnert.

Die Quasihomogenität besagt, daß in einer Situation, in der die Gesamtnachfrage konstant ist, die Marktaufteilung nur dann unverändert

---

auch das Oligopolproblem, jedoch ohne den oligopolistischen Marktzusammenhang in seinem Modell explizit zu formulieren. Er untersucht die Situation eines Oligopolisten unter der Voraussetzung einer ganz bestimmten Reaktionshypothese: »Suppose that all competitors respond to a price cut by lowering their own prices by an equivalent amount with a lag of one period« (S. 301). Unser Ansatz unterscheidet sich von dem von *Farrell* vor allem dadurch, daß das Reaktionsverhalten der Oligopolisten nicht als von vornherein gegeben unterstellt, sondern mit Hilfe der Spieltheorie aus dem Gewinnmaximierungsprinzip abgeleitet wird.

[1] Vergleiche hierzu: Arbeitskreis Gamer, Frankfurt a.M., *F.J.Drenkard, B.Gamer, K.Hax, H.Langer* und *G.Schätzle,* Unternehmensspiele, »Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung«, 15 (1963), S. 149–206, insbesondere S. 168–169.

[2] Vergleiche hierzu: *R.Selten,* Ein Oligopolexperiment mit Preisvariation und Investition, Bericht Nr. 2 des Seminars für mathematische Wirtschaftsforschung und Ökonometrie, Universität Frankfurt a.M., Dezember 1963, insbesondere S. 6–9.

bestehen bleiben kann, wenn alle Anbieter den gleichen Preis haben, weil Preisunterschiede immer eine Verschiebung der Marktanteile zugunsten der billigeren Anbieter zur Folge haben.

Ein heterogener Markt, auf dem bei konstanter Gesamtnachfrage eine stabile Marktaufteilung bei unterschiedlichen Preisen möglich ist, ist also nicht quasihomogen. Derartige Märkte werden von unserem Modell nicht erfaßt.

Es ist leicht zu sehen, wie ein heterogener Markt beschaffen sein muß, wenn er die Eigenschaft der Quasihomogenität haben soll. Die Produkte der einzelnen Anbieter müssen trotz ihrer Differenzierung noch ungefähr gleichwertig sein und die Unterschiede zwischen den Produkten dürfen lediglich eine Verstärkung der Nachfrageträgheit zur Folge haben. *J.S. Bain* beschreibt vielleicht derartige Märkte, wenn er aufgrund seiner empirischen Untersuchungen Folgendes sagt[1]:

"... once a competitive balance is struck in the market there may be a variety of individual prices on rival products. This is not always so, however, and perhaps not so in the majority of cases. Though buyer preferences for individual products do exist, the preferences may be sufficiently vulnerable to price differences that many buyers will be 'detachable' from a preferred seller by a small difference, even though rather durable buyer allegiances will persist as long as rival prices are substantially identical".

2. Das Modell

Die Nachfrage- und Kostenbeziehungen werden in unserem Modell durch lineare Funktionen dargestellt, einerseits weil dadurch ein Höchstmaß an analytischer Manipulierbarkeit erreicht wird und andererseits weil es ohnehin naheliegt, die Funktionsform so einfach wie möglich anzusetzen. Unser Modell ist dynamisch, denn es liegt in der Natur der Sache, daß die Nachfrageträgheit im Rahmen einer statischen Theorie nicht behandelt werden kann. Das Modell ist ein Periodenmodell, in dem die Zeit als diskrete Variable auftritt, die nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Es wird vereinfachend angenommen, daß den Oligopolisten außer den Preisen keine anderen Aktionsparameter zur Verfügung stehen. Es handelt sich also um ein reines Preisvariationsmodell.

Im Interesse einer bequemen Bezeichnungsweise wird bei allen zeitabhängigen Größen die Zeit als oberer Index vermerkt. So ist zum Beispiel p_i^t der Preis des Oligopolisten i in der Periode t. Untere Indices weisen immer auf die Nummern der betreffenden Oligopolisten hin, die von 1 bis n durchnumeriert werden. Um Verwechslungen zwischen Zeitindices und echten Exponenten auszuschließen, werden wir überall dort, wo Mißverständnisse auftreten könnten, die Basis einer Potenz in Klammern einschließen. Das Quadrat von p_i^t wird $(p_i^t)^2$ geschrieben werden.

---

[1] *J.S. Bain,* a.a.O., S. 115.

Der Absatz x_i^t des Oligopolisten i hängt in unserem Modell von seinem Preis p_i^t und einer Größe N_i^t ab, die wir das »Nachfragepotential« des Oligopolisten i nennen wollen. Es ist

$$x_i^t = N_i^t - p_i^t; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Wir können die Steigung dieser Preis-Absatzfunktion ohne weiteres auf -1 festsetzen, weil wir diese Normierung immer durch eine geeignete Wahl der Geldeinheit erreichen können. Das durchschnittliche Nachfragepotential

$$N^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} N_i^t \tag{2}$$

ist von den Entscheidungen der Oligopolisten unabhängig, was natürlich Änderungen im Zeitverlauf nicht ausschließt, die auf wirtschaftlichen Entwicklungen beruhen, die sich dem Einfluß der Oligopolisten entziehen. Inwieweit das Nachfragepotential des Oligopolisten i vom durchschnittlichen Nachfragepotential abweicht, wird durch die Größe

$$V_i^t = N_i^t - N^t; \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

gemessen, die wir den »Vorsprung« des Oligopolisten i nennen. Dieser Vorsprung V_i^t und damit auch das Nachfragepotential N_i^t wird durch Preisunterschiede beeinflußt. Je weiter der Preis p_i^t eines Oligopolisten i unter dem Durchschnittspreis

$$p^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i^t \tag{4}$$

aller Oligopolisten liegt, desto größer wird sein Vorsprung werden. Da aber die Nachfrager nicht sofort reagieren, wird dieser Einfluß erst in der nächsten Periode wirksam. Es ist

$$V_i^{t+1} = V_i^t + w(p^t - p_i^t); \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Der Parameter w kennzeichnet das Ausmaß, in dem die Nachfrager auf Preisunterschiede reagieren. Die Nachfrageträgheit ist um so stärker, je kleiner w ist. Wir nennen deshalb w die »Beweglichkeit« der Nachfrage.

Die Gleichungen (1) bis (5) beschreiben die Nachfrageseite unseres Modells. Die Kosten des Oligopolisten i sind durch

$$K_i^t = F_i + k_i x_i^t \qquad i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

gegeben. Die konstanten Grenzkosten k_i werden als positiv vorausgesetzt. Die Nachfragemenge x_i^t ist auch die in der Periode t produzierte Menge. Man kann mit dieser Annahme die Vorstellung verbinden, daß nur auf Auftrag produziert wird und daß Kapazitätsgrenzen praktisch keine Rolle spielen.

Wir setzen voraus, daß jeder Oligopolist die Maximierung seines langfristigen Gewinns anstrebt. Da die fixen Kosten F_i bei Maximierungsüberlegungen als additive Konstante keine Rolle spielen, können wir sie im folgenden außer acht lassen. Anstelle der Reingewinne werden wir stets die Bruttogewinne

$$g_i^t = (p_i^t - k_i)\, x_i^t \tag{7}$$

betrachten. Der langfristige Bruttogewinn

$$G_i^t = \sum_{s=t}^{T} q^{s-t} g_i^s \qquad i = 1, \ldots, n \tag{8}$$

ist die Summe aller diskontierten zukünftigen Periodengewinne g_i^s bis zu einer Periode T. Wir werden zunächst immer voraussetzen, daß T endlich ist; der Fall $T = \infty$ wird erst in Teil II behandelt werden. Für den Diskontierungsfaktor q, von dem wir annehmen, daß er durch den Marktzinssatz bestimmt ist und daher für alle Oligopolisten derselbe ist, gilt

$$0 < q \leq 1. \tag{9}$$

Wir müssen uns noch mit dem Problem auseinandersetzen, daß unser Modell, so wie es bisher formuliert ist, negative Absatzmengen x_i^t zuläßt, was natürlich ökonomisch unsinnig ist. Die einfachste Möglichkeit, mit diesem Problem fertigzuwerden, besteht darin anzunehmen, daß ein Preis p_i^t, der oberhalb von N_i^t festgesetzt wird, sich auf den Absatz x_i^t und die Vorsprünge V_i^{t+1} ebenso auswirkt wie ein bei $p_i^t = N_i^t$ festgesetzter Preis. Es kommt dann ceteris paribus weder für den Periodengewinn g_i^t, der bei $x_i^t = 0$ ohnehin Null ist noch für spätere Gewinne g_i^s darauf an, ob p_i^t genau bei N_i^t oder oberhalb von N_i^t festgesetzt wird, so daß der Variationsbereich für p_i^t ohne Einschränkung der Allgemeinheit durch

$$p_i^t \leq N_i^t \qquad i = 1, \ldots, n \tag{10}$$

nach oben begrenzt werden kann.

