1. Основи перешкодостійкого кодування

Отже, ми розглянули основи економного кодування даних, або кодування джерела в системах передачі інформації. Завдання кодера джерела – представити що підлягають передачі дані в максимально компактною і, по можливості, неспотвореній формі.

При передачі інформації по каналу зв'язку з перешкодами в прийнятих даних можуть виникати помилки. Якщо такі помилки мають невелику величину або виникають досить рідкий, інформація може бути використана споживачем. При великому числі помилок отриманою інформацією користуватися не можна.

Для зменшення кількості помилок, що виникають при передачі інформації по каналу з перешкодами, може бути використане кодування в каналі, або перешкодостійке кодування.

Можливість використання кодування для зменшення числа помилок в каналі була теоретично показана К. Шенноном в 1948 році в його роботі "Математична теорія зв'язку". У ній було зроблено твердження, що якщо швидкість створення джерелом повідомлень (продуктивність джерела) не перевершує деякої величини, званою пропускною спроможністю каналу, то при відповідному кодуванні і декодуванні можна звести вірогідність помилок в каналі до нуля.

Незабаром, проте, стало ясно, що фактичні обмеження на швидкість передачі встановлюються не пропускною спроможністю каналу, а складністю схем кодування і декодування. Тому зусилля розробників і дослідників в останні десятиліття були направлені на пошуки ефективних код, створення схем кодування і декодування, що практично реалізовуються, які по своїх характеристиках наближалися б до передбачених теоретично.

1.1. Основні принципи. Типи код

Кодування з виправленням помилок є методом обробки повідомлень, призначеним для підвищення надійності передачі по цифрових каналах. Хоча різні схеми кодування дуже несхожі один на одного і засновані на різних математичних теоріях, всім їм властиві дві загальні властивості.

Перше ? використання надмірності. Закодовані последо-вательности завжди містять додаткові, або надлишкові, символи. Кількість символів в кодовій послідовності Y завжди більша, ніж необхідно для однозначного представлення будь-якого повідомлення ?i з алфавіту.

Друге — властивість усереднювання, що означає, що надлишкові символи залежать від декількох інформаційних символів, тобто інформація, що міститься в кодовій послідовності X, перерозподіляється також і на надлишкові символи.

Існує два великі класи код, що коректують ? блокові і згортальні. Визначальна відмінність між цими кодами полягає у відсутності або наявності пам'яті кодера.

Кодер для блокових код ділить безперервну інформаційну послідовність X на блоки-повідомлення завдовжки до символів.

Кодер каналу перетворить блоки-повідомлення X в довші двійкові послідовності Y, що складаються з n символів і звані кодовими словами. Символи (n-к), що додаються до кожного блоку-повідомлення кодером, називаються надлишковими. Вони не несуть жодної додаткової інформації, і їх функція полягає в забезпеченні можливості виявляти (або виправляти) помилки, що виникають в процесі передачі.

Як ми раніше показали, до-розрядним двійковим словом можна представити 2k можливих значень з алфавіту джерела, їм відповідає 2k кодових слів на виході кодера.

Така безліч 2k кодових слів називається блоковим кодом.

Термін "без пам'яті" означає, що кожен блок з n символів залежить лише від відповідного інформаційного блоку з до символів і не залежить від інших блоків.

Кодер для згортальних код працює з інформаційною послідовністю без розбиття її на незалежні блоки. У кожен момент часу кодер з невеликого поточного блоку інформаційних символів розміром в b символів (блоку-повідомлення) утворює блок, що складається з v кодових символів (кодовий блок), причому v > b. При цьому кодовий v-символьный блок залежить не лише від b-символьного блока- повідомлення, присутнього на вході кодера зараз, але і від попередніх m блоків-повідомлень. У цьому, власне, і полягає наявність пам'яті в кодері.

Блокове кодування зручно використовувати в тих випадках, коли вихідні дані за своєю природою вже згруповані в які-небудь блоки або масиви.

При передачі по радіоканалах частіше використовується згортальне кодування, яке краще пристосоване до побітової передачі даних. Окрім цього, при однаковій надмірності згортальні коди, як правило, володіють кращою виправляючою здатністю.

1.2. Лінійні блокові коди

Для блокової коди з 2^k кодовими словами завдовжки в n символів, якщо він лише не володіє спеціальною структурою, апарат кодування і декодування є дуже складним. Тому обмежимо свій розгляд лише кодами, які можуть бути реалізовані на практиці.

Однією з умов тієї, що реалізовується блокових код при великих до є умова їх лінійності.

Що таке лінійний код?

Блоковий код довжиною n символів, що складається з 2^k кодових слів, називається лінійним (n, до) -кодом за умови, що все його 2^k кодових слів утворюють до-мірний підпростір векторного простору n- послідовностей двійкового поля GF(2).

Якщо сказати простіше, то двійковий код є лінійним, якщо сума по модулю 2 (mod2) двох кодових слів також є кодовим словом цієї коди.

Працюючи з двійковими кодами, ми постійно стикатимемося з елементами двійкової арифметики, тому визначимо основні поняття.

Полем називається безліч математичних об'єктів, які можна складати, віднімати, умножати і ділити.

Візьмемо просте поле, що складається з двох елементів ? нуля - 0 і одиниці - 1. Визначимо для нього операції складання і множення:

$$\begin{array}{ll} 0+0=0, & 0\cdot 0=0; \\ 0+1=1, & 0\cdot 1=0; \\ 1+0=1, & 1\cdot 0=0; \\ 1+1=0, & 1\cdot 1=1. \end{array}$$

Визначені таким чином операції складання і множення називаються складанням по модулю 2 (mod2) і множенням по модулю 2.

Відзначимо, що з рівності 1+1 = 0 витікає, що -1 = 1 і, відповідно, 1+1=1-1, а з рівності 1(1=1 ? що 1:1=1.

Алфавіт з двох символів 0 і 1 разом із складанням і множенням по mod2 називається полем з двох елементів і позначається як GF(2). До поля GF(2) застосовні всі методи лінійної алгебри, у тому числі матричні операції.

Ще раз звернемо увагу на те, що всі дії над символами в двійкових кодах виконуються по модулю 2.

Бажаною якістю лінійних блокових код є систематичність.

Систематичний код має формат, змальований на мал. 1.1, тобто містить незмінну інформаційну частину завдовжки до символів і надлишкову (перевірочну) довжиною n – до символів.

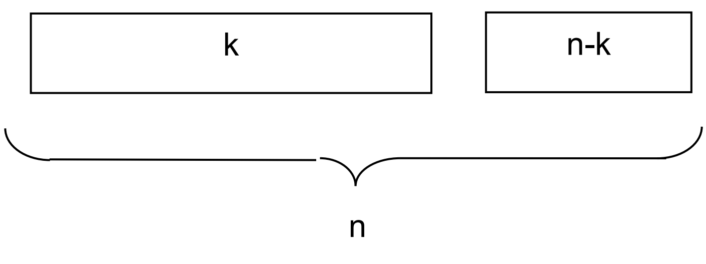


Рис. 1.1

Блоковий код, що володіє властивостями лінійності і систематичності, називається лінійним блоковим систематичним (n, до) -кодом.

1.2.1. Код з перевіркою на парність

Найпростішим лінійним блоковим кодом є (n,n-1) -код, побудований за допомогою однієї загальної перевірки на парність. Наприклад, кодове слово (4,3) -кода можна записати у вигляді вектора-стовпця:

$$\overline{U}^T = (m_0, m_1, m_2, m_0+m_1+m_2), \tag{1.1}$$

де m_i - символи інформаційної послідовності, що набувають значень 0 і 1, а підсумовування виробляється по модулю 2 (mod2).

Пояснимо основну ідею перевірки на парність.

Хай інформаційна послідовність джерела має вигляд

$$m = (1\ 0\ 1). \tag{1.2}$$

Тоді відповідна їй кодова послідовність виглядатиме таким чином :

$$U = (U_0, U_1, U_2, U_3) = (1\ 0\ 1\ 0), \tag{1.3}$$

где проверочный символ U_3 формируется путем суммирования по ***mod2*** символов информационной последовательности m :

$$U_3 = m_0 + m_1 + m_2. \tag{1.4}$$

Неважко відмітити, що якщо число одиниць в послідовності m парно, то результатом підсумовування буде 0, якщо непарно — 1, тобто перевірочний символ доповнює кодову послідовність так, щоб кількість одиниць в ній була парною.

При передачі по каналах зв'язку в прийнятій послідовності можлива поява помилок, тобто символи прийнятої послідовності можуть відрізнятися від відповідних символів переданої кодової послідовності (нуль переходить в одиницю, а 1 ? у 0).

Якщо помилки в символах мають однакову вірогідність і незалежні, то вірогідність того, що в n-позиционном коді станеться лише одна помилка, складе

$$P_1 = n \cdot P_{ош} \cdot (1 - P_{ош})^{n-1} \tag{1.5}$$

(тобто в одному біті помилка є, а у всіх останніх n - 1 бітах помилки немає).

