

**Hinweise zur Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung 2027 im Land Berlin****Prüfungsschwerpunkte Mathematik 2027****Leistungskurs****1. Schwerpunkte**

Grundlage für die Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe in der Ausgabe von 2021 mit dem Fachteil C Mathematik in der Fassung von 2014 und die Bildungsstandards der KMK für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss der KMK vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den im o. g. Rahmenlehrplan beschriebenen bzw. aufgelisteten abschlussorientierten Standards.

Davon wird in der Abiturprüfung **nicht** gefordert:

- K1 Beweise erläutern oder entwickeln
- L5 Simulationen
- L4 komplexe gebrochen-rationale Funktionen

**2. Struktur der Aufgabenvorschläge****2.1 Aufgabenstellungen und Aufgaben**

Jeder Aufgabenvorschlag besteht aus dem Prüfungsteil A (hilfsmittelfreier Teil) und dem Prüfungsteil B (Bearbeitung mit Hilfsmitteln).

Der Prüfungsteil A besteht aus mehreren nicht zusammenhängenden Aufgaben jeweils geringen Umfangs. Der Prüfungsteil B enthält umfangreichere Aufgaben, die jeweils in zusammenhängende Teilaufgaben gegliedert sind; dazu können auch Teilaufgaben gehören, bei deren Bearbeitung Hilfsmittel keine Rolle spielen oder keinen nennenswerten Vorteil bieten. Zum Prüfungsteil A werden zwei Aufgabengruppen bereitgestellt, die sich dadurch unterscheiden, dass die Aufgaben der Aufgabengruppe 1 den Anforderungsbereichen I und II zuzuordnen sind, während die Aufgaben der Aufgabengruppe 2 zumindest in einer Teilaufgabe den Anforderungsbereich III erreichen.

Zum Prüfungsteil A werden den Prüflingen aus der Aufgabengruppe 1 vier Aufgaben zur Bearbeitung vorgelegt, die ohne Wahlmöglichkeiten bearbeitet werden müssen.

Außerdem werden weitere sechs Aufgaben der Aufgabengruppe 2 zur Auswahl gestellt. Von diesen sechs müssen zwei beliebige Aufgaben bearbeitet werden.

Im Prüfungsteil B sind voneinander unabhängige, komplexe Aufgaben zu bearbeiten. Dafür stehen die zugelassenen Hilfsmittel zur Verfügung. Mindestens eine Aufgabenstellung bezieht sich dabei auf das Themengebiet Analysis. Weitere Aufgabenstellungen beziehen sich auf die Themengebiete Analytische Geometrie und Stochastik.

Im Prüfungsteil B des Aufgabenvorschlags kann es Aufgaben geben, die verpflichtend zu bearbeiten sind, und Aufgaben, bei denen die Prüflinge eine Auswahl zwischen gleichwertigen Aufgaben treffen können. Für jeden Aufgabenvorschlag erfüllt die Verteilung der Teilleistungen auf die drei Anforderungsbereiche die Vorgaben der Bildungsstandards der KMK für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik.

Für jeden Aufgabenvorschlag erfüllt die Verteilung der Teilleistungen auf die drei Anforderungsbereiche die Vorgaben der ländergemeinsamen Vereinbarungen im Fach Mathematik.

## 2.2 Aufgabenarten

Im Prüfungsteil A, den hilfsmittelfreien Aufgaben, bezieht sich jede Aufgabe auf ein Sachgebiet, die Aufgaben und ihre Teilaufgaben stehen in keinem übergeordneten Zusammenhang.

Im Prüfungsteil B ist jede Aufgabe in mehrere Teilaufgaben untergliedert. Jede dieser Aufgaben enthält Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen.

Es gelten die Regelungen der AV Prüfungen, Anlage 3a - Mathematik, in der jeweils geltenden Fassung.

Die Aufgaben für das MMS (CAS)-Abitur (siehe 3.) haben vergleichbare inhaltliche Schwerpunkte und eine gleichwertige Verankerung im Rahmenlehrplan, können sich jedoch u. U. deutlich von den Aufgaben unterscheiden, die ohne MMS (CAS) zu bearbeiten sind. Die Aufgaben für das MMS (CAS)-Abitur sind nicht auf eine spezielle Software oder ein spezielles Gerät hin ausgerichtet.

