

# Неортогональный Alford rotation

19 марта 2015 г.

## 1 Введение

Уже несколько десятилетий в акустическом каротаже широко и достаточно успешно практикуются методики кросс-дипольных измерений. Современные решения в технике и обработке полученных данных позволяют количественно производить оценку азимутальной и аксиальной (по отношению к стволу скважины) анизотропии для широкой группы горных пород. Существенный прогресс в определении параметров породы в рамках модели трансверсально-изотропного тела по скоростям распространения поперечных волн называется рядом специалистов главным достижением методов акустического каротажа последних лет. Помимо изучения внутренней анизотропии горной породы, кросс-дипольные измерения могут быть использованы для определения ориентации трещин и обнаружения анизотропии, индуцированной подземными горизонтальными напряжениями [1].

Как известно, принцип работы данного метода основан на существовании в анизотропной породе двух ортогональных выделенных направлений, что в общем случае приводит к поляризации распространяющихся по стволу скважины поперечных волн. При наличии измерений от двух ортогонально-ориентированных направленных дипольных источников в скважине возможно определить направления главных осей анизотропии и скорости распространения поляризованных поперечных волн. В основе классического метода определения лежит допущение о симметричности матрицы составленной из компонент четырёх векторов измерений различной ориентации, которая может быть приведена к диагональному виду ортогональным поворотом на некоторый угол [2]. В ряде практических случаев ортогональность направлений поляризации поперечных волн отсутствует, однако в однородной породе матрица измерений должна сохранять симметрию и может быть диагонализирована другими способами [3]. Помимо неортогональности на результат работы классического алгоритма может влиять наличие сильных горизонтальных напряжений, приводящих к возникновению индуцированной анизотропии и эффекту пересечения дисперсионных кривых быстрой и медленной волн. В этом случае результат работы алгоритма становится зависимым от ширины временного окна при обработке, а следовательно направление поляризации волн изменяется с ростом частоты [4]. Другим фактором, влияющим на поляризацию и разделение волн в скважине, является неидеально цилиндрическая форма поперечного сечения ствола [5]. В сочетании с анизотропными свойствами горной породы отклонения от цилиндрической формы могут приводить к проблемам определения направлений главных осей стандартными методами [?].

В данной работе обсуждается вопрос определения главных направлений трансверсально-изотропной породы по измерениям в скважинах эллиптического сечения, являющихся модельным приближением более общих несимметричных форм скважин. В качестве исходных данных используются результаты численного трёхмерного моделирования с помощью метода спектральных элементов [6]. Для анализа структуры волнового поля в скважинах и более глубокой интерпретации результатов применяется полуаналитический метод конечных элементов (SAFE) [7]. Результаты расчётов сопоставляются с данными работы классического алгоритма Alford rotation и его альтернативной неортогональной модификации [3] с применением оконной и частотной фильтрации и без неё.

## 2 Дипольный каротаж скважин и классический подход к обработке

Классическая схема работы современных приборов дипольного каротажа включает в себя записи от двух источников, ориентированных в некоторых направлениях  $X$  и  $Y$ , ортогональных друг другу. Запись производится на два массива ориентированных приёмников, как правило имеющих фиксированный шаг смещения вдоль прибора. Таким образом, на выходе устройство формирует четырехкомпонентный вектор измерений, состоящий из двух замеров по направлениям излучения источников ( $XX$  и  $YY$ ) и перекрёстных замеров ( $XY$  и  $YX$ ), где первая буква обозначает ориентацию источника, а вторая - приемников. Обозначим матрицу  $2 \times 2$ , состоящую из этих компонент, как  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} XX & YX \\ XY & YY \end{pmatrix}$$

Из решения уравнения Кельвина-Кристоффеля для породы с трансверсально-изотропным типом симметрии известно, что в направлении отличном от направления оси симметрии породы существует три решения для плоских волн (квазипродольная  $qP$ , квазипоперечная  $qSV$  и чисто поперечная  $SH$  волны), имеющих ортогональную поляризацию по отношению друг другу. Дипольным источником внутри скважины в такой породе будут преимущественно возбуждаться две поперечные изгибные моды, обладающие сильной дисперсией, а в низкочастотном пределе имеющие скорость равную скорости  $qSV$  и  $SH$  волн в породе. Дисперсионные кривые этих мод не имеют пересечений и обе волны (обозначаемые как быстрая и медленная) распространяются независимо вдоль ствола скважины. В рамках классического подхода полагают, что для описания таких волновых процессов в скважине допустимо использование приближения, справедливого для распространения плоских волн в анизотропной недисперсионной среде, математически представленного в форме:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_{M \rightarrow R} \mathbf{D} \mathbf{P}_{S \rightarrow M} \mathbf{S},$$

где вектор  $\mathbf{S}$  характеризует излучение источника,  $\mathbf{P}_{S \rightarrow M}$  - матрица, проецирующая вектор источника на главные направления распространения нормальных дипольных мод,  $\mathbf{P}_{M \rightarrow R}$  - матрица, проецирующая сигнал чистых мод на направления приемников,  $\mathbf{D}$  - матрица, определяющая распространение чистых мод вдоль скважины. В предположении независимости распространения мод, матрица  $\mathbf{D}$  будет диагональной.

В системе координат, связанной с направлениями излучения дипольных источников, вектор  $\mathbf{S}$  представляет собой единичную матрицу. Также если системы координат источников и приемников совпадают, то  $\mathbf{P}_{M \rightarrow R} = \mathbf{P}_{S \rightarrow M}^T = \mathbf{P}$ . Для матрицы  $\mathbf{D}$  в этом случае справедливо

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T, \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{P}^{-T}. \quad (2)$$

Если направления поляризации дипольных волн ортогональны, то существует естественная система координат, связанная с главными направлениями и матрица преобразования  $\mathbf{P}$  является простым ортогональным поворотом на некоторый угол  $\theta$ .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Алгоритм поиска этого угла, основанный на классической модели был представлен в работе [2] и получил название Alford rotation. На практике полевые данные, однако, не обладают абсолютной симметрией и искомый угол находят из условия минимизации энергии недиагональных компонент по всему интервалу времени измерений. Следует отметить,

что данный подход корректно работает только при сохранении ориентации главных направлений вдоль всего пути распространения волн, то есть предполагает однородность и сохранение параметров анизотропного материала на участке акустических измерений.

### 3 Нарушение ортогональности

При выводе основных положений классического Alford rotation был использован ряд предпосылок относительно свойств породы и модели распространения волн, накладывающих ограничения на использование метода. В частности, одним из недостатков такого подхода ряд исследователей называет требование ортогональной поляризации изгибных мод. Между тем в ряде случаев, например при распространении волн в анизотропной породе с орторомбическим типом симметрии [8] или в случае анизотропии вызванной наличием трещин [9], поляризация волн может быть существенно неортогональной.

Один из возможных вариантов обобщения Alford rotation на неортогональный случай был рассмотрен в работе [3] и заключается в введении дополнительного угла  $\eta$ , характеризующего ориентацию главных направлений. Утверждается, что если для системы справедливо представление (1), то матрицы преобразования будут иметь вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin(\theta + \eta) \\ \sin \theta & \cos(\theta + \eta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\cos \eta} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \eta) & \sin(\theta + \eta) \\ -\sin \theta & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

где, за  $\theta$  принимается угол отсчитываемый против часовой стрелки между осью  $X$  и направлением поляризации первой моды, а за  $\theta + \eta$  - угол между направлением поляризации второй моды и осью  $Y$ . Поиск значений углов производится путем минимизация энергии недиагональных компонент матрицы  $\mathbf{D}$  по двум параметрам. При  $\eta = 0$  метод сводится к классическому Alford rotation.

Как известно, нарушение цилиндрической формы ствола скважины в изотропной породе также приводит к разделению изгибных мод и их поляризации вдоль направлений деформации [5]. Хотя влияние нецилиндричности практически сходит на нет для низкочастотных гармоник распространяющихся волн, на средних и высоких частотах этот фактор можно рассматривать как дополнительную причину анизотропии в случае, если главные направления анизотропной породы не совпадают с направлениями деформации ствола. Из-за появляющейся частотной зависимости одного из факторов и сильной дисперсии изгибных волн, эффективное направление поляризации может меняться по мере удаления от источника колебаний. Это приводит к нарушению предположения классического метода (а также его неортогонального обобщения) о разделении изгибных мод, и как следствие симметрии матрицы измерений при любых ортогональных преобразованиях.

Применение методов оконной и частотной фильтрации в ряде случаев может уменьшить ошибку работы классических алгоритмов, тем не менее универсального подхода, способного скорректировать влияние геометрии ствола на точность определения главных направлений анизотропной породы, в настоящее время не предложено. В следующем разделе производится оценка точности ортогонального и неортогонального Alford rotation на основе синтетических данных трехмерного моделирования распространения волн в быстрой трансверсально-изотропной породе в скважинах эллиптического сечения.

### 4 Вычислительный методы

В качестве исходных данных для проверки работы алгоритмов были использованы результаты моделирования акустических измерений методом спектральных элементов (SEM).

Данный метод ранее успешно применялся для расчета задач геофизики [10] и моделирования акустического каротажа [11]. Численный алгоритм производит решение уравнений твердого линейно-упругого анизотропного тела в твердых областях и акустических уравнений для невязкой жидкости внутри скважины. На границе раздела сред выполняются условия непрерывности нормальных компонент смещений и отсутствия касательных напряжений. Используемая реализация метода позволяет параметрически задавать высокий порядок аппроксимации по пространству, а также имеет значительные преимущества в скорости расчета по сравнению с другими трехмерными методами.

Для анализа сигнала с приемников и построения дисперсионных кривых нормальных мод используется модификация метода Прони [12]. Перед обработкой измерений алгоритмом Alford rotation, использовались оконные, низкочастотные и высокочастотные фильтры, построенные с помощью вычислительного комплекса MATLAB. В качестве исходного сигнала для акустического источника в скважине использовалась производная вейвлета Блэкмана-Харриса с несущей частотой 4 кГц.

## 5 Результаты обработки

## 6 SAFE

Для решения задач распространения упругих волн в однородных анизотропных породах активно применяются спектральные методы, позволяющие аппроксимировать решение волновой задачи в виде суммы его Фурье-гармоник. При исследовании волновых процессов в скважинах достаточно большой длины допустимо также аналогичное разложение решения по пространственным гармоникам в направлении оси скважины. Если направление оси ствола связать с осью Z декартовой системы координат, то решение задачи относительно вектора смещений может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{\omega} \sum_k \mathbf{U}(x, y) \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

Такое разложение позволяет решать задачу для каждого значения  $\omega$  и  $k$  независимо.

Одним из доказавших свою эффективность методов по расчету и анализу волновых процессов в длинных волноводах является полуаналитический метод конечных элементов (SAFE) [7]. В основе метода лежит вариационная форма представления уравнений движения в жидкости и твердом анизотропном теле. Аппроксимация значений функции решения с помощью базисных функций на некоторой сетке, позволяет свести систему уравнений движения с граничными условиями к обобщенной задаче на собственные значения. Каждому собственному значению сопоставлено некоторое базисное решение - собственный вектор, соответствующий одной из волновых мод распространяющихся в скважине. Сумма по всем собственным модам, включая затухающие, позволяет получить полное решение волновой задачи, однако для целей данной работы большим преимуществом как раз является возможность раздельного анализа дисперсии и поляризации каждой из нормальных мод. (вопрос выделения решений)

## 7 Сравнение с SAFE

## 8 Заключение

Таблица 1: Параметры упругих анизотропных материалов

Название	Плотность кг/м <sup>3</sup>	Упругие модули, ГПа					
		$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{66}$
Austin Chalk	2200	22	15.8	12	14	2.4	3.1
Cotton Valey Shale	2640	74.73	14.75	25.29	58.84	22.05	29.99
Bakken Shale	2230	40.9	10.3	8.5	26.9	10.5	15.3

Таблица 2: Параметры модельных задач

Обозначение	Форма скважины	Геометрия	Материал породы	TI угол $\zeta$	TI угол $\phi$
Модель 1	Цилиндрическая	20 × 20 см	Austin Chalk	60	45
Модель 2	Эллиптическая	15 × 10 см	Изотроп. медленная	-	-
Модель 3	Эллиптическая	20 × 10 см	Austin Chalk	60	45
Модель 4	Эллиптическая	15 × 10 см	Austin Chalk	60	45
Модель 5	Эллиптическая	15 × 10 см	Cotton Valey Shale	60	45
Модель 6	Эллиптическая	20 × 10 см	Cotton Valey Shale	60	45

## 9 Описание модельных задач

Таблица 3: Результаты расчетов

	$\theta_1^o$	$\theta_1^n$	$\theta_2^o$	$\theta_2^n$	$\Delta\theta^n$	$E_{cr}^o/E_t^o$	$E_{cr}^n/E_t^n$
Модель 1	-14.9996	-14.9998	74.0004	74.0003	$\approx 0$	$3.1640 \cdot 10^{-10}$	$3.1385 \cdot 10^{-10}$
Модель 2	29.9875	29.9873	-60.0125	-60.0082	$\approx 0$	$5.1932 \cdot 10^{-6}$	$5.1901 \cdot 10^{-6}$
Модель 3	-70.5111	-86.3606	19.4889	20.4622	16.8	0.1726	0.1511
Модель 4	-33.1254	-43.2920	56.8746	65.1455	18.4	0.0791	0.0460
Модель 5	-88.2731	-88.2149	1.7269	1.6286	0.15	0.0041	0.0041
Модель 6	-89.1579	-89.1352	0.8421	0.7691	0.1	0.0062	0.0062

Таблица 4: Результаты расчетов с применением фильтров

	$\theta_1^o$	$\theta_1^n$	$\theta_2^o$	$\theta_2^n$	$\Delta\theta^n$	$E_{cr}^o/E_t^o$	$E_{cr}^n/E_t^n$
<b>Модель 3</b>	<b>-10.5111</b>	<b>-26.3606</b>	<b>79.4889</b>	<b>80.4622</b>	<b>16.8</b>	<b>0.1726</b>	<b>0.1511</b>
Модель 3 с окном 1	-31.0135	-42.6876	58.9865	67.8336	20.5	0.0445	0.0099
Модель 3 с НЧФ 1	-30.6596	-41.5868	59.3404	68.1357	19.7	0.0358	0.0027
Модель 3 с ВЧФ 1	-1.7554	-4.9971	88.2446	88.5870	3.6	0.0602	0.0597
<b>Модель 4</b>	<b>-33.1254</b>	<b>-43.2920</b>	<b>56.8746</b>	<b>65.1455</b>	<b>18.4</b>	<b>0.0791</b>	<b>0.0460</b>
Модель 4 с окном 1	-34.9269	-42.3895	55.0731	62.0447	14.4	0.0113	0.0010
Модель 4 с НЧФ 1	-34.8496	-42.1434	55.1538	62.0865	14.2	0.0117	0.0005
Модель 4 с ВЧФ 1	-13.8552	-30.2318	76.1448	75.9994	16.2	0.1489	0.1250
<b>Модель 5</b>	<b>-88.2731</b>	<b>-88.2149</b>	<b>1.7269</b>	<b>1.6286</b>	<b>0.15</b>	<b>0.0041</b>	<b>0.0041</b>
Модель 5 с окном 2	-53.6211	-62.9063	36.3789	49.2159	22.1	0.1951	0.1362
Модель 5 с НЧФ 1	-87.7936	-73.4542	2.2064	2.1189	14.4	0.0107	0.0084
<b>Модель 6</b>	<b>-89.1579</b>	<b>-89.1352</b>	<b>0.8421</b>	<b>0.7691</b>	<b>0.1</b>	<b>0.0062</b>	<b>0.0062</b>
Модель 6 с окном 2	-29.3221	-59.0992	60.6779	62.8873	32.0	0.3304	0.2324
Модель 6 с НЧФ 1	-89.0481	-75.6149	0.9519	0.9021	13.5	0.0025	0.0021

## 10 Результаты расчетов

Таблица 5: Параметры применяемых фильтров

**Оконные фильтры**

Обозначение	Величина окна, мс	Интервальное время, мкс/м
ОФ-1	0.5	987
ОФ-2	1.0	400

**Низкочастотные фильтры**

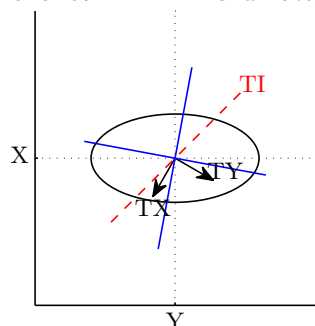
Обозначение	Частота дискретизации, Гц	$A_{pass}$ , дБ	$A_{stop}$ , дБ	$F_{pass}$ , Гц	$F_{stop}$ , Гц
НЧФ-1	1194892	1	80	5000	4000
НЧФ-2	1194892	1	80	6000	5000

**Высокочастотные фильтры**

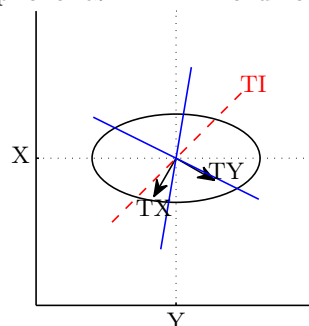
Обозначение	Частота дискретизации, Гц	$A_{pass}$ , дБ	$A_{stop}$ , дБ	$F_{pass}$ , Гц	$F_{stop}$ , Гц
ВЧФ-1	1194892	1	80	4000	5000
ВЧФ-2	1194892	1	80	5000	6000

## 11 Фильтрация данных

Ортогональный Alford rotation



Неортогональный Alford rotation



## Список литературы

- [1] D. Patterson and X. M. Tang. Shear wave anisotropy measurement using cross-dipole acoustic logging: An overview. *Petrophysics*, 42(2), 2001.
- [2] R. M. Alford. Shear data in the presence of azimuthal anisotropy: Dilley Texas. In *1986 SEG Annual Meeting*, pages 476–479. Society of Exploration Geophysicists, 1986.
- [3] J. Dellinger, J. Etgen, and B. Nolte. Symmetric alford diagonalization. *1998 SEG Annual Meeting*, 1998.
- [4] B. Nolte, R. Rao, and X. Huang. Dispersion analysis of split flexural waves. Technical Report 1993, Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory, 1997.
- [5] C. J. Randall. Modes of noncircular fluid-filled boreholes in elastic formations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(3):1002–1016, 1991.
- [6] D. Komatitsch, C. Barnes, and J. Tromp. Wave propagation near a fluid-solid interface: A spectral element approach. *Geophysics*, 65(2):623–631, March 2000.
- [7] I. Bartoli, A. Marzani, F. L. di Scalea, and E. Viola. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 295:685–707, 2006.
- [8] J. Dellinger, B. Nolte, and J. T. Etgen. Alford rotation, ray theory, and crossed-dipole geometry. *Geophysics*, 66(2):637, 2001.
- [9] B. Nolte and A. C. H. Cheng. Estimation Of Nonorthogonal Shear Wave Polarizations And Shear Wave Velocities From Four-Component Dipole Logs. Technical report, Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory, 1996.
- [10] D. Komatitsch and J. Tromp. Introduction to the spectral element method for three dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 139:806–822, 1999.
- [11] M. Charara, A. Vershinin, E. Deger, D. Sabitov, and G. Pekar. 3D spectral element method simulation of sonic logging in anisotropic viscoelastic media. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*, pages 432–437, January 2011.
- [12] M. P. Ekstrom. Dispersion estimation from borehole acoustic arrays using a modified matrix pencil algorithm. In *Proceedings of ASILOMAR-29*, pages 449–453, Pacific Grove, CA, USA, 1995. IEEE.