Вірогідність того, що станеться дві помилки, визначається вже числом можливих поєднань помилок по дві (у двох довільних бітах помилка є, а у всіх останніх n - 2 бітах помилки немає):

$$\boldsymbol{P_2 = C_n^2 \cdot P_{ош} \cdot (1- P_{ош})^{n-2}}, \qquad (1.6)$$

і аналогічно для помилок вищої кратності.

Якщо вважати, що вірогідність помилки на символ прийнятої послідовності $\boldsymbol{P_{ош}}$ достатньо мала ($\boldsymbol{P_{ош} << 1}$), а інакше передача інформації не має сенсу, то вірогідність випадання рівно l помилок складе $\boldsymbol{P_l \cong P_{ош}^l}$.

Звідси видно, що найбільш вірогідними є одиночні помилки, менш вірогідними — подвійні, ще меншу вірогідність матимуть трикратні помилки і так далі

Якщо при передачі даного (4,3) -кода сталася одна помилка, причому неважливо, в якій його позиції, то загальне число одиниць в прийнятій послідовності r вже не буде парним.

Таким чином, ознакою відсутності помилки в прийнятій послідовності може служити парність числа одиниць. Тому такі коди і називаються кодами з перевіркою на парність.

Правда, якщо в прийнятій послідовності r сталися дві помилки, то загальне число одиниць в ній знову стане парним і помилка виявлена не буде. Проте вірогідність подвійної помилки значно менше вірогідності одиночной, тому найбільш вірогідні одиночні помилки таким кодом виявлятися все ж будуть.

На підставі загальної ідеї перевірки на парність і перевірочного рівняння (1.4) легко організувати схему кодування - декодування для довільної коди з простою перевіркою на парність.

Схема кодування може виглядати таким чином (рис. 1.2):

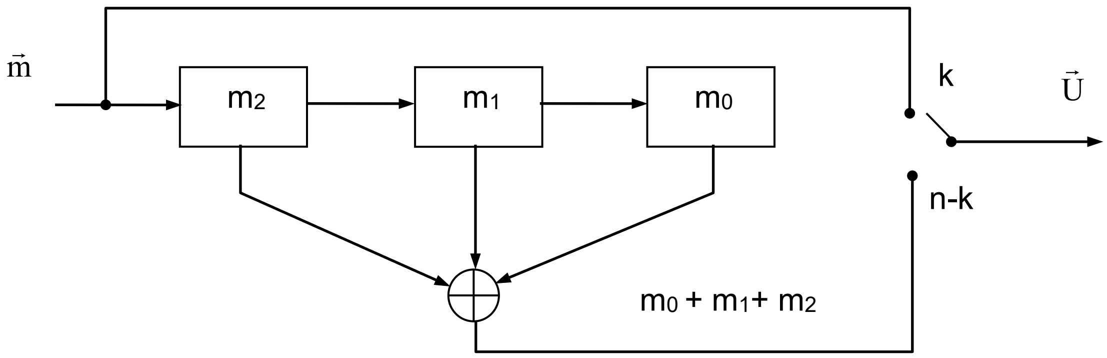


Рис. 1.2

Декодуючий пристрій для коди з перевіркою на парність змальований на рис. 1.3.

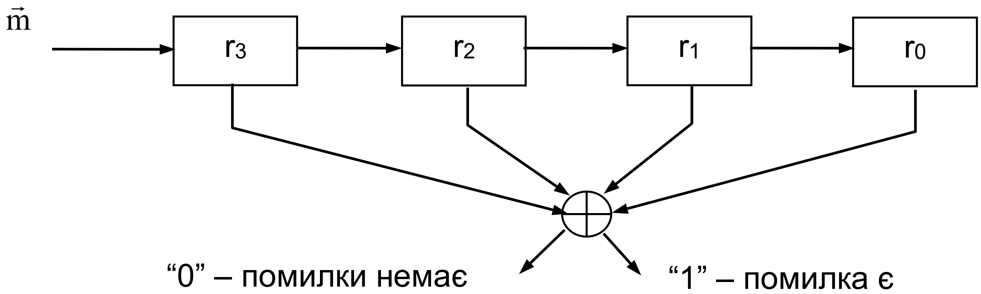


Рис. 1.3

Декодер, як це видно з мал. 1.3, перевіряє на парність загальне число одиниць в прийнятій послідовності і видає на своєму виході нуль або одиницю залежно від того, виконалася перевірка чи ні.

Відзначимо наступний момент. Якщо посимвольний скласти два кодові слова, що належать даному (4, 3) -коду:

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, a_0 + a_1 + a_2), \text{ и } \boldsymbol{b} = (b_0, b_1, b_2, b_0 + b_1 + b_2), \tag{1.7}$$

то отримаємо

$$\boldsymbol{c} = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_0+b_0+a_1+b_1+a_2+b_2) = (c_0, c_1, c_2, c_0+c_1+c_2), \tag{1.8}$$

тобто перевірочний символ в новому слові з визначається за тим же правилом, що і в доданках. Тому з також є кодовим словом даної коди.

Цей приклад відображає важливу властивість лінійних блокових код — замкнутість, що означає, що сума двох кодових слів даної коди також є кодовим словом.

Не дивлячись на свою простоту і не дуже високу ефективність, коди з перевіркою на парність широко використовуються в системах передачі і зберігання інформації. Вони цінуються за невисоку надмірність: досить додати до передаваної послідовності всього один надлишковий символ ? і можна взнати, чи є в прийнятій послідовності помилка. Правда, визначити місце цієї помилки і, отже, виправити її, поки не можна. Можна лише повторити передачу слова, в якому була допущена помилка, і тим самим її виправити.

1.2.2. Ітеративний код

Ще одна проста схема кодування, яка також часто використовується, може бути побудована таким чином.

Передбачимо, що потрібно передати, наприклад, дев'ять інформаційних символів $\boldsymbol{m = (m_0 , m_1 , ..., m_8).}$ Ці символи можна розташувати у вигляді квадратної матриці, як це показано в таблиці. 1.1, і додати до кожного рядка і кожного стовпця цієї таблиці по перевірочному символу (перевірка на парність).

Таблиця 1.1

m_0	m_1	m_2	$P_1 = m_0 + m_1 + m_2$
m_3	m_4	m_5	$P_2 = m_3 + m_4 + m_5$
m_6	m_7	m_8	$P_3 = m_6 + m_7 + m_8$
$m_0 + m_3 + m_6$	$m_1 + m_4 + m_7$	$m_2 + m_5 + m_8$	$m_0 + m_0 + m_1 + m_1 + \ldots + m_8 + m_8$

Таким чином, по рядках і по стовпцях цієї таблиці виконуватиметься правило парності одиниць.

Якщо в процесі передачі по каналу з перешкодами в цій таблиці станеться одна помилка (наприклад в символі m4), то перевірка на парність у відповідному рядку і стовпці (у нашому прикладі - $\boldsymbol{P_2}$ і $\boldsymbol{P_5}$) не виконуватиметься.

Іншими словами, координати помилки однозначно визначаються номерами стовпця і рядка, в яких не виконуються перевірки на парність. Таким чином, цей код, використовуючи різні перевірки на парність (по рядках і по стовпцях), здатний не лише виявляти, але і виправляти помилки (якщо відомі координати помилки, то її виправлення полягає просто в заміні символу на протилежний: якщо 0, то на 1, якщо 1 – те на 0).

Описаний метод кодування, званий ітеративним, виявляється корисним у разі, коли дані природним чином формуються у вигляді масивів, наприклад, на шинах ЕОМ, в пам'яті, що має табличну структуру, і так далі При цьому розмір таблиці в принципі не має значення (3x3 або 20x20), проте в першому випадку виправлятиметься одна помилка на 3x3=9 символів, а в другому – на 20x20=400 символів.

Звернемо увагу ще на один момент. Якщо в простому коді з перевіркою на парність для виявлення помилки доводиться додавати до інформаційної послідовності всього один символ, то для того, щоб код став виправляти однократну помилку, знадобилося до дев'яти інформаційних символів додати ще сім перевірочних.

Таким чином, надмірність цієї коди виявилася дуже великою, а виправляюча здатність – порівняно низькою. Тому зусилля фахівців в області перешкодостійкого кодування завжди були направлені на пошук таких код і методів кодування, які при мінімальній надмірності забезпечували б максимальну виправляючу здатність.

1.2.3. Матриця лінійної блокової коди, що породжує

Тільки що як приклад були розглянуті дві прості коди, що коректували, - код з простою перевіркою на парність, що дозволяє виявляти однократну помилку в прийнятій послідовності, і блоковий ітеративний код, що виправляє одну помилку за допомогою набору перевірок на парність по рядках і стовпцях таблиці. Проте формальне правило, по якому здійснюється кодування, тобто перетворення інформаційної послідовності в кодове слово, по-справжньому ще не визначене. Оскільки ж задаються блокові коди?