Das Modell hat die Form eines Spiels, in dem die n Spieler zu Beginn jeder Periode t gleichzeitig und unabhängig voneinander ihre Periodenpreise p_i^t im Einklang mit der Bedingung (10) festzusetzen haben. Wir setzen voraus, daß die Spielregeln den Spielern genau bekannt sind; die Spieler kennen also nicht nur die Gleichungen des Modells, sondern auch die Nachfrageentwicklung $N^{t_0}, N^{t_0+1}, \ldots, N^T$ und die Anfangsvorsprünge $V_1^{t_0}, \ldots, V_n^{t_0}$. Außerdem nehmen wir an, daß sich die Spieler auf eine genaue Kenntnis des bisherigen Spielverlaufs stützen können; sie können daher ihre Preise p_i^t in Kenntnis ihrer Nachfragepotentiale N_i^t festsetzen. Jeder Spieler i ist bestrebt, so zu spielen, daß $G_i^{t_0}$ möglichst groß wird.

Es ist unsere Absicht, eine nichtkooperative Lösung für dieses Spiel zu suchen. Hierbei gehen wir von der Vorstellung aus, daß die Oligopolisten keine Möglichkeit haben, ihre Entscheidungen im voraus bindend festzulegen. Diese Voraussetzung des völligen Fehlens jeder Selbstbindungskraft[1] bedeutet insbesondere, daß die Oligopolisten weder mit ihren Konkurrenten noch mit anderen Vertragspartnern (z.B. den Kunden) rechtsgültige Verträge über ihre zukünftigen Preise abschließen dürfen. Unter diesen Umständen kann es durchaus vernünftig sein sich nicht auf Vereinbarungen einzulassen, die möglicherweise nicht eingehalten werden.

Eine weitere Annahme, von der wir ausgehen werden, besteht darin, daß wir ein »wirtschaftsfriedliches« Verhalten unterstellen. Damit ist gemeint, daß jeder der Oligopolisten davor zurückschreckt, einen seiner Konkurrenten aus dem Markt zu verdrängen. Diese Annahme hat viel für sich, denn jeder Verdrängungskampf birgt schwer überschaubare Risiken. Die bedrängte Unternehmung kann z.B. einen kapitalkräftigen Käufer finden, der die Wettbewerbslage durch kostensenkende Investitionen entscheidend verändert, oder mehrere schwächere Unternehmungen können sich zu einer Fusion gezwungen sehen. Eine adäquate Untersuchung ausgesprochen aggressiver Marktverhaltensweisen ist natürlich mit Hilfe unseres Modells, das Liquiditäts- und Finanzierungsgesichtspunkte unberücksichtigt läßt, nicht möglich.

Für die Zwecke unserer Analyse genügt es nicht, die Annahme des wirtschaftsfriedlichen Verhaltens allgemein zu formulieren. Wir müssen genauer sagen, wo die Grenze der Existenzgefährdung liegt, die durch das aggressive Verhalten der Konkurrenten nicht überschritten werden darf. Diese Grenze dürfte spätestens dann erreicht sein, wenn die Erzielung eines positiven Bruttogewinns unmöglich wird. Das ist dann der Fall, wenn eine positive Absatzmenge nur bei einem Preis unter den Grenzkosten möglich ist, das heißt wenn die Bedingung

$$N_i^t > k_i \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ t = t_0, \ldots, T \end{array} \tag{11}$$

verletzt ist. Für unsere Analyse kommt es nicht so sehr darauf an, daß die Grenze genau an dieser Stelle liegt, sondern vielmehr darauf, daß sie spätestens dort erreicht ist.

Der nächste Abschnitt ist noch nicht der eigentlichen Behandlung des Modells gewidmet. Bevor wir damit beginnen können, müssen wir erst ein mit dem spieltheoretischen Gleichgewichtsbegriff zusammenhängendes Problem erörtern.

3. Der Begriff des perfekten Gleichgewichtspunktes

Das wichtigste Lösungskonzept der nichtkooperativen Spieltheorie ist das des Gleichgewichtspunktes[2]. Es sei Π_i die Menge aller reinen

[1] Die Wichtigkeit des Vorhandenseins oder Nichtvorhandenseins von Selbstbindungskraft (commitment power) ist zuerst von *Schelling* betont worden. Vergleiche hierzu *T.C. Schelling*, The Strategy of Conflict, Cambridge (Mass.) 1960.

[2] Vergleiche hierzu: *J.F. Nash*, Equilibrium Points in N-Person Games, Proceedings of the National Academy of Science, 36 (1950), S. 48–49. – Der spieltheore-

Strategien π_i des Spielers i in einem Spiel Γ. Wählt jeder der Spieler eine seiner reinen Strategien π_i, so gehört zu der daraus resultierenden Strategienkombination $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ ein eindeutig bestimmter Auszahlungsvektor $H(\pi) = (H_1(\pi), \dots, H_n(\pi))$, dessen Komponenten die Auszahlungen an die betreffenden Spieler darstellen[1]. Wird in einer Strategienkombination $\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_n^*)$ die Komponente π_i^* durch eine andere reine Strategie π_i ersetzt, so entsteht eine abgeänderte Strategienkombination, die wir mit π^*/π_i bezeichnen. Eine Strategienkombination π^* ist ein »Gleichgewichtspunkt«, wenn Folgendes gilt:

$$(12) \qquad H_i(\pi^*) = \max_{\pi_i \varepsilon \Pi_i} H_i(\pi^*/\pi_i) \qquad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Genaugenommen handelt es sich bei einer Kombination π^* mit der Eigenschaft (12) um einen Gleichgewichtspunkt in reinen Strategien. Da wir jedoch im Rahmen dieser Untersuchung von dem Begriff der gemischten Strategie keinen Gebrauch machen, wollen wir im folgenden unter einem Gleichgewichtspunkt immer einen Gleichgewichtspunkt in reinen Strategien verstehen.

Wenn man von der Annahme des völligen Fehlens jeder Selbstbindungskraft ausgeht, kann nicht jeder Gleichgewichtspunkt als eine vernünftige nichtkooperative Lösung angesehen werden. Anhand eines einfachen Beispiels soll gezeigt werden, warum das der Fall ist. Das in Abbildung 1 dargestellte 2-Personenspiel mit vollkommener Information

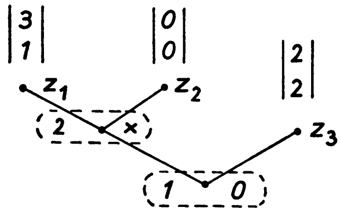

Abb. 1

---

tische Gleichgewichtsbegriff, der schon der *Cournot*schen Oligopoltheorie implizit zugrunde liegt, ist zuerst von *Nash* allgemein formuliert worden. Eine Darstellung der mathematischen Theorie des Gleichgewichtspunktes findet sich zum Beispiel bei *E. Burger,* Einführung in die Theorie der Spiele, Berlin 1958, S. 29–48. Der intuitive Gehalt des spieltheoretischen Gleichgewichtsbegriffes wird in dem Buch von *Luce* und *Raiffa* ausführlich diskutiert.

Vergleiche hierzu: *R.D.Luce* und *H.Raiffa,* Games and Decisions, New York 1957, S. 88–113.

[1] Hier wie im folgenden setzen wir einige wichtige Grundbegriffe der Spieltheorie als bekannt voraus. Hierzu gehört insbesondere der Strategiebegriff. In diesem Zusammenhang sei auf eine frühere Arbeit des Verfassers verwiesen: *R. Selten,* Bewertung strategischer Spiele, »Zeitschrift für die Gesamte Staatswissenschaft«, 116 (1960), S. 221–282, insbesondere S. 221–229.

beginnt am Punkte o, an dem sich der Spieler 1 für einen der beiden Punkte x oder z_3 zu entscheiden hat; entscheidet er sich für x, so hat der Spieler 2 die Wahl zwischen den beiden Endpunkten z_1 und z_2. An den Endpunkten sind die Auszahlungen vermerkt. So erhält z.B. bei z_1 der Spieler 1 die Auszahlung 3, während der Spieler 2 die Auszahlung 1 erhält.