## 2.3 Inhaltliche Schwerpunkte

Die Prüfungsaufgabe beinhaltet Teilaufgaben, durch die alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen überprüft werden (K1 mathematisch argumentieren, K2 Probleme mathematisch lösen, K3 mathematisch modellieren, K4 mathematische Darstellungen verwenden, K5 mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, K6 mathematisch kommunizieren). Die fachlichen Inhalte und Themen ergeben sich aus den in den o. g. Rahmenlehrplänen festgelegten abschlussorientierten Standards.

Bei den in der schriftlichen Abiturprüfung zu bearbeitenden Aufgaben werden innermathematische und realeitsbezogene Anforderungen in einem ausgewogenen Verhältnis gestellt.

Mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten, die in der Sekundarstufe I erworben werden müssen und im Rahmenlehrplan als Eingangsvoraussetzungen für die gymnasiale Oberstufe genannt werden, sind ebenfalls bei der Bearbeitung der Prüfungsaufgabe zu nutzen bzw. anzuwenden.

Die unten genannten inhaltlichen Schwerpunkte beziehen sich sowohl auf die Aufgaben im hilfsmittelfreien Teil, als auch auf die komplexen Aufgaben den drei Sachgebieten. Dabei können die genannten Inhalte in vielfältiger Weise zum Tragen kommen: Zum Berechnen, Skizzieren, Interpretieren, Beschreiben, Beurteilen, Erläutern, Nachweisen, Begründen, Untersuchen und Argumentieren, aber auch für das Angeben, Nennen, Konstruieren, Ermitteln oder Untersuchen von Beispielen oder Objekten, die bestimmte vorgegebene Bedingungen erfüllen. Bei der Bearbeitung von komplexen Aufgaben ist es auch erforderlich, mehrere Schritte zur Lösung einer Teilaufgabe einzusetzen.

### 2.3.1 Allgemein

- Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke
- Zusammenhang zwischen Masse, Volumen und Dichte
- Zusammenhang zwischen Zeit und Uhrzeit

### 2.3.2 Analysis

#### Allgemeines

- Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion
- Zusammenhang zwischen Definitionsmenge einer Funktion und der Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion
- Einfluss von Parametern auf den Verlauf von Funktionsgraphen basierend auf Grundlagen der Sekundarstufe I (auch Verschiebungen entlang der y-Achse, Verschiebungen entlang der x-Achse, Spiegelungen an der x-Achse oder der y-Achse, Streckungen/Stauchungen)

- Zusammenhang zwischen der Funktionsgleichung, dem Funktionsgraphen und den charakteristischen Punkten von trigonometrischen Funktionen der Form  $f(x) = a \sin(bx + c) + d$  und  $g(x) = a \cos(bx)$  gemäß dem Rahmenlehrplan der Sekundarstufe I (siehe RLP 1-10, S. 57, Niveau H)

#### *Gleichungen und Gleichungssysteme*

- Verfahren zur Lösung von linearen, quadratischen und biquadratischen Gleichungen sowie Gleichungen höheren Grades unter Verwendung der Linearfaktorzerlegung
- natürliche Exponentialgleichungen unter Anwendung des natürlichen Logarithmus und der Logarithmen- gesetze für den natürlichen Logarithmus
- ein Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme (bis 3 x 3)
- Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems (eine Lösung, keine Lösung, unendliche viele Lösungen)
- grundlegende Wurzelgleichungen

#### *Differentialrechnung*

Betrachtet werden können Funktionen und Funktionenscharen, die in einfachen Fällen durch Verknüpfungen (additiv, multiplikativ) und Verkettungen zweier Funktionen aus den folgenden Funktionsklassen gebildet werden können:

- natürliche Exponentialfunktionen
- ganzrationale Funktionen
- Potenzfunktionen der Form  $f(x) = a \cdot x^n; a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}$  (auch  $f(x) = (ax + b)^{-n}$ )
- natürliche Logarithmusfunktionen
- grundlegende Wurzelfunktionen
- grundlegende Sinus- und Kosinusfunktionen
- Eigenschaften der oben genannten Funktionen: Definitionsbereich, Wertebereich, Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung und Achsensymmetrie zur y-Achse, Verhalten im Unendlichen, Extrempunkte, Wendepunkte, Sattelpunkte, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Monotonie, Randextrema, Darstellung der Graphen aus den ermittelten Eigenschaften
- Grenzwerte von Funktionen ( $x \rightarrow \pm\infty; x \rightarrow x_0$ ) auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs auch bei der Bestimmung von Ableitungen
- Sekanten- und Tangentensteigungen an Funktionsgraphen
- Tangenten- und Normalengleichungen
- Schnittwinkel zwischen Funktionsgraphen
- Mittlere und lokale Änderungsrate
- Berechnung und Deutung von Änderungsraten
- Untersuchung von Zusammenhängen und Beschreibung und Modellierung von Sachsituationen (u. a. Rekonstruktion von Funktionsgleichungen, Extremalprobleme)
- Ortskurven von Extrem- und Wendepunkten von Funktionsscharen
- Einfluss der Parameter bei Sinus- und Kosinusfunktionen auf den Verlauf der Graphen
- Beschreibung periodischer Vorgänge