Простим способом опису, або завдання, код, що коректують, є табличний спосіб, при якому кожній інформаційній послідовності просто призначається кодове слово з таблиці коди (таблиця. 1.2)

Таблиця 1.2

m	***U***
000	***0000***
001	***0011***
010	***0101***
011	***0110***
100	***1001***
101	***1010***
110	***1100***
111	***1111***

Такий спосіб опису код, до речі, застосовний для будь-яких, а не лише лінійних код. Проте при великих до розмір кодової таблиці виявляється дуже великим, аби їм користуватися на практиці (для коди з простою перевіркою на парність двобайтового слова розмір таблиці складе $\sim 2^5 * 2^{16} = 2000000$ двійкових символів).

Іншим способом завдання лінійних блокових код є використання так званої системи перевірочних рівнянь, що визначають правило, по якому символи інформаційної послідовності перетворяться в кодові символи. Для того ж прикладу система перевірочних рівнянь виглядатиме таким чином:

$$\begin{aligned} U_0 &= m_0, \\ U_1 &= m_1, \\ U_2 &= m_2, \\ U_3 &= m_0 + m_1 + m_2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Проте найбільш зручним і наочним способом опису лінійних блокових код є їх завдання з використанням матриці, що породжує, компактною формою представлення системи перевірочних рівнянь, що є:

$$\underline{G} = \left| \begin{array}{c|c} 1\ 0\ 0 \ldots 0 & P_{00}\ \ P_{01} \ldots\ P_{0,n-k-1} \\ 0\ 1\ 0 \ldots 0 & P_{10}\ \ P_{11} \ldots\ P_{1,n-k-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots 1 & P_{k-1,0}\ \ P_{k-1,1} \ldots\ P_{k-1,n-k-1} \end{array} \right| . \tag{1.10}$$

одинична матриця $\mathbf{I}$ $k*k$ | матриця $\mathbf{P}$ $k*(n-k)$

Визначення. Лінійний блоковий систематичний (n,k) -код повністю визначається матрицею G розміром до (п з двійковими матричними елементами. При цьому кожне кодове слово є лінійною комбінацією рядків матриці G, а кожна лінійна комбінація рядків G - кодовим словом.

Хай $\boldsymbol{m} = (m_0, m_1, \ldots, m_{k-1})$ буде тим блоком-повідомленням, який необхідно закодувати з використанням даної коди.

Тоді відповідним йому кодовим словом U буде

$$U = m \cdot \underline{G}. \tag{1.11}$$

З врахуванням структури матриці G символи кодового слова U будуть такими:

для $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$

$$U_i = m_i; \tag{1.12}$$

для $i = k, k+1, \ldots, n$

$$U_i = m_0 \cdot P_{0j} + m_1 \cdot P_{1j} + m_2 \cdot P_{2j} + \ldots + m_{k-1} \cdot P_{k-1,j}\,. \qquad (1.13)$$

Іншими словами, до крайніх лівих символів кодового слова збігається з символами кодованої інформаційної послідовності, а останні (n - до) символів є лінійними комбінаціями символів інформаційної послідовності.

Визначений таким чином код називається лінійним блоковим систематичним (n,k) -кодом з узагальненими перевірками на парність, а задаюча його матриця G називається матрицею коди, що породжує.

Як приклад розглянемо відомий (7,4) -код Хеммінга, що є класичною ілюстрацією простих код з виправленням помилок.

Хай $\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{m_0, m_1, m_2, m_3})$ буде тим повідомленням, або інформаційною послідовністю, яку потрібно закодувати.

Матриця G, що породжує, для (7. 4) -кода Хеммінга має вигляд

$$\underline{G}_{(7,4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1.14)$$

Тоді символи відповідного кодового слова визначаються таким чином :

$$U = m \cdot \underline{G} = (m_0 m_1 m_2 m_3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m_0, m_1, m_2, m_3, m_0 + m_2 + m_3, m_0 + m_1 + m_2, m_1 + m_2 + m_3), \qquad (1.15)$$

або

$$\begin{aligned} U_0 &= m_0\,, \\ U_1 &= m_1, \\ U_2 &= m_2, \\ U_3 &= m_3, \\ U_4 &= m_0 + m_2 + m_3, \\ U_5 &= m_0 + m_1 + m_2, \\ U_6 &= m_1 + m_2 + m_3. \end{aligned} \qquad (1.16)$$

Наприклад, хай m = (1 0 1 1), тоді відповідне кодове слово матиме вигляд U = (1 0 1 1 1 0 0). Або інший приклад: хай m = (1 0 0 0), тоді U = (1 0 0 0 1 1 0).

Цікаво відзначити, що відповідно до приведеного вище визначення рядка матриці G самі є кодовими словами даної коди, а всі останні кодові слова - лінійними комбінаціями рядків матриці, що породжує.

На підставі матриці, що породжує $\underline{\boldsymbol{G}}_{(7,4)}$ (1.15) або приведеної системи перевірочних рівнянь (1.16) легко реалізувати схему кодування для даного (7,4) -кода Хеммінга (мал. 1.4).

Кодер працює точно так, як і при простій перевірці на парність, але тепер виконує не одну загальну, а декілька часткових перевірок, формуючи, відповідно, декілька перевірочних символів.

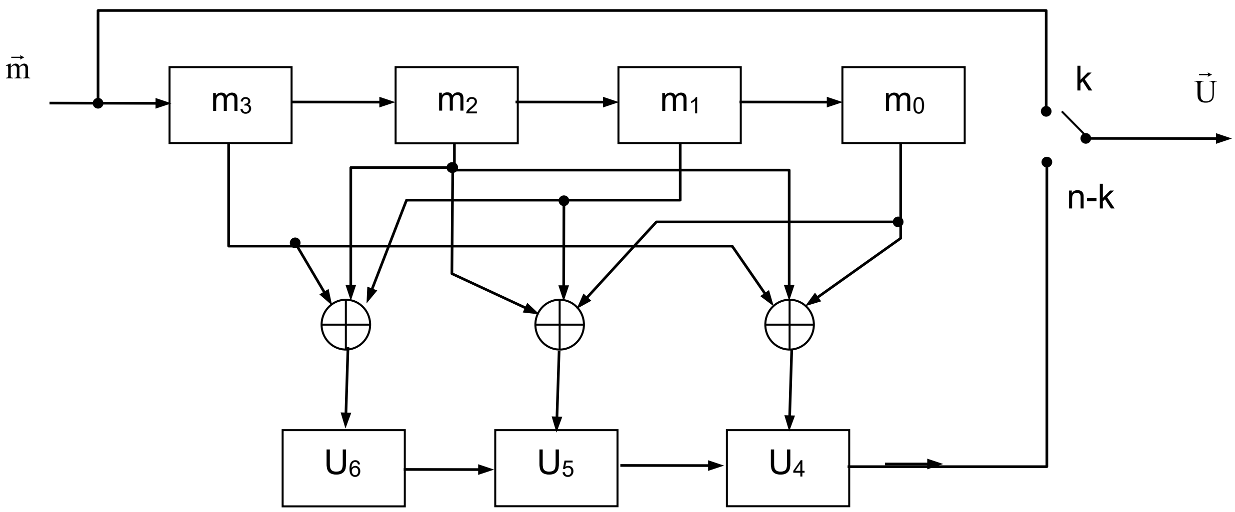


Рис. 1.4

1.2.4. Перевірочна матриця

Лінійний систематичний блоковий код може бути визначений також з використанням так званої перевірочної матриці **H**, що володіє наступною властивістю:

- *якщо деяка послідовність U є кодовим словом, то*

$$U * \underline{H}^T = \underline{0}. \qquad (1.17)$$

Іншими словами, перевірочна матриця H ортогональна будь-якій кодовій послідовності даної коди.

Перевірочна матриця має розмірність (n-к)(n і наступну структуру :

$$\left| \; P_{00} \quad P_{10} \quad \dots \quad P_{k-1,0} \;\middle|\; 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \; \right|$$

$$\underline{H} = \left| \begin{array}{cccc:ccccc} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{k-1,\,1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ P_{22} & P_{12} & \dots & P_{k-1,\,2} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{0,\,n-k-1} & P_{1,\,n-k-1} & \dots & P_{k-1,\,n-k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right|, \quad (1.18)$$

$$\underline{P}^T \qquad\qquad \underline{I}^1_{(n-k)\times(n-k)}$$

де $\underline{P}^T$ - транспонована підматриця P з матриці, що породжує $\underline{G}$;

$\underline{I}^1_{(n-k)\times(n-k)}$ - одинична матриця відповідного розміру.

Видно, що одинична і перевірочна підматриці в $\underline{G}$ и $\underline{H}$ помінялися місцями, крім того, змінився їх розмір.