Jeder der beiden Spieler hat eine »linke« Strategie π_i^L, die in Abbildung 1 eine Entscheidung nach links, das heißt für x bzw. z_1 vorschreibt und eine »rechte« Strategie π_i^R, die entsprechend erklärt ist. Das Spiel hat zwei Gleichgewichtspunkte, nämlich die Strategienkombinationen $\pi^L = (\pi_1^L, \pi_2^L)$ und $\pi^R = (\pi_1^R, \pi_2^R)$. Beide Strategienkombinationen haben die Gleichgewichtseigenschaft (12).

Der Gleichgewichtspunkt π^R kann nur so interpretiert werden, daß Spieler 2 bereits vor Beginn des Spieles mit einer Entscheidung für z_2 droht, um Spieler 1 dazu zu bewegen, sich gemäß π_1^R zu verhalten. Diese Drohung muß aber wirkungslos bleiben, wenn Spieler 2 sich nicht im voraus bindend auf ihre Durchführung festlegen kann. Spieler 1 weiß, daß Spieler 2 kein Interesse mehr an der Durchführung der Drohung haben kann, sobald der Spielverlauf den Punkt x erreicht hat. Diese Überlegung zeigt, daß π^R unter der Voraussetzung des völligen Fehlens jeder Selbstbindungskraft nicht als vernünftige nichtkooperative Lösung des Spieles in Abbildung 1 angesehen werden kann. Die Möglichkeit solcher unerwünschter Fälle zwingt uns dazu, den Gleichgewichtsbegriff in geeigneter Weise zu verschärfen.

Hier führt uns ein einfacher Gedanke weiter. Wenn es keine Selbstbindungskraft gibt, dann darf das Verhalten in einem Teilspiel nur von der Struktur des Teilspiels selbst abhängen. Nur die Tatsache, daß bereits vor Beginn des Teilspiels ausgesprochene Drohungen oder Versprechungen eingehalten werden müssen, könnte ein Grund dafür sein, daß das rationale Verhalten im Teilspiel nicht ausschließlich von der Struktur des Teilspiels bestimmt ist. Diese Möglichkeit wird aber gerade durch unsere Annahme des Fehlens der Selbstbindungskraft ausgeschlossen.

Wir nennen diejenige Strategie π'_i, die für ein Teilspiel Γ' eines Spieles Γ dieselben Entscheidungen vorschreibt wie eine bestimmte Strategie π_i für Γ die »von π_i auf Γ' induzierte« Strategie. Mit Hilfe dieser Sprechweise, die wir auch für Strategienkombinationen verwenden, können wir die folgende Definition eines verschärften Gleichgewichtsbegriffes formulieren:

Definition: Ein Gleichgewichtspunkt π^* eines Spieles Γ heißt perfekt, wenn π^* auf allen Teilspielen Γ' von Γ Strategienkombinationen π'^* induziert, die Gleichgewichtspunkte der betreffenden Teilspiele sind.

Nur der Gleichgewichtspunkt π^L des Spieles in Abbildung 1 ist perfekt. Das allein mögliche Gleichgewichtsverhalten für das Teilspiel am Punkte x entspricht der Strategie π_2^L.

4. Der Lösungsansatz

Mit dem Begriff des perfekten Gleichgewichtspunktes glauben wir ein adäquates nichtkooperatives und »selbstbindungsfreies« Lösungskonzept gefunden zu haben. Dieses Konzept kann aber nicht direkt auf das durch die Gleichungen (1) bis (10) beschriebene Spiel angewandt werden, weil wir auch die Bedingung (11) berücksichtigen müssen. Durch die Bedingung (11) wird das Spiel zu einem »Pseudospiel«[1], in dem nicht alle Strategienkombinationen erlaubt sind. Es sei Ω die Menge aller Strategienkombinationen π, die einen Spielverlauf erzeugen, der die Bedingung (11) nicht verletzt. Das eigentliche Spiel – das wir Γ nennen wollen – bildet zusammen mit Ω das Pseudospiel Γ_Ω, das wir zu untersuchen haben. Im Unterschied zu einem Spiel können die Spieler eines Pseudospieles ihre Strategien nicht völlig unabhängig voneinander wählen, weil der zulässige Strategienbereich eines Spielers i von den Strategien der anderen Spieler abhängt. Es sei $\pi^* = (\pi_1^*, \ldots, \pi_n^*)$ eine bestimmte Strategienkombination aus Ω; wir bezeichnen die Menge aller Strategien π_i des Spielers i, für die auch π^*/π_i in Ω liegt, mit $\Pi_i(\pi^*)$. Die Menge $\Pi_i(\pi^*)$ ist nichts anderes als der zulässige Strategienbereich des Spielers i, der sich ergibt, wenn sich die anderen Spieler gemäß π^* verhalten. Der Bereich $\Pi_i(\pi^*)$ hängt offenbar nicht von π_i^*, sondern nur von den anderen Komponenten von π^* ab. Es ist nun zu sehen, wie der Begriff des Gleichgewichtspunktes für Pseudospiele definiert werden kann: π^* ist ein Gleichgewichtspunkt von Γ_Ω, wenn π^* in Ω liegt und Folgendes gilt:

$$(13) \qquad H_i(\pi^*) = \max_{\pi_i \varepsilon \Pi_i(\pi^*)} H_i(\pi^*/\pi_i) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Nicht nur der Begriff des Gleichgewichtspunktes, sondern auch der Begriff des perfekten Gleichgewichtspunktes kann ohne weiteres auf Pseudospiele übertragen werden: Ein Gleichgewichtspunkt eines Pseudospieles heißt perfekt, wenn er auf allen Teilpseudospielen dieses Pseudospiels Gleichgewichtspunkte induziert.

Im folgenden werden wir den etwas schwerfälligen Ausdruck »Teilpseudospiel« möglichst vermeiden und dort, wo daraus keine Mißverständnisse entstehen können, einfach von Teilspielen sprechen. Im Rahmen unseres Modells ist ein derartiges Teilspiel einfach eine Situation, die zu Beginn einer Periode t bestehen kann ($t_0 \leq t \leq T$); ein Teilspiel hat im wesentlichen dieselbe Struktur wie das Pseudospiel selbst: die Anfangsvorsprünge des Teilspiels sind durch $V_1^t, \ldots, V_n^t$

[1] Der Begriff des Pseudospiels stammt von *Arrow* und *Debreu*, die in diesem Zusammenhang von einer »abstrakten Ökonomie« sprechen. Wir benutzen statt dessen die Bezeichnung »Pseudospiel«, weil es sich um eine mathematische Struktur handelt, die nicht nur in der Theorie des gesamtwirtschaftlichen Gleichgewichts Anwendung finden kann. Vergleiche hierzu: *K. J. Arrow* und *G. Debreu*, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, »Econometrica«, 22 (1954), S. 265–290, insbesondere S. 272–274.

gegeben und $N^t, \ldots, N^T$ ist die Nachfrageentwicklung des Teilspiels. Die Auszahlungsfunktion des Teilspiels ist zwar nicht G^t, sondern

$$G^{t_o} = M + q^{t-t_o} G^t, \tag{14}$$

wobei M nichts anderes ist als die auf den Anfangszeitpunkt t_o abgezinste Summe der vor Beginn des Teilspieles erzielten Gewinne. Diese Summe muß für die Analyse des Teilspieles als Konstante betrachtet werden. Die Auszahlung des Teilspieles ist also eine positive lineare Transformation von G^t. Wenn man die Auszahlung des Teilspieles durch G^t ersetzt, so entsteht ein strategisch äquivalentes Pseudospiel, das wir das zu dem betreffenden Teilspiel gehörige »normierte Teilspiel« nennen wollen. Für unsere Analyse kommt es nicht darauf an, ob wir ein Teilspiel oder statt dessen das zugehörige normierte Teilspiel untersuchen, da beide dieselben Gleichgewichtspunkte haben.