#### *Ableitungsregeln und Ableitungsbegriff*

- Ableitung als lokale Änderungsrate, Anstieg der Tangente
- Funktionale Beschreibung und Interpretation von Änderungsraten
- Ableitung mithilfe von Konstantenregel, Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Kettenregel von Funktionen
- Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie, Krümmungsverhalten, Extrema, Wendepunkten (notwendige Bedingung und inhaltliche Begründung zur Existenz)
- Zusammenhänge zwischen Ableitungsgraph und Funktionsgraph

### *Integralrechnung*

Betrachtet werden können Funktionen und Funktionenscharen, die in einfachen Fällen durch Verknüpfungen (additiv, multiplikativ) und Verkettungen zweier Funktionen aus folgenden Funktionsklassen (bei Exponentialfunktionen und Potenzfunktionen mit negativen Exponenten nur Verkettungen mit linearer innerer Funktion) gebildet werden können:

- natürliche Exponentialfunktionen
  - ganzrationale Funktionen
  - Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten ( $n \neq -1$ )
  - grundlegende Wurzelfunktionen
  - grundlegende Sinus- und Kosinusfunktionen
- Grenzwerte von Funktionen (propädeutischer Grenzwertbegriff) für die Bestimmung des Integrals
  - Bestimmtes Integral insbesondere als rekonstruierten Bestand
  - Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
  - Integrieren als Umkehrung des Differenzierens
  - Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals (Faktorregel, Summenregel, Additivität der Integrationsbereiche)
  - Integrationsregeln: Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Konstantenregel, Integration durch lineare Substitution
  - Zusammenhang zwischen Funktionsgraphen der Funktion, der Ableitungsfunktion und der Stammfunktion
  - Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalten
  - Inhalte von Flächen mit Begrenzung durch Funktionsgraphen, durch Koordinatenachsen oder durch achsenparallele Geraden
  - Inhalte unbegrenzter Flächen mittels uneigentlicher Integrale
  - Anwendung der Integralrechnung zur Volumenberechnung von Rotationskörpern (auch von zusammengesetzten Rotationskörpern) bei Rotation eines Graphen um die x-Achse
  - Berechnung von Scharparametern bzw. von Integrationsgrenzen bei gegebenem Volumen oder Flächeninhalt

### **2.3.3 Analytische Geometrie**

#### *Zwei- bzw. dreidimensionales Koordinatensystem*

- Darstellen von Punktmengen, Geraden, Ebenen, Körpern
- Länge einer Strecke, Mittelpunkt einer Strecke, Teilverhältnisse von Strecken
- Nutzen spezifischer Eigenschaften geometrischer Körper und ebenen Figuren aus der Sekundarstufe I (auch Ähnlichkeit)

#### *Vektoren im Anschauungsraum*

- Vektorbegriff
- Addition von Vektoren
- Kommutativgesetz, Assoziativgesetz bei der Vektoraddition
- Nullvektor, Gegenvektor
- Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl
- Distributivgesetz bei der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl
- Koordinatendarstellung von Vektoren
- Betrag eines Vektors
- Einheitsvektor
- Ortsvektor
- lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

- Untersuchung von Vektoren auf Kollinearität
- Darstellung eines Vektors als Linearkombination anderer Vektoren
- Beschreibung geometrischer Objekte mittels Vektoren

#### Affine Geometrie

- Parametergleichung einer Geraden
- Lagebeziehung zwischen Punkt und Gerade
- Lagebeziehung zwischen Geraden (Schnittpunkt, parallel, identisch, windschief)
- Geradenscharen
- Strecken und Vielecke als Teile von Geraden und Ebenen
- Parametergleichung und Koordinatenform einer Ebene
- Lagebeziehung zwischen Punkt und Ebene, Gerade und Ebene (Durchstoßpunkt, Spurpunkte), Ebene und Ebene (Schnittgerade, Spurgerade)
- Ebenenscharen
- Gleichungssysteme mit bis zu drei Variablen und ihre Lösungen (geometrisch, algebraisch)

#### Metrische Geometrie

- Skalarprodukt, geometrische Deutung des Skalarproduktes
- Schnittwinkel (zwischen Geraden, Gerade und Ebene, sowie Ebene und Ebene)
- Orthogonalität von Vektoren
- Orthogonalität von Geraden, Ebenen, Gerade und Ebene
- Normalengleichung von Ebenen, Zusammenhang zwischen Parameter-, Normalen- und Koordinaten-gleichung einer Ebene
- Abstandsberechnungen (über Ermittlung von Lotfußpunkten; Abstandsformeln und Hessesche Normalen-form sind nicht notwendig):
  - Abstand eines Punktes zu einem Punkt
  - Abstand eines Punktes zu einer Geraden
  - Abstand zueinander paralleler Geraden
  - Abstand windschiefer Geraden
  - Abstand eines Punktes von einer Ebene
  - Abstand zueinander paralleler Ebenen
  - Abstand einer Geraden zu einer parallelen Ebene
- Flächeninhalte und Volumina
- Spiegelungen an Ebenen

#### 2.3.4 Stochastik

##### Einführung in die Stochastik

- Grundbegriffe der Mengenlehre (leere Menge, Teilmenge, Vereinigungs-, Durchschnittsmenge)
- Symbolschreibweise von Ereignissen und deren Verknüpfungen
- Zufallsexperimente
- Ergebnisse, Ereignis, Gegenereignis
- kombinatorische Abzählverfahren gemäß dem Rahmenlehrplan der Sekundarstufe I (siehe RLP 1-10, S. 61)
- Vierfeldertafeln und Baumdiagramme (Pfadregeln)
- Anwendungssituationen mit Hilfe von Urnenmodellen (mit und ohne Zurücklegen)
- Lotto-Modell
- Lage- und Streumaßen einer Stichprobe (Maximum, Minimum, arithmetisches Mittel, Modalwert, Median, Erwartungswert, Spannweite, mittlere lineare Abweichung, Varianz, Standardabweichung)

- Beziehungen zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit
- Verwendung der Summenschreibweise unter Nutzung des Symbols  $\Sigma$

*Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung*

- Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von Zufallsgrößen
- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen

*Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung als spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung*

- Bernoulli-Experiment
- Bernoulli-Kette
- Binomialverteilung und ihre Kenngrößen ( $n, p$ ), Punktwahrscheinlichkeit, Intervallwahrscheinlichkeiten
- Eigenschaften der Binomialverteilung
- Binomialverteilung im Histogramm, auch kumulative Darstellungen
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen

*Bedingte Wahrscheinlichkeit*

- Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit
- Baumdiagramme und Vierfeldertafeln zur Ermittlung der totalen Wahrscheinlichkeit
- Baumdiagramme und Vierfeldertafeln zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten
- stochastische Abhängigkeit/Unabhängigkeit von Ereignissen

*Methoden der beurteilenden Statistik*

- Hypothesentests (Alternativtests, ein- und zweiseitige Signifikanztests) für binomialverteilte Zufallsgrößen)
- Unsicherheit der Ergebnisse von Hypothesentests
- Signifikanzniveau, Ablehnungsbereich, Entscheidungsregel
- Fehler 1. und 2. Art

*Normalverteilung als spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung*

- „Glockenform“ als Grundvorstellung normalverteilter Zufallsgrößen
- Einfluss von Erwartungswert und Standardabweichung auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion
- Bestimmen des zugehörigen Erwartungswerts und der zugehörigen Standardabweichung aus dem Term der Dichtefunktion zu einer normalverteilten Zufallsgröße mit Hilfe des Terms der Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswert und Standardabweichung normalverteilter Zufallsgrößen
- Normalverteilung als Grenzfall der Binomialverteilung
- Sigma-Regeln
- Satz von Moivre-Laplace

### 3. Hilfsmittel

Zugelassene mathematische Hilfsmittel sind

- ein Formeldokument, das für die Verwendung in der Abiturprüfung von der zuständigen Senatsverwaltung zugelassen ist
- Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig<sup>1</sup> sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen in jeder Form verfügen

Weitere zugelassene Hilfsmittel sind

- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Standard-Zeichenwerkzeuge

Die weiteren zugelassenen Hilfsmittel dürfen auch bei der Bearbeitung der Aufgaben des Prüfungsteils A verwendet werden.