Для того, що розглядається нами як приклад -кода Хеммінга перевірочна матриця $\underline{H}$ має вигляд

$$H_{(7,4)} = \left| \begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|. \quad (1.19)$$

Перевірочна матриця дозволяє легко визначити, чи є прийнята послідовність кодовим словом даної коди.

Хай, наприклад, прийнята послідовність символів c = **(1011001)**, тоді

$$c * H^T = (1011001) \left| \begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|^T = (1\ 1\ 0) \neq \underline{0}.$$

Звідси можна зробити вивід, що послідовність **c = (1011001)** не є кодовим словом даної коди.

Розглянемо інший приклад. Допустимо, прийнята послідовність d = (**0010111**), тоді

$$d \cdot \underline{H}^T = (0010111) \left| \begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|^T = (0\ 0\ 0) \neq \underline{0},$$

тобто двійкова послідовність d належить коду з перевірочною матрицею $\underline{H}$.

1.2.5. Дуальні коди

Розглядаючи матриці $\underline{G}$ і $\underline{H}$, можна зробити наступні цікаві виводи. Кожна з них містить безліч лінійно незалежних векторів, тобто кожна з матриць може розглядатися як базис деякого лінійного простору. Крім того, кожен з цих просторів є підпростором векторного простору, що складається зі всіх наборів двійкових символів довжиною n.

Скалярний твір кожного рядка матриці $\underline{\boldsymbol{G}}$ на кожен рядок матриці $\underline{\boldsymbol{H}}$ дорівнює нулю, тобто

$$\underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\boldsymbol{G}}^T = \underline{\boldsymbol{0}} \quad \text{и} \quad \underline{\boldsymbol{G}} \cdot \underline{\boldsymbol{H}}^T = \underline{\boldsymbol{0}}\,. \tag{1.20}$$

Отже, можна "поміняти ролями" ці дві матриці і використовувати $\underline{\boldsymbol{H}}$ як матрицю, що породжує, а $\underline{\boldsymbol{G}}$ як перевірочну матрицю деякого іншої коди.

Коди, зв'язані таким чином, називаються дуальними один одному, тобто, задавши яким-небудь чином лінійний блоковий код, ми автоматично задаємо і другий, дуальний йому код. Правда, якщо вихідний код був отриманий так, щоб мати мінімальну надмірність при заданій виправляючій здатності, то гарантувати хорошу якість дуальної йому коди ми не можемо. Такі коди зазвичай мають виправляючу здатність, однакову з початковими, але більшу, ніж у них, надмірність.

Наприклад, якщо розглянутий як приклад -код Хеммінга має надмірність 7/4 і при цьому дозволяє виправляти одну помилку в кодовому слові з 7 символів (про це детально говоритимемо в наступних розділах справжнього посібника), то дуальний йому код (7,3) також виправляє одну помилку на 7 символів, але вже має надмірність 7/3, тобто на 3 інформаційних символу містить 4 перевірочних.

1.2.6. Синдром і виявлення помилок

Перш ніж говорити про виявлення і виправлення помилок кодами, що коректують, визначимо само поняття помилки і методи їх опису.

Хай $\boldsymbol{U = (U_0 , U_1 ,\dots U_n)}$ є кодовим словом, переданим по каналу з перешкодами, а $\boldsymbol{r = (r_0 , r_1 , \dots r_n)}$ - прийнятою послідовністю, можливо, U, що відрізняється від переданого кодового слова . Відмінність r від U полягає в тому, що деякі символи $\boldsymbol{r_i}$ прийнятій послідовності можуть відрізнятися від відповідних символів $\boldsymbol{U_i}$ переданого кодового слова. Наприклад, $\boldsymbol{U = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)}$, а $\boldsymbol{r = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)}$, тобто сталася помилка в четвертому символі кодового слова, 1 перейшла в 0 . Або інший приклад: передано кодове слово U = (0 0 1 1 1 1), а прийнята послідовність має вигляд r = (1 0 1 1 1 1 1), тобто помилка виникла в першому біті кодового слова, при цьому 0 перейшов в одиницю.

Для опису помилок, що виникають в каналі, використовують вектор помилки, що зазвичай позначається як e і що є двійковою послідовністю довжиною n з одиницями в тих позиціях, в яких сталися помилки.

Так, вектор помилки e = (0 0 0 1 0 0 0) означає однократну помилку в четвертій позиції (четвертому біті), вектор помилки e = (1 1 0 0 0 0 0) - подвійну помилку в першому і другому бітах і так далі

Тоді при передачі кодового слова U по каналу з помилками прийнята послідовність r матиме вигляд

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{e}, \tag{1.21}$$

наприклад:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= (\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,), \\ \boldsymbol{e} &= (\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,), \\ \boldsymbol{r} &= (\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Прийнявши вектор r, декодер спочатку повинен визначити, чи є в прийнятій послідовності помилки. Якщо помилки є, то він повинен виконати дії з їх виправлення.

Абі перевірити, чи є прийнятий вектор кодовим словом, декодер обчислює (n-к) -последовательность, визначувану таким чином :

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \ldots, \boldsymbol{S_{n-k-1}}) = \boldsymbol{r} \cdot \underline{\boldsymbol{H}}^T. \tag{1.23}$$

При цьому r є кодовим словом тоді, і лише тоді, коли S = (00..0), і не є кодовим словом даної коди, якщо S (0. Отже, S використовується для виявлення помилок, ненульове значення S служить ознакою наявності помилок в прийнятій послідовності. Тому вектор S називається синдромом прийнятого вектора r.

Деякі поєднання помилок, використовуючи синдром, виявити неможливо. Наприклад, якщо передане кодове слово U під впливом перешкод перетворилося на інше дійсне кодове слово V цієї ж коди, то синдром $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V} * \underline{\boldsymbol{H}}^T = \underline{\boldsymbol{0}}$. В цьому випадку декодер помилки не виявить і, природно, не спробує її виправити.

Поєднання помилок такого типа називаються такими, що не виявляються. При побудові код необхідно прагнути до того, аби вони виявляли найбільш вірогідні поєднання помилок.

Для лінійного блокового систематичного (7,4) -кода Хеммінга, що розглядається як приклад, синдром визначається таким чином:

хай прийнятий вектор $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{r_4}, \boldsymbol{r_5}, \boldsymbol{r_6})$, тоді

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{r} * \underline{\boldsymbol{H}}_{(7,4)}^T = (r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) * \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right|^T =$$

$$= (r_0 + r_2 + r_3 + r_4), (r_0 + r_1 + r_2 + r_5), (r_1 + r_2 + r_2 + r_6), \tag{1.23}$$

або

$$\begin{aligned} S_0 &= r_0 + r_2 + r_3 + r_4 , \\ S_1 &= r_0 + r_1 + r_2 + r_5 , \\ S_2 &= r_1 + r_2 + r_2 + r_6 . \end{aligned} \qquad (1.24)$$

Грунтуючись на отриманих співвідношеннях, можна легко організувати схему для обчислення синдрому. Для (7,4) -кода Хеммінга вона приведена на рис. 1.5.

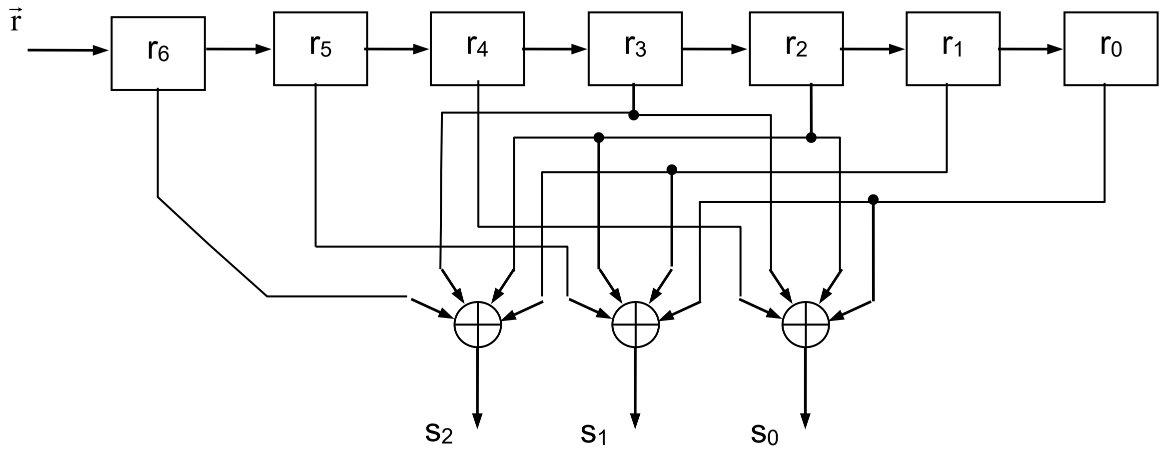


Рис. 1.5

1.2.7. Синдромноє декодування лінійних блокових код

Покажемо, як можна використовувати синдром прийнятого вектора не лише для виявлення, але і для виправлення помилок.