Es ist wichtig, sich zu vergegenwärtigen, worin eine Strategie im Rahmen unseres Modells besteht. Eine Strategie ist ein vollständiger Verhaltensplan. Jedem denkbaren Spielverlauf bis zu dem Beginn einer Periode t muß ein Preis für die Periode t zugeordnet werden. Da der Spielverlauf bis zur Periode t durch die »Preismatrix«.

$$P^{t-1} = \begin{pmatrix} p_1^{t_o} \ldots p_1^{t-1} \\ \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \\ p_n^{t_o} \qquad p_n^{t-1} \end{pmatrix} \tag{15}$$

eindeutig bestimmt ist, kann eine Strategie des Spielers i als ein System aufgefaßt werden, das aus einem Anfangspreis $p_i^{t_o}$ und $T—t_o$ funktionalen Beziehungen

$$p_i^t = f_t\,(P^{t-1}) \qquad\qquad t = t_o + 1, \ldots, T \tag{16}$$

besteht. Diese Überlegung zeigt, wie groß die Vielfalt der möglichen Strategien ist.

Bei der analytischen Behandlung unseres Problems werden wir den folgenden Weg einschlagen: Wir betrachten zunächst das Spiel, das sich ergibt, wenn wir die Bedingungen (10) und (11) außer acht lassen. Dieses Spiel ist nur eine Hilfskonstruktion zu Beweiszwecken und hat für uns kein direktes inhaltliches Interesse. Wir nennen es das »erweiterte Spiel«. Es wird sich zeigen, daß das erweiterte Spiel unter bestimmten Bedingungen genau einen perfekten Gleichgewichtspunkt hat. Die analytischen Eigenschaften dieses Gleichgewichtspunktes werden mit Hilfe eines verhältnismäßig einfachen rekursiven Formelapparates untersucht werden können. Auf diesem Wege wird es uns möglich sein, hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß der perfekte Gleichgewichtspunkt des erweiterten Spieles zugleich der eindeutig bestimmte perfekte Gleichgewichtspunkt des Pseudospiels ist.

Wir werden zunächst immer voraussetzen, daß das Spiel nur eine endliche Zahl von Perioden umfaßt. Der Fall $T = \infty$ wird erst in Teil II behandelt werden.

5. Der perfekte Gleichgewichtspunkt des erweiterten Spieles

Der Übersichtlichkeit halber folgt eine Zusammenstellung der in diesem Abschnitt benötigten Gleichungen aus früheren Abschnitten.

$$x_i^t = N_i^t - p_i^t \tag{1}$$

$$N^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} N_i^t \tag{2}$$

$$V_i^t = N_i^t - N^t \tag{3}$$

$$p^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i^t \tag{4}$$

$$V_i^{t+1} = V_i^t + w\,(p^t - p_i^t) \tag{5}$$

$$g_i^t = (p_i^t - k_i)\, x_i^t \tag{7}$$

$$G_i^t = \sum_{s=t}^{T} q^{s-t}\, g_i^s \tag{8}$$

$$0 < q \leq 1 \tag{9}$$

Wir werden nun einen Satz formulieren, den wir mit Hilfe der Technik des dynamischen Programmierens beweisen werden[1]. In diesem Satz taucht die Voraussetzung auf, daß w, die Beweglichkeit der Nachfrage, nicht größer als 2 sein darf. Diese Bedingung kann vermutlich noch abgeschwächt werden. Aus dem Beweis wird jedoch zu erkennen sein, daß ein perfekter Gleichgewichtspunkt jedenfalls dann nicht existiert, wenn w größer als $2 \dfrac{n}{n-1} / \sqrt{q}$ ist. Wenn n hinreichend groß ist und q nahe bei 1 liegt, ist diese Schranke nur wenig von 2 verschieden. Das Fehlen eines lokalen perfekten Gleichgewichtspunktes kann ökonomisch damit erklärt werden, daß ein zu großer Anreiz zur Preisunterbietung besteht, wenn die Nachfragebeweglichkeit zu groß ist.

Satz 1: Das erweiterte Spiel hat für $T < \infty$ unter der Voraussetzung

$$0 < w \leq 2 \tag{17}$$

einen eindeutig bestimmten perfekten Gleichgewichtspunkt. Die von den Gleichgewichtsstrategien vorgeschriebenen Preise $\hat{p}_i^t$ sind von der Form

$$\hat{p}_i^t = a^t V_i^t + b^t + c^t\,(k_i - k) \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ t = t_0, \ldots, T \end{array} \tag{18}$$

[1] Vergleiche hierzu: *R. Bellmann,* Dynamic Programming, Princeton, N.J. 1957.

hierbei ist

(19) $$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Für die Werte $\bar{G}_i^t$, die G_i^t annimmt, falls die Gleichgewichtsstrategien gespielt werden, gilt

(20) $$\bar{G}_i^t = A^t (V_i^t)^2 + B^t V_i^t + C^t (k_i - k) V_i^t + D_i^t$$
$$\text{für } i = 1, \ldots, n \text{ und } t = t_0, \ldots, T.$$

Die Koeffizienten a^t, b^t, c^t, A^t, B^t, C^t, D_i^t sind von den Vorsprüngen und mit Ausnahme von D_i^t auch von den Grenzkosten k_i unabhängig.

Außerdem gilt

(21) $$0 < a^t \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für } t = t_0, \ldots, T$$

und

(22) $$0 < Y^t < 1 \qquad \text{für } t = t_0, \ldots, T;$$

hierbei ist

(23) $$Y^t = 2qw \frac{n-1}{n} \cdot A^t.$$

Die Gleichungen (18) und (20) bringen eine bemerkenswerte Eigenschaft des Gleichgewichts zum Ausdruck: Der Gleichgewichtspreis und der Gleichgewichtsgewinn hängen nur vom Vorsprung des betreffenden Spielers selbst ab, nicht aber von den Vorsprüngen der anderen Spieler. Der Gleichgewichtspreis ist eine lineare Funktion des Vorsprungs und der Gleichgewichtsgewinn ist eine quadratische Funktion des Vorsprungs.

Beweis des Satzes 1: Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion. Wegen (1), (3) und (7) gilt

(24) $$g_i^t = (p_i^t - k_i)(N^t + V_i^t - p_i^t).$$

Also ist

(25) $$\frac{dg_i^t}{dp_i^t} = -2 p_i^t + k_i + N^t + V_i^t.$$

Die Auszahlung der in der Periode T beginnenden normierten Teilspiele ist durch g_i^T gegeben. Aus (25) erkennt man, daß diese Spiele eindeutig bestimmte Gleichgewichtspunkte

(26) $$\bar{p}_i^t = \frac{1}{2} V_i^T + \frac{N+k}{2} - \frac{1}{2}(k - k_i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

haben. (26) zeigt, daß $\hat{p}_i^T$ die Darstellung (18) zuläßt. Um zu erkennen, daß auch $\hat{G}_i^T$ auf die behauptete Form gebracht werden kann, braucht man nur (26) in (24) einzusetzen. Hierbei ergibt sich $A^T = \frac{1}{4}$. Wie man mit Hilfe von (9) und (17) erkennt, sind infolgedessen auch die Ungleichungen (21) und (22) für $t = T$ erfüllt.

Wir werden nun zeigen, daß auch die Teilspiele zu Beginn der Periode t einen eindeutig bestimmten perfekten Gleichgewichtspunkt besitzen, für den (18), (20), (21) und (22) gilt, falls das für die Teilspiele zu Beginn der Periode $t + 1$ der Fall ist.

Wir können jedem Teilspiel zu Beginn der Periode t ein einperiodisches »Ersatzspiel« mit der Auszahlung

$$\hat{G}_i^t = g_i^t + q\hat{G}_i^{t+1} \tag{27}$$

zuordnen. In diesem Ersatzspiel haben die Spieler nur ihre Preise p_i^t für die Periode t zu wählen und zwar ebenso wie im eigentlichen Spiel gleichzeitig und unabhängig voneinander. Es ist leicht zu sehen, daß aufgrund unserer Induktionsannahme über die Teilspiele zu Beginn der Periode $t + 1$ Folgendes gilt: Ein Teilspiel zu Beginn der Periode t hat genau dann einen eindeutig bestimmten perfekten Gleichgewichtspunkt, wenn das zugehörige Ersatzspiel einen eindeutig bestimmten Gleichgewichtspunkt hat; beide Gleichgewichtspunkte stimmen hinsichtlich der Gleichgewichtspreise $\hat{p}_i^t$ für die Periode t überein. Es ist aber wichtig zu beachten, daß bei dem Übergang zum Ersatzspiel von der Perfektheit Gebrauch gemacht wird. Wäre der Gleichgewichtspunkt nicht perfekt, so müßten wir damit rechnen, daß in denjenigen Teilspielen, die vom Gleichgewichtsspielverlauf nicht berührt werden, Gewinne erzielt werden, die keine Gleichgewichtsgewinne für die betreffenden Teilspiele sind. $\hat{G}_i^t$ hängt über die V_i^{t+1} von allen p_i^t ab. Es ist

$$\frac{\partial \hat{G}_i^t}{\partial p_i^t} = -2\,p_i^t + k_i + N^t + V_i^t + q\,\frac{d\hat{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}}\,\frac{\partial V_i^{t+1}}{\partial p_i^t}\,. \tag{28}$$

Hierbei haben wir benutzt, daß $\hat{G}_i^{t+1}$ wegen (20) nur vermittels V_i^{t+1} von p_i^t abhängt. Unter $d\hat{G}_i^{t+1}/dV_i^{t+1}$ ist in (28) der Wert zu verstehen, den diese Funktion an der Stelle

$$V_i^{t+1} = V_i^t + w\,(p^t - p_i^t) \tag{29}$$

annimmt. Aus (4) und (29) ergibt sich

$$\frac{\partial V_i^{t+1}}{\partial p_i^t} = -\,\frac{n-1}{n}\,w\,. \tag{30}$$

Mit Hilfe von (20) erhält man aus (28)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{G}_i^t}{\partial p_i^t} = {} & -2\,p_i^t + k_i + N^t + V_i^t - \\ & - qw\,\frac{n-1}{n}\,[2\,A^{t+1}\,(V_i^t + w\,(p^t - p_i^t)) + B^{t+1} + C^{t+1}\,(k_i - k)]. \end{aligned} \tag{31}$$

Indem wir die rechte Seite von (31) gleich Null setzen, erhalten wir ein Gleichungssystem, das ein System von Gleichgewichtspreisen notwendig erfüllen muß. Dieses Gleichungssystem kann leicht gelöst werden. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß wegen (2) und (3)

$$\sum_{i=1}^{n} V_i^t = 0 \tag{32}$$

gilt, ergibt sich aus (31)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \hat{G}_i^t}{\partial p_i^t} = -2\,\bar{p}^t + k + N^t - qw \frac{n-1}{n} B^{t+1} = 0. \tag{33}$$

(33) ist eine Bestimmungsgleichung für den durchschnittlichen Gleichgewichtspreis $\bar{p}^t$. Es ist

$$\bar{p}^t = \frac{k + N^t}{2} - \frac{qw}{2} \frac{n-1}{n} B^{t+1}. \tag{34}$$

$\bar{p}^t$ hängt also nicht von den Vorsprüngen V_i^t ab. Aus (31) ergibt sich mit Hilfe von (23) auch die folgende Bestimmungsgleichung für die Gleichgewichtspreise $\bar{p}_i^t$

$$\begin{aligned} \bar{p}_i^t\,(2 - wY^{t+1}) &= k_i + N^t + V_i^t \\ &- qw \frac{n-1}{n} [2\,A^{t+1}\,(V_i^t + w\bar{p}^t) + B^{t+1} + C^{t+1}\,(k_i - k)]. \end{aligned} \tag{35}$$

Wegen (17) und (22) ist der Faktor bei $\bar{p}_i^t$ positiv, so daß (35) durch diesen Faktor dividiert werden kann. Wegen (17) und (22) ist mit

$$\frac{\partial^2 \hat{G}_i^t}{(\partial p_i^t)^2} = -2 + 2\,qw^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 A^{t+1} \leq -2 + w \frac{n-1}{n} < 0 \tag{36}$$

auch gesichert, daß die Funktion $\hat{G}_i^t$ an der Stelle $p_i^t = \bar{p}_i^t$ ein Maximum annimmt. Da die zweite Ableitung von $\hat{G}_i^t$ nach p_i^t unabhängig von p_i^t stets negativ ist, handelt es sich nicht nur um ein lokales, sondern um ein absolutes Maximum. Die mit Hilfe von (35) berechneten Preise sind also tatsächlich Gleichgewichtspreise. Wenn man berücksichtigt, daß $A^T = \frac{1}{4}$ gilt, ergibt sich aus (36) auch die bereits erwähnte obere Schranke für die Existenz eines perfekten Gleichgewichtspunktes. Wenn man bedenkt, daß $\bar{p}^t$ durch die rechte Seite von (34) ersetzt werden kann, sieht man leicht ein, daß (35) auf die Form (18) gebracht werden kann. Dabei ergibt sich die folgende Rekursionsformel für a^t:

$$a^t = \frac{1 - Y^{t+1}}{2 - wY^{t+1}}. \tag{37}$$

Durch Summation über i erkennt man aus (18) mit Hilfe von (32), daß b^t mit dem durchschnittlichen Gleichgewichtspreis $\bar{p}^t$ übereinstimmen muß. Es ist also

(38) $$b^t = \frac{k + N^t}{2} - \frac{qw}{2} \frac{n-1}{n} B^{t+1}.$$

Aus (35) entnehmen wir

(39) $$c^t = -\frac{1 - qw \dfrac{n-1}{n} C^{t+1}}{2 - wY^{t+1}}.$$

Wir müssen noch zeigen, daß $\tilde{G}_i^t$ die Darstellung (20) zuläßt. Da $\tilde{p}_i^t$ nur von V_i^t abhängt und nicht auch von den Vorsprüngen der anderen Spieler, gilt Entsprechendes auch für den Gleichgewichtsperiodengewinn $\tilde{g}_i^t$ und den Vorsprung V_i^{t+1}, der sich bei einer Realisierung der Gleichgewichtspreise $\tilde{p}_i^t$ ergibt. Wegen

(40) $$\tilde{G}_i^t = \tilde{g}_i^t + \tilde{G}_i^{t+1}$$

ist also auch $\tilde{G}_i^t$ eine Funktion von V_i^t allein. Wir erhalten

(41) $$\frac{d\tilde{G}_i^t}{dV_i^t} = \frac{\partial \tilde{g}_i^t}{\partial V_i^t} + \frac{\partial \tilde{g}_i^t}{\partial \tilde{p}_i^t} \frac{d\tilde{p}_i^t}{dV_i^t} + q \frac{d\tilde{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}} \frac{dV_i^{t+1}}{dV_i^t}.$$

Unter $d\tilde{G}_i^{t+1}/dV_i^{t+1}$ ist in (41) der Wert zu verstehen, den diese Funktion an der Stelle

(42) $$V_i^{t+1} = V_i^t + w\,(\tilde{p}^t - \tilde{p}_i^t)$$

annimmt. Da $\tilde{p}^t$ von V_i^t nicht abhängt, ergibt sich aus (42)

(43) $$\frac{dV_i^{t+1}}{dV_i^t} = 1 - wa^t.$$

Mit Hilfe von (18), (24) und (25) erhalten wir

(44) $$\frac{d\tilde{G}_i^t}{dV_i^t} = \tilde{p}_i^t - k_i + (-2\,\tilde{p}_i^t + k_i + N^t + V_i^t)\,a^t + \\ + q\,\frac{d\tilde{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}}\,(1 - wa^t).$$

Für $p_i^t = \tilde{p}_i^t$ ergibt sich aus (28) und (30)

(45) $$-2\,\tilde{p}_i^t + k_i + N^t + V_i^t = qw\,\frac{n-1}{n}\,\frac{d\tilde{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}}.$$

Aus (44) und (45) folgt

(46) $$\frac{d\tilde{G}_i^t}{dV_i^t} = \tilde{p}_i^t - k_i + q\,\left(1 - \frac{w}{n}\,a^t\right)\,\frac{d\tilde{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}}.$$

Wegen (45) gilt

(47) $$\tilde{p}_i^t - k_i = \frac{N_i^t - k_i}{2} - \frac{qw}{2}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{d\tilde{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}}.$$

Aus (46) und (47) ergibt sich

$$\text{(48)}\qquad \frac{d\tilde{G}_i^t}{dV_i^t} = \frac{N_i^t - k_i}{2} + q\left(1 - \frac{w}{2}\left(\frac{2\,a^t}{n} + \frac{n-1}{n}\right)\right)\frac{d\tilde{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}}.$$

Die Hilfsgröße

$$\text{(49)}\qquad z^t = q\left(1 - \frac{w}{2}\left(\frac{2\,a^t}{n} + \frac{n-1}{n}\right)\right)$$

gestattet es uns, einige unserer Formeln etwas einfacher zu schreiben. (48) kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\text{(50)}\qquad \frac{d\tilde{G}_i^t}{dV_i^t} = \frac{N^t - k}{2} + \frac{V_i^t}{2} - \frac{k_i - k}{2} + \\ + z^t\,(2\,A^{t+1}\,V_i^{t+1} + B^{t+1} + C^{t+1}\,(k_i - k)).$$

Wenn man bedenkt, daß wegen (42) und (18)

$$\text{(51)}\qquad V_i^{t+1} = V_i^t\,(1 - wa^t) - wc^t\,(k_i - k)$$

gilt, so erkennt man aus (50), daß $\tilde{G}_i^t$ tatsächlich eine Darstellung von der Gestalt (20) zuläßt. Wir erhalten die folgenden Rekursionsformeln für A^t, B^t und C^t:

$$\text{(52)}\qquad A^t = \frac{1}{4} + z^t\,A^{t+1}\,(1 - wa^t)$$

$$\text{(53)}\qquad B^t = \frac{N^t - k}{2} + z^t\,B^{t+1}$$

$$\text{(54)}\qquad C^t = -\frac{1}{2} + z^t\,(C^{t+1} - 2\,wA^{t+1}\,c^t).$$

Es muß noch nachgewiesen werden, daß (21) und (22) gilt. Da (22) für $t + 1$ als erfüllt vorausgesetzt wird, erkennt man aus (37) mit Hilfe von (17), daß a^t positiv ist. Der Nenner von (37) wird offenbar verkleinert, wenn w durch 2 ersetzt wird. Es ist also

$$\text{(55)}\qquad 0 < a^t \leq \frac{1 - Y^{t+1}}{2 - 2\,Y^{t+1}} \leq \frac{1}{2}$$

Damit ist gezeigt, daß (21) auch für die Periode t richtig ist. Aus (52) ergibt sich die folgende Rekursionsformel für Y^t:

$$\text{(56)}\qquad Y^t = \frac{1}{2}\,qw\,\frac{n-1}{n} + z^t\,(1 - wa^t)\;Y^{t+1}.$$

Wir betrachten zunächst den Sonderfall $w = 2$. Wir wissen bereits, daß $a^T = \frac{1}{2}$ ist. Wegen (37) ist also

(57) $a^t = \frac{1}{2}$ für $w = 2$ für $t = T, T - 1, \ldots$

Daher gilt wegen (56)

(58) $Y^t = q\frac{n-1}{n}$ für $w = 2$ $t = T, T - 1, \ldots$

Aus (58) erkennt man, daß (22) für $w = 2$ richtig ist. Wir wenden uns nun dem Fall $w < 2$ zu. Wir werden zeigen, daß Y^t mit abnehmendem t monoton zunimmt und für $t \to -\infty$ einem Grenzwert Y zustrebt, für den

(59) $$0 < Y < 1$$

gilt. Da Y^T positiv ist, muß (22) für alle t erfüllt sein, wenn diese Behauptung richtig ist. Das Verhalten der Folge Y^t hängt von dem Verhalten der Kurve ab, die Y^t in Abhängigkeit von Y^{t+1} darstellt. Es ist unsere Absicht zu zeigen, daß sich Y^t tatsächlich in der in Abbildung 2 angedeuteten Weise einem Schnittpunkt der Y^t-Kurve mit der 45⁰-Linie nähert. Hierzu genügt es nachzuweisen, daß die Y^t-Kurve bis zu einem Schnittpunkt Y, der (59) erfüllt, mit positiver Steigung oberhalb der 45⁰-Linie verläuft. Wir können nämlich für die Zwecke dieses Beweises die Folge Y^t mit $Y^{T+1} \doteq 0$ beginnen lassen, weil sich in (37) und (56) für

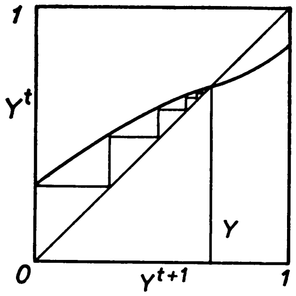

Abb. 2

a^T und Y^T die richtigen Werte ergeben, wenn man $Y^{T+1} = 0$ einsetzt. Aus (37) ergibt sich

(60) $\frac{da^t}{dY^{t+1}} = -\frac{2-w}{(2-wY^{t+1})^2} < 0$ für $0 < w < 2$.

Wegen (60) nehmen z^t und $1 - wa^t$ zu, wenn Y^{t+1} zunimmt. Daraus erkennt man mit Hilfe von (56), daß die Steigung der Y^t-Kurve positiv ist. Da sich für $Y^{t+1} = 0$ ein positiver Wert für Y^t ergibt, verläuft die Y^t-Kurve tatsächlich zunächst oberhalb der 45⁰-Linie. Für $Y^{t+1} = 1$ ergibt sich $a^t = 0$ und

(61) $Y^t = \frac{1}{2}qw\frac{n-1}{n} + q\left(1 - \frac{w}{2}\frac{n-1}{n}\right) = q.$

Die Y^t-Kurve verläuft also für $q < 1$ bei $Y^{t+1} = 1$ unterhalb der 45^0-Linie und muß daher mindestens einen Schnittpunkt besitzen, dessen Ordinate (59) erfüllt. Y entspricht dem untersten dieser Schnittpunkte. Für $q = 1$ hat die Y^t-Kurve wegen (61) bei $Y^{t+1} = 1$ einen Schnittpunkt mit der 45^0-Linie. Daß es außerdem noch mindestens einen Schnittpunkt geben muß, dessen Ordinate (59) erfüllt, kann gezeigt werden indem man nachweist, daß die Steigung der Y^t-Kurve bei $Y^{t+1} = 1$ größer als 1 ist. Hierzu verwenden wir nicht (56), sondern eine andere Rekursionsformel für Y^t, die man erhält, wenn man (44) nach V_i^t differenziert:

$$2\,A^t = 2\,a^t - 2\,(a^t)^2 + 2\,A^{t+1}\,q\,(1 - wa^t)^2. \tag{62}$$

Daraus ergibt sich

$$Y^t = 2\,qw\frac{n-1}{n}\,a^t\,(1 - a^t) + q\,(1 - wa^t)^2\,Y^{t+1}. \tag{63}$$

Wir erhalten den folgenden Ausdruck für die Steigung der Y^t-Kurve:

$$\frac{dY^t}{dY^{t+1}} = \left[2\,qw\frac{n-1}{n}\,(1 - 2\,a^t) - 2\,qwY^{t+1}\,(1 - wa^t)\right]\frac{da^t}{dY^{t+1}} + q\,(1 - wa^t)^2. \tag{64}$$

Für $Y^{t+1} = 1$ ist wegen $a^t = 0$ und wegen (60) der erste Summand auf der rechten Seite von (64) positiv; der zweite Summand hat den Wert q. Für $q = 1$ ist also die Steigung der Y^t-Kurve bei $Y^{t+1} = 1$ größer als 1. Damit haben wir nicht nur den Satz 1 bewiesen, sondern außerdem auch noch einige andere wichtige Ergebnisse erzielt, die wir als Anmerkungen formulieren werden.

Anmerkung 1: Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 strebt die Folge Y^t für $t \to -\infty$ einem Grenzwert Y zu, der (59) erfüllt. Für $w < 2$ wächst Y^t monoton mit abnehmendem t; für $w = 2$ gilt (58).

Anmerkung 2: Die Koeffizienten a^t, b^t, c^t, A^t, B^t, C^t und die Hilfsgröße Y^t können ausgehend von den Werten für die Periode T mit Hilfe der Rekursionsformeln (37), (38), (39), (49), (52), (53), (54) und (56) oder (63) berechnet werden. Wegen (26) gilt

$$a^T = \frac{1}{2}, \qquad b^T = \frac{N^T + k}{2}, \qquad c^T = \frac{1}{2}. \tag{65}$$

Da sich aus (24) und (26)

$$\hat{G}_i^T = \left(\frac{N^T + V_i^T - k_i}{2}\right)^2 \tag{66}$$

ergibt, gilt außerdem

(67) $$A^T = \frac{1}{4} \qquad B^T = \frac{N^T - k}{2} \qquad C^T = -\frac{1}{2}$$

und

(68) $$Y^T = \frac{1}{2} qw \frac{n-1}{n}.$$

Aus (56) erkennt man, daß Y^t und damit wegen (23) und (37) auch a^t und A^t von der Nachfrageentwicklung unabhängig ist. Infolgedessen sind wegen (39), (49) und (54) auch c^t und C^t von der Nachfrageentwicklung unabhängig.

Anmerkung 3: Es ist

(69) $$\frac{d\tilde{G}_i^t}{dV_i^t} = \frac{N_i^t - k_i}{2} + z^t \frac{d\tilde{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}} \qquad \text{für } t = t_0, \ldots, T-1.$$

Hierbei ist unter $d\tilde{G}_i^{t+1}/dV_i^{t+1}$ der Wert zu verstehen, den diese Funktion an der durch (51) beschriebenen Stelle annimmt; z^t ist die in (49) definierte Hilfsgröße.

Eine Rekursionsformel für D_i^t: Zur Berechnung des Gleichgewichtsgewinns benötigen wir auch D_i^t. Wenn man berücksichtigt, daß wegen (18) und (24) der zu dem Gleichgewichtspreisverlauf gehörige Periodengewinn $\tilde{g}_i^t$ durch

(70) $$\tilde{g}_i^t = (a^t V_i^t + b^t + c^t (k_i - k) - k_i) ((1 - a^t) V_i^t + N^t - b^t - c^t (k_i - k))$$

gegeben ist, erkennt man mit Hilfe von (40), daß

(71) $$D_i^t = (b^t + c^t (k_i - k) - k_i) (N^t - b^t - c^t (k_i - k)) + qD_i^{t+1}$$

gilt. Wegen (66) ist

(72) $$D_i^T = \left(\frac{N^T - k_i}{2}\right)^2.$$

Das Rekursionssystem: Das aus den Gleichungen (37), (38), (39), (49), (52), (53), (54), (56), (65), (67), (68), (71) und (72) bestehende Formelsystem vermittelt eine vollständige Beschreibung der Gleichgewichtsstrategien und der Gleichgewichtsgewinne. Wir nennen dieses Formelsystem im folgenden »das Rekursionssystem«.

Vorzeichen von c^t, C^t und z^t: Wir wissen bereits, daß C^T negativ und c^T positiv ist. Wenn C^{t+1} negativ ist, ist c^t wegen (39) positiv. Aus (54) erkennt man, daß C^t negativ ist, wenn C^{t+1} negativ ist und c^t positiv ist. Auf diese Weise folgt durch vollständige Induktion, daß C^t stets negativ und c^t stets positiv ist. Mit Hilfe von (17) und (21) erkennt man aus (49), daß z^t stets positiv und kleiner als 1 ist.

6. Existenz und Eindeutigkeit des perfekten Gleichgewichtspunktes für das Pseudospiel

In diesem Abschnitt sollen hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß der perfekte Gleichgewichtspunkt des erweiterten Spieles zugleich der eindeutig bestimmte perfekte Gleichgewichtspunkt des Pseudospieles ist. Wie wir sehen werden, können unsere hinreichenden Bedingungen als Bedingungen an die Nachfrageentwicklung aufgefaßt werden; wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind, ist es immer möglich, das Pseudospiel durch eine Parallelverschiebung der Nachfrageentwicklung nach oben so abzuändern, daß das abgeänderte Pseudospiel die Bedingungen erfüllt. Wir werden auch eine notwendige Bedingung kennenlernen, die verletzt wird, wenn man die Nachfrageentwicklung hinreichend weit parallel nach unten verschiebt. Dieser Sachverhalt kann ökonomisch vielleicht so interpretiert werden, daß ein wirtschaftsfriedliches Gleichgewichtsverhalten nur dann möglich ist, wenn der Markt groß genug ist.

Bevor wir das Hauptergebnis dieses Abschnittes als Satz formulieren, wollen wir noch einige Bezeichnungen einführen. Wir bezeichnen den größten Wert, den a^t im Verlauf des Spieles annimmt, mit $\bar{a}$ und den kleinsten mit $\underline{a}$; mit $\bar{c}$ und $\underline{c}$ bezeichnen wir ganz entsprechend den maximalen bzw. den minimalen Wert von c^t für $t_0 \leq t \leq T$. Ebenso bezeichnen wir das Maximum der n Zahlen k_i mit $\bar{k}$. Weiterhin sei

$$\bar{d} = \frac{1}{w\underline{a}} \max_{t_0 \leq t < T} \max (O, N^t - N^{t+1}). \tag{73}$$

Da a^t und c^t stets positiv sind, sind auch $\underline{a}$, $\bar{a}$, $\underline{c}$ und $\bar{c}$ positiv.

Satz 2: Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 hat das Pseudospiel einen eindeutig bestimmten perfekten Gleichgewichtspunkt, wenn die Bedingungen

$$N_i^{t_0} > k_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n \tag{74}$$

und

$$N^t - \bar{k} > \frac{\bar{c}}{\underline{a}} (\bar{k} - k) + \bar{d} \qquad \text{für } t = t_0, \ldots, T - 1 \tag{75}$$

erfüllt sind. Der perfekte Gleichgewichtspunkt des Pseudospieles stimmt dann mit dem perfekten Gleichgewichtspunkt des erweiterten Spieles überein.

Beweis: Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion. Unsere Induktionsannahme wird darin bestehen, daß wir davon ausgehen, daß die Teilspiele zu Beginn der Periode $t + 1$ einen eindeutig bestimmten perfekten Gleichgewichtspunkt haben, der mit dem des entsprechenden Teilspiels des erweiterten Spieles übereinstimmt. Es ist leicht zu sehen, daß diese Behauptung für $t + 1 = T$ richtig ist. Wenn die Behauptung für $t + 1$ richtig ist, können wir ebenso wie im Beweis des Satzes 1 anstelle eines Teilspieles zu Beginn der Periode t das entsprechende »Ersatzspiel« mit der Auszahlung

$$\hat{G}_i^t = g_i^t + q\bar{G}_i^{t+1} \tag{27}$$

betrachten. Um zu zeigen, daß unsere Behauptung auch für t richtig ist, müssen wir nachweisen, daß erstens $\bar{p}_i^t$ in dem durch (10) und (11) abgegrenzten Bereich liegt und daß zweitens die Nachfragepotentiale N_i^{t+1}, die sich bei einer Realisierung der Gleichgewichtspreise ergeben, größer als k_i sind ($i = 1, \ldots, n$). Für die zu diesen Nachfragepotentialen gehörigen Vorsprünge V_i^{t+1} gilt wegen Satz 1

$$V_i^{t+1} = V_i^t (1 - wa^t) - wc^t (k_i - k). \tag{51}$$

Da das betrachtete Teilspiel ein Teilspiel des Pseudospieles ist, muß (11) für die Periode t richtig sein. Daher gilt

$$V_i^t > -(N^t - k_i). \tag{76}$$

Wir können die rechte Seite von (51) nach unten abschätzen, indem wir V_i^t durch die rechte Seite von (76) und außerdem a^t, c^t und k_i durch $\underline{a}$, $\bar{c}$ bzw. $\bar{k}$ ersetzen. Wir erhalten

$$V_i^{t+1} > -(N^t - k_i)(1 - w\underline{a}) - w\bar{c}(\bar{k} - k). \tag{77}$$

Aus (77) ergibt sich

$$N_i^{t+1} > N^{t+1} - N^t + k_i + (N^t - k_i) w\underline{a} - w\bar{c}(\bar{k} - k). \tag{78}$$

Wir verkleinern die rechte Seite von (78), wenn wir $N^t - k_i$ durch die rechte Seite von (75) ersetzen. Auf diese Weise erhalten wir:

$$N_i^{t+1} > k_i + N^{t+1} - N^t + w\underline{a}\bar{d}. \tag{79}$$

Aus (73) und (79) erkennt man sofort, daß N_i^{t+1} größer als k_i ist.

Wir müssen noch zeigen, daß $\bar{p}_i^t$ kleiner als N_i^t ist. Hierzu greifen wir auf die Anmerkungen 2 und 3 zu Satz 1 zurück. Aus (66) erkennt man, daß

$$\frac{d\bar{G}_i}{dV_i} = \frac{N_i^T - k_i}{2} \tag{80}$$

gilt. Wegen (17) und (21) ergibt sich aus (49), daß z^t stets positiv ist. Wenn man außerdem berücksichtigt, daß für $t = t + 1, \ldots, T$ die Bedingung (11) erfüllt ist, kann man mit Hilfe der vollständigen Induktion aus (69) folgern, daß

$$\frac{d\bar{G}_i^{t+1}}{dV_i^{t+1}} < 0 \tag{81}$$

richtig ist. Da diese Überlegung für alle Teilspiele zu Beginn der Periode $t + 1$ durchgeführt werden kann, kommt es in (81) nicht darauf an, an welcher Stelle wir den Differentialquotienten von $\bar{G}_i^{t+1}$ betrachten, wenn nur der Vorsprung V_i^{t+1} mit den Bedingungen (10) und (11) verträglich ist. Mit Hilfe von (81) können wir

$$(82) \qquad \bar{p}_i^t \leq \frac{N_i^t + k_i}{2}$$

beweisen. Auf der rechten Seite von (82) steht nämlich nichts anderes als der kurzfristige Monopolpreis für die Periode t, für den g_i^t maximal ist. Wäre (82) nicht erfüllt, so könnte wegen (81) sowohl g_i^t als auch $\bar{G}_i^{t+1}$ durch eine Preissenkung erhöht werden. Das aber widerspräche der Gleichgewichtseigenschaft von $\bar{p}_i^t$. Da (74) richtig ist und da die Anfangsvorsprünge aller echten Teilspiele des Pseudospieles mit (11) verträglich sein müssen, ist in (82) immer N_i^t größer als k_i. Daraus folgt, daß $\bar{p}_i^t$ kleiner als N_i^t ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Eine notwendige Bedingung: Wenn wir $\underline{a}$ und $\bar{c}$ in (75) durch $\bar{a}$ und $\underline{c}$ ersetzen und außerdem anstelle von $\bar{d}$ die Konstante

$$(83) \qquad \underline{d} = \frac{1}{w\bar{a}} \min_{t_0 \leq t \leq T} (O, N^t - N^{t+1})$$

verwenden, so erhalten wir eine notwendige Bedingung dafür, daß der perfekte Gleichgewichtspunkt des erweiterten Spieles zugleich ein perfekter Gleichgewichtspunkt des Pseudospieles ist. Wenn nämlich die Bedingung

$$(84) \qquad N^t - \bar{k} \geq \frac{\underline{c}}{\bar{a}} (\bar{k} - k) + \underline{d} \qquad t = t_0, \ldots, T - 1$$

für nur eine Periode t nicht erfüllt ist, so gibt es ein Teilspiel zu Beginn der Periode t, in dem für einen Spieler j mit $k_j = \bar{k}$ Folgendes gilt:

$$(85) \qquad N_j^t - k_j < \frac{\underline{c}}{\bar{a}} (\bar{k} - k) + \underline{d} + V_j^t.$$

$$(86) \qquad V_j^t = -(N^t - \bar{k} - \varepsilon).$$

Hierbei ist $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Aus (86) folgt mit Hilfe von (51)

$$(87) \qquad V_j^{t+1} < -(N^t - \bar{k} - \varepsilon)(1 - w\bar{a}) - w\underline{c}(\bar{k} - k).$$

Aus (87) ergibt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, daß (84) für t nicht erfüllt ist

$$(88) \qquad N_j^{t+1} < k_j + N^{t+1} - N^t + w\bar{a}\underline{d} + \varepsilon(1 - w\bar{a}\underline{d}).$$

Wegen (83) ist also

$$(89) \qquad N_j^{t+1} < k_j + \varepsilon(1 - w\bar{a}\underline{d}).$$

Die Ungleichung (89) kann nicht für alle ε erfüllt sein, ohne daß (11) für $t + 1$ verletzt wird. Das bedeutet, daß für das hier betrachtete Teilspiel der perfekte Gleichgewichtspunkt des entsprechenden erweiterten

Spieles nicht in der Menge Ω der zugelassenen Strategienkombinationen liegt. Sollte das betrachtete Teilspiel des Pseudospieles dennoch einen perfekten Gleichgewichtspunkt besitzen, so stimmt er jedenfalls nicht mit dem des erweiterten Spieles überein. Der nun folgende Satz 3 faßt das Ergebnis dieser Überlegungen noch einmal zusammen.

Satz 3: Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 ist der perfekte Gleichgewichtspunkt des erweiterten Spieles jedenfalls dann kein perfekter Gleichgewichtspunkt des Pseudospieles, wenn die Bedingung (84) nicht erfüllt ist.

Aus der Definition von $\bar{d}$ und $\underline{d}$ erkennt man sofort, daß die rechten Seiten von (75) und von (84) unverändert bleiben, wenn man die Nachfrageentwicklung parallel nach oben oder nach unten verschiebt. Daraus ergibt sich das bereits zu Beginn des Abschnitts über derartige Parallelverschiebungen Gesagte.

7. Zusammenfassung

Das hier untersuchte Modell beschreibt einen Markt mit Nachfrageträgheit. Die Nachfrageträgheit besteht darin, daß die Absatzmengen nicht nur von den Preisen der laufenden Periode, sondern auch von den Marktpositionen der Vorperiode abhängen. Das Modell stellt die Nachfrage- und Kostenbeziehungen durch lineare Funktionen dar. Es hat die Form eines dynamischen Spieles.

Allzu aggressive Strategien wurden von vornherein von der Betrachtung ausgeschlossen. Dadurch ergab sich eine Beschränkung des Lösungskonzepts auf ein in das eigentliche Spiel eingebettetes Pseudospiel. Anhand eines einfachen Beispiels konnte gezeigt werden, daß unter der Voraussetzung des Fehlens jeglicher Selbstbindungskraft nicht jeder Gleichgewichtspunkt eines Spieles als voll rationale nichtkooperative Lösung angesehen werden kann. Der hier entwickelte Begriff des perfekten Gleichgewichtspunktes schließt die unerwünschten Fälle aus. Ein perfekter Gleichgewichtspunkt ist ein Gleichgewichtspunkt, der auf allen Teilspielen Gleichgewichtspunkte induziert.

Es konnte gezeigt werden, daß es für den Fall endlich vieler Perioden unter bestimmten Bedingungen einen eindeutig bestimmten perfekten Gleichgewichtspunkt für das Pseudospiel gibt. (Der Fall unendlich vieler Perioden wird erst in Teil II behandelt werden.)

Den hinreichenden Bedingungen für die Existenz des perfekten Gleichgewichtspunktes, die vermutlich noch verschärft werden können, stehen notwendige Bedingungen dafür gegenüber, daß der perfekte Gleichgewichtspunkt, falls er überhaupt existiert, die hier beschriebene Form hat. Alle diese Bedingungen können als Bedingungen an die Nachfragebeweglichkeit und an die Nachfrageentwicklung aufgefaßt werden; sie bestehen darin, daß die Nachfragebeweglichkeit nicht zu groß werden darf und daß die Nachfrageentwicklung über einem bestimmten Mindestniveau verlaufen muß.

Die Existenz- und Eindeutigkeitssätze rechtfertigen es, im Zusammenhang mit dem perfekten Gleichgewichtspunkt von optimalen Strategien zu sprechen. Die optimalen Strategien sind nicht einfach Preise oder Folgen von Preisen, sondern sie sind Systeme von funktionalen Beziehungen, die Marktsituationen optimale Preise zuordnen. Der optimale Preis eines Anbieters ist um so höher, je höher sein Vorsprung ist – dieser Vorsprung ist eine Größe, in der seine Marktposition zum Ausdruck kommt – und um so niedriger, je niedriger seine Grenzkosten im Vergleich zu denen der anderen sind. Die Art der Abhängigkeit des optimalen Preises von der Nachfrageentwicklung wird erst in Teil II deutlich werden.

Das arithmetische Mittel der optimalen Preise aller Anbieter hängt weder von der Marktaufteilung noch von den Unterschieden zwischen den Grenzkosten der verschiedenen Anbieter ab. Dieser optimale Durchschnittspreis hängt nur von der Nachfrageentwicklung und dem Durchschnitt der Grenzkosten aller Anbieter ab.

Ein System von Rekursionsformeln macht es möglich, für jeden numerischen Spezialfall das System der optimalen Strategien numerisch zu ermitteln. Das ist insbesondere im Hinblick auf die Verwendung des Modells als Grundlage für Unternehmensspiele interessant.