

Анализ поляризации дипольных волн в нецилиндрических скважинах в анизотропной породе

3 июня 2015 г.

1 Введение

Уже несколько десятилетий в акустическом каротаже широко и достаточно успешно практикуются методики кросс-дипольных измерений. Современные решения в технике и обработке полученных данных позволяют количественно производить оценку азимутальной и аксиальной (по отношению к стволу скважины) анизотропии для широкой группы горных пород. Существенный прогресс в определении параметров породы в рамках модели трансверсально-изотропного (ТИ) тела по скоростям распространения поперечных волн называется рядом специалистов главным достижением методов акустического каротажа последних лет. Кросс-дипольные измерения также могут быть использованы для определения ориентации крупных трещин и обнаружения анизотропии, индуцированной подземными горизонтальными напряжениями и трещиноватостью [1].

Как известно, принцип работы данного метода основан на существовании в ТИ породе двух ортогональных выделенных направлений, что в общем случае приводит к поляризации распространяющихся по стволу скважины поперечных волн. При наличии измерений от двух направленных ортогонально-ориентированных источников в скважине возможно определить направления главных осей ТИ модели и скорости распространения поляризованных поперечных волн. В основе классического метода определения лежит допущение о симметричности матрицы измерений (составленной из данных четырёх измерений с различной ориентацией источников и приёмников), которая может быть приведена к диагональному виду ортогональным преобразованием [2]. В ряде практических случаев ортогональность направлений поляризации поперечных волн отсутствует, но в однородной породе симметрия матрицы измерений сохраняется и существуют возможности её диагонализации другими способами [3]. Помимо неортогональности на результат работы классического алгоритма может влиять наличие сильных горизонтальных напряжений, приводящих к нарушению ТИ модели и эффекту пересечения дисперсионных кривых быстрой и медленной волн. Результаты работы алгоритма становятся при этом зависимыми от ширины выбранного временного окна, что свидетельствует о зависимости направления поляризации волн от частоты [4]. Другим фактором, влияющим на поляризацию и разделение волн в скважине, является нецилиндрическая форма поперечного сечения ствола [5]. В сочетании с анизотропными свойствами горной породы отклонения от цилиндрической формы могут приводить к проблемам определения направлений главных осей стандартными методами.

В данной работе рассматривается вопрос определения главных направлений ТИ породы по измерениям в скважинах эллиптического сечения, являющихся модельным приближением более общих несимметричных форм скважин. В качестве исходных данных используются результаты численного трёхмерного моделирования с помощью метода спектральных элементов [6]. Для анализа структуры волнового поля в скважинах на определённой частоте применяется полуаналитический метод конечных элементов (SAFE) [7]. Результаты расчётов сопоставляются с данными, получаемыми классическим алгоритмом Alford rotation [2] и его альтернативной неортогональной модификации [3] с применением оконной и частотной фильтрации и без неё.

2 Дипольный каротаж скважин и классический подход к обработке

В устройство классического прибора дипольного каротажа входят два массива приёмников и источников направленного действия ортогонально ориентированных друг к другу. Свяжем с ориентацией этих массивов оси X и Y локальной системы координат прибора. В ходе работы прибора на выходе получают четыре разных массива значений давления от времени, обозначаемых XX , XY , YX и YY , где первая буква обозначает активный в момент проведения измерения массив источников, а вторая - приемников. Данные, полученные с приемников на определенном расстоянии от источника, принято записывать в форме матрицы \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} XX & YX \\ XY & YY \end{bmatrix} \quad (1)$$

Известно, что в однородной недисперсионной среде с ТИ типом симметрии в произвольном направлении могут распространяться три вида плоских волн (квазипродольная, поперечная и квазипоперечная) с ортогональными векторами поляризации [8]. В рамках классического подхода приближение плоских волн используется для описания волновых процессов в скважине. Дипольные излучатели возбуждают преимущественно моды с поперечным характером колебаний, которые распространяются вдоль скважины независимо. В данных предположениях исходную матрицу измерений (1) возможно привести к диагональному виду [3]

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T, \quad (2)$$

здесь \mathbf{D} - диагональная матрица, содержащая сигнатуры двух дипольных мод; матрица \mathbf{P} проецирует сигналы отдельных мод на оси локальной системы координат прибора. Если направления поляризации дипольных волн ортогональны, то матрица преобразования \mathbf{P} сводится к повороту на некоторый угол θ

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Алгоритм поиска этого угла был представлен в работе [2] и получил название Alford rotation. Хотя на практике полевые данные не обладают абсолютной симметрией, искомый угол может быть найден из условия минимизации энергии недиагональных компонент по всему интервалу времени измерений. Отметим, что данный подход корректно работает только при сохранении ориентации главных направлений вдоль всего пути распространения волны.