Хай $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_0}, \boldsymbol{U_1}, \ldots, \boldsymbol{U_{n-1}})$, $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_0}, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_{n-1}})$ і $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \ldots, \boldsymbol{r_{n-1}})$ є передаваним кодовим словом, вектором-помилкою і прийнятим вектором відповідно. Тоді

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{e} \qquad (1.25)$$

і синдром

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{H}^T = (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{H}^T , \qquad (1.26)$$

оскільки для будь-якого кодового слова $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{0}$.

Таким чином, синдром прийнятої послідовності r залежить лише від помилки, що має місце в цій послідовності, і абсолютно не залежить від переданого кодового слова. Завдання декодера, використовуючи цю залежність, визначити елементи (координати) вектора помилок. Знайшовши вектор помилки можна відновити кодове слово як

$$\boldsymbol{U^*} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{e} . \qquad (1.27)$$

На прикладі одиночних помилок при кодуванні з використанням лінійного блокового (7,4) -кода покажемо, як вектор помилки пов'язаний з синдромом, і як, маючи синдром, локалізувати і усунути помилки, що виникли при передачі.

Знайдемо значення синдрому для всіх можливих одиночних помилок в послідовності з семи символів:

$e_{-} = (0000000)$,

$$e_{-} \cdot \underline{H}^T = (0000000) \cdot \begin{vmatrix} 1011100 \\ 1110010 \\ 0111001 \end{vmatrix}^T = (000);$$

$e_0 = (1000000)$,

$$e_0 \cdot \underline{H}^T = (1000000) \cdot \begin{vmatrix} 1011100 \\ 1110010 \\ 0111001 \end{vmatrix}^T = (110);$$

$e_1 = (0100000)$,

$$e_1 \cdot \underline{H}^T = (0100000) \cdot \begin{vmatrix} 1011100 \\ 1110010 \\ 0111001 \end{vmatrix}^T = (011);$$

$e_2 = (0010000)$,

$$e_2 \cdot \underline{H}^T = (0010000) \cdot \begin{vmatrix} 1011100 \\ 1110010 \\ 0111001 \end{vmatrix}^T = (111);$$

$e_3 = (0001000)$,

$$e_3 \cdot \underline{H}^T = (0001000) \cdot \begin{vmatrix} 1011100 \\ 1110010 \\ 0111001 \end{vmatrix}^T = (101);$$

$e_4 = (0000100)$,

$$e_4 \cdot \underline{H}^T = (0000100) \cdot \begin{vmatrix} 1011100 \\ 1110010 \\ 0111001 \end{vmatrix}^T = (100);$$

$e_5 = (0000010)$,

$$e_5 \cdot \underline{H}^T = (0000010) \cdot \begin{vmatrix} 1011100 \\ 1110010 \\ 0111001 \end{vmatrix}^T = (010);$$

$e_6 = (0000001)$,

$$e_6 \cdot \underline{H}^T = (0000001) \cdot \begin{vmatrix} 1011100 \\ 1110010 \\ 0111001 \end{vmatrix}^T = (001).$$

Всі можливі для (7,4) -кода одиночні помилки і відповідні ним вектори синдрому приведені в таблицю. 1.3.

Таблиця 1.3

Вектор помилки	Синдром помилки	Десятичний код синдрома
1000000	***110***	6
0100000	***011***	3
0010000	***111***	7
0001000	***101***	5
0000100	***100***	4
0000010	***010***	2
0000001	***001***	1

З цієї таблиці видно, що існує однозначна відповідність між поєднанням помилок (при одиночній помилці) і його синдромом, тобто, знаючи синдром, можна абсолютно однозначно визначити позицію коди, в якій сталася помилка.

Наприклад, якщо синдром, обчислений по прийнятому вектору, рівний (111), це означає, що сталася одиночна помилка в третьому символі, якщо S = (001) – те в останньому, і так далі

Якщо місце помилки визначене, то усунути її вже не представляє жодної праці.

Повна декодуюча схема для (7,4) -кода Хеммінга, що використовує синдром вектора r не лише для виявлення, але і для виправлення помилок, приведена на рис. 1.6.

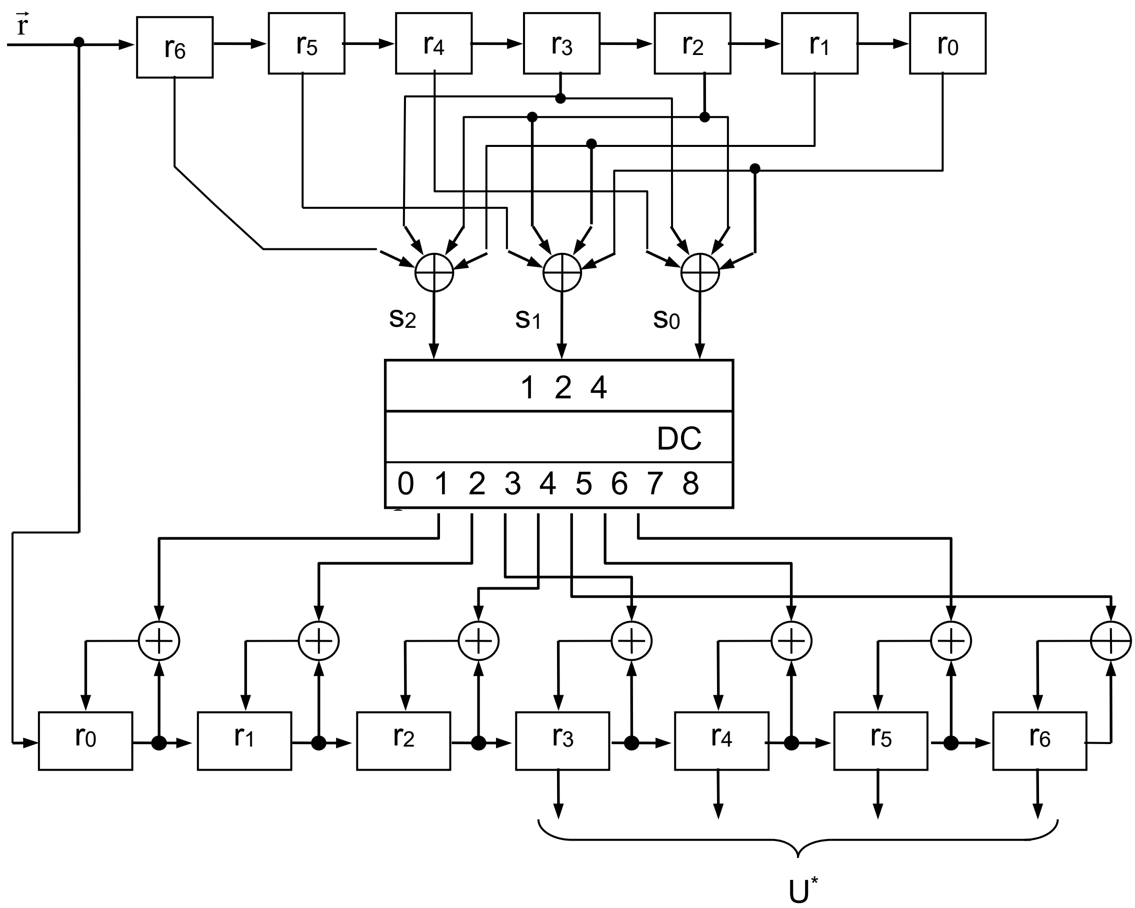


Рис. 1.6

А тепер поглянемо, що станеться, якщо в прийнятій послідовності буде не одна, а, наприклад, дві помилки. Хай помилки виникли в другій і шостій позиціях e = (0100010). Відповідний синдром визначиться як

$$\boldsymbol{S} = (\ \boldsymbol{0100010}\ ) \begin{vmatrix} \boldsymbol{1011100} \\ \boldsymbol{1110010} \\ \boldsymbol{0111001} \end{vmatrix}^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{001}).$$

Проте синдром S = (001) відповідає також і одиночній помилці в сьомій позиції (e6). Отже, наш декодер не лише не виправить помилок в позиціях, в яких вони сталися, але і внесе помилку до тієї позиції, де її не було. Таким чином, видно, що (7,4) -код не забезпечує виправлення подвійних помилок, а також помилок більшої кратності.

Це, проте, обумовлено не тим, яким чином виробляється декодування, а властивостями самої коди. Декілька пізніше буде показано, від чого залежить виправляюча здатність коди, тобто скільки помилок він може виправити.

1.2.8. Мажоритарне декодування лінійних блокових код

Ідею мажоритарного декодування лінійних блокових код можна продемонструвати на дуже простому прикладі.

Хай m – кодована інформаційна послідовність, що складається всього з одного символу $m_0 = 0$ або *1*, а відповідне їй кодове слово перешкодостійкого (надлишкового) кода має вигляд $U = (m_0, m_0, m_0)$, тобто (000), якщо $m_0 = 0$, або (***111***), якщо $m_0 = 1$ (код з трикратним повторенням).

