CS245 Assignment 2

Nissan Pow

May 18, 2006

1. (3 points)

$\neg(p \wedge (\neg(\neg r \wedge (s \vee p)) \Rightarrow \neg(\neg p \Rightarrow q)))$	
$\neg(p \wedge (\neg\neg(\neg r \wedge (s \vee p)) \vee \neg(\neg\neg p \vee q)))$	(Implication $\times 2$)
$\neg(p \wedge ((\neg r \wedge (s \vee p)) \vee \neg(p \vee q)))$	(Double Negation $\times 2$)
$\neg(p \wedge ((\neg r \wedge (s \vee p)) \vee (\neg p \wedge \neg q)))$	(De Morgan)
$\neg p \vee \neg((\neg r \wedge (s \vee p)) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	(De Morgan)
$\neg p \vee (\neg(\neg r \wedge (s \vee p)) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$	(De Morgan)
$\neg p \vee ((\neg\neg r \vee \neg(s \vee p)) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q))$	(De Morgan $\times 2$)
$\neg p \vee ((r \vee \neg(s \vee p)) \wedge (p \vee q))$	(Double Negation $\times 3$)
$\neg p \vee ((r \vee (\neg s \wedge \neg p)) \wedge (p \vee q))$	(De Morgan)
$(\neg p \vee (r \vee (\neg s \wedge \neg p))) \wedge (\neg p \vee (p \vee q))$	(Distributivity)
$(\neg p \vee ((r \vee \neg s) \wedge (r \vee \neg p))) \wedge (\neg p \vee (p \vee q))$	(Distributivity)
$(\neg p \vee (r \vee \neg s)) \wedge (\neg p \vee (r \vee \neg p)) \wedge (\neg p \vee (p \vee q))$	(Distributivity)
$(\neg p \vee (r \vee \neg s)) \wedge (\neg p \vee (\neg p \vee r)) \wedge (\neg p \vee (p \vee q))$	(Commutativity)
$((\neg p \vee r) \vee \neg s) \wedge ((\neg p \vee \neg p) \vee r) \wedge ((\neg p \vee p) \vee q)$	(Associativity $\times 3$)
$((\neg p \vee r) \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee r) \wedge ((\neg p \vee p) \vee q)$	(Idempotence)
$((\neg p \vee r) \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (true \vee q)$	(Excluded Middle)
$((\neg p \vee r) \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee r) \wedge true)$	(Simplification I)
$(\neg p \vee r) \wedge true$	(Simplification II)
$(\neg p \vee r)$	(Simplification I)

2. (10 points)

(a) Fragment #1	(b) Fragment #2
P1: $(\neg a \lor b) \land (\neg a \land \neg b)$	P1: $\neg(a \land \neg b) \land (\neg a \land \neg b)$
P2: $(\neg a \lor b) \land \neg(\neg a \land \neg b) \land b$	P2: $\neg(a \land \neg b) \land \neg(\neg a \land \neg b)$
P3: $(\neg a \lor b) \land \neg(\neg a \land \neg b) \land \neg b$	P3: false
P4: $\neg(\neg a \lor b)$	P4: $(a \land \neg b)$
P5: $\neg a \lor b \lor (a \land \neg b)$	P5: true

(c) RTS: Fragment #1 and Fragment #2 have the same behaviour.

$P1_1$:

$(\neg a \lor b) \land (\neg a \land \neg b)$
$\neg(a \land \neg b) \land (\neg a \land \neg b)$ (De Morgan)
$\equiv P1_2$

$P2_1$:

$(\neg a \lor b) \land \neg(\neg a \land \neg b) \land b$
$(\neg a \lor b) \land (\neg\neg a \lor \neg\neg b) \land b$ (De Morgan)
$(\neg a \lor b) \land (a \lor b) \land b$ (Double Negation $\times 2$)
$(\neg a \lor b) \land b$ (Simplification II)
b (Simplification II)

$P2_2$:

$\neg(a \land \neg b) \land \neg(\neg a \land \neg b)$
$(\neg a \lor \neg\neg b) \land (\neg\neg a \lor \neg\neg b)$ (De Morgan $\times 2$)
$(\neg a \lor b) \land (a \lor b)$ (Double Negation $\times 2$)
$(b \lor \neg a) \land (b \lor a)$ (Commutativity $\times 2$)
$b \lor (\neg a \land a)$ (Distributivity)
$b \lor false$ (Contradiction)
b (Simplification I)

Therefore $P2_1 \equiv P2_2$

$P3_1$:

$(\neg a \lor b) \land \neg(\neg a \land \neg b) \land \neg b$
$(\neg a \lor b) \land (\neg\neg a \lor \neg\neg b) \land \neg b$ (De Morgan)
$(\neg a \lor b) \land (a \lor b) \land \neg b$ (Double Negation $\times 2$)
$(b \lor \neg a) \land (b \lor a) \land \neg b$ (Commutativity $\times 2$)
$(b \lor (\neg a \land a)) \land \neg b$ (Distributivity)
$(b \lor false) \land \neg b$ (Contradiction)
$b \land \neg b$ (Simplification I)
$false$ (Contradiction)
$\equiv P3_2$

$P4_1$:

$\neg(\neg a \vee b)$	
$(\neg\neg a \wedge \neg b)$	(De Morgan)
$(a \wedge \neg b)$	(Double Negation)
$\equiv P4_2$	

$P5_1$:

$\neg a \vee b \vee (a \wedge \neg b)$	
$\neg a \vee \neg\neg b \vee (a \wedge \neg b)$	(Double Negation)
$\neg(a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg b)$	(De Morgan)
$true$	(Excluded Middle)
$\equiv P5_2$	

3. (12 points)

(a)

1	$p \vee \neg q$	Premise
2	$\neg r \Rightarrow \neg\neg q$	Premise
3	$r \Rightarrow \neg s$	Premise
4	$\neg\neg s$	Premise
5	s	4, ¬_E
6	$\neg p$	Assumption
7	$\neg q$	1, 6, ∨_E
8	$\neg\neg r$	2, 7, ⇒_E
9	r	8, ¬_E
10	$\neg s$	9, 3, ⇒_E
11	$false$	5, 10, ¬_E
12	$\neg\neg p$	6-11, ¬_I
13	p	12, $\not E$

(b)

1	$(p \vee q) \Rightarrow r$	Premise
2	q	Assumption
3	$p \vee q$	2, ∨_I
4	r	1, 3, ⇒_E
5	$q \Rightarrow r$	2-4, ⇒_I

(c)

1	$p \Rightarrow r$	Premise
2	$q \Rightarrow s$	Premise
3	$\quad \vert\; p \vee q$	Assumption
4	$\quad \vert\; \vert\; \neg(r \vee s)$	Assumption
5	$\quad \vert\; \vert\; \vert\; \neg r$	Assumption
6	$\quad \vert\; \vert\; \vert\; \neg p$	1, 5, $\Rightarrow$_E
7	$\quad \vert\; \vert\; \vert\; q$	3, 6, $\vee$_E
8	$\quad \vert\; \vert\; \vert\; s$	2, 7, $\Rightarrow$_E
9	$\quad \vert\; \vert\; \vert\; r \vee s$	8, $\vee$_I
10	$\quad \vert\; \vert\; \vert\; false$	4, 9, $\neg$_E
11	$\quad \vert\; \vert\; \neg\neg r$	5-10, $\neg$_I
12	$\quad \vert\; \vert\; r$	11, $\neg$_E
13	$\quad \vert\; \vert\; r \vee s$	12, $\vee$_I
14	$\quad \vert\; \vert\; false$	4, 13, $\neg$_E
15	$\quad \vert\; \neg\neg(r \vee s)$	4-14. $\neg$_I
16	$\quad \vert\; (r \vee s)$	15, $\neg$_E
17	$(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$	3-16, $\Rightarrow$_I

(d)

p	q	r	s	$\neg p \Rightarrow q$	$\neg r \Rightarrow s$	$\neg q \vee s$	$p \vee r$
F	T	F	T	T	T	T	F

In the truth table above, all the premises are true but the conclusion is false. Thus the argument is invalid.

(e)

1	$\neg p \Rightarrow q$	Premise
2	$\neg r \Rightarrow s$	Premise
3	$\neg q \vee \neg s$	Premise
4	$\quad \neg(p \vee r)$	Assumption
5	$\quad\quad p$	Assumption
6	$\quad\quad p \vee r$	5, $\vee$_I
7	$\quad\quad false$	4, 6, $\neg$_E
8	$\quad \neg p$	5-7, $\neg$_I
9	$\quad q$	1, 8, $\Rightarrow$_E
10	$\quad\quad \neg q$	Assumption
11	$\quad\quad false$	9, 10, $\neg$_E
12	$\quad \neg\neg q$	10-11, $\neg$_I
13	$\quad \neg s$	3, 12, $\vee$_E
14	$\quad \neg\neg r$	2, 13, $\Rightarrow$_E
15	$\quad r$	14, $\neg$_E
16	$\quad p \vee r$	15, $\vee$_I
17	$\quad false$	4, 16, $\neg$_E
18	$\neg\neg(p \vee r)$	4-17, $\neg$_I
19	$(p \vee r)$	18, $\neg$_E