Заметим, что ортогональная поляризации изгибных мод не всегда наблюдается на практике. В ряде случаев, например при распространении волн в анизотропной породе с орторомбическим типом симметрии [9] или в случае анизотропии вызванной наличием трещин [10], было доказано, что поляризация волн может быть существенно неортогональной.

Один из возможных вариантов обобщения Alford rotation на неортогональный случай был рассмотрен в работе [3] и заключается в введении дополнительного угла η , характеризующего ориентацию главных направлений. Утверждается, что если для системы справедливо представление (2), то матрица преобразования будет иметь вид:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin(\theta + \eta) \\ \sin \theta & \cos(\theta + \eta) \end{bmatrix}$$

где, за θ принимается угол отсчитываемый против часовой стрелки между осью X и направлением поляризации первой моды, а за $\theta + \eta$ - угол между направлением поляризации второй моды и осью Y . Поиск значений углов производится путем минимизация энергии недиагональных компонент матрицы \mathbf{D} по двум параметрам. При $\eta = 0$ метод сводится к классическому Alford rotation.

Как известно, нарушение цилиндрической формы ствола скважины в изотропной породе также приводит к появлению двух изгибных мод [5]. Если главные направления анизотропной породы не совпадают с направлениями деформации ствола, то влияние этих двух факторов приводит к нарушению предположения классического метода (а также его неортогонального обобщения) о разделении изгибных мод. Из-за частотной зависимости влияния геометрии и сильной дисперсии изгибных волн, эффективное направление поляризации может меняться по мере удаления приемников от источника. Применение методов оконной и частотной фильтрации в ряде случаев может уменьшить ошибку работы классических алгоритмов. Однако универсального подхода, способного корректировать влияние геометрии ствола на точность определения главных направлений анизотропной породы, в настоящее время не предложено. В разделе 4 производится оценка точности ортогонального и неортогонального Alford rotation на основе синтетических данных трехмерного моделирования распространения волн в быстрой ТИ породы в скважинах эллиптического сечения.

3 Вычислительные методы

В качестве исходных данных каротажных измерений используются результаты прямого моделирования распространения волн методом спектральных элементов (SEM). Ранее данный метод успешно применялся для расчета задач геофизики [11] и моделирования акустического каротажа [12]. Численный алгоритм производит решение уравнений линейно-упругого анизотропного тела в породе и акустических уравнений для невязкой жидкости внутри скважины с соответствующими условиями на границе раздела фаз. Подробное описание и формулировка метода приводится в работе [11]. Используемая в работе реализация производит основные расчеты на графических процессорах (GPU).

Основная обработка и анализ данных, в том числе и Alford rotation, проводились средствами MATLAB. Для построения дисперсионных кривых нормальных мод использовался алгоритм, основанный на модифицированном методе Прони [13]. При обработке данных измерений в некоторых случаях применялись оконные, низкочастотные и высокочастотные фильтры сигнала, реализованные в MATLAB.

Для анализа решения в частотной области в предположении однородности среды и геометрии по Z был выбран более простой и быстрый полуаналитический метод конечных элементов (SAFE) [7]. Формулировка метода основана на Фурье разложения искомой функции вдоль направления оси скважины, что позволяет свести задачу к набору двухмерных постановок. Приведем краткое описание метода. Предполагая гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$ для смещений \mathbf{u} , деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, уравнения движения твёрдого тела в вариационной форме могут быть представлены в виде:

$$\int_V^{(s)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^* \boldsymbol{\sigma} dV - \omega^2 \int_V^{(s)} \rho_s \delta \mathbf{u}^* \mathbf{u} dV = \int_V^{(s)} \delta \mathbf{u}^* \mathbf{f} dV + \int_{\partial V}^{(s)} \delta \mathbf{u}^* \mathbf{t} d\Gamma, \quad (3)$$