Допустимо, передано кодове слово U = (111) і в першому символі сталася одна помилка, тобто прийнята послідовність r = (011).

Питання: яка послідовність передавалася, U = (000) або U = (111)?

Здоровий глузд підказує, що, швидше за все, передавалося кодове слово U = (111), оскільки інакше помилка повинна була б спотворити два символи, аби кодове слово U = (000) перетворилося на послідовність вигляду r = (011). Можливо, і не віддаючи собі звіту в правилі ухвалення рішення (про те, що передавалося), ми прийняли рішення по більшості – мажоритарно.

У загальному випадку, для лінійних блокових код із складнішою структурою, рішення буде не таким простим, але ідея мажоритарного декодування – та ж: рішення приймається по більшості. Як і в житті, вважається, що більшість дає правильнішу відповідь.

Розглянемо складніший приклад – мажоритарне декодування для (7,4) - кода Хеммінга.

Хай передано кодове слово (7,4) -кода – $U = (U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6)$, символи якого сформовані відповідно до системи перевірочних рівнянь (правилом кодування) вигляду:

$$\begin{aligned} U_0 &= m_0, \\ U_1 &= m_1, \\ U_2 &= m_2, \\ U_3 &= m_3, \\ U_4 &= m_0 + m_2 + m_3, \\ U_5 &= m_0 + m_1 + m_2, \\ U_6 &= m_1 + m_2 + m_3. \end{aligned} \tag{1.28}$$

На вході декодера спостерігається прийнята послідовність $r = (r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$, і необхідно її декодувати, тобто визначити вигляд передаваної інформаційної послідовності m .

Оскільки неможливо бути абсолютно упевненими в правильності декодування, ми можемо говорити лише про оцінку інформаційної послідовності m*.

Спершу передбачимо, що помилок в прийнятій послідовності r немає, тобто r = U .

Тоді по прийнятій послідовності r можна легко знайти оцінку переданої інформаційної послідовності m*, причому не єдиним способом.

По-перше, можна відразу записати

$$\begin{aligned} m_0^{*1} &= r_0, \\ m_1^{*1} &= r_1, \\ m_2^{*1} &= r_2, \\ m_3^{*1} &= r_3, \end{aligned} \tag{1.29}$$

тобто як відповідь або результат декодування, узяти перші чотири символи прийнятої послідовності.

Але це не єдиний спосіб. Враховуючи, що для елементів поля ***GF(2)*** справедлива умова $m_i + m_i = 0$ (тобто $1+1 = 0$ і $0+0 = 0$), можна записати ще декілька систем рівнянь для визначення m_i^*:

$$\begin{array}{ll} m_0^{*2} = r_2 + r_3 + r_4, & m_0^{*3} = r_1 + r_2 + r_5, \\ m_1^{*2} = r_0 + r_2 + r_5, & m_1^{*3} = r_2 + r_3 + r_6, \\ m_2^{*2} = r_0 + r_3 + r_4, & m_2^{*3} = r_0 + r_1 + r_5, \\ m_3^{*2} = r_0 + r_2 + r_4; & m_3^{*3} = r_1 + r_2 + r_6; \\ & \\ m_0^{*4} = r_1 + r_4 + r_6, & m_0^{*5} = r_3 + r_5 + r_6, \\ m_1^{*4} = r_0 + r_4 + r_6, & m_1^{*5} = r_3 + r_4 + r_5, \\ m_2^{*4} = r_4 + r_5 + r_6, & m_2^{*5} = r_1 + r_3 + r_6, \\ m_3^{*4} = r_0 + r_5 + r_6; & m_3^{*5} = r_1 + r_4 + r_5. \end{array} \tag{1.30}$$

Таким чином, вийшло п'ять незалежних систем рівнянь для визначення одних і тих же компонент вектора m*, причому, вони будуть спільними (мати однакові рішення) лише за відсутності помилок в прийнятій послідовності r, тобто при r = U. Інакше рішення для m_i^*, що даються різними системами, будуть різними.

Проте можна відмітити наступне: у виразах для m_i^* кожен з елементів прийнятої послідовності r_i присутній не більше двох разів (тобто не більше ніж в двох рівняннях з п'яти).

Якщо вважати, що в прийнятій послідовності можлива лише одиночна помилка (а з помилкою більшої кратності цей код не справляється), то помилковими будуть вирішення не більше ніж двох рівнянь з п'яти для кожного з елементів m_i^*, *останні три рівняння дадуть правильне рішення. Тоді правильна відповідь може бути отримана по "більшості голосів", або мажоритарно.*

Пристроєм, який приймає рішення по "більшості", є так званий мажоритарний селектор. При цьому схема мажоритарного декодера для одного з символів прийнятої послідовності (7,4) -кода Хеммінга може виглядати, наприклад, таким чином (рис. 1.7):

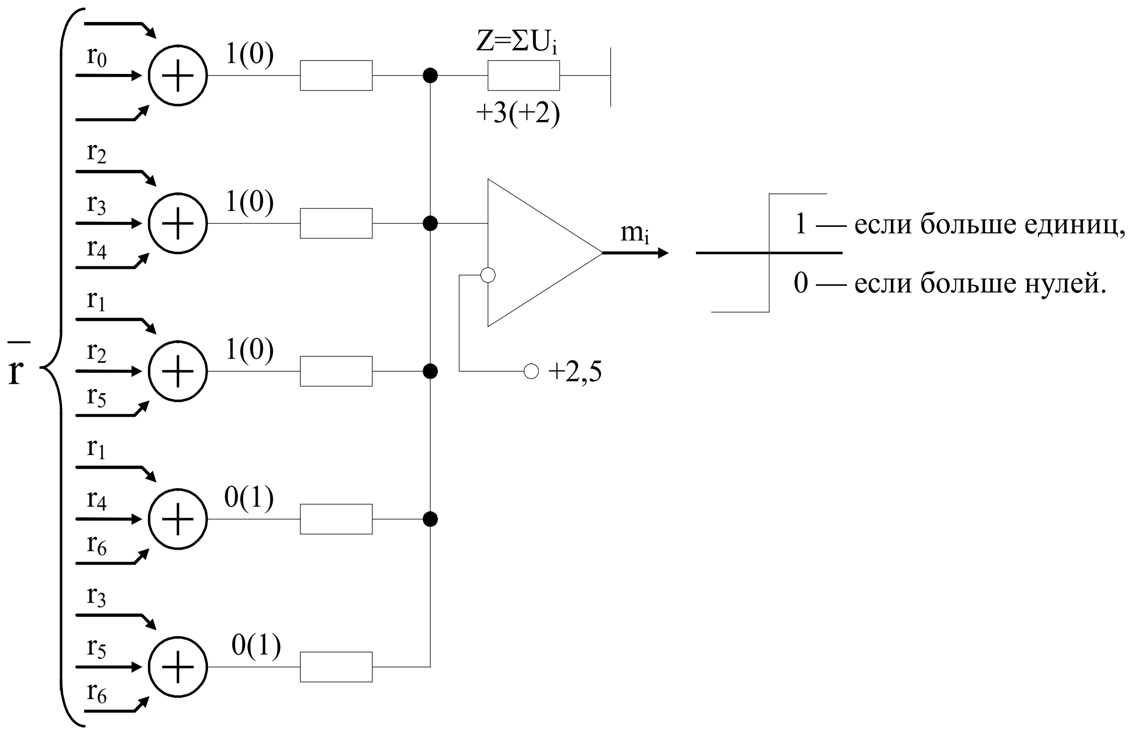


Рис. 1.7

Тут мажоритарний селектор виконаний у вигляді аналогового суматора і компаратора напруги (напруга на виході компаратора = 1, якщо на його вході більше одиниць, і рівне 0 інакше). Проте можлива і чисто цифрова реалізація мажоритарного селектора: він просто видасть на своєму виході 1, якщо на його вході більше одиниць, і 0 – інакше.

1.2.9. Декодування методом максимальної правдоподібності

Отже, розглянуто декілька різних способів декодування лінійних блокових код, і, напевно, існує ще безліч інших способів. Виникає питання: а чи є серед них найкращий, при використанні якого залишиться невиправленим найменше число помилок?

Спробуємо визначити найкраще, або оптимальне, правило декодування.

Хай $\boldsymbol{U = (U_0\ ,\ U_1\ ,\ldots U_i\ ,\ldots\ U_n\ )}$ є переданим кодовим словом деякого двійкового блокового (n,k) -кода, а $\boldsymbol{r\ = (r_0\ ,\ r_1\ ,\ \ldots\ r_i\ ,\ \ldots\ r_n\ )}$ - послідовність, прийнята на виході каналу з перешкодами.

Прийнята послідовність через дію шумів може відрізнятися від переданої, тобто по окремих символах приймач міг прийняти неправильні рішення (замість нулів – одиниці і навпаки).