Für Kurse, für die als Prüfungsfach Mathematik mit MMS (CAS) angegeben wird, erhalten die Schulen die MMS (CAS)-Aufgaben und die zugehörigen Erwartungshorizonte. Die Prüflinge nutzen (außer für den Prüfungsteil A) das an der Schule eingeführte MMS (CAS) -Rechengerät. Wird das MMS (CAS) als PC-Software eingesetzt, ist die Benutzung von weiterer Software über das CAS hinaus nicht zulässig. Ausgedruckte Dokumente sind nicht als Prüfungsleistung zugelassen; ggf. aber der Ausdruck von Grafiken.

MMS (CAS)-Geräte und MMS (CAS)-Software, die über folgende Funktionen verfügen, sind für den Einsatz im

MMS (CAS)-Abitur zugelassen:

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen (jeweils algebraisch),
- Differenzieren und Integrieren (jeweils algebraisch),
- Rechnen mit Vektoren und Matrizen (jeweils algebraisch),
- Berechnen von Werten der Binomialverteilung, der kumulativen Binomialverteilung und der Normalverteilung,
- Durchführen von Berechnungen in Tabellen,
- Darstellen von Graphen.

Außerdem wird vorausgesetzt, dass das CAS vor seiner Verwendung in einen Zustand versetzt wird, in dem ein Zugriff auf Dateien und Programme, die nicht zum Lieferumfang oder einem Systemupdate gehören, unterbunden ist.

### 4. Bewertungsgesichtspunkte

Die Begutachtung der Prüfungsarbeit erfolgt nach fachlichen, prüfungsdidaktischen und pädagogischen Gesichtspunkten auf der Grundlage des Erwartungshorizonts und der darin verbindlich vorgegebenen Verteilung der Bewertungseinheiten. Es dürfen nur ganze Bewertungseinheiten erteilt werden. Die Bewertung der Prüfungsarbeit erfolgt auf der Grundlage der rechtlichen Vorgaben. Sie muss durch die Randbemerkungen und das Gutachten nachvollziehbar sein.

Für richtig vollzogene Teilschritte, in die falsche Zwischenergebnisse eingegangen sind (Fehlerfortsetzung), wird die vorgegebene Anzahl der Bewertungseinheiten erteilt, es sei denn, Teilschritte haben sich durch die vorher begangenen Fehler wesentlich vereinfacht. Für andere als im Erwartungshorizont dargestellte, aber gleichwertige Lösungswege ist die Verteilung der Bewertungseinheiten für die jeweilige Teilaufgabe sinngemäß vorzunehmen.

<sup>1</sup> Ein Taschenrechner gilt als programmierbar und ist damit als Hilfsmittel nicht zugelassen, wenn durch fest eingespeicherte oder vom Benutzer einzuspeichernde Programme bzw. Formeln Lösungsalgorithmen automatisch ausgeführt werden. Zulässig ist aber, dass er über statistische Funktionen verfügt, insbesondere müssen Werte der Binomialverteilungen ermittelt werden können. Ein Taschenrechner gilt als grafikfähig und ist damit als Hilfsmittel nicht zugelassen, wenn er eine graphische Ausgabe besitzt. Ein Taschenrechner darf darüber hinaus auch keinen Textspeicher besitzen; zulässig sind hingegen fest eingespeicherte physikalische Konstanten.

## **5. Dauer und Organisation der Prüfung**

Die Arbeitszeit beträgt 330 Minuten und beinhaltet eine individuelle Lese- und Auswahlzeit für die Prüflinge. Zu Prüfungsbeginn stehen den Prüflingen sowohl die Aufgaben zum Prüfungsteil A als auch die zum Prüfungsteil B zur Bearbeitung zur Verfügung. Jeder Prüfling entscheidet selbst über den Zeitpunkt, zu dem er die Bearbeitung zum Prüfungsteil A abgibt und die mathematischen Hilfsmittel erhält. Dieser Zeitpunkt muss innerhalb der ersten 110 Minuten nach Prüfungsbeginn liegen.

Nach der Bearbeitung der Aufgaben des Prüfungsteils A entscheidet jeder Prüfling individuell, wann und in welcher Reihenfolge die Auswahlentscheidung bei den Aufgaben des Prüfungsteils B getroffen wird.

Die durch den Prüfling sowohl im Prüfungsteil A als auch im Prüfungsteil B gewählten Aufgaben müssen auf dem Deckblatt eindeutig gekennzeichnet werden.