здесь \mathbf{f} , \mathbf{t} – векторы объёмных и поверхностных сил, ρ_s – плотность, тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ связан с тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ для упругого тела через закон Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

При описании движения невязкой жидкости будем пользоваться формулировкой уравнений в терминах потенциала скорости ϕ : $i\omega \mathbf{u}_f = \nabla \phi$. Тогда давление в жидкости определяется выражением $p = -i\omega \rho_f \phi$, а уравнения движения для жидкой среды в вариационной форме имеют вид:

$$\int_V^{(f)} \delta (\nabla \phi)^* \rho_f \nabla \phi dV - \omega^2 \int_V^{(f)} c^{-2} \rho_f \delta \phi^* \phi dV = \frac{1}{i\omega} \int_{\partial V}^{(f)} \rho_f \delta (\nabla \phi)^* \mathbf{t} d\Gamma + \frac{1}{i\omega} \int_V^{(f)} \delta (\nabla \phi)^* \mathbf{f} dV, \quad (4)$$

где c – скорость звука в жидкости.

Свяжем вертикальную ось скважины с направлением оси Z системы координат и применим преобразование Фурье по z к исходным уравнениям. Для каждого элемента из сетки конечных элементов в плоскости поперечного сечения скважины значения искомых величин аппроксимируем системой базисных функций $N_j(x, y)$ [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)}(x, y, z, t) &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n N_j(x, y) U_x^{(j)} \\ \sum_{j=1}^n N_j(x, y) U_y^{(j)} \\ \sum_{j=1}^n N_j(x, y) U_z^{(j)} \end{bmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \\ \phi^{(e)}(x, y, z, t) &= \left(\sum_{j=1}^n N_j(x, y) \psi^{(j)} \right) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (5)$$

где n – число узлов в элементе с номером e .

С учётом условий на границе раздела жидкости и твёрдого тела при подстановке неизвестных (5) в уравнения (3) и (4) задача сводится к системе линейных уравнений [7, 15]:

$$(\mathbf{K}_1 + ik\mathbf{K}_2 + k^2\mathbf{K}_3 - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{P})\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (6)$$

где матрицы \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_3 , \mathbf{M} , \mathbf{P} формируются из значений объёмных и поверхностных интегралов в уравнениях (3) и (4) на элементах, а $\hat{\mathbf{U}}$ состоит из значений искомых величин $\mathbf{U}^{(j)}$ и $\psi^{(j)}$ в узлах каждого элемента.

Для каждого заданного значения частоты ω формулируется обобщённая задача на собственные значения для матрицы уравнения (6), решением которой являются пары собственных значений и векторов $[k_m, \hat{\mathbf{U}}_m]$, соответствующие различным волновым модам системы. Специальный отбор собственных векторов позволяет выделить компоненты волнового поля, соответствующие дипольным модам в скважине. Распределение амплитуды выбранного собственного решения в области скважины определяет направление поляризации моды на конкретной частоте. По данным на совокупности частот в определенном диапазоне была проанализирована частотная зависимость поляризации волн. Сравнение результатов моделирования таких зависимостей с данными, полученными прямой обработкой временных измерений с приемников, приведены в разделе 5.

4 Результаты обработки Alford rotation

Влияние несимметричности формы скважины на результат работы упомянутых алгоритмов определения главных направлений анизотропного тела рассмотрим на примере эллиптических скважин в ТИ породах Bakken Shale и Cotton Valey Shale. Обе породы относятся к классу глинистых сланцев и имеют скорость распространения поперечных волн превышающую скорость звука в жидкости в скважине (быстрые породы). Значение упругих постоянных материалов приведены в таблице 1. Ось симметрии ТИ породы наклонена по отношению к оси скважины под углом 90° (НТИ), в плоскости поперечного сечения скважины ось повернута относительно осей эллипса на $\theta = 45^\circ$. Определение угла θ является задачей алгоритма. В расчетах использовались скважины размерами полуосей 12.70×10.16 см (5×4 дюймов) и 15×10 см с соотношением полуосей эллипса соответственно 25% и 50%.

Метод спектральных элементов (SEM) использовался для моделирования результатов каротажных измерений, полученные записи с приёмников были поданы на вход исследуемых алгоритмов обработки. В качестве сигнала дипольного акустического источника в скважине была взята производная вейвлета Блэкмана-Харриса с центральной частотой 4 кГц. Полученные в результате обработки значения углов приведены в таблице 2.

Таблица 1: Параметры упругих анизотропных материалов

Название	Плотность кг/м ³	Упругие модули, ГПа					
		C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
Cotton Valey Shale	2640	74.73	14.75	25.29	58.84	22.05	29.99
Bakken Shale	2230	40.9	10.3	8.5	26.9	10.5	15.3

После поворота на найденный угол матрица измерений в идеальном случае должна стать диагональной. Величина E_{rel} отношения суммы квадратов значений недиагональных компонент полученной матрицы к диагональным характеризует степень адекватности применяемых методик и достоверность результатов. На модельных данных в недиагональных компонентах остается от 1% до 3% энергии. При этом значения углов значительно отличаются от заданного значения в 45°. Для сравнения, при обработке модельных измерений для цилиндрической скважины в анизотропной породе E_{rel} имеет существенно меньшие значения порядка 10⁻⁵% для обоих алгоритмов и точное совпадение значений углов.

Применение модифицированного метода Прони [13] к исходным трассам измерений позволяет построить дисперсионные кривые для гармоник сигнала с наиболее высокой амплитудой. В моделируемых задачах они соответствуют двум главным дипольным модам (рис. 1). Аналогичные кривые также были построены по результатам расчётов полуаналитическим методом конечных элементов (SAFE) и нанесены на графики для проверки точности. Опираясь на дисперсионные кривые, можно выделить диапазон низких частот, в котором скорость распространения волн оказывается ближе всего к скоростям поперечных волн в породе.

Как видно из таблицы 3, обработка данных, пропущенных через низкочастотный фильтр выделенного диапазона, может давать оценки углов, значительно отличающиеся от нефильтрованного случая. Также отметим, что при обработке фильтрованных данных наблюдается заметная неортогональность между направлениями поляризации дипольных мод на низких частотах и почти полностью ортогональная ориентация вдоль осей деформации формы скважины на высоких частотах. Следующий раздел будет посвящен более подробному обсуждению вопроса связи этих результатов с физической поляризацией распространяющихся волн.

Таблица 2: Результаты обработки исходных данных алгоритмами Alford rotation

	θ_1^o	θ_1^n	θ_2^o	θ_2^n	$\Delta\theta^n$	$E_{rel}^o, \%$	$E_{rel}^n, \%$
Bakken Shale (12.70 × 10.16)	15.56	14.72	-74.44	-73.92	1.36	3.0	3.0
Bakken Shale (15.00 × 10.00)	8.39	8.12	-81.61	-81.56	0.32	1.7	1.7
Cotton Valey Shale (12.70 × 10.16)	3.26	3.04	-86.74	-86.66	0.30	0.8	0.8
Cotton Valey Shale (15.00 × 10.00)	1.63	1.78	-88.37	-88.42	0.00	0.6	0.6

* здесь θ_1^o, θ_2^o и θ_1^n, θ_2^n соответствуют результатам, полученным ортогональной и неортогональной версией алгоритма. Величина E_{rel} обозначает отношение энергии недиагональных компонент матрицы измерений к полной энергии.

5 Сравнение с SAFE

Применение SAFE позволяет сравнить ранее полученные значения углов с рассчитанными направлениями поляризации дипольных мод в рамках используемой математической модели породы. После применения частотной фильтрации к исходному сигналу выделим частоту в спектре сигналов приемников с максимальной энергией и построим собственные

Таблица 3: Результаты расчетов с применением фильтров

	θ_1^o	θ_1^n	θ_2^o	θ_2^n	$\Delta\theta^n$	$E_{rel}^o, \%$	$E_{rel}^n, \%$
Bakken Shale (12.70×10.16)	15.56	14.72	-74.44	-73.92	1.36	3.0	3.0
-//-/- с НЧФ	49.41	40.46	-40.59	-35.41	14.13	2.0	1.2
-//-/- с ВЧФ	14.01	13.25	-75.99	-75.58	1.17	0.4	0.4
Bakken Shale (15.00×10.00)	8.39	8.12	-81.61	-81.56	0.32	1.7	1.7
-//-/- с НЧФ	41.21	25.71	-48.79	-31.97	32.32	22.1	20.0
-//-/- с ВЧФ	7.54	10.22	-82.46	-82.63	2.84	1.1	1.0
Cotton Valey Shale (12.70×10.16)	3.26	3.04	-86.74	-86.66	0.30	0.8	0.8
-//-/- с НЧФ	48.42	39.73	-41.58	-35.50	14.77	9.7	7.0
-//-/- с ВЧФ	2.77	3.26	-87.23	-87.43	0.69	0.45	0.45
Cotton Valey Shale (15.00×10.00)	1.63	1.78	-88.37	-88.42	0.00	0.6	0.6
-//-/- с НЧФ	6.03	7.73	-83.97	-56.60	25.67	7.9	7.3
-//-/- с ВЧФ	1.49	2.04	-88.51	-88.71	0.74	1.8	1.8

* здесь θ_1^o, θ_2^o и θ_1^n, θ_2^n соответствуют результатам, полученным ортогональной и неортогональной версией алгоритма. Величина E_{rel} обозначает отношение энергии недиагональных компонент матрицы измерений к полной энергии.

решения для двух дипольных мод на этой частоте. Учитывая более узкий частотный диапазон в фильтрованном сигнале, поляризация этих решений по нашему предположению должна быть близка результатам обработки Alford rotation. На рисунке 2 приведено сравнение значений углов из таблицы 3 для моделей в породе Bakken Shale с рассчитанными профилями амплитуды давления собственных векторов на частотах 3.29 кГц и 5.52 кГц, соответствующих максимумам энергии в спектре фильтрованных данных. Аналогичные данные для Cotton Valey Shale представлены на рисунке 3.

Представленные данные хорошо демонстрируют, что неортогональная версия Alford rotation дает более близкие оценки направлений поляризации дипольных волн на низких частотах. Поляризация в этом частотном диапазоне практически не отличается для случаев с эллиптичностью 25% и 50%. При этом направления поляризации основных мод, полученные по результатам моделирования SAFE, не совпадают с заданной ориентацией оси симметрии трансверсально-изотропной породы. Этот факт подтверждает неприменимость классического подхода оценки главных направлений ТИ породы в задачах такого типа.

Отметим, что близкие на первый взгляд к 45° значения угла классического ортогонального Alford rotation являются лишь случайным совпадением осредненных реальных поляризаций мод на этих частотах с заданным значением в модели. В пользу этого утверждения говорит факт, что энергия недиагональных компонент при ортогональной обработке почти на 10% выше.

Результаты обработки нефильтрованного сигнала в рассмотренных задачах, как видно из данных таблиц, дают близкие значения ориентации мод на высоких частотах. Интересно, что при этом поляризация мод почти ортогональна, но не совпадает с направлениями полуосей эллипса поперечного сечения скважины. При увеличении степени эллиптичности ствола это различие уменьшается. Таким образом, даже при корректной (с точки зрения диагонализации матрицы измерений) работе алгоритма полученное значение угла на направление главной оси анизотропного материала может не отвечать ни физическим свойствам породы, ни геометрической ориентации скважины.

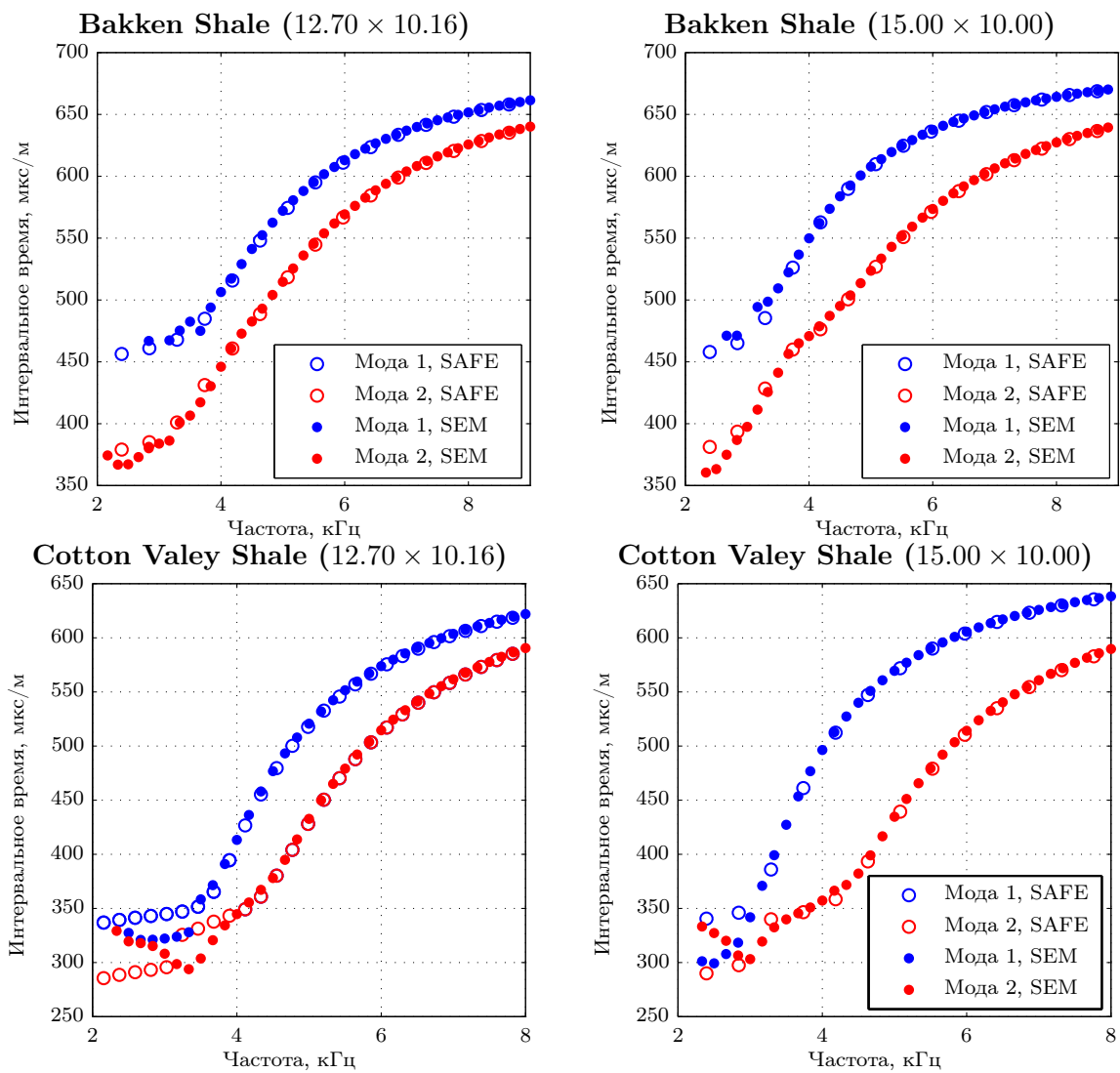


Рис. 1: Дисперсионные кривые для основных задач.

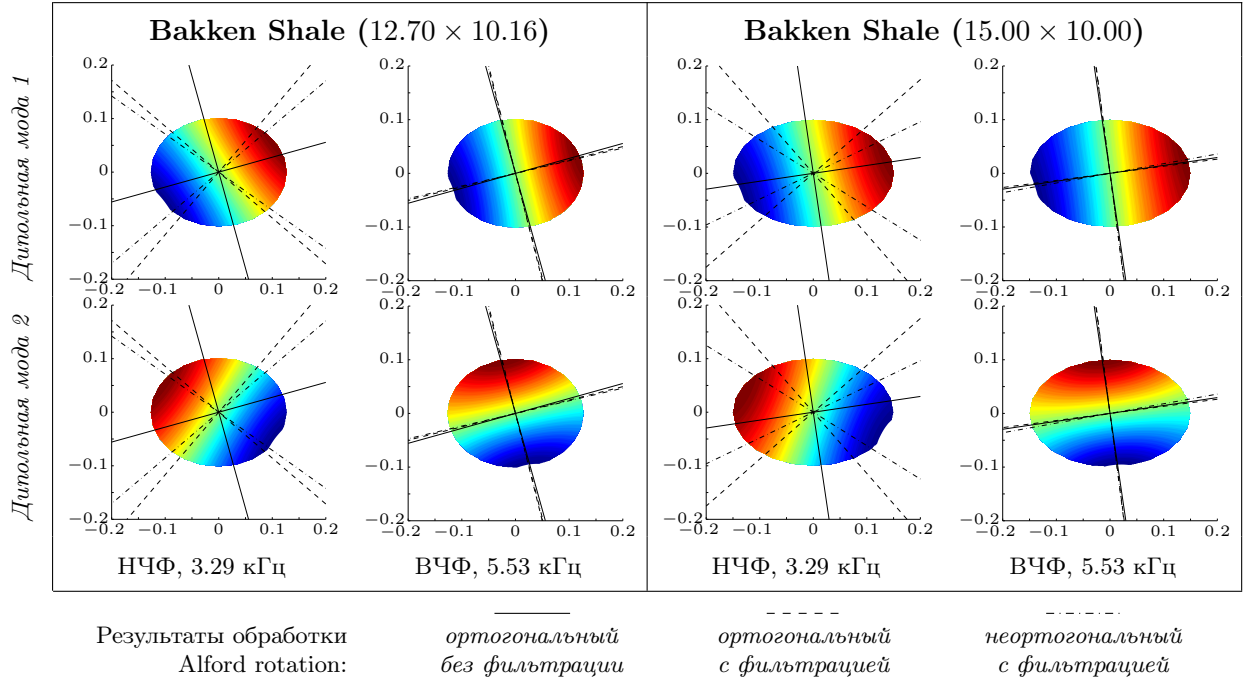


Рис. 2: Сравнение результатов обработки фильтрованных данных измерений в породе Bakken Shale и направлений поляризации двух дипольных мод, полученными SAFE. Здесь НЧФ и ВЧФ обозначают тип примененной к исходным данным фильтрации (низкочастотная и высокочастотная соответственно), значение частоты соответствует отображенному цветом решению SAFE для собственного вектора дипольной моды.

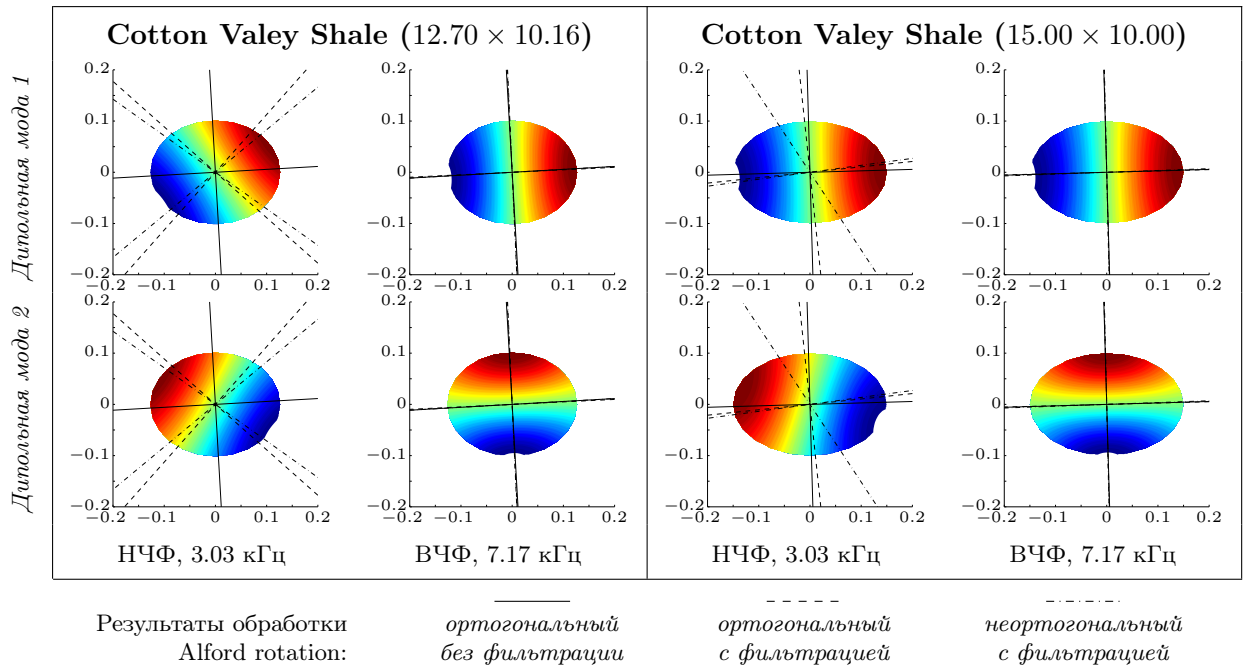


Рис. 3: Сравнение результатов обработки фильтрованных данных измерений в породе Cotton Valey Shale и направлений поляризации двух дипольных мод, полученными SAFE. Здесь НЧФ и ВЧФ обозначают тип примененной к исходным данным фильтрации (низкочастотная и высокочастотная соответственно), значение частоты соответствует отображенному цветом решению SAFE для собственного вектора дипольной моды.

6 Заключение

Как следует из данного исследования, результаты обработки каротажных измерений в быстрых породах ортогональным и неортогональным методами, основанными на диагонализации матрицы измерений, в значительной части определяются поляризацией нормальных мод на высоких частотах. При этом на примере расчета задачи нецилиндрической скважины в породе Bakken shale показано, что эти результаты могут не соответствовать главным направлениям анизотропной породы, что является серьезным недостатком при оценке этого параметра в задачах интерпретации.

Применение частотной фильтрации позволяет получить более точные оценки главных направлений анизотропной породы, однако требует учёта возможной неортогональности этих направлений. При исследовании пород с высокой степенью симметрии тензора упругих постоянных, ортогональность на низких частотах можно считать признаком корректности решения задачи.

Приведённый в статье материал демонстрирует возможности спектральных методов, схожих с полуаналитическим методом конечных элементов (SAFE), по анализу и интерпретации отдельных аспектов волнового поля в скважинах. Имея полученные из данных каротажа оценки упругих свойств анизотропной породы, при помощи численного моделирования SAFE можно проводить коррекцию полученных значений направлений, опираясь на невязку с модельными углами на нескольких выбранных частотах в зависимости от частотного спектра источника. Высокая скорость расчетов, а также возможность расширения метода на среды с более общим типом анизотропии, среды с затуханием и преднапряженных пород, открывает широкие перспективы применения рассмотренной методики при обработке каротажных измерений.

Список литературы

- [1] D. Patterson and X. M. Tang. Shear wave anisotropy measurement using cross-dipole acoustic logging: An overview. *Petrophysics*, 42(2), 2001.
- [2] R. M. Alford. Shear data in the presence of azimuthal anisotropy: Dilley Texas. In *1986 SEG Annual Meeting*, pages 476–479. Society of Exploration Geophysicists, 1986.
- [3] J. Dellinger, J. Etgen, and B. Nolte. Symmetric alford diagonalization. *1998 SEG Annual Meeting*, 1998.
- [4] B. Nolte, R. Rao, and X. Huang. Dispersion analysis of split flexural waves. Technical Report 1993, Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory, 1997.
- [5] C. J. Randall. Modes of noncircular fluid-filled boreholes in elastic formations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(3):1002–1016, 1991.
- [6] D. Komatitsch, C. Barnes, and J. Tromp. Wave propagation near a fluid-solid interface: A spectral element approach. *Geophysics*, 65(2):623–631, March 2000.
- [7] I. Bartoli, A. Marzani, F. L. di Scalea, and E. Viola. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 295:685–707, 2006.
- [8] M. J. P. Musgrave. *Crystal Acoustics: Introduction to the Study of Elastic Waves and Vibrations in Crystals*. Holden-Day, San Francisco, 1970.
- [9] J. Dellinger, B. Nolte, and J. T. Etgen. Alford rotation, ray theory, and crossed-dipole geometry. *Geophysics*, 66(2):637, 2001.

- [10] B. Nolte and A. C. H. Cheng. Estimation Of Nonorthogonal Shear Wave Polarizations And Shear Wave Velocities From Four-Component Dipole Logs. Technical report, Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory, 1996.
- [11] D. Komatitsch and J. Tromp. Introduction to the spectral element method for three dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 139:806–822, 1999.
- [12] M. Charara, A. Vershinin, E. Deger, D. Sabitov, and G. Pekar. 3D spectral element method simulation of sonic logging in anisotropic viscoelastic media. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*, pages 432–437, January 2011.
- [13] M. P. Ekstrom. Dispersion estimation from borehole acoustic arrays using a modified matrix pencil algorithm. In *Proceedings of ASILOMAR-29*, pages 449–453, Pacific Grove, CA, USA, 1995. IEEE.
- [14] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *Finite Element Method (5th Edition) Volume 1 - The Basis*. Elsevier, April 2000.
- [15] Fabien Treyssède and Laurent Laguerre. Numerical and analytical calculation of modal excitability for elastic wave generation in lossy waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(6):3827–37, 2013.