Декодер каналу на основі прийнятої послідовності повинен прийняти рішення відносно переданого кодового слова. Процедура ухвалення такого рішення і називається декодуванням.

Якщо декодер не в змозі правильно відтворити дійсне кодове слово, тобто m* (m, то при декодуванні виникне помилка. Ця помилка випадкова, її вірогідність залежить від характеристик каналу зв'язку, характеристик коди, методу кодування і декодування. Бажано, аби вірогідність помилкового декодування була як можна меншою.

Як повинен працювати декодер, аби вірогідність помилкового декодування була мінімальною?

Спочатку розглянемо ситуацію, коли приймач не приймає рішень відносно того, який з символів r_i (0 або 1) в даний момент прийнятий, тобто він віддає декодеру весь прийнятий сигнал S(t) і надає право приймати рішення самому декодеру.

Хай $U_l,(l = 0, 1, 2, 3..2^k - l)$ − l-е кодове слово використовуваного кода;

U_{li} − i-й символ цього кодового слова;

$S(t)$ - прийнятий сигнал, що містить одне з кодових слів і перешкоду.

Яке кодове слово міститься в прийнятому сигналі, ми не знаємо. Відома лише апріорна вірогідність передачі l–го кодового слова - P_l.

Оптимальний декодер повинен враховувати всю наявну інформацію про використовуваний код, каналі зв'язку і перешкодах, що діють в цьому каналі, і забезпечувати максимальну вірогідність правильних відповідей про те, які кодові слова були передані по каналу зв'язку. Такий критерій оптимальності - максимум апостеріорної (послеопытной) вірогідності правильних рішень - називається критерієм Байеса.

Оптимальний по критерію Байеса декодер повинен вибирати як рішення кодове слово $U^* = U_k$, яке максимізувало умовну вірогідність $P(U_k/S)$ — *вірогідність того, що була передана послідовність* U_k, *якщо прийнята дана реалізація сигналу* S.

Оскільки

$$P(U_k / S) \cdot P(S) = P(S / U_k) \cdot P(U_k), \tag{1.31}$$

то

$$P(U_k / S) = P(S / U_k) \cdot P(U_k) / P(S). \tag{1.32}$$

Якщо вважати, що всі кодові слова рівноімовірні - $P(U_k) = const$, а також враховуючи, що безумовна щільність P(S) не залежить від U_k , то максимуму $P(U_k /S)$ відповідає максимум $P(S/U_k)$, так званій функції правдоподібності — умовній вірогідності того, що сигнал набуде свого значення S, якщо передавалося кодове слово U_k.

Надалі ми ще повернемося до детального розгляду питань оптимального прийому сигналів і покажемо, як визначається вигляд функції правдоподібності, зараз же можна сказати, що значення $P\,(U_k\,/\,S)$ буде масимально, якщо мінімальна величина

$$d_k = \Sigma \int \{ S(t) - U_k \}^2 \, dt, \qquad (1.33)$$

або

$$d_k = \Sigma\Sigma \{ S_i - U_{k\,i} \}^2, \qquad (1.34)$$

якщо прийнятий сигнал дискретизований і S_i – i-й відлік прийнятого сигналу.

Сума квадратів різниць між значеннями прийнятого сигналу S_i і символами к-го кодового слова називається нев'язкою, або відстанню Евкліда між цим кодовим словом і прийнятим сигналом.

Якщо перешкод в каналі зв'язку немає або вони невеликі, то при передачі l-го кодового слова прийнятий сигнал S збігатиметься з цим кодовим словом або трохи відрізнятися від нього. Тоді нев'язка дорівнюватиме нулю або мінімальна саме для l = до.

Таким чином, оптимальний декодер повинен обчислити відстані Евкліда між прийнятим сигналом S і всіма можливими кодовими словами U_k *даного коду і прийняти рішення на користь кодового слова* U_l*, що мінімізує* d_l^2 *, тобто найбільш схожого на прийнятий сигнал.*

Структурна схема декодера максимальної правдоподібності, що реалізовує правило декодування (1.33), – (1.34), приведена на рис. 1.8.

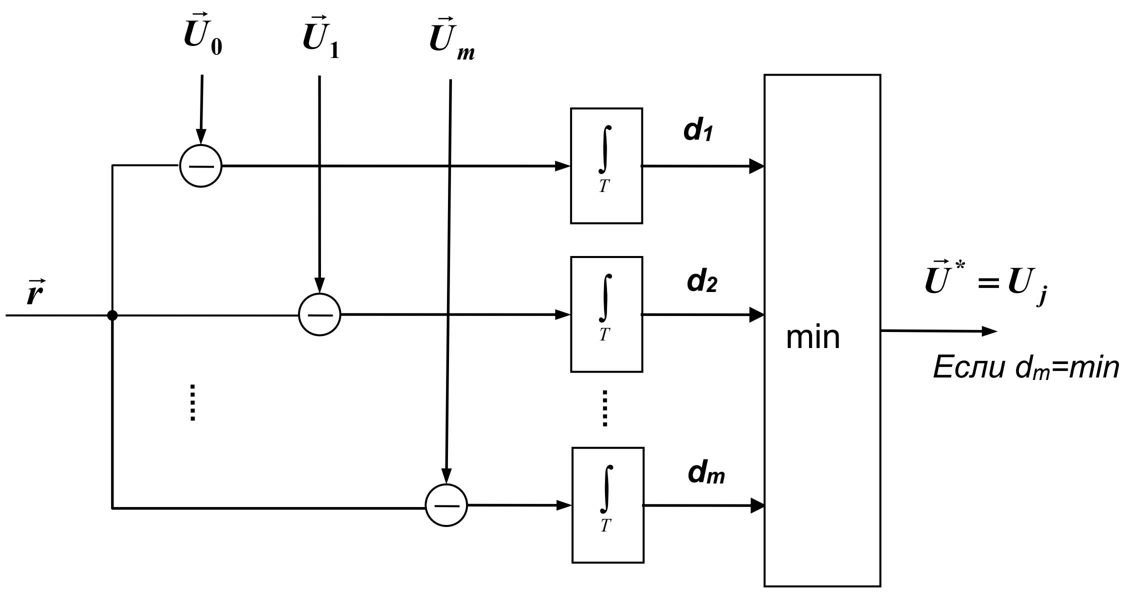


Рис. 1.8

Розглянутий нами оптимальний декодер є так званим м'яким декодером, оскільки він виносить ухвали відносно U_l безпосередньо на основі прийнятого сигналу.

На практиці частіше застосовується так зване жорстке декодування, коли в приймачі спочатку приймається рішення відносно значення символів прийнятої послідовності, а вже потім – відносно значення кодового слова.

В цьому випадку оптимальний декодер (жорсткий декодер максимальної правдоподібності) повинен обчислити відстані

$$d^*_k = \Sigma\{ r_l - U_k \}^2 \qquad (1.35)$$

між прийнятою послідовністю r і всіма можливими кодовими словами U_k *даної коди і прийняти рішення на користь кодового слова, в мінімальній мірі що відрізняється від прийнятої послідовності.*

Таким чином, при жорсткому декодуванні максимальної правдоподібності по прийнятому сигналу спочатку визначаються символи прийнятої послідовності r, а потім ця послідовність по черзі порівнюється зі всіма кодовими словами даної коди. Рішення приймається на користь кодового слова, максимально схожого на прийняту послідовність.

Оскільки в процесі м'якого декодування інформація про сигнал враховується більшою мірою (рішення приймається по всьому сигналу відразу, а не по частинах, для кожного символу окремо, і тільки потім - для всієї прийнятої послідовності), та якість м'якого декодування має бути, вірогідно, вище. Проте реалізація жорсткого декодера є набагато простішою – дії виконуються над нулями і одиницями. Тому такі декодери використовуються частішим, хоча і декілька програють м'яким декодерам у вірогідності правильного декодування.

На закінчення потрібний сказати, що при декодуванні блокових код декодери максимальної правдоподібності застосовуються досить рідкий із-за їх складності при великих розмірах коди. Правда, при сучасних потужностях мікропроцесорних пристроїв це вже не представляє непереборної трудності. Швидше, потрібно вибирати між ускладненням алгоритму декодування і виграшем в підвищенні вірогідності правильного декодування.

Для згортальних же код декодування з використанням методу максимальної правдоподібності – стек-алгоритм, алгоритм Фано і алгоритм Вітербі - це основні способи декодування.

1.2.10. Вага і відстань Хеммінга. Здатність код виявляти і виправляти помилки

Розглянемо, чим визначається здатність блокової коди виявляти і виправляти помилки, що виникли при передачі.

Хай $\boldsymbol{U = (U_0, U_1, U_2, \ldots U_{n-1})}$ - двійкова послідовність довжиною n.

Число одиниць (ненульових компонент) в цій послідовності називається вагою Хеммінга вектора U і позначається w(U).

Наприклад, вага Хеммінга вектора U = (1001011) рівний чотирьом, для вектора U = (1111111) величина w(U) складе 7 і так далі

Таким чином, ніж більше одиниць в двійковій послідовності, тим більше її вага Хеммінга.

Далі, хай U і V будуть двійковими послідовностями довжиною n.

Число розрядів, в яких ці послідовності розрізняються, називається відстанню Хеммінга між U і V і позначається d(U, V).

Наприклад, якщо U = (1001011), а V = (0100011), то d(U, V)= 3.

Задавши лінійний код, тобто визначивши все 2^k його кодових слів, можна обчислити відстань між всіма можливими парами кодових слів. Мінімальне з них називається мінімальною кодовою відстанню коди і позначається d_{min}.

Можна перевірити і переконатися, що мінімальна кодова відстань для того, що розглядається нами в прикладах (7,4) -кода рівно трьом: $d_{min(7,4)} = 3$. Для цього потрібно записати всі кодові слова (7,4) -кода Хеммінга (всього 16 слів), обчислити відстані між їх всіма парами і узяти найменше значення. Проте можна визначити d_{min} блокової коди і простішим способом.

Доведено, що відстань між нульовим кодовим словом і одним з кодових слів, що входять в матрицю (рядки матриці лінійної блокової коди, що породжує, самі є кодовими словами, за визначенням), що породжує, рівно d_{min}. Але відстань від будь-якого кодового слова до нульового дорівнює вазі Хеммінга цього слова. Тоді d_{min} рівно мінімальній вазі Хеммінга для всіх рядків матриці коди, що породжує .

Якщо при передачі кодового слова по каналу зв'язку в нім сталася одиночна помилка, то відстань Хеммінга між переданим словом U і прийнятим вектором r дорівнюватиме одиниці. Якщо при цьому одне кодове слово не перейшло в інше (а при $d_{min} > 1$ і при одиночній помилці це неможливо), то помилка буде виявлена при декодуванні.

У загальному випадку якщо блоковий код має мінімальну відстань d_{min}, то він може виявляти будь-які поєднання помилок при їх числі, меншому або рівному $d_{min} - 1$, оскільки жодне поєднання помилок при їх числі, меншому, ніж $d_{min} - 1$, не может перевести одно кодовое слово в друге.

Але помилки можуть мати кратність і більшу, ніж $d_{min}- 1$, і тоді вони залишаться невиявленими.

При цьому середню вірогідність помилки, що не виявляється, можна визначити таким чином.

Хай вірогідність помилки в каналі зв'язку рівна $P_{ош}$. Тоді вірогідність того, що при передачі послідовності довжини n в ній станеться одна помилка, рівна

$$P_1 = n\, P_{ош} \cdot (1 - P_{ош})^{n-1}, \qquad (1.36)$$

відповідно, вірогідність l-кратной помилки -

$$P_l = C_n^l\, P_{ош}^l \cdot (1 - P_{ош})^{n-l}, \qquad (1.37)$$

де C_n^l - число можливих комбінацій з n символів кодової послідовності по l помилок.

По каналу зв'язку передаються кодові слова з різними вагами Хеммінга. Покладемо, що a_i — число слів з вагою i в даному коді (всього слів в коді завдовжки n - $A = \sum_{i=0}^{n-1} d_i = 2^k$).

А тепер визначимо, що таке помилка, що не виявляється. Виявлення помилки виробляється шляхом обчислення синдрому прийнятої послідовності. Якщо прийнята послідовність не є кодовим словом (тоді синдром не дорівнює нулю), то вважається, що помилка є. Якщо ж синдром дорівнює нулю, то вважаємо, що помилки немає (прийнята послідовність є кодовим словом). Але чи тим, яке передавалося? Або ж в результаті дії помилок передане кодове слово перейшло в інше кодове слово даного коду:

$$r = U + e = V, \qquad (1.38)$$

тобто сума переданого кодового слова U і вектора помилки e дасть нове кодове слово V ? В цьому випадку, природно, помилка виявлена бути не може.

Але з визначення двійкової лінійної коди виходить, що якщо сума кодового слова і деякого вектора e є кодове слово, то вектор e також є кодовим словом. Отже, помилки, що не виявляються, виникатимуть тоді, коли поєднання помилок утворюватимуть кодові слова.

Вірогідність того, що вектор e збігається з кодовим словом, що має вагу i, рівна

$$P_i = P_{ош}^i \cdot (1 - P_{ош})^{n-i}. \qquad (1.39)$$

Тоді повна вірогідність виникнення помилки, що не виявляється

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot P_{ош}^i (1 - P_{ош})^{n-i}. \qquad (1.40)$$

Приклад: що розглядається нами (7,4) -код містить по сім кодових слів з вагами w = 3 і w = 4 і одне кодове слово з вагою w = 7, тоді

$$P(E)_{(7,4)} = 7 \cdot P_{ош}^3 (1 - P_{ош})^4 + 7 \cdot P_{ош}^4 \cdot (1 - P_{ош})^3 + P^7 \qquad (1.41)$$

або, при $P_{ош} = 10^{-3}$, $P(E) \cong 7 \cdot 10^{-9}$.

Іншими словами, якщо по каналу передається інформація із швидкістю V = 1кбит/с і в каналі в середньому кожну секунду відбуватиметься спотворення одного символу, то в середньому сім прийнятих слів на ***10^9*** переданих проходитимуть через декодер без виявлення помилки (одна помилка, що не виявляється, за 270 годин).

Таким чином, використання навіть такої простої коди дозволяє на декілька порядків понизити вірогідність помилок, що не виявляються.

Тепер передбачимо, що лінійний блоковий код використовується для виправлення помилок. Чим визначаються його можливості по виправленню?

Розглянемо приклад, приведений на рис. 1.9. Хай U і V представляють пару кодових слів коди з кодовою відстанню d, рівним мінімальному — ***d_{min}*** *для даного кода.*

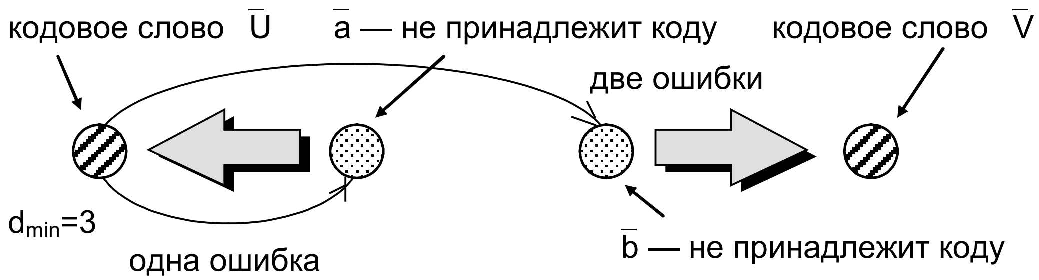


Рис. 1.9

Передбачимо, передано кодове слово U, в каналі сталася одиночна помилка і прийнятий вектор a (що не належить коду).

Якщо декодування виробляється оптимальним способом, тобто по методу максимальної правдоподібності, то як оцінка U* потрібно вибрати найближче до a кодове слово.

Таким в даному випадку буде U, отже, помилка буде усунена.

Уявимо тепер, що сталося дві помилки і прийнятий вектор b.

Тогда при декодуванні по максимуму правдоподібності як оцінка буде вибрано найближче до ƀ кодове слово, і ним буде V. Станеться помилка декодування.

Продовживши міркування для $d_{min} = 4$, $d_{min} = 5$ и т.д., неважко зробити вивід, що помилки будуть усунені, якщо їх кратність l не перевищує величини

$$l < INT\,((\,dmin - 1\,)/2)\,, \qquad (1.41)$$

де $INT\,(X)$ — ціла частина X.

Так, використовуваний нами як приклад -код має $d_{min} = 3$ і, отже, дозволяє виправляти лише одиночні помилки:

$$l = INT\,((\,d_{min} - 1\,)/2) = INT((3-1)/2) = 1\,. \qquad (1.42)$$

Таким чином, можливості лінійних блокових код по виявленню і виправленню помилок визначаються їх мінімальною кодовою відстанню. Чим більше d_{min}, тим більше число помилок в прийнятій послідовності можна виправити.

А тепер визначимо вірогідність того, що виникла в процесі передачі помилка не буде все ж виправлена при декодуванні.

Хай, як і раніше, вірогідність помилки в каналі буде рівна $P_{ош}$. Помилки, що виникають в різних позиціях коди, вважаємо незалежними.

Вірогідність того, що прийнятий вектор r матиме які-небудь (одиночные, двократні, трикратні і так далі) помилки, можна визначити як

$$P_{ош} = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n\,, \qquad (1.43)$$

де P_1 — вірогідність того, що в r присутня одиночна помилка;
P_2 — вірогідність того, що помилка подвійна і т.д.;
P_n — вірогідність того, що все n символів спотворені.

Визначимо вірогідність помилