Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine

Author(s): M. Allais

Source: *Econometrica*, Oct., 1953, Vol. 21, No. 4 (Oct., 1953), pp. 503-546

Published by: The Econometric Society

Stable URL: https://www.jstor.org/stable/1907921

ECONOMETRICA

VOLUME 21 OCTOBER, 1953 NUMBER 4

LE COMPORTEMENT DE L'HOMME RATIONNEL DEVANT LE RISQUE: CRITIQUE DES POSTULATS ET AXIOMES DE L'ECOLE AMERICAINE[1]

PAR M. ALLAIS[2]

ENGLISH SUMMARY

The most important points of this article can be summarized as follows:

(1) Contrary to the apparent belief of many authors, the concept of cardinal utility, $\bar{s}(x)$, can be defined in an operational manner either by considering equivalent differences of levels of satisfaction or by use of the Weber-Fechner *minimum sensible* or psychological threshold.

Thus one can associate a psychological value $\bar{s}(x)$ with each monetary value x.

[1] Une première version de cet article a été donnée dans une étude plus générale intitulée "Notes théoriques sur l'incertitude de l'avenir et le risque" qui a été présentée au Congrès Européen d'Econométrie en Septembre 1951. Une deuxième version en a été présentée sous forme d'une communication au Colloque International sur le Risque qui s'est tenu à Paris en Mai 1952. Le lecteur pourra trouver dans le mémoire que nous avons rédigé à cette occasion toutes les justifications mathématiques des résultats indiqués cidessous avec de nombreux exemples que, faute de place, nous n'avons pu faire figurer dans cet article. Nous ne saurions trop conseiller au lecteur qui s'intéresserait aux indications qui suivent de se reporter à ce mémoire.

EDITOR'S NOTE: The problem discussed in Professor Allais' paper is of an extremely subtle sort and it seems to be difficult to reach a general agreement on the main points at issue. I had a vivid impression of these difficulties at the Paris colloquium in May, 1952. One evening when a small number of the prominent contributors to this field of study found themselves gathered around a table under the most pleasant exterior circumstances, it even proved to be quite a bit of a task to clear up in a satisfactory way misunderstandings in the course of the conversation. The version of Professor Allais' paper, which is now published in ECONOMETRICA, has emerged after many informal exchanges of views, including work done by editorial referees. Hardly anything more is now to be gained by a continuation of such procedures. The paper is therefore now published as it stands on the author's responsibility. The editor is convinced that the paper will be a most valuable means of preventing inbreeding of thoughts in this important field.—R.F.

[2] Nous croyons devoir remercier ici tout particulièrement MM. Capoulade, de Finetti, Mathieu, Lavaill, Lesourne, Massé, Mercier, et Morlat pour leurs observations et suggestions qui nous ont été particulièrement précieuses.

(2) There are four considerations which must necessarily be taken into account, even in a first approximation, by every theory of risk if it is to be realistic and is to bring out what is absolutely essential to every choice involving risk.
   (i) The distinction between monetary and psychological values.
   (ii) The distortion of objective probabilities and the appearance of subjective probabilities.
   (iii) The mathematical expectation of psychological values (the mean of the probability distribution of psychological values).
   (iv) The dispersion (variance) as well as general properties of the form of the probability distribution of psychological values.

   Consideration (iv) seems to us to be in fact the one that is specific to the theory of risk. In many cases, it can be much more important than the other three.

(3) Other considerations enter into choices involving risk, such as the expenses entailed by every gamble, the pleasure derived from the gamble per se, the magnitude of the *minimum sensible*, etc., but these elements can be regarded as secondary and can be neglected in a first approximation.

(4) Everybody recognizes the fact that man in reality does not behave according to the principle of Bernoulli. There does exist a profound difference, however, in points of view as to how a rational man ought to behave.

   According to the American school, a rational man must conform to the principle of Bernoulli. In our view, this is a mistake which in fact is tantamount to neglecting the fourth specific element in the psychology of risk.

(5) If rationality is to be defined as adherence to one of the systems of axioms which leads to a Bernoulli type formulation, then obviously no discussion is possible. Such a definition, therefore, has no interest per se. That is to say that rationality, to be interesting from a scientific point of view, must be defined, in our opinion, in either of two ways. First, it may be defined in the abstract by referring to a general criterion of internal consistency employed in the social sciences, that is, a criterion implying the coherence of desired ends and the use of appropriate means for attaining them. Secondly, rationality can be defined experimentally by observing the actions of people who can be regarded as acting in a rational manner.

(6) The principle of internal consistency implies only: (a) the use of objective probabilities when they exist, and (b) the axiom of absolute preference which states that out of two situations,

one is certainly preferable if, for all possible outcomes, it yields a greater gain. Together these two conditions are less restrictive than the formulation of Bernoulli. Consequently, there are rational types of behavior (in the sense of rationality defined above) which do not obey the Bernoulli formulation.

It cannot be said, therefore, that a rational man must behave according to the Bernoulli principle.

(7) The experimental observation of the behavior of men who are considered rational by public opinion, invalidates Bernoulli's principle.

Four classes of facts are particularly significant in this regard:

(i) The manner in which very prudent people behave in gambling small sums.

(ii) The choice of risks bordering on certainty that contradicts the independence principle of Savage.

(iii) The choice of risks bordering on certainty that contradicts the substitutability principle of Samuelson.

(iv) The behavior of entrepreneurs when great losses are possible.

(8) Whatever their attraction might be, none of the fundamental postulates leading to the Bernoulli principle as formulated by the American school can withstand analysis. All are based on false evidence.

(9) For the rational man, there does not exist in general an indicator $B(x)$ such that the optimum situation could be defined by maximizing the expected value of $B(x_i)$.

(10) In particular cases where the psychology of the rational man is such that this indicator exists, it necessarily follows that $B(x) \equiv \bar{s}(x)$, up to a linear transformation.

(11) The justification of Bernoulli's formulation, even as a first approximation, by the law of large numbers is pure illusion.

(12) In the most general case, the connection between monetary values and psychological values, and the dispersion of psychological values are inseparably mixed and no experience bearing upon the choices involving risk could determine the function $\bar{s}(x)$. Such a function can be determined only through introspective observation of equivalent differences of levels of satisfaction and of sensible psychological thresholds. It is only in the very particular psychological case in which the indicator $B(x)$ would be identical with the psychological value $\bar{s}(x)$ that the observation of risky choices could enable one to determine the psychological value $\bar{s}(x)$.

*

* *

1. La présente étude est essentiellement destinée à un exposé critique des postulats et axiomes des théories du risque de l'école américaine.

Pour procéder à cet exposé critique, le mieux nous paraît de diviser notre exposé en deux parties; dans la première nous essaierons de faire comprendre quelle est notre propre conception, dans la seconde nous procèderons, compte tenu des indications données dans la première partie, à une analyse critique du principe de Bernoulli et tout particulièrement des différents axiomes de l'école américaine.

D'une manière générale nous essaierons de faire appel à l'intuition et d'éviter dans toute la mesure du possible un formalisme mathématique trop abstrait, qui en réalité n'a que trop souvent pour effet de détourner l'attention des véritables difficultés et de masquer des aspects essentiels. Les mathématiques ne sont qu'un moyen de transformation; seule compte en fait la discussion des prémisses et des résultats.[3]

I. CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES

2. *Eléments psychologiques intervenant dans les choix comportant un risque.* Il convient de distinguer soigneusement parmi les éléments qui interviennent dans les choix comportant un risque, ceux de ces éléments qui jouent un rôle essentiel de ceux qui ne jouent qu'un rôle accessoire.

Cette distinction peut être illustrée par un exemple particulièrement simple. On peut faire la théorie de la détermination du prix de marché par l'intervention des courbes d'offre et de demande en négligeant en première approximation les frais occasionnés aux acheteurs et aux vendeurs par les opérations de vente et d'achat, car l'analyse montre que ces éléments ne jouent en général qu'un rôle accessoire et que ce serait masquer ce qu'il y a de fondamental dans la théorie des prix que de tenir compte dans une première approximation des frais occasionnés par les échanges.

La même distinction vaut pour le risque. Parmi tous les éléments psychologiques qui interviennent, il y en a certains (A), qui jouent un rôle capital, qu'on ne saurait négliger, même dans une première approximation, sans dénaturer gravement les phénomènes, et d'autres (B), au contraire, qu'on peut très bien n'introduire que dans une deuxième approximation à titre de correctifs.[4] Pour abréger l'exposition nous ne tiendrons compte ici que des éléments fondamentaux.

3. *Eléments fondamentaux intervenant dans les choix comportant un risque.* Il y a quatre éléments dont toute théorie du risque doit *nécessairement* tenir compte si elle veut être réaliste et dégager ce qui est absolument essentiel dans tout choix aléatoire.

[3] Voir l'introduction à la deuxième édition de notre *Traité d'Economie Pure* [**1**, pp. 31–40].

[4] Tels sont les frais correspondant à tout jeu, le plaisir de jouer considéré en lui-même, la grandeur du seuil minimum perceptible, etc.

4. Elément I: *La déformation psychologique des valeurs monétaires et la courbure de la satisfaction absolue.* Ce dont un individu tient compte

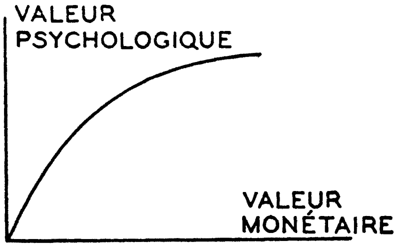


Figure 1

dans un choix aléatoire, ce n'est pas de la valeur monétaire g du gain possible, mais de la valeur psychologique $\gamma = \bar{s}(g)$ attachée à ce gain.[5, 6]

Il en résulte que si la satisfaction marginale $\bar{s}'(g)$ est décroissante et

[5] Dans notre *Traité d'Economie Pure* [**1**] nous avons désigné la valeur psychologique par "satisfaction absolue" par opposition à l'indice de satisfaction purement ordinale. Dans la terminologie anglo-saxonne cette valeur psychologique est désignée par l'expression "cardinal utility." (Voir *Traité d'Economie Pure* [**1**, Introduction n° 12 et pp. 156–177]. Voir également Lange [**13**] et Armstrong [**6**].)

[6] Le concept de valeur psychologique joue à notre avis un rôle essentiel dans la théorie des choix aléatoires. Comme ce concept est aujourd'hui vivement critiqué par de nombreux auteurs, nous ne croyons pas inutile de donner ici quelques indications.

Tout d'abord il est possible de donner à ce concept, qui en tout état de cause répond à notre intuition, une définition opérationnelle en recourant soit aux échelons psychologiques équivalents soit aux seuils minima perceptibles. La presque totalité des personnes questionnées répondent *sans aucune hésitation* par l'affirmative à la question suivante: "Préfèrez-vous un héritage de 100 millions à un héritage de 10.000 frs. plus intensément qu'un héritage de 10.000 frs. à un héritage de 1.000 frs?" Leur absence d'hésitation montre que *sans aucun doute possible* la notion d'échelons psychologiques équivalents correspond pour elles à une réalité psychologique effective.

Par ailleurs et *en fait*, le législateur recourt effectivement à un tel concept lorsqu'il établit des impôts progressifs sur le revenu. On peut en effet considérer que pèsent d'un même poids aux yeux du législateur, du moins en régime démocratique, les échelons minima perceptibles des différents individus. Dans le régime politique le plus général, ces grandeurs nous paraissent encore intervenir, mais seulement avec des coefficients de pondération différents.

Il est assez curieux que depuis Pareto un concept aussi important, et qui se prête admirablement à l'exposé de certaines questions comme la théorie des choix (Allais [**1**, pp. 373 à 375 notamment]) ou la théorie du risque ait été peu à peu banni de la théorie économique.

Soulignons enfin que nous ne recourons, dans ce qui suit, au concept de satisfaction absolue que pour faire comprendre notre propre point de vue, mais comme le lecteur pourra le vérifier, ce recours n'est pas absolument nécessaire pour la réfutation des thèses de l'école américaine que nous présentons dans la deuxième partie de cet exposé.

si cette décroissance est suffisamment forte (courbure accusée), un gain décuple d'un autre pourra au point de vue psychologique n'avoir qu'une valeur double, ou peut-être même inférieure.

5. ELÉMENT II: *La déformation subjective des probabilités objectives.* Certaines personnes qui ont confiance en leur étoile sous-estiment la probabilité des évènements qui leur sont défavorables et surestiment la probabilité des évènements qui leur sont favorables. C'est l'inverse pour les personnes qui s'estiment poursuivies par la malchance. Il y a ainsi une déformation subjective des probabilités objectives.[7]

De toute façon, il est visible qu'*un individu ne peut tenir compte que des probabilités telles qu'il se les imagine, et non des probabilités telles qu'elles sont effectivement.* Il n'y a donc aucune raison pour que les probabilités subjectives soient égales aux probabilités objectives. Seul, par exemple, un statisticien de profession peut se faire une idée correcte de ce que signifie une probabilité égale à une chance sur cent.

Il y a même des cas où la notion de probabilité objective disparaît complètement, sans qu'il en soit de même de celle de probabilité subjective. Ces cas correspondent aux coups isolés. On ne peut plus ici définir de fréquence, et, néanmoins, on peut définir une probabilité subjective par comparaison avec un phénomène où existe une probabilité objective.

Dans ce qui suit nous représenterons respectivement par les symboles p_i et $\bar{p}_i$ les probabilités objectives et subjectives.

6. ELÉMENT III: *La pondération suivant les probabilités des valeurs psychologiques et la considération des espérances mathématiques* (*moment d'ordre* 1) *de la distribution des probabilités des valeurs monétaires.* En première approximation, on peut remplacer la considération de la distribution des probabilités des valeurs psychologiques par la considération de la seule espérance mathématique. Cette approximation est tout à fait analogue à celle qui consiste à représenter un ensemble de chiffres par un seul égal à leur moyenne. Elle en a naturellement tous les avantages et également aussi tous les inconvénients.

Si l'on tient compte à la fois des trois premiers éléments, on est amené à considérer, pour apprécier la valeur d'une perspective aléatoire, non pas l'espérance mathématique des valeurs monétaires, mais la valeur monétaire dont la valeur psychologique est égale à l'espérance mathématique des valeurs psychologiques attachées aux différents gains possibles, et à considérer la relation

$$\bar{s}(V) = \bar{p}_1\bar{s}(g_1) + \bar{p}_2\bar{s}(g_2) + \cdots + \bar{p}_n\bar{s}(g_n), \tag{1}$$

[7] La probabilité objective d'un évènement doit être entendue comme une grandeur dont la fréquence observée de cet évènement est la mesure expérimentale.

On peut distinguer la fréquence estimée *expérimentalement*, ou probabilité objective, et la fréquence estimée *psychologiquement*, ou probabilité subjective.

formulation qu'on peut appeler formulation de Bernoulli en mémoire du premier auteur qui l'ait proposée. Ainsi ce ne sont pas ici les valeurs monétaires, mais les valeurs psychologiques qui se combinent suivant la règle des valeurs probables.

7. ÉLÉMENT IV: *La prise en considération de la forme des distributions de probabilités des valeurs psychologiques et en particulier de leur disper-*

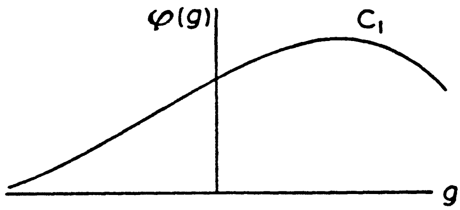


FIGURE 2

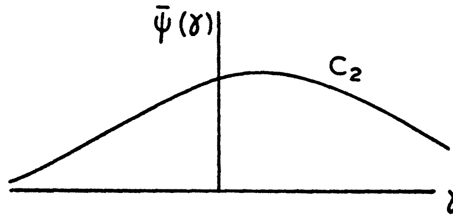


FIGURE 3

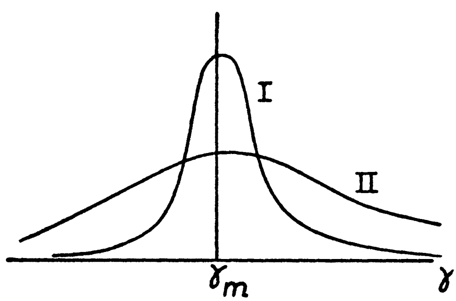


FIGURE 4

sion (*moment d'ordre* 2). Une perspective aléatoire est en fait représentée par la courbe C_1 de distribution des probabilités des différents gains, représentative des valeurs $\varphi(g)$ de la densité des probabilités objectives.

Mais si on tient compte des éléments II et III ce qu'un individu prend en considération, ce n'est pas la courbe C_1, mais la courbe C_2, correspondant à la distribution $\bar{\psi}_{(\gamma)}$ des probabilités subjectives des valeurs psychologiques

$$(2) \qquad \gamma = \bar{s}(g).$$

De deux perspectives aléatoires auxquelles correspondent pour les valeurs psychologiques γ des distributions laplaciennes et une même valeur moyenne, celle qui offre la dispersion la plus faible, soit I, sera préférée si l'individu est prudent. Si l'individu aime le risque, ce sera au contraire la perspective qui offre la dispersion la plus grande, soit II, qui sera préférée.

Ainsi, à la dispersion des valeurs psychologiques correspond un quatrième élément qui correspond au plaisir (ou au déplaisir) attaché au risque considéré en lui-même,[8] c'est-à-dire à la participation à un jeu où existent des écarts.

Cet élément explique que l'on peut aimer jouer à la boule, même si (comme c'est probable pour les petites sommes) il n'y a pas déformation psychologique des valeurs monétaires, et même si l'on estime les probabilités à leurs valeurs objectives, telles qu'elles sont révélées par l'expérience. On peut jouer au poker même avec plus fort que soi si le plaisir de participer à une combinaison où existent des écarts est suffisamment fort pour compenser la perte probable.

Ce plaisir ou déplaisir attaché au risque vient constituer un élément supplémentaire s'ajoutant au pur calcul fondé sur la pondération probabiliste (objective ou subjective suivant les cas) des satisfactions attachées aux diverses éventualités.

Il doit être soigneusement distingué de l'élément I correspondant à la déformation psychologique des valeurs monétaires bien que ces deux éléments soient en général *étroitement associés* et qu'ils puissent donner des effets analogues.

8. *Dispersion des valeurs monétaires et dispersion des valeurs psychologiques*. Il y a lieu de préciser en effet que le fait que l'individu soit sensible à la dispersion des gains monétaires par rapport à leur moyenne tient *à la fois* aux trois éléments I, III, et IV.

Même si un individu était insensible à la dispersion des valeurs psychologiques (Elément IV), il serait sensible à la dispersion des valeurs monétaires en raison de la courbure de la satisfaction absolue. Car à deux variations Δg_1 et Δg_2 de signes opposés, mais égales en valeur absolue, correspondent des variations $\Delta\gamma_1$ et $\Delta\gamma_2$ des valeurs psychologiques dont les valeurs absolues sont inégales.

C'est cette symétrie des effets, au point de vue des valeurs monétaires, des éléments I et IV qui obscurcit toutes les discussions actuelles.[9, 10]

[8] En anglais, "pleasure of gambling". Cet élément doit être soigneusement distingué du plaisir attaché à l'opération matérielle du jeu "pleasure of the game" qui peut être considéré comme un élément accessoire.

[9] Cette symétrie peur être particulièrement bien illustrée par l'exemple concret suivant: Supposons qu'un voyageur se trouve à Marseille sans argent et qu'il désire absolument rentrer à Paris. S'il n'a que 100 frs. en poche, tout jeu qui lui donnera la probabilité la plus grande de gagner le prix de son voyage sera pour

Mais la sensibilité à la dispersion des valeurs monétaires en raison de la courbure de la satisfaction est de nature tout à fait distincte de la sensibilité à la dispersion des valeurs psychologiques. *Elle ne fait pas intervenir ce qui constitue à notre avis l'élément caractéristique fondamental de la psychologie du risque, la sensibilité à la dispersion des valeurs psychologiques.*

9. *Valeur psychologique de la dispersion considérée en elle-même.* En fait, ce à quoi la plupart des individus sont sensibles, c'est à l'existence d'une possibilité de grandes pertes ou de grands gains. Certes ces grandes pertes et ces grands gains sont évalués avec une autre échelle, l'échelle des valeurs psychologiques, mais cette opération une fois faite, cette existence peut avoir en elle-même une très grande importance.

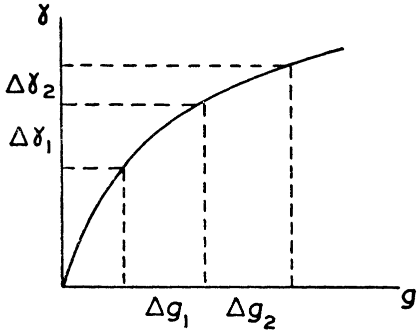


FIGURE 5

Pour celui qui désire à tout prix une forte somme, le jeu peut être le seul moyen rationnel de se le procurer. Et cela n'a rien à faire avec l'un quelconque des trois premiers éléments I à III.

En réalité l'élément IV qui correspond au plus ou moins grand étalement des gains et des pertes évaluées en valeurs psychologiques est, à notre avis, un élément fondamental qui joue un rôle absolument essentiel dans les choix comportant un risque.

Dans de nombreux cas, il peut jouer un rôle beaucoup plus important que la considération de l'espérance mathématique, la déformation sub-

---

lui plus avantageux et la règle de la maximation de l'espérance mathématique des gains monétaires n'aura pour lui aucun intérêt, même en première approximation.

Dans un tel exemple le comportement de notre voyageur peut *tout aussi bien* s'expliquer par la déformation psychologique des valeurs monétaires (Elément I) en attribuant une grande valeur à la valeur psychologique $s(g)$ lorsque g est supérieur au prix du billet, ou par l'avantage procuré par la participation à un jeu qui donne la possibilité d'obtenir des gains supérieurs au prix du billet (Elément IV).

[10] C'est également la raison pour laquelle aucune observation de choix aléatoires ne pourra arriver à déterminer la satisfaction absolue $\bar{s}(g)$. Les éléments I et IV sont en réalité *indissociables*. (Voir les indications données au §9.)

jective des valeurs monétaires ou la déformation subjective des probabilités objectives. Et l'erreur que l'on commet peut être plus grande lorsque l'on néglige la dispersion des valeurs psychologiques que lorsque l'on assimile les valeurs psychologiques aux valeurs monétaires.

Dans le cas le plus général, on doit considérer que par rapport à la règle simpliste de pondération des valeurs monétaires suivant les probabilités objectives, les éléments I, II, et IV correspondant à la déformation psychologique des valeurs monétaires et des probabilités objectives et à la dispersion des valeurs psychologiques, sont des éléments correctifs d'importance analogue. On ne saurait ainsi négliger la dispersion des valeurs psychologiques même dans une première approximation. C'est même à notre avis *l'élément spécifique* de la psychologie du risque.

Il est extrêmement regrettable qu'il puisse souvent être masqué par le jeu de l'élément I correspondant à la déformation psychologique des valeurs monétaires. En réalité cet élément IV intervient dans tous les cas et *il est absolument impossible de réaliser des expériences où l'on pourrait présumer son absence.* La conséquence en est, comme nous l'avons déjà indiqué, l'impossibilité de déterminer par l'observation des choix aléatoires la fonction $\bar{s}(g)$ de satisfaction absolue.

10. *La Psychologie pure du risque.* Nous dirons que la psychologie du risque est pure lorsqu'elle ne fait intervenir que les quatre éléments fondamentaux (A) et aucun des éléments secondaires (B).

C'est en fait sur cette psychologie pure que portent toutes les discussions actuelles de sorte que l'on peut sans inconvénient, au moins dans une première approximation, négliger tous les éléments de la psychologie du risque autres que les éléments fondamentaux.

11. *Développement historique de la conception théorique de la psychologie pure du risque.* La conception théorique de la psychologie pure du risque a successivement franchi quatre étapes:[11]

a) Dans une *première étape* on a pensé que la valeur V d'une perspective aléatoire était égale à l'espérance mathématique qui lui est attachée:

$$V = p_1 g_1 + p_2 g_2 + \cdots + p_n g_n , \tag{3}$$

c'est-à-dire à la valeur moyenne des gains pondérée suivant les probabilités objectives.

b) Dans une *deuxième étape* on a fait intervenir les valeurs psychologiques et on les a substituées aux valeurs monétaires dans la formule précédente. On a ainsi proposé la formulation

$$\bar{s}(V) = p_1 \bar{s}(g_1) + p_2 \bar{s}(g_2) + \cdots + p_n \bar{s}(g_n), \tag{4}$$

où les p_i sont les probabilités objectives.

[11] En réalité il semble bien que certains auteurs n'aient encore franchi que les trois premières. Certains même se refusent à franchir la troisième.

Ainsi, dans cette formulation, ce ne sont plus les revenus qui se combinent suivant la règle des valeurs probables, mais les satisfactions attachées à ces revenus.

Cette hypothèse est celle à laquelle a été naturellement conduit Bernoulli pour expliquer le paradoxe de St-Pétersbourg et qu'a reprise ultérieurement Laplace dans sa théorie des espérances morales. C'est également à une formule de ce type qu'ont été conduits dans un passé tout récent Neumann et Morgenstern [**21**].[12]

c) Dans une *troisième étape* on est arrivé à l'idée que ce dont un individu tient compte, ce n'est pas des probabilités objectives, mais des représentations psychologiques qu'il s'en fait, c'est-à-dire des probabilités subjectives. On est ainsi arrivé à la formulation

$$\bar{s}(V) = \bar{p}_1\bar{s}(g_1) + \bar{p}_2\bar{s}(g_2) + \cdots + \bar{p}_n\bar{s}(g_n), \tag{5}$$

où les $\bar{p}$ sont les probabilités subjectives. C'est encore la formulation de Bernoulli, mais ici on tient compte de la substitution des probabilités subjectives aux probabilités objectives.

d) Dans une *quatrième étape* enfin, on est arrivé à la conception qu'il fallait tenir compte non seulement de la moyenne pondérée suivant leurs probabilités des valeurs psychologiques $\gamma = \bar{s}(g)$, mais également de l'ensemble de la distribution des probabilités, d'où la formulation

$$\bar{s}(V) = h[\psi(\gamma)], \tag{6}$$

où h est une certaine fonctionnelle de la densité de probabilité $\psi(\gamma)$.

Dans cette quatrième étape de la pensée qui est précisément la nôtre, on considère que la *dispersion* des valeurs psychologiques autour de leur moyenne est certainement un élément aussi important que la déformation psychologique des valeurs monétaires et des probabilités objectives, et on soutient que, *même dans une première approximation*, on doit tenir compte du moment d'ordre deux de la distribution des valeurs psychologiques.

12. *Equivalence d'une suite de choix aléatoires avec un choix aléatoire unique*. Supposons que l'individu ait successivement à effectuer un certain nombre de choix aléatoires. On peut par exemple considérer les *choix successifs* entre les perspectives aléatoires (P_0) et (P_0'), (P_1) et (P_1'), $\cdots$, (P_n) *et* (P_n'), etc.

Il est visible que la suite de ces décisions peut se ramener à un *choix unique* entre différentes perspectives aléatoires. Il suffit à cet effet de combiner entre elles les perspectives (P) et (P') suivant les principes du calcul des probabilités.

[12] C'est, à notre avis tout au moins, également le cas de Marschak [**18**] bien qu'il prétende que l'indicateur $B(g)$ auquel il arrive tienne compte également de la dispersion des valeurs psychologiques.

Ainsi et par exemple, si on considère les quatre perspectives indépendantes,[13]

$$(P_0) \begin{cases} \frac{1}{2} & 100 \text{ fr.} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{cases}, \qquad (P_0') \begin{cases} 1 & 100 \text{ fr.} \\ 0 & 0 \end{cases},$$

$$(P_1) \begin{cases} \frac{1}{2} & 1000 \text{ fr.} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{cases}, \qquad (P_1') \begin{cases} 1 & 300 \text{ fr.} \\ 0 & 0 \end{cases},$$

et les deux choix successifs (P_0) ou (P_0') et (P_1) ou (P_1'), ces deux choix peuvent se ramener à un choix unique entre les quatre perspectives (P_0, P_1), (P_0, P_1'), (P_0', P_1), et (P_0', P_1'), résultant de la combinaison des perspectives élémentaires suivant le principe des probabilités composées. Ainsi la perspective (P_0, P_1) aura la distribution suivante:

$$(P_0, P_1) \begin{cases} 1/4 & 1.100 \text{ fr.} \\ 1/4 & 1.000 \text{ fr.} \\ 1/4 & 100 \text{ fr.} \\ 1/4 & 0 \text{ fr.} \end{cases}$$

Dans ce qui suit, et sauf indication contraire, nous supposerons que cette réduction a toujours été effectuée et que par conséquent il s'agit toujours d'un choix unique.[14]

II. CRITIQUE DU PRINCIPE DE BERNOULLI EN TANT QUE REGLE DE COMPORTEMENT D'UN HOMME RATIONNEL

L'état de la question

13. *Le principe de Bernoulli.* D'après le principe de Bernoulli, à tout gain g de probabilité p on peut faire correspondre un indicateur $B(g)$ tel que la valeur V d'une perspective aléatoire donnant des probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$ de gagner des gains $g_1, g_2, \cdots, g_n$ soit donnée par la relation

$$B(V) = \sum p_i B(g_i).$$

[13] La notation

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & 100 \text{ fr.} \\ \frac{1}{2} & 0 \text{ fr.} \end{cases}$$

signifie une chance sur deux de gagner 100 fr. et une chance sur deux de ne rien gagner.

[14] Comme nous le verrons, cette procédure a l'avantage d'éliminer certaines difficultés provenant de la répétition d'un *même* choix aléatoire.

14. *Les thèses des partisans du principe de Bernoulli.* Autant qu'on puisse en juger, la formulation bernoullienne, telle que l'ont originellement présentée Neumann-Morgenstern, comporte trois caractères: (1) Elle s'applique à toute personne ayant un champ de choix ordonné. (2) Elle arrive à un index $B(g)$ qui est identifié avec la satisfaction absolue.[15] L'observation des choix aléatoires effectivement réalisés doit permettre de déterminer la satisfaction absolue (cardinal utility). Cette thèse suppose naturellement implicitement que la formulation de Bernoulli est capable de représenter convenablement le comportement de l'homme réel et par suite de le prévoir.[16] (3) Elle fait intervenir comme coefficients de pondération des probabilités objectives.

La deuxième formulation qui a été présentée, celle de M. Marschak, présente trois caractères: (1) Elle ne correspond pas au comportement de l'homme réel, mais au comportement que devrait avoir un homme "rationnel".[17] (2) Elle aboutit à un index $B(g)$ qui, d'après les déclarations des tenants de cette formulation (Marschak, Samuelson, Friedman), est distinct de la satisfaction absolue $\bar{s}(g)$.[18] (3) Elle fait intervenir comme la précédente des probabilités objectives.

La troisième formulation de Savage présente également trois caractères: (1) Comme la précédente elle ne vaut que pour un comportement "rationnel". (2) Elle aboutit à un index $B(g)$ qui, comme la précédente serait distincte de la satisfaction absolue $\bar{s}(g)$. (3) Elle fait intervenir des probabilités subjectives.

Ces trois positions sont donc distinctes.

On voit ainsi que deux thèses ont été soutenues par l'école américaine: (1) Le comportement des hommes réels peut être représenté par la formulation de Bernoulli et cette formulation conjuguée avec l'observation des choix aléatoires donne un moyen de déterminer la satisfaction absolue (ou cardinal utility). (2) Seul le comportement des hommes rationnels peut être représenté par la formulation de Bernoulli.

15. *La question actuellement en discussion.* Il paraît admis *aujourd'hui* par tous les partisans de la formulation de Bernoulli: (1) qu'elle ne vaut en aucune façon pour décrire le comportement d'un homme réel, mais seulement pour décrire le comportement d'un homme dit "rationnel"; (2) que l'indicateur $B(g)$ est distinct de la satisfaction absolue $\bar{s}(g)$.

[15] A une transformation linéaire près naturellement, *précisons-le une fois pour toutes.*

[16] C'est d'ailleurs la position prise par Friedman et Savage **[11]** et par Mosteller et Nogee **[20]**.

[17] Précisons bien que dans l'analyse de Neumann Morgenstern il n'est jamais parlé de la condition de "rationalité", au moins de manière explicite.

[18] Signalons ici que M. Friedman soutenait initialement que les deux indicateurs B et $\bar{s}$ étaient identiques à une transformation linéaire près, mais il a du depuis adopter une position de repli.

Le point de vue suivant lequel il y aurait identité entre les indicateurs $B(g)$ et $\bar{s}(g)$ a du être peu à peu abandonné[19] et personne ne soutient plus aujourd'hui la thèse suivant laquelle on peut mesurer la satisfaction absolue (cardinal utility) par l'examen des choix aléatoires, tels qu'ils nous sont donnés par l'observation,[20] thèse qui implique que le comportement des hommes réels peut être convenablement représenté par la formulation de Bernoulli.

Ainsi la première thèse de l'école américaine a été abandonnée et il n'y a actuellement de différences de points de vue qu'en ce qui concerne la définition du concept de probabilité. M. Savage soutient avec M. de Finetti qu'il n'y a que des probabilités subjectives alors que M. Marschak fait intervenir des probabilités objectives. Toutefois nous pensons que lorsqu'il s'agit du comportement d'un homme rationnel, M. Savage serait d'accord pour reconnaître qu'il doit prendre en considération les probabilités objectives définies par référence aux fréquences observées expérimentalement.

Dans ces conditions on peut considérer que la thèse centrale des partisans de la formulation bernoullienne[21] est que pour tout individu rationnel il existe nécessairement un index $B(g)$ tel que la valeur V de toute perspective aléatoire soit donnée par la relation

$$B(V) = \sum_i p_i B(g_i) \tag{7}$$

avec

$$\sum_i p_i = 1, \tag{8}$$

où les p_i sont les probabilités objectives.

D'après leur point de vue l'indicateur $B(g)$ tient compte à la fois de la déformation psychologique des valeurs monétaires et du plaisir (ou déplaisir) plus ou moins grand attaché à la forme de la distribution des

[19] Ainsi MM. Friedman et Savage qui, dans leur article **[11]** de 1948, admettaient que la formule de Bernoulli faisait intervenir l'utilité cardinale ont aujourd'hui abandonné ce point de vue et ne parlent plus que d'un indicateur générateur des choix. Toutefois dans bien de ses écrits M. Friedman paraît encore identifier ces deux concepts.

[20] Il est facile de voir pourquoi il en a été ainsi. Si on admettait en effet l'identité $B(g) \equiv \bar{s}(g)$, il serait manifeste que la formulation de Bernoulli néglige la dispersion des valeurs psychologiques (Elément IV de notre analyse) et on serait amené à qualifier d'irrationnelle l'attitude d'un homme prudent qui attache une grande importance à cette dispersion. C'est là une position manifestement intenable.

[21] Notamment MM. Baumol, de Finetti, Friedman, Marschak, Neumann-Morgenstern, Samuelson, et Savage. Il est à souligner que M. Samuelson qui, il y a trois ans, avait un point de vue assez analogue au nôtre est passé depuis dans l'autre camp.

probabilités des valeurs psychologiques, c'est-à-dire des éléments (A) I et (A) IV de notre analyse.

Il convient de noter en passant que ces éléments ne sont pas qualifiés d'"irrationnels". Il est admis qu'un individu "rationnel" peut avoir une échelle des valeurs psychologiques différentes de l'échelle des valeurs monétaires et qu'il peut avoir une propension plus ou moins grande pour la sécurité ou pour le risque. Il paraît admis que c'est là une question de psychologie et non de "rationnalité".

Dans ce qui suit nous allons développer une argumentation mettant en doute la validité de la relation (7) pour un homme rationnel. Notre thèse est que non seulement la formulation de Bernoulli ne peut, ni représenter convenablement le comportement de l'homme réel, ni permettre de déterminer la satisfaction absolue, mais que, *même pour un homme rationnel*, la dépendance entre la valeur V et les gains g_i est *en général* d'une forme beaucoup plus complexe:

$$\bar{s}(V) = f(g_1, g_2, \cdots, g_n, p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{9}$$

de sorte qu'*en général il n'existe pas d'indicateur $B(g)$ satisfaisant à la formulation de Bernoulli.*

D'après nous, il peut parfaitement arriver qu'un homme rationnel se comporte conformément au principe de Bernoulli, mais dans ce cas son indicateur s'identifie nécessairement avec sa satisfaction absolue, et on a[22]

$$B(g) \equiv \bar{s}(g)$$

de sorte que s'il se conforme au principe de Bernoulli, ce sera en raison de sa psychologie particulière en matière de risque qui le rend indifférent à la dispersion des valeurs psychologiques. Mais en général il n'y a aucune raison, tout au contraire, pour qu'il en soit ainsi.

Compte tenu de ce que nous avons dit à propos de la dispersion des valeurs de la psychologie (Elément IV), notre point de vue est ainsi que *la théorie psychologique du risque de l'école américaine néglige dès ses axiomes de départ l'élément spécifique de cette psychologie, savoir la dispersion des valeurs psychologiques.*

Les déductions savantes de l'école américaine ne doivent pas ici nous faire illusion. Seules, en fait, comptent les prémisses de départ et l'interprétation des résultats. L'élaboration mathématique des déductions, si complexe qu'elle puisse être, n'a pas d'intérêt en soi (si ce n'est naturellement un intérêt purement mathématique que nous n'avons pas à retenir du point de vue économique qui nous occupe ici).

[22] A une transformation linéaire près naturellement, rappelons-le encore une fois.

En aucun cas, la complexité et la valeur scientifique des déductions ne sauraient donner une valeur scientifique aux prémisses.

16. *Définition de la rationalité.* Pour aboutir à la formulation de Bernoulli l'école americaine part de systèmes d'axiomes ou de postulats. Or, il est en fait visible, et c'est là un point très important, qu'on ne saurait en aucun cas définir la rationalité par l'obéissance à l'un quelconque de ces systèmes, car, dans ce cas, il n'y aurait plus de discussion possible du tout.

La formulation de Bernoulli est en effet rigoureusement équivalente à l'un quelconque de ces systèmes d'axiomes, et la discussion de la thèse suivant laquelle un homme rationnel devrait se comporter suivant la formule de Bernoulli, lorsque la rationalité est définie par l'obéissance à un des systèmes d'axiomes dont elle est déduite, ne présente manifestement aucune espèce d'intérêt. C'est une proposition purement tautologique, donc sans valeur scientifique. La discussion de la proposition "un homme rationnel doit se conformer à la formulation de Bernoulli" ne peut avoir de sens que si la rationalité est définie autrement que par la référence directe ou indirecte à cette formulation.

Il convient donc de définir ce que l'on entend par "rationalité". Or, on peut concevoir deux définitions possibles de la rationalité suivant que l'on se place sur le plan abstrait du raisonnement ou sur celui de l'expérience.

17. *Définition abstraite de la rationalité.* En dehors de la pseudo définition de la rationalité par l'obéissance à leurs axiomes, les tenants de la formulation de Bernoulli ne présentent aucune définition précise de la rationalité. Compte tenu de cette lacune, nous sommes donc obligés de recourir à la définition qui nous semble se dégager de la logique scientifique, suivant laquelle un homme est réputé rationnel lorsque (a) il poursuit des fins cohérentes avec elles-mêmes, (b) il emploie des moyens appropriés aux fins poursuivies.

Or, ces deux conditions entraînent comme seules conséquences: (1) que le champ de choix soit ordonné, (2) que si deux perspectives aléatoires sont telles que la première comporte dans tous les cas possibles des gains plus élevés que la seconde, la première sera préférée à la seconde. Il est commode d'appeler cette condition, avec MM. Massé et Morlat, axiome de préférence absolue. (3) que l'on considère les probabilités objectives.

Les points (1) et (2) sont admis par tout le monde; quant au point (3) il paraît difficilement soutenable qu'il y ait intérêt à substituer aux probabilités objectives des probabilités subjectives qui en soient distinctes, car, d'un point de vue scientifique, l'utilisation de probabilités objectives est une condition de l'efficacité de l'action.

Il est très important de souligner que les trois points ci-dessus sont les *seules* conséquences de la condition de cohérence. On ne peut en particulier en aucune façon admettre que le cinquième axiome d'indépendance de Savage ou l'axiome de substitution de Samuelson constituent des conditions de cohérence.

Le cinquième axiome d'indépendance de Savage est le suivant. Considérons une urne contenant n boules identiques. A chacune d'elles est attachée un gain g_i de probabilité $1/n$. On peut représenter géométriquement cette perspective aléatoire par une courbe I en escaliers dont chaque palier est représenté en abscisse par une longueur $1/n$ et dont chaque ordonnée est représentée par le gain g_i, les différents gains étant rangés par ordre croissant de gauche à droite.

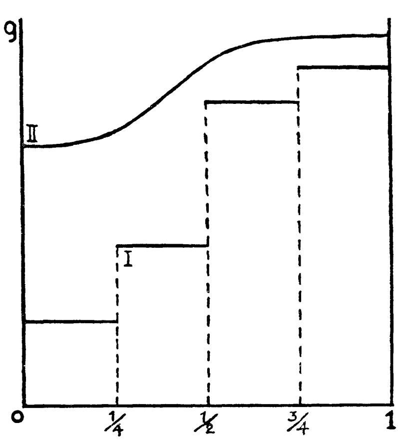


FIGURE 6

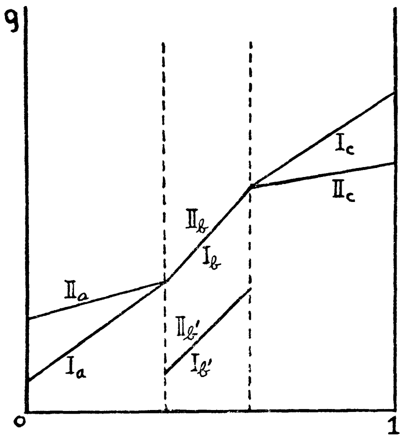


FIGURE 7

Dans le cas le plus général on aura naturellement une courbe continue du type II.

Le cinquième axiome de Savage consiste à dire que si deux perspectives aléatoires I et II ont une partie commune I_b et II_b, elles restent encore équivalentes lorsque cette partie commune subit une translation qui l'amène par exemple en $\mathrm{I}_{b'}$, $\mathrm{II}_{b'}$.

Or, en fait si deux perspectives équivalentes ont une partie commune, on ne voit aucune raison nécessaire pour que cette équivalence subsiste lorsque cette partie commune subit une translation. Il est au contraire manifeste que cette translation modifie la forme de la distribution des probabilités des valeurs psychologiques.[23]

De même en ce qui concerne l'axiome de substitution de Samuelson,

[23] Voir ci-dessous (§27) la critique détaillée du cinquième axiome de Savage.

on ne peut considérer en aucune façon qu'il puisse s'imposer d'un point de vue rationnel. Soient en effet (P_1) et (P_2) deux perspectives équivalentes, l'équivalence s'exprimant par la relation symbolique

$$(P_1) = (P_2).$$

L'axiome de substitution signifie que (P_3) étant une perspective aléatoire quelconque, on doit avoir, quel que soit α,

$$\alpha(P_1) + (1 - \alpha)(P_3) = \alpha(P_2) + (1 - \alpha)(P_3),$$

où le symbole $[\alpha(P_1) + (1 - \alpha)(P_3)]$ représente un billet de loterie donnant la probabilité α de gagner la perspective (P_1) et la probabilité $(1 - \alpha)$ de gagner la perspective (P_3). Cet axiome se justifie, dit-on, parce que, que l'évènement E_α de probabilité α se réalise ou non, l'individu considéré se trouvera finalement en possession de deux perspectives équivalentes. Ce point de vue est en réalité inacceptable, car il suppose le premier tirage correspondant aux probabilités $[\alpha, (1 - \alpha)]$ *comme neutre*, alors qu'il ne l'est pas, et il se place "ex post" alors qu'il faut se placer "ex ante".[24]

En définitive avec les notations qui précèdent, la psychologie rationnelle la plus générale s'exprimera selon nous par la relation

$$\bar{s}(V) = h[\psi(\gamma)],$$

où h est une fonctionnelle de la densité des probabilités objectives $\psi(\gamma)$ des valeurs psychologiques γ, simplement assujettie à vérifier l'axiome de préférence absolue.

Il n'y a en particulier aucune raison pour que la conduite d'un individu qui ne se conforme pas à la relation

$$\bar{s}(V) = \sum p_i \bar{s}(g_i)$$

puisse être considérée comme irrationnelle, car on ne saurait considérer comme irrationnelle une attitude psychologique devant le risque qui tient compte de la *dispersion* des valeurs psychologiques.

On ne saurait en fait considérer comme irrationnel un homme prudent qui préfère avoir une moindre espérance mathématique psychologique s'il peut bénéficier d'une dispersion plus faible. On ne saurait non plus considérer comme irrationnel un individu qui aime le risque en tant que tel, c'est-à-dire un individu qui préfère avoir une moindre espérance mathématique psychologique à condition de pouvoir disposer de quelques possibilités d'un gain psychologique très élevé. On pourra dire, si on

[24] Voir §28 et §33 ci-dessous.

veut, qu'un tel individu est imprudent, ce qu'il peut être en effet,[25] mais en aucun cas il ne nous paraît possible de dire qu'il est irrationnel.

On ne saurait trop le souligner, *en dehors de la condition de cohérence, il n'y a pas de critère de la rationnalité des fins considérées en elles-mêmes.* Ces fins sont absolument arbitraires. Aimer les perspectives aléatoires présentant une très grande dispersion pourra sembler irrationnel à un homme prudent, mais pour celui qui a cette inclination elle n'a rien en elle même qui soit irrationnel. Il en est ici comme en matière de goûts. Ils sont ce qu'ils sont. Ce sont des données qui different d'un individu à l'autre.

18. *Définition expérimentale de la rationalité.* Si on ne veut pas, ou si on ne peut pas, recourir à une définition abstraite de la rationalité, on ne peut que recourir à l'expérience et observer *ce que font effectivement les hommes dont on a par ailleurs des raisons de penser qu'ils se comportent rationnellement.*[26]

La réfutation de la formulation bernoullienne

19. *Conditions d'une réfutation de la formulation bernoullienne.* Pour réfuter la formulation bernoullienne, il suffit, puisque cette formulation prétend être générale, de présenter *un seul exemple* de comportement rationnel qui soit en désaccord, soit avec la formulation finale, soit avec l'un quelconque des systèmes de postulats auxquels elle est équivalente.

Ceci étant bien précisé, notre réfutation du principe de Bernoulli comprendra deux parties. Dans la première, nous montrerons pourquoi, lorsque la rationalité est définie d'une manière abstraite, le comportement d'un homme rationnel ne suit pas nécessairement le principe de Bernoulli. Dans la deuxième partie, nous examinerons quelques comportements d'hommes, que l'opinion commune considère comme rationnels, qui sont incompatibles avec la formulation de Bernoulli. Pour simplifier,[27] notre discussion se placera dans le cas d'un choix aléatoire unique.[28]

[25] Encore que dans certains cas un individu prudent et rationnel peut parfaitement préférer la disperson à l'espérance mathématique.

[26] A notre avis les partisans du principe de Bernoulli devraient donner une réponse claire aux trois questions suivantes: (1) Définissez-vous directement, ou non, la rationalité par l'obéissance à vos axiomes? (2) Dans la négative, admettez-vous une définition abstraite de la rationalité et laquelle? (3) A défaut d'une définition abstraite, autre que celle qui se définit par l'obéissance à vos axiomes, admettez-vous que la rationalité puisse se définir par l'observation du comportement de personnes que l'opinion commune considère comme rationnelles?

[27] Voir §12 et §35 ci-dessous.

[28] C'est d'ailleurs le cadre admis par les tenants de l'école américaine.

A. Réfutation du principe de bernoulli à partir de la définition abstraite de la rationalité.

20. *La rationalité ne saurait impliquer la formulation de Bernoulli.* Si l'on admet la définition que nous avons donnée de la rationalité (et en dehors de cette définition, aucune autre n'est proposée, si ce n'est des pseudo définitions qui dans le débat qui nous occupe ne mènent qu'à des propositions tautologiques), *les seules implications* d'une conduite rationnelle sont: (a) l'utilisation d'un champ de choix ordonné, (b) le recours aux probabilités objectives, (c) l'observation de l'axiome de préférence absolue.[29]

Or, il est facile de montrer qu'il est impossible de déduire de ces trois propriétés l'existence d'un indicateur $B(g)$ tel que l'on ait

$$B(V) = \textstyle\sum_i p_i B(g_i),$$

où V est la valeur de la perspective aléatoire

$$(g_1, g_2, \cdots, g_n, p_1, p_2, \cdots, p_n).$$

(Voir la demonstration que nous en avons donnée [**3,** no. 55].)

Il en résulte que: (1) pour être rationnel un individu donné ne doit pas nécessairement se comporter comme le voudrait le principe de Bernoulli; (2) qu'en réalité, les conséquences de la définition abstraite de la rationalité étant moins restrictives que les axiomes de l'école bernoullienne, ces axiomes contiennent quelque chose de plus qui, en fait, peut être irrationnel!

21. *Exemples de comportement satisfaisant à l'axiome de préférence absolue sans satisfaire à la formulation de Bernoulli.* Il est facile de donner des exemples particulièrement simples de psychologies que satisfont au critère de préférence absolue sans satisfaire à celui de Bernoulli.

22. (*1*) *Le choix entre différents gains g de probabilité p.* Supposons qu'un individu ait à choisir entre des perspectives aléatoires dont chacune est constituée par un gain g_i de probabilité p_i et supposons que son indice d'indifférence soit

$$S = f(g, p). \tag{10}$$

[29] Il y a lieu de remarquer (et cette observation est extrêmement importante dans le débat qui nous occupe) que nous n'avons pas défini la rationalité par l'axiome de préférence absolue. Si nous le faisions, nous tomberions dans la même erreur que l'école américaine.

L'axiome de préférence absolue n'est qu'une *conséquence* du caractère de cohérence avec elles-mêmes que doivent avoir les fins poursuivies par un individu.

Cette fonction satisfait au critère de préférence absolue si on a à la fois

$$\frac{\partial f}{\partial g} > 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial p} > 0, \tag{11}$$

mais elle ne satisfait pas en général à la formulation de Bernoulli, car celle-ci exigerait que l'on ait

$$S = F[pB(g)], \tag{12}$$

où F et B sont des fonctions croissantes, autrement dit que l'indice de préférence soit une fonction croissante du produit $pB(g)$.

On vérifie ainsi que la formulation de Bernoulli est beaucoup plus restrictive.

23. (*2*) *Le choix entre des perspectives gaussiennes*. Supposons qu'un individu ait à choisir entre différentes perspectives aléatoires (P) caractérisées par des distributions de Gauss de moyenne M et d'écart type Σ, et supposons que, pour effectuer ce choix particulier, ses lignes d'indifférence soient de la forme

$$S = f(M\Sigma). \tag{13}$$

Pour que l'axiome de préférence absolue soit vérifié, on peut facilement montrer qu'il est nécessaire et suffisant que, pour une valeur donnée de Σ, l'indice S soit une fonction croissante de M, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial M} > 0 \tag{14}$$

et il est également facile de voir qu'en général il n'existe aucun indicateur $B(x)$, fonction croissante de x pour toute valeur de x, tel que l'on puisse avoir

$$f(M, \Sigma) = \int_{-\infty}^{x} B(x) \frac{e^{-[(x-M)^2/2\Sigma^2]}}{\sqrt{2\pi}\,\Sigma}\, dx.$$

On vérifie ainsi sur ce nouvel exemple que la formulation de Bernoulli est beaucoup plus restrictive que les seules implications de la rationalité.

24. (*3*) *Le choix entre différentes perspectives de gain moyen M et de probabilité q d'une perte supérieure à P*. Supposons qu'un individu ait à choisir entre différentes perspectives dont chacune est caractérisée par un gain moyen M et une probabilité q d'avoir une perte supérieure à P.

On peut facilement verifier que tout champ de choix

$$S = f(M, q) \tag{15}$$

satisfera à l'axiome de préférence absolue à condition que l'on ait à la fois

$$\frac{\partial S}{\partial M} > 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q} < 0, \tag{16}$$

Mais on peut montrer qu'en général une telle psychologie ne satisfait pas à la formulation de Bernoulli et que *seule* satisfait à cette formulation une fonction du type

$$S = f(M - aq), \tag{17}$$

où a est une constante positive.

On vérifie ainsi qu'en général un champ de choix du type (15) et (16) satisfait à l'axiome de préférence absolue sans vérifier la formulation de Bernoulli.

Indiquons enfin que l'impossibilité *en général* de présenter par la formulation bernoullienne la psychologie d'un individu qui se comporte en faisant un arbitrage entre l'espérance mathématique attachée à ses gains monétaires et sa probabilité de perdre une somme supérieure à une valeur donnée vaut également lorsque l'arbitrage a lieu entre l'espérance mathématique attachée aux valeurs psychologiques et la probabilité d'une perte supérieure à une valeur donnée.

Dans ces trois exemples on ne voit vraiment pas pourquoi la psychologie considérée serait irrationnelle.

B. Réfutation du principe de bernoulli à partir de la définition expérimentale de la rationalité.

25. Si à défaut d'une définition abstraite de la rationalité, qui n'aboutisse pas à des propositions tautologiques, on recourt à une définition expérimentale par l'observation de ce que font des hommes rationnels et tout à fait au courant du calcul des probabilités, on peut opposer au principe de Bernoulli, ou à l'un quelconque des systèmes d'axiomes ou de postulats équivalents, les faits d'expérience suivants:

26. *(1) Le comportement des gens très prudents dans les choix aléatoires mettant en jeu de petites sommes.* Dans le domaine local, pour de petites valeurs des gains g, on peut considérer que la variation de l'indicateur $B(g)$ est sensiblement linéaire, de sorte que dans ce cas l'élément correspondant à la courbure se trouve éliminé. Si donc il existait un indicateur de Bernoulli, on devrait avoir

$$V = \sum p_i g_i ,$$

autrement dit, la valeur d'une perspective aléatoire serait égale à son espérance mathématique.

Or, l'expérience montre que des gens très prudents et que l'opinion commune considère comme rationnels peuvent préférer 40 frs. sûrs à une chance sur deux de gagner 100 frs. ou encore 400 frs. certains à une chance sur deux de gagner 1.000 frs. Lorsque la question est posée, il doit naturellement être bien précisé qu'il s'agit d'une offre *unique* qui ne se répètera pas, et par suite d'un choix unique.[30]

Cette constatation expérimentale est incontestable, et on ne voit pas très bien comment, d'un point de vue rationnel, on pourrait critiquer un individu qui a une préférence marquée pour la sécurité. Un tel comportement met donc en échec la position fondamentale de l'école américaine.[31]

27. (*2*) *Les choix aléatoires au voisinage de la certitude mettant en échec le principe d'indépendance de Savage.* D'après le cinquième axiome de Savage, l'ordre de préférence de deux perspectives aléatoires (1) et (2) (Figure 8) ayant une partie commune n'est pas modifié par un dé-

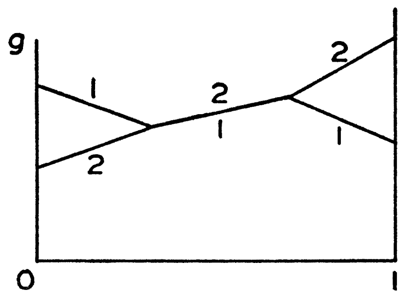


FIGURE 8

placement quelconque de leur partie commune. On peut appeler ce principe, principe d'indépendance, car il met en évidence un caractère essentiel de la formulation de Bernoulli.

Il est facile de fabriquer de nombreux exemples où des gens considérés comme parfaitement rationnels répondront d'une manière contraire à l'axiome fondamental de M. Savage et cela sans aucune hésitation.[32]

[30] Voir les §12 et §35 ci-dessous.

[31] Soulignons que M. Savage nous a objecté qu'un tel comportement pouveit s'expliquer par une courbure très forte de l'indicateur. Cette explication qui paraît à priori peu vraisemblable est naturellement possible théoriquement, mais pratiquement elle est infirmée par le fait que l'indicateur déterminé par l'analyse d'autres choix aléatoires a nécessairement une courbure faible pour des petites sommes. Ceci montre de manière décisive qu'il n'existe pas en général un indicateur susceptible d'expliquer les choix aléatoires par la formulation de Bernoulli.

Le sondage que nous avons effectué depuis le colloque de Mai 1952 a donné des résultats *absolument décisifs dans notre sens*, et nous les publierons prochainement.

[32] Dans le sondage que nous avons organisé à la suite du Colloque de Mai 1952,

Pour ce faire, il suffit, en règle générale, de se placer dans des cas extrêmes où l'avantage (ou l'inconvénient) de la complémentarité peut devenir particulièrement marqué. Tel est en particulier le cas des choix entre des gains certains et des gains aléatoires, lorsque les gains

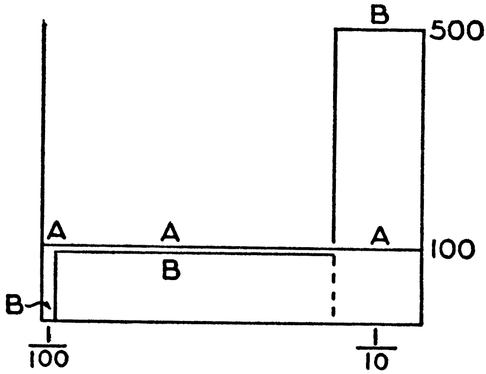


FIGURE 9

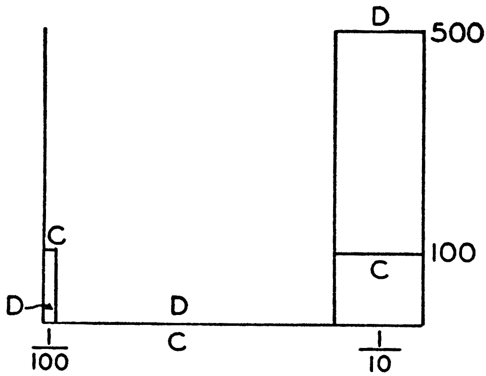


FIGURE 10

ont une grande valeur par rapport à la fortune du joueur. Dans de tels cas, on peut mettre en évidence l'importance psychologique considérable que peut avoir, considéré en lui-même, l'avantage de la certitude.

---

nous avons utilisé de nombreux exemples de ce type. Indiquons simplement ici que tous les tests auxquels nous avons eu recours se sont inspirés de l'idée fondamentale que la valeur psychologique d'un gain de probabilité donnée n'est pas indépendante, comme le voudrait l'hypothèse de Bernoulli, des gains attachés aux autres probabilités.

Les figures 9 et 10 donnent la représentation géométrique des deux questions suivantes:

(1) *Préférez-vous la situation A à la situation B?*

SITUATION A: *Certitude* de recevoir 100 millions.

SITUATION B
- *10 chances sur 100* de gagner 500 millions.
- *89 chances sur 100* de gagner 100 millions.
- *1 chance sur 100* de ne rien gagner.

(2) *Préférez-vous la situation C à la situation D?*

SITUATION C
- *11 chances sur 100* de gagner 100 millions.
- *89 chances sur 100* de ne rien gagner.

SITUATION D
- *10 chances sur 100* de gagner 500 millions.
- *90 chances sur 100* de ne rien gagner.

Si le postulat de M. Savage était justifié, la préférence

$$A > B$$

devrait entraîner la préférence

$$C > D.$$

Or, et précisément pour la plupart des gens très prudents, dont la courbure de la satisfaction n'est pas trop grande et que l'opinion commune considère comme très rationnels, on observe les réponses

$$A > B, \qquad C < D.$$

Elles sont donc en opposition avec le cinquième axiome de M. Savage.

On peut observer que les espérances mathématiques attachées aux situations A, B, C, et D ont pour valeurs en millions de francs

$$a = 100, \qquad b = 139, \qquad c = 11, \qquad d = 50.$$

Compte tenu de la courbure de leur satisfaction et de l'avantage de la sécurité, la plupart des gens prudents préfèrent A malgré son espérance mathématique d'environ 40% inférieure à celle de B, mais la courbure de leur satisfaction n'est généralement pas suffisante pour qu'ils ne préfèrent pas D à C, compte tenu de l'écart de 1 à 5 des espérances mathématiques. Il y a lieu de noter que pour les questions C et D l'effet de complémentarité correspondant à une chance sur 100 de ne rien gagner est faible.

Cet exemple montre bien le *caractère pseudo évident* de l'axiome V de Savage. *Si tant de personnes admettent si facilement cet axiome, c'est en fait parce qu'elles n'en aperçoivent pas toutes les implications dont certaines, loin d'être rationnelles, peuvent être au contraire dans certaines* *situations psychologiques* (par exemple dans le cas ci-dessus lorsqu'il s'agit d'un individu extrêmement prudent, pour lequel la valeur psychologique croît encore de manière appréciable au voisinage de 100 millions) *parfaitement irrationnelles.*

28. (*3*) *Les choix aléatoires au voisinage de la certitude mettant en échec le principe de substitualité de Samuelson.* L'axiome de substitualité de Samuelson consiste à dire que si on a, avec les notations du §17,

$$(P_1) < (P_2) \tag{18}$$

on a également

$$(P_1') \equiv \alpha(P_1) + (1 - \alpha)(P_3) < (P_2') \equiv \alpha(P_2) + (1 - \alpha)(P_3), \tag{19}$$

(P_3) et α étant respectivement une perspective et une probabilité quelconques.

Ainsi l'ordre de préférence de (P_1) et (P_2) n'est pas renversé par la composition avec une perspective quelconque (P_3). Cela implique manifestement qu'il n'y ait aucun effet de complémentarité qui puisse renverser l'ordre de préférence.[33]

Compte tenu de cette observation, il est facile de trouver des exemples de comportements d'hommes considérés comme rationnels qui infirment cet axiome. *Il suffit de rechercher des cas où (P_3) aura avec (P_1) et (P_2) des effets différents de complémentarité (ou de non complémentarité) qui puissent changer l'ordre de préférence.*

Supposons par exemple que (P_2) soit un gain certain et (P_1) un gain aléatoire. Alors toute perspective composée (P_1') fera perdre le caractère de certitude (c'est-à-dire l'avantage de complémentarité) attaché au

[33] Un parallèle avec les biens certains peut mettre particulièrement bien cette circonstance en évidence. Supposons que je considère 3 meubles (M_1), (M_2), et (M_3) et que je considère (M_2) comme préférable à (M_1),

$$(M_1) < (M_2). \tag{1}$$

Il ne s'ensuit pas que j'ai

$$(M_1) + (M_3) < (M_2) + (M_3) \tag{2}$$

car le meuble (M_3) peut présenter avec (M_1) un caractère de *complémentarité* qu'il ne présente pas avec (M_2), et ce caractère peut parfaitement renverser la préférence. La condition (1) ne peut en tout cas entraîner la condition (2) que si les biens considérés sont *indépendants*.

Comme la conséquence de l'hypothèse pour des biens certains, c'est la relation

$$\bar{S}(A, B, \cdots, C) = \varphi(A) + \varphi(B) + \cdots + \varphi(C), \tag{3}$$

où $\bar{S}$ est la satisfaction absolue, ou encore

$$S(A, B, \cdots, C) = F[\varphi(A) + \varphi(B) + \cdots + \varphi(C)], \tag{4}$$

où S est la satisfaction ordinale et F une fonction croissante quelconque, on voit quelle connexion *tout à fait étroite* existe entre cette hypothèse et le principe de Bernoulli.

membre de droite de l'inégalité (18), alors qu'il n'en est pas de même pour le membre de gauche.

Ainsi en utilisant les notations du §12, considérons le cas suivant

$$(P_1) \begin{cases} \dfrac{98}{100} & \text{500 millions} \\ \dfrac{2}{100} & 0 \end{cases}, \qquad (P_2) \begin{cases} \text{Certitude} \\ \text{de 100} \\ \text{millions} \end{cases}, \qquad (P_3) \begin{cases} \text{Certitude} \\ \text{de 1 franc} \end{cases}.$$

L'expérience montre que des gens jugés comme parfaitement rationnels, mais prudents, préfèreront la *certitude* de 100 millions à 98 chances sur 100 de gagner 500 millions, accompagnées de 2 chances sur 100 de ne rien gagner du tout. Pour eux on aura donc

$$(P_1) < (P_2). \tag{20}$$

Mais l'expérience montre *en même temps* qu'ils peuvent préférer 0,98 chances sur 100 de gagner 500 millions (d'espérance mathématique égale à 4,9 millions) à une chance sur 100 de gagner 100 millions (d'espérance mathématique égale à 1 million), parce que loin de la certitude ils pondèrent les valeurs psychologiques suivant les probabilités, c'est-à-dire suivant la règle

$$\bar{s}(V) = \sum p_i \bar{s}(g_i)$$

et que leurs fonctions $\bar{s}(g)$ sont telles que pour eux la valeur psychologique attachée à 500 millions est nettement plus élevée que la valeur psychologique attachée à 100 millions.

Or cette seconde préférence indique que pour eux on a

$$(P_1') \equiv \frac{1}{100}(P_1) + \frac{99}{100}(P_3) > (P_2') \equiv \frac{1}{100}(P_2) + \frac{99}{100}(P_3).$$

On a en effet

$$(P_1') = \frac{1}{100}(P_1) + \frac{99}{100}(P_3) \equiv \begin{cases} \dfrac{0,98}{100} & \text{500 millions} \\ \dfrac{99}{100} & \text{1 franc} \\ \dfrac{0,02}{100} & 0 \end{cases}$$

$$\text{soit pratiquement} \begin{cases} \dfrac{0,98}{100} & \text{500 millions} \\ \dfrac{99,02}{100} & 0 \end{cases}$$

et

$$(P'_2) \equiv \frac{1}{100}(P_2) + \frac{99}{100}(P_3) \equiv \begin{cases} \frac{1}{100} & \text{100 millions} \\ \frac{99}{100} & \text{1 franc} \end{cases}$$

$$\text{soit pratiquement} \begin{cases} \frac{1}{100} & \text{100 millions} \\ \frac{99}{100} & 0 \end{cases}$$

C'est là une *constatation d'expérience* qui infirme le principe de substitution de Samuelson.

Nous ne pensons d'ailleurs vraiment pas qu'il puisse se trouver quelqu'un qui puisse dire que de tels hommes agissent d'une manière irrationnelle, parce qu'ils attachent une grande valeur à la certitude, et que, loin de la certitude, ils pondèrent les valeurs psychologiques suivant leurs probabilités. Et si ce quelqu'un existe, nous serions vraiment désireux de connaître son argumentation!

29. *(4) Le comportement des entrepreneurs lorsque de grandes pertes sont possibles.* L'observation montre que les entrepreneurs, lorsqu'ils sont prudents, se comportent comme s'ils faisaient un certain arbitrage entre le gain probable M et la probabilité q d'une perte supérieure à P, autrement dit leur indicateur d'indifférence est du type[34]

$$S = f(M, q) \tag{21}$$

avec

$$\frac{\partial S}{\partial M} > 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q} < 0. \tag{22}$$

Dès que la probabilité q, attachée à une opération, devient appréciable, il faut que le gain probable devienne considérable pour qu'ils l'entreprennent. Ceux qui sont très prudents élimineront même purement et simplement toutes les perspectives aléatoires leur donnant une probabilité de ruine supérieure à une certaine valeur.

Or nous avons vu qu'une préférence du type (21) satisfait à l'axiome de préférence absolue, et qu'elle ne peut satisfaire à la formulation de Bernoulli que si elle est de la forme[35]

$$S = f(M - aq).$$

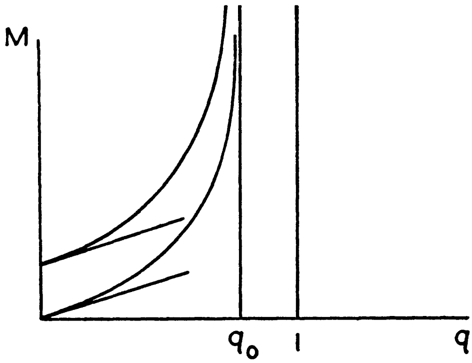
Dès lors, si on admet, *ce qui paraît psychologiquement très naturel et*

[34] Tel est le cas du joueur considéré dans la note 62 du §35 ci-dessous qui fait nécessairement un arbitrage entre son gain probable au bout de n coups et sa probabilité correspondante de ruine.

[35] §24.

certainement très rationel, que M croît beaucoup plus vite que q pour un niveau de satisfaction donné,[36, 37] une telle constitution linéaire des lignes d'indifférence est *absolument exclue.*

[36] Peut-on vraiment considérer comme irrationnel un homme qui dans chaque choix aléatoire se décide en faisant un arbitrage entre le gain probable M et la probabilité q de subir une perte supérieure à une certaine somme X, perte qu'il ne veut dépasser en aucun cas, qui pour les faibles valeurs de M et de q se comporte suivant le principe de Bernoulli (droites parallèles), mais qui se refuse absolument à participer à toute entreprise comportant pour lui une probabilité supérieure à 90% de perdre la somme X.

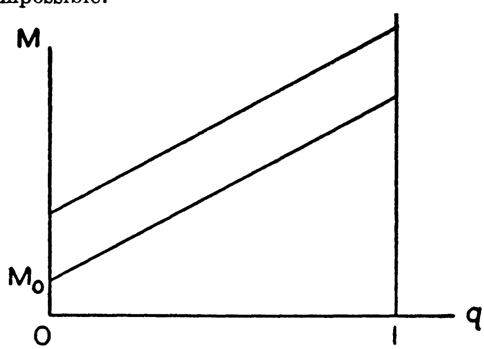


Les lignes d'indifférence d'un tel homme seraient pourtant de la forme ci-contre absolument incompatible en général avec la formulation de Bernoulli.

[37] Si on suppose, ce qui paraît psychologiquement admissible, qu'il y a continuité de la psychologie aléatoire, une forme linéaire du type

$$S = S(M - aq) \tag{1}$$

est absolument impossible.



Considérons en effet une somme M_0 dont la valeur psychologique soit appréciable, par exemple $M_0 = 1$ million. Sur la même ligne d'indifférence on aura

$$1 = M - aq. \tag{2}$$

Cette relation signifie que toute perspective aléatoire donnant un gain probable de M millions avec une probabilité q de ruine a pour valeur 1 million.

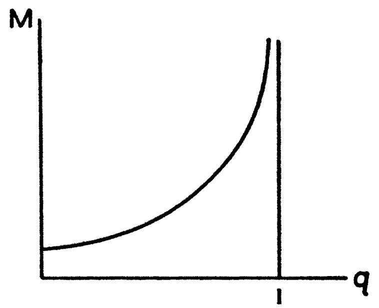
En tout état de cause, toutes les formes de comportement correspondant à des fonctions $S = f(M, q)$ quelconques satisfaisant aux conditions générales (22) nous paraissent psychologiquement acceptables, et nous ne voyons pas pour quelle raison on pourrait les qualifier d'irrationnelles.[38]

Il est facile de montrer sur un exemple particulier à quelles conséquences inadmissibles conduit la formulation de Bernoulli. Ainsi soit un homme dont la fortune est de 5 millions qui (1) déclare choisir entre différentes perspectives aléatoires en faisant un arbitrage entre le gain moyen M et la probabilité de ruine P; (2) accepte de participer à un jeu qui lui donne une probabilité $(1 - 10^{-9})$ de gagner 100 millions et une probabilité 10^{-9} d'être ruiné; (3) refuse de participer à un jeu où, *quel que soit le gain*, il a une probabilité $1 - 10^{-9}$ d'être ruiné et une probabilité de 10^{-9} de gagner.

Qui pourra prétendre qu'un tel homme est irrationnel? Il accepte la première perspective parce qu'elle lui donne une absolue certitude pratique de gagner 100 millions[39] et il refuse la deuxième parce qu'elle lui donne l'absolue certitude pratique d'être ruiné. Pourtant il est facile

---

Or, pour $q = 1$, la ruine est certaine et la valeur d'une ruine certaine ne peut être égale à l'unité quel que soit le gain probable. La formulation est donc psycho-



ogiquement inadmissible, car psychologiquement aucune ligne d'indifférence ne peut couper la verticale $q = 1$.

[38] Il est intéressant de remarquer que si la règle de comportement était telle que toute perspective aléatoire donnant une probabilité q supérieure à ϵ d'une perte supérieure à P soit éliminée et que le principe de choix entre les perspectives restantes soit la maximation de la valeur probable du gain psychologique, la formulation de Bernoulli serait compatible avec une telle formulation. Il suffirait en effet de prendre pour $B(g)$ la valeur $-\infty$ pour tous les gains inférieurs à P.

Mais la psychologie que l'on constate effectivement, c'est une certaine dépendance entre cette valeur probable et la probabilité q. Dans ce cas la formulation de Bernoulli n'est généralement pas vérifiée.

[39] Rappelons que Borel évalue à 10^{-6} une probabilité négligeable à l'échelle humaine [**10**, p. 108]. On peut donc considérer qu'une probabilité $(1\text{–}10^{-9})$ équivaut à une absolue certitude du point de vue humain.

de voir qu'un tel comportement est absolument contradictoire avec la formulation de Bernoulli.[40]

On pourra certes nous objecter qu'il s'agit là d'un cas limite, mais, pour mettre en évidence les conséquences absurdes d'une théorie, on ne peut que recourir à des cas où l'absurdité devient éclatante, c'est-à-dire à des cas limites, et, comme nous l'avons déjà indiqué, nous avons le choix absolu du terrain, et il nous suffit *d'un seul cas* où l'erreur de la formulation de Bernoulli soit manifeste pour la mettre en défaut en général.

Dans le cas des choix aléatoires individuels on observe très souvent un comportement analogue lorsqu'il s'agit d'hommes à la fois raisonnables et prudents. De tels hommes commencent en effet par se fixer une perte *maximum* qu'ils ne veulent *en aucun cas* dépasser, puis ils choisissent en faisant un certain arbitrage entre l'espérance mathématique et leur probabilité de ruine, mais ici il s'agit non pas de l'espérance mathématique M des valeurs monétaires g, mais de l'espérance mathématique μ des valeurs psychologiques γ, de sorte que l'on a

$$S = S(\mu, q).$$

[40] Il résulte en effet des indications données ci-dessus que l'on a pour l'individu considéré

$$S = f(M - aq).$$

Dire qu'il accepte de participer à un jeu qui lui donne une probabilité $(1 - p_0)$ de gagner n_0 millions et une probabilité p_0 d'être ruiné, c'est-à-dire de perdre sa fortune F, c'est dire que l'on a

$$F < (1 - p_0)n_0 - p_0F - ap_0 .$$

Dire qu'il refuse de participer à un jeu, quel que soit le gain n_1 millions, s'il a une probabilité $(1 - q_1)$ d'être ruiné, c'est dire que l'on a

$$F > q_1n_1 - (1 - q_1)F - a(1 - q_1)$$

quel que soit n_1 .

Ces deux conditions sont certainement contradictoires puisque l'on ne peut avoir

$$\frac{q_1n_1 - (2 - q_1)F}{1 - q_1} < \frac{(1 - p_0)n_0 - (1 + p_0)F}{p_0}$$

quel que soit n_1 .

Dans l'exemple du texte cette inégalité s'écrit *pratiquement*

$$p_1 < 195 \cdot 10^{18}.$$

Pour renverser l'inégalité il faut donc prendre une valeur de n_1 fabuleuse *mais absolument rien ne nous empêche de le faire*, puisque l'individu est supposé maintenir son choix (3) *quel que soit* n_1 .

Il est visible que cet exemple est en connexion étroite avec ce que nous avons dit dans la note sur l'impossibilité de concevoir des lignes d'indifférence qui coupent la verticale $q = 1$ ailleurs qu'à l'infini.

Comme nous l'avons indiqué, un tel comportement est absolument incompatible avec la formulation de Bernoulli sauf dans le cas exceptionnel où la valeur psychologique dépend linéairement du gain monétaire et où S est de la forme[41]

$$S = S(M - aq).$$

30. *Le comportement de l'homme rationnel et l'existence d'un indicateur de Bernoulli.* Ainsi il résulte tant de la définition abstraite de la rationalité que de l'observation du comportement d'hommes, dont on a par ailleurs des raisons de penser qu'ils sont rationnels, que, pour un homme rationnel, il n'existe pas en général un indicateur $B(x)$ tel que la situation optimum puisse se définir en maximant l'espérance $\sum p_i B(x_i)$.

Examen critique de certains aspects des théories de l'École Américaine

31. La discussion qui précède a montré l'opposition existant théoriquement et pratiquement entre la formulation de l'école américaine et un comportement rationnel.

Pour faire disparaître dans l'esprit du lecteur attaché à la formulation bernoullienne certaines difficultés qui pourraient encore subsister, nous ne croyons pas inutile d'ajouter à ce qui précède quelques considérations sur certains points centraux des théories de l'école américaine.

32. (*1*) *Distinction de l'indicateur de Bernoulli et de la valeur psychologique.* Comme nous l'avons déjà indiqué,[42] il est manifeste que si l'indicateur de Bernoulli s'identifiait avec la valeur psychologique, la formulation de Bernoulli ne pourrait tenir compte de la dispersion des valeurs psychologiques. C'est là la raison pour laquelle les partisans de la formulation de Bernoulli ont été amenés à prendre une position de repli et à soutenir que leur indicateur est distinct de la valeur psychologique.

Or, à notre avis il y a des raisons puissantes de penser que précisément lorsqu'il existe un indicateur de Bernoulli, ces deux grandeurs n'en font qu'une seule.[43]

(a) On peut tout d'abord remarquer que dans tous les cas expérimentaux susceptibles d'être analysés sans contestation possible *où la psychologie d'un individu est telle qu'elle tient compte de la dispersion des valeurs psychologiques*, le principe de Bernoulli est mis en échec. Comme il va de soi que, lorsque psychologiquement l'individu est insensible à la dispersion des valeurs psychologiques, il existe *par hypothèse* un indicateur de Bernoulli qui s'identifie alors avec la valeur psycho-

[41] Voir §24.
[42] Voir §15, note 20.
[43] A une transformation linéaire près naturellement.

logique, on est amené à conclure que, *lorsqu'il existe*, l'indicateur de Bernoulli se confond avec la valeur psychologique.

(b) Supposons qu'il existe effectivement un indicateur de Bernoulli et considérons la formulation de Bernoulli

$$B(V) = \sum \bar{p}_i B(g_i), \tag{23}$$

où les $\bar{p}_i$ sont les probabilités subjectives, égales aux probabilités objectives pour un homme rationnel.

Soient $E_1, E_2, \cdots, E_n$ les évènements de probabilité $p_1, p_2, \cdots, p_n$ qui, lorsqu'ils se réalisent, donnent lieu aux gains $g_1, g_2, \cdots, g_n$, et supposons (*cette hypothèse est essentielle*) que l'individu considéré se place pour faire son choix en examinant *à posteriori* chaque g_i, indépendamment des autres valeurs. C'est là l'hypothèse fondamentale de l'école américaine.

Supposons alors que tous les gains g_i augmentent de Δg_i, mais que tous les Δg_i soient inférieurs aux seuils minima perceptibles Δg_i^m, correspondant aux g_i. Comme il en est ainsi *dans chaque eventualité* considérée separément, on peut en déduire que la valeur V de la perspective aléatoire considérée croit, mais qu'elle croit d'une quantité ΔV inférieure au seuil minimum perceptible ΔV^m correspondant au niveau de gain V.

On pourrait montrer de même que si les accroissements Δg_i sont supérieurs aux seuils minima perceptibles Δg_i^m correspondant au g_i, l'accroissement ΔV est lui-même supérieur au seuil minimum ΔV^m perceptible correspondant à V.

Il en résulte que si on a

$$\Delta g_i = \Delta g_i^m \tag{24}$$

pour tout i, on doit avoir également[44]

$$\Delta V = \Delta V^m. \tag{25}$$

Or il est facile de montrer que s'il en est ainsi, l'échelle de l'indicateur $B(V)$ s'identifie nécessairement avec l'échelle des valeurs psychologiques à une fonction linéaire près.[45]

[44] Il est essentiel de souligner que cette égalité résulte essentiellement du fait que la valeur psychologique du gain g_i de probabilité p_i est supposée *indépendante* des gains attachés aux autres probabilités.

Il est manifeste en effet que la valeur psychologique de l'ensemble de gains aléatoires complémentaires étant plus grande que la somme de leurs valeurs lorsqu'ils sont considérés isolément, l'accroissement ΔV de V est supérieur à ΔV^m lorsque tous les Δg_i sont égaux aux seuils minima perceptibles Δg_i^m.

[45] Comme des échelons psychologiques équivalents sont égaux à un même multiple des seuils minima perceptibles, la propriété indiquée signifie que si tous

Ainsi, si un indicateur de Bernoulli existe, on doit conclure qu'il s'identifie avec la valeur psychologique.[46] S'il en est ainsi, il est manifeste

---

les accroissements Δg_i des g_i correspondent à des échelons équivalents, l'accroissement correspondant ΔV de V correspondra également à la valeur commune de ces échelons.

Autrement dit, si e étant une constante quelconque, on a

$$\bar{s}(g_i + \Delta g_i) - \bar{s}(g_i) = e \tag{1}$$

quel que soit i, on a également

$$\bar{s}(V + \Delta V) - \bar{s}(V) = e. \tag{2}$$

Or on a

$$B(V) = \Sigma_i p_i B(g_i), \tag{3}$$

$$B(V + \Delta V) = \Sigma_i p_i B(g_i + \Delta g_i). \tag{4}$$

Posons

$$\gamma = \bar{s}(g), \qquad \omega = \bar{s}(V). \tag{5}$$

On aura

$$B(g) = \beta(\gamma), \qquad B(V) = \beta(\omega), \tag{6}$$

β étant une certaine fonction croissante.

Il résulte alors de ce qui précède que la fonction β doit être telle que la relation

$$\beta(\omega) = \Sigma p_i \beta(\gamma_i) \tag{7}$$

doit entraîner la relation

$$\beta(\omega + e) = \Sigma p_i \beta(\gamma_i + e) \tag{8}$$

quel que soit e.

Il est facile de voir que cette condition exige que l'on ait soit

$$\beta = \lambda\gamma + \mu \tag{9}$$

soit

$$\beta = \lambda a^{\gamma} + \mu. \tag{10}$$

La condition (10) est psychologiquement inacceptable car elle est incapable de représenter les situations ou l'on a

$$\bar{s}(V) = \Sigma p_i \bar{s}(g_i),$$

situations qui manifestement sont possibles.

Dans ces conditions on a nécessairement la relation (9), et l'indicateur de Bernoulli est bien égal à la satisfaction absolue.

Il convient d'ailleurs de souligner que même si on retenait la formulation (10), il serait manifeste qu'une liaison aussi restrictive de l'indicateur $B(x)$ à la satisfaction absolue $\bar{s}(x)$ ne saurait tenir compte, dans le cas le plus général, de la distribution des probabilités des valeurs psychologiques qui dépend d'une infinité de paramètres.

[46] Si l'on adoptait le point de vue (qui n'est pas le nôtre) de ceux qui justifient

que la formulation de Bernoulli néglige implicitement la dispersion des valeurs psychologiques (Elément IV de notre analyse) qui constitue précisément, à notre avis, le facteur spécifique du risque.

33. (*2*) *Le caractère d'évidence rationnelle du principe de substitualité de Samuelson.* En reprenant les notations du §17, l'axiome de substitualité de Samuelson peut s'exprimer de la manière suivante.[47] Si on a

$$(P_1) = (P_2) \tag{26}$$

on doit avoir

$$\alpha(P_1) + (1 - \alpha)(P_3) = \alpha(P_2) + (1 - \alpha)(P_3) \tag{27}$$

quels que soient α et (P_3), et réciproquement.

Comme précédemment, nous désignerons pas (P_1') et (P_2') les perspectives composites écrites au premier et au deuxième membre de la relation (27).

Nous avons déjà indiqué que cet axiome était infirmé par le comportement d'hommes que l'opinion générale considère comme rationnels.[48] Il nous reste à montrer *pourquoi* il en est ainsi.

Le raisonnement de Samuelson est le suivant:[49] Considérons les billets de loterie composites correspondant aux perspectives (P_1') et $P_2')$ et supposons que nous ayons à choisir l'un d'entre eux. Si l'évènement de probabilité $(1 - \alpha)$ se réalise, on obtient avec les deux billets la même perspective (P_3) et les deux billets sont équivalents. Si c'est au contraire l'évènement de probabilité α, le premier billet donne (P_1) et le second donne (P_2). Comme la perspective (P_1) est équivalente à (P_2) par hypothèse, le deuxième billet n'est ni plus ni moins avantageux que le premier.

Nous ne saurions dénier *qu'à première vue*, cette argumentation apparaît comme extrêmement séduisante et que son caractère d'évidence

---

la règle de l'espérance mathématique par la loi des grands nombres, il est visible que l'on devrait adopter la règle

$$s(V) = \Sigma p_i \bar{s}(g_i). \tag{1}$$

Il en résulterait que nécessairement la valeur psychologique $\bar{s}(g_i)$ s'identifierait, à une fonction linéaire près, à l'indicateur de Bernoulli. On aurait ainsi un troisième argument en faveur de l'identité.

$$B(g) \equiv \bar{s}(g). \tag{2}$$

[47] Cet axiome n'est au fond qu'une variante de l'axiome III.C.b. de Neumann-Morgenstern et du quatrième postulat de Marschak. Ce dernier se déduit de l'axiome de Samuelson en faisant $(P_3) \equiv (P_1)$.

[48] Voir §28.

[49] Samuelson [**22**].

apparaît comme tout naturel.[50] *Cependant, c'est une argumentation spécieuse*, comme d'ailleurs toutes celles qui sont présentées pour justifier le caractère de rationnalité évidente des axiomes de départ de la théorie américaine, et le vice de ce raisonnement est facile à mettre en évidence.

Lorsque l'individu a son choix à faire, il ne connaît pas le résultat du tirage, sa décision doit donc être faite "ex ante", alors que le raisonnement de Samuelson la place "ex post". Or il y a une différence considérable entre un raisonnement "ex ante" et un raisonnement "ex post", *car le raisonnement "ex post" élimine un élément essentiel, en l'espèce l'opération de composition des perspectives aléatoires.*

En réalité le point de vue "ex ante" est le seul qui en matière de choix aléatoires soit correct. Si on se place "ex post", on élimine sans s'en rendre compte, l'élément essentiel spécifique du risque: l'importance de la forme de la distribution aléatoire.[51, 52]

Cette élimination n'est manifeste que dans les cas extrêmes comme celui que nous avons discuté su §28, *mais elle existe toujours.*

En reprenant l'exemple que nous avons déjà donné,[53] on pourrait évidemment dire avec Samuelson que, puisqu'en cas de réalisation de l'évènement de probabilité $1/100$, un des hommes considérés préfère 100 millions sûrs à 98 chances sur 100 de gagner 500 millions, et qu'en cas de réalisation de l'évènement de probabilité $99/100$, il obtient 1 fr.

[50] De tous les axiomes de l'école américaine, c'est de loin le plus attractif.

[51] En tout état de cause il convient de souligner que le raisonnement de Samuelson réintroduit subrepticement le cas de tirage *successifs*, alors qu'il est manifeste que la seule manière correcte d'attaquer le problème est de considérer un choix aléatoire unique (voir ce que nous avons dit précédemment, §12 et §35 ci-dessous).

L'assimilation que fait Samuelson d'un seul tirage à deux tirages successifs nous paraît d'ailleurs contenir en puissance la loi des grands nombres, dont la conséquence est la formulation de Bernoulli (qui ne vaut que dans ce cas, car alors il n'y a plus de dispersion), car cette assimilation revient finalement à l'assimilation d'un seul tirage à une infinité de tirages successifs.

[52] Un parallèle avec le cas des biens certains n'est peut-être pas inutile. Soit

$$S = S(A, B, \cdots, C) \tag{1}$$

les surfaces d'indifférence. L'axiome de Samuelson revient à dire que lorsque j'ai consommé une quantité A_0 de (A), deux combinaisons (A_1, B_1) et (A_2, B_2) équivalentes *avant* la consommation de A_0 le restent *après* cette consommation. On nous objectera que dans le cas du risque, il n'y a aucune consommation de bien matériel pendant le premier tirage $[\alpha, (1 - \alpha)]$ mais ce serait méconnaître la nature du problème, car ici il ne s'agit pas de consommation matérielle, mais, pour employer une expression imagée, d'une "consommation de risque", et dans le cas considéré le premier tirage ne saurait être considéré comme une opération blanche. Il ne saurait être considéré comme tel que si l'axiome de substitution était valable mais c'est justement cet axiome qu'il faut justifier, de sorte qu'il y a là un véritable cercle vicieux, une pétition de principe.

[53] Voir §28 ci-dessus.

dans tous les cas, il "*doit*" préférer 1 chance sur 100 de gagner 100 millions à 0,98 chances sur 100 de gagner 500 millions, mais il est manifeste dans ce cas qu'en raisonnant a posteriori et en se bornant à considérer les deux éventualités possibles lorsqu'on suppose que le premier tirage a *déjà* été réalisé, *on ajoute subrepticement une nouvelle condition*.

En ce qui nous concerne personnellement, *et dans la pleine connaissance où nous sommes de l'argumentation de Samuelson*, nous préférons sans aucune hésitation (P_2) à (P_1) et (P'_1) à (P'_2), et nous pensons que la plupart des lecteurs de cette étude seront dans ce cas.[54] Pourtant nous ne pensons pas être irrationnel, et nous nous rendons parfaitement compte que 2 chances sur 100.000, c'est quelque chose d'appréciable, mais nous pensons que ce quelque chose ne compense pas pour nous la diminution du gain possible de 500 à 100 millions, alors que pour nous l'obtention de la *certitude* en faisant passer la probabilité de gain de $^{98}/_{100}$ à l'unité vaut très largement cette diminution. C'est là, en ce qui nous concerne tout au moins, une attitude *très calculée, très réfléchie*, et personne ne pourrait nous convaincre de changer d'attitude si nous étions mis *réellement* face à face avec de tels choix aléatoires. *Notre psychologie est telle que nous préférons plus la sécurité au voisinage de la certitude qu'au voisinage de grands risques*, et nous ne pensons pas qu'elle puisse être regardée, en quoi que ce soit, comme irrationnelle.

On voit finalement que l'axiome de substitualité ne pourrait être regardé comme une condition de cohérence des choix que s'il y avait indépendance des perspectives aléatoires, *et ce n'est pas le cas en général*.

De même que l'on conçoit parfaitement que l'on puisse faire un effort très grand pour porter à la perfection un ensemble, lorsque seulement un point de détail ne va pas, alors même que ce point de détail

[54] Tout au moins ceux pour lesquels une somme de 500 millions est psychologiquement nettement différente de 100 millions, car pour ceux qui ne font pas de distinction nette entre 100 et 500 millions, il est hors de doute que l'attitude rationnelle sera de préférer (P'_1) à (P'_2). Mais pour ceux là il sera toujours loisible de refaire le même test avec 50 millions et 10 millions, ou si cela ne suffit pas encore, avec 5 et 1 million. Il y aura toujours une zone telle qu'en général l'axiome de substitualité de Samuelson sera mis en défaut, dans le cas d'individus très prudents.

Soulignons ici en passant que pour que notre test infirme la formulation bernoullienne, il faut que le chiffre le plus bas A (ici A = 100 millions) soit suffisamment élevé pour que l'individu puisse tenir beaucoup à la certitude, et que le chiffre le plus élevé B (ici B = 500 millions) soit suffisamment plus grand que A pour que l'individu fasse au point de vue psychologique une distinction nette entre ces deux chiffres. (La même observation vaut pour l'exemple étudié au §27.

Cette observation est importante, car elle montre qu'il est fort possible que des personnes répondent à nos tests dans le sens de la formulation bernoullienne. Il en résulte donc que *si une réponse contraire à cette formulation infirme la théorie américaine, une réponse qui lui est conformé n'infirme aucunement la nôtre*.

considéré isolément pourrait apparaître comme parfaitement négligeable, de même on conçoit *qu'il n'est pas irrationnel de consentir à une forte diminution du gain pour arriver à la certitude, alors qu'on ne consentirait pas à la même diminution, pour un même gain en probabilité, loin de la certitude.*

La décomposition en deux temps d'un tirage aléatoire comme le fait Samuelson, ne peut que conduire à des conclusions erronées, *car elle amène à comparer des perspectives qui ne sont pas comparables et à en tirer des jugements de valeur injustifiés.*

Sur l'exemple que nous avons donné, c'est particulièrement manifeste, car lorsque j'ai à choisir entre une probabilité 0,98% de gagner 500 millions et une probabilité 1% de gagner 100 millions, je me trouve dans une zone de probabilité tout à fait différente que lorsque j'ai à choisir entre une probabilité de 98% de gagner 500 millions et une probabilité de 100% de gagner 100 millions et on ne peut considérer en aucune façon que d'un point de vue rationnel il faille nécessairement faire une liaison entre les choix faits dans une zone et les choix faits dans une autre. Ces choix correspondent en réalité à des situations complètement différentes et soutenir que, dans ces situations tout à fait différentes, il faut d'un point de vue rationnel se comporter de la même manière, c'est énoncer un postulat qui, lui, n'a rien d'évident, ni même d'attractif, au contraire du postulat de substitualité.

Le raisonnement en deux temps de Samuelson est un parfait exemple des raisonnements fallacieux auxquels ne cesse de recourir l'école américaine pour justifier ses axiomes fondamentaux de départ. En matière de choix aléatoires, seule compte la distribution des probabilité des gains certains auxquels on aboutit finalement. Toute décomposition en deux ou plusieurs temps ne peut mener qu'à de grossières erreurs.

34. (*3*) *La détermination de la satisfaction absolue.* Il résulte de ce qui précède[55] que les effets de la déformation psychologique des valeurs monétaires et de l'importance attachée à la forme de la distribution de probabilités des valeurs psychologiques sont indissolublement liés, et que par suite la possibilité de la détermination de la fonction de satisfaction absolue par l'observation des choix aléatoires est en général une pure illusion. Là se trouve une des erreurs fondamentales de la théorie de Neumann-Morgenstern dans la *Theory of Games*.

Il convient d'ailleurs de souligner que les autres tenants de l'école américaine se plaisent généralement, comme nous l'avons indiqué,[56] à soutenir que le concept de satisfaction absolue est une grandeur non opérationnelle, c'est-à-dire non susceptible d'être mesurée par des expériences, et dont certains vont même jusqu'à dénier l'existence. *Or précisément, par un singulier paradoxe, il résulte de ce qui précède,*

[55] Notamment §8.
[56] Voir §4 note (6).

que le seul cas où existe effectivement un indicateur de Bernoulli, c'est le cas où cet indicateur se confond avec la satisfaction absolue ou valeur psychologique.[57]

35. *(4) La formulation de Bernoulli et la loi des grands nombres.* Au fond, la raison intuitive des formulations fondées sur l'espérance mathématique des valeurs psychologiques, c'est la loi des grands nombres.[58]

A. Pour simplifier la discussion, supposons tout d'abord que le gain psychologique soit égal au gain monétaire. Cette hypothèse sera approximativement valable dans toute zone où la courbe représentative de la satisfaction absolue pourra être assimilée à sa tangente.

La loi des grands nombres nous indique qu'à la longue le gain moyen tend *en probabilité* vers son espérance mathématique, autrement dit, on peut toujours trouver un nombre de coups n assez grand pour que la probabilité d'un écart entre le gain moyen et l'espérance mathématique devienne plus faible que tout nombre ϵ, aussi petit que l'on veut, fixé à l'avance, et on en conclut qu'il faut se conformer à la règle de l'espérance mathématique.

Cette règle a déjà donné lieu à des discussions passionnées et il semble bien que le débat ne soit pas encore vidé.[59] On peut à notre avis faire les observations suivantes:

(1) Si j'ai la possibilité effective de participer à une longue suite de coups, mais que je puisse être ruiné, c'est-à-dire nécessairement écarté du jeu dès les premiers coups, voire même au premier, il est manifeste que la justification par la loi des grands nombres de la règle de l'espérance mathématique ne vaut en aucune façon. Ce serait pour moi une bien piètre consolation que de savoir que, si j'avais pu tenir le coup, mon gain aurait finalement tendu en probabilité vers son espérance mathématique.

(2) En tout état de cause le nombre de coups auxquels je puis naturellement participer est nécessairement limité, ne fût-ce que par la durée même de la vie, de sorte qu'il existera toujours une certaine dispersion du gain moyen dont j'aurais à tenir compte. En fait la conception d'une très longue série de coups n'est pas réaliste et la dispersion du gain moyen n'est jamais pratiquement négligeable.[60]

[57] Soulignons en passant que l'index obtenu dans leurs expériences par Mosteller et Nogee peut parfaitement différer de la satisfaction absolue, car, si on *limite* l'expérimentation psychologique à une certaine zone, il devient possible de représenter par un même index l'effet combiné de la courbure de la satisfaction absolue et de la dispersion des valeurs psychologiques, mais cet index se révèlera inutilisable lorsqu'il s'agira de décrire les choix dans des tests qui font intervenir un effet marqué de complémentarité.

[58] Voir notamment Marschak **[19]**.

[59] La meilleure analyse que nous connaissions est celle de M. Paul Lévy **[14]**.

[60] Si d'ailleurs elle devenait négligeable, il n'y aurait plus de problème du tout.

(3) Même si la possibilité m'était offerte d'une possibilité effective d'un nombre extrêmement grand de coups, il n'est pas évident que j'aurais intérêt à jouer la règle de l'espérance mathématique. Ce qui intervient en effet pour moi, ce n'est pas tant le gain moyen que le gain cumulé.

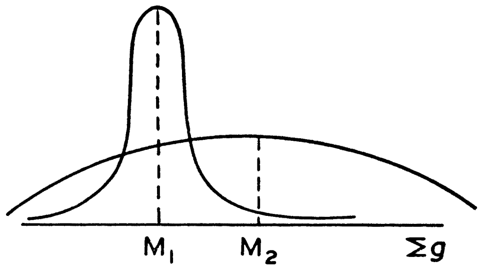


FIGURE 14

Supposons par exemple que le gain dans un coup élémentaire obéisse à une loi de Gauss de moyenne m_1 et d'écart type σ_1. Dans une série de n coups, l'espérance mathématique sera

(28) $$M = nm_1$$

et l'écart type

(29) $$\Sigma_1 = \sqrt{n}\sigma_1 .$$

Si dès lors j'ai à choisir entre le jeu (m_1, σ_1) et le jeu (m_2, σ_2) avec $m_1 < m_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$, il n'y a pas de raison pour que je préfère nécessairement le deuxième jeu. Au bout de n coups j'aurai bien une espérance mathématique $M_2 - M_1 = n(m_2 - m_1)$ mais j'aurai parallèlement $\Sigma_2 - \Sigma_1 = \sqrt{n}(\sigma_2 - \sigma_1)$, et il n'est pas difficile de donner des exemples où le premier jeu pour un homme prudent et rationnel devrait manifestement être préféré bien que son espérance mathématique soit plus faible et que le nombre de coups soit considérable.[61, 62]

[61] Il suffirait pour cela de considérer des cas où σ_2 une valeur très élevée.

[62] Considérons par exemple un individu de fortune F qui dispose d'une martingale lui donnant pour chaque partie une probabilité p de gain et $(1 - p)$ de perte et que pour chaque franc misé l'espérance mathématique soit e, on aura

$$pg - (1 - p)m = em$$

où m est la mise et g le gain à chaque partie.

Quelle que soit sa mise à chaque partie, le gain moyen par franc engagé tendra en probabilité pour un nombre de parties très grand vers e et à ce point de vue toutes les manières de jouer seront équivalentes.

Mais psychologiquement elles ne le sont en aucune façon. Une mise m très élevée à chaque partie lui permettra d'espérer un enrichissement très rapide, mais

(4) Enfin, il est évident que, *s'il s'agit d'un coup isolé qui ne se représentera pas, la justification fondée sur la loi des grands nombres, ne vaut plus du tout.*

Or, et précisément, *la plupart des cas où nous avons à prendre des décisions aléatoires sont des cas isolés.* Ici, à notre avis, la loi des grands nombres n'a plus aucune utilité. Tout dépend des circonstances spéciales dans lesquelles on se trouve.

Tout ici est question de psychologie personnelle; certains préféreraient jouer la règle de l'espérance mathématique, d'autres attacher une grande importance à la forme de la répartition. Il n'y a en aucune façon une règle de conduite qui doive être considérée comme plus rationnelle qu'une autre.

(5) *Le seul intérêt de la règle de l'espérance mathématique, c'est de donner une indication d'ensemble.* Elle n'a d'ailleurs comme nous l'avons déjà indiqué d'autre valeur que celle qui correspond à la représentation d'un ensemble de nombres par leur valeur moyenne. Rien de plus, rien de moins.[63]

B. Si maintenant nous tenons compte, non pas des valeurs monétaires g, mais des valeurs psychologiques $\bar{s}(g)$, *toutes les indications qui précèdent se transposent sans difficulté* à condition de substituer à la distribution des probabilités de g celle de $\bar{s}(g)$. Ici encore la justification de la règle de l'espérance mathématique par la loi des grands nombres n'est qu'une *illusion.*

C'est d'ailleurs pour éviter ces difficultés qui ne font que compliquer *absolument inutilement* l'étude de la psychologie du risque que nous nous sommes placé dans tous nos raisonnements dans le cas d'un choix isolé.[64]

Il est d'ailleurs essentiel de souligner ici que *ce serait une erreur de croire que la règle de la maximation de l'espérance mathématique*

$$\sum p_i \bar{s}(g_i)$$

constitue dans tous les cas une bonne règle en première approximation, lorsqu'on se propose simplement de dégrossir le problème posé par un choix aléatoire.[65]

---

augmentera ses chances de ruine. Si au contraire il choisit une mise m à chaque partie assez faible, il pourra rendre sa probabilité de ruine aussi faible qu'il le désirera, mais la rapidité de son enrichissement sera alors beaucoup moins rapide.

[63] Voir §6.

[64] Voir §12.

[65] Cette erreur est particulièrement bien mise en évidence dans le cas du comportement de l'entrepreneur ou du joueur qui fait un certain arbitrage entre l'espérance mathématique et la probabilité d'être ruiné (Voir le §29 ci-dessus.) Pour lui la règle de l'espérance mathématique n'est généralement pas bonne, même en première approximation.

Conclusion: l'erreur fondamentale de l'École Américaine

36. Il résulte de tout ce qui précède que *l'erreur fondamentale de toute l'école américaine,*[66] *c'est de négliger indirectement et inconsciemment, la dispersion des valeurs psychologiques.*

Quel que soit le système d'axiomes dont elle part, il y a toujours quelque part un axiome qui repose sur une pseudo-évidence et dont la signification psychologique a été insuffisamment pensée.

Il n'existe pas en général d'indicateur $B(x)$ tel que la valeur V d'une perspective aléatoire pour un homme rationnel soit donnée par la relation

$$B(V) = \sum p_i B(g_i)$$

et, s'il en existe un, on peut dire, d'une part, que cet indicateur se confond avec la satisfaction absolue, ou valeur psychologique[67] et, d'autre part, que l'individu considéré est insensible à la dispersion des valeurs psychologiques, ce qui, après tout, est une simple affaire de goûts.

Dans tous les cas, la beauté esthétique de la construction mathématique très générale, fondée sur ses axiomes, a détourné l'école américaine de l'examen du véritable problème.[68]

Du point de vue de la psychologie économique du risque, la formulation de Bernoulli n'a ni plus ni moins d'intérêt que toute formulation représentant, par un seul chiffre, un ensemble de nombres. On pourrait tout aussi bien prendre la médiane, ou encore la moyenne géométrique des valeurs psychologiques. Ces formulations seraient tout aussi intéressantes.

La négligence implicite par la formulation de Bernoulli de la dispersion des valeurs psychologiques a pour conséquence que cette formulation ne saurait être valable, comme l'a successivement prétendu l'école américaine, ni pour représenter le comportement de l'homme réel, ni pour déterminer sa satisfaction absolue (cardinal utility), ni même pour donner "une règle raisonnable de conduite à un homme raisonnable."

Ce qui, par contre, est certainement intéressant dans les théories américaines, c'est que la formulation de Bernoulli puisse se tirer de certains axiomes qui, à première vue, paraissent assez éloignés de cette formulation, mais, quand on y réfléchit, on se rend compte que ces différents axiomes impliquent, dans leur essence, une hypothèse de linéarité.

D'ailleurs les constructions mathématiques fondées sur ces axiomes ne sont très complexes que parce qu'on veut les rendre très générales.

[66] Friedman, Marschak, Neumann-Morgenstern, Samuelson, et Savage.

[67] Ou "cardinal utility".

[68] Sur le danger de l'abus des mathématiques, voir l'introduction à la deuxième édition de notre *Traité d'économie pure* [**1**, nos. 31 à 40].

Si l'on voulait se borner à l'essentiel, toutes ces constructiones pourraient être considérablement simplifiées. Le souci d'une généralité formelle excessive a finalement obscurci la question de la psychologie du risque et a détourné l'attention de ce qui était véritablement important. Il est extrêmement symptomatique à cet égard, que dans tous les mémoires américains concernant la formule de Bernoulli, la presque totalité des développements soit consacrée à l'élaboration des conséquences mathématiques des axiomes, alors que leur discussion est simplement réduite à quelques lignes.

Ecole Nationale Supérieure des Mines et Institut de Statistique de l'Université de Paris.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLAIS, M., *Traité d'économie pure,* Paris: Imprimerie Nationale, 1953, Chapitre sur les satisfactions absolues, pp. 156–177. (Une première édition de cet ouvrage a été faite en 1943 dans le cadre d'un ouvrage d'ensemble intitulé *A la Recherche d'une discipline économique.*)

[2] ———, "Notes théoriques sur l'incertitude de l'avenir et le risque", mémoire présenté au Congrès européen d'économétrie de Louvain, Septembre 1951. Manuscrit miméographié de 39 pages avec trois annexes de 17, 6, et 20 pages. (Une première version de ce texte avait été rédigée en Avril 1951).

[3] ———, "Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque et critique des postulats et axiomes de l'école américaine". Mémoire présenté au Colloque International sur le risque, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, Mai 1952.

[4] ———, "La Psychologie de l'homme rationnel devant le risque: La théorie et l'expérience", *Journal de la Société de Statistique de Paris,* Janvier 1953, pp. 47 à 72 (Suite à paraître). (Dans cette étude se trouvent discutés les principes et les résultats du sondage sur la psychologie du risque que nous avons effectué de Juin à Septembre 1952.)

[5] ———, "Les théories de la psychologie du risque de l'école américaine", *Revue d'Economie Politique,* 1954.

[6] ARMSTRONG, W. E., "The Determinateness of the Utility Function", *Economic Journal,* Sept., 1939, pp. 453–467.

[7] BACHELIER, *Calcul des probabilités,* Paris: Gautier Villars, 1912.

[8] BAUMOL, WILLIAM J., "The Neumann-Morgenstern Utility Index—An Ordinalist View", *Journal of Political Economy,* Vol. 59, Février, 1951, pp. 61 à 66.

[9] BOREL, EMILE, *Valeur pratique et philosophique des probabilités,* Paris: Gauthier Villars, 1939. (Voir notamment sur le paradoxe de St. Pétersbourg les pp. 60 à 66 et sur la notion de probabilités objectives et subjectives pp. 70 à 77, 84 à 107, et 134 à 146.

[10] ———, *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes,* Gallimard, 1941.

[11] FRIEDMAN, M., et L. J. SAVAGE, "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy,* Août 1948, pp. 279–304.

[12] ———, "The Expected Utility Hypothesis and the Measurability of Utility," Journal of Political Economy, Vol. 60, December, 1952. Nous n'avons malheureusement pu tenir compte dans la redaction de la présente étude

de cet article qui dans l'ensemble confirme les points de vue exprimés par MM. Friedman et Savage lors du Colloque de Mai 1952.

[13] LANGE, OSCAR, "The Determinateness of the Utility Function", *Review of Economic Studies*, June, 1934, pp. 218–225.

[14] LEVY, PAUL, *Calcul des probabilités*, Paris: Gauthier Villars, 1925. (Cet ouvrage contient dans son Chapitre VI, pp. 113 à 133, "Critique de la théorie du gain probable", une excellente analyse de la théorie des espérances morales.)

[15] MASSÉ, P., *Les réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique*, Paris: Hermann, 1946. (Voir plus spécialement le Tôme II, Chap. V, VI, et XII.)

[16] ———, Réflexions sur les comportements rationnels en économie aléatoire", manuscrit dactylographié de 80 pages non encore publié du 2/1/52.

[17] MASSÉ, P., et R. MORLAT, "Sur le classement économique des perspectives aléatoires", mémoire présenté au Colloque International sur le risque, Mai 1952.

[18] MARSCHAK, J., "Rational Behavior, Uncertain Prospects and Measurable Utility", ECONOMETRICA, Vol. 18, Avril, 1950, pp. 111–141.

[19] ———, "Why "Should" Statisticians and Businessmen Maximize Moral Expectation?", *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley: University of California Press, 1951.

[20] MOSTELLER, FREDERICK, and PHILIP NOGEE, "An Experimental Measurement of Utility", *Journal of Political Economy*, October, 1951, pp. 371 à 404.

[21] VON NEUMANN, JOHN, and OSKAR MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2e édition, Princeton: Princeton University Press, 1947, pp. 8 à 31 et 617 à 632.

[22] SAMUELSON, P. A., "Utility, Preference, and Probability", mémoire présenté au Colloque International sur le Risque, Paris, Mai 1952.

[23] ———, "Properties of Regular Means and of Bernoulli Means", Manuscrit miméographié de 14 pages, M. I. T. and RAND, Juin, 1952.

[24] SAVAGE, L. J., "An Axiomatization of Reasonable Behavior in the Face of Uncertainty", Communication au Colloque International sur le Risque, Paris, Mai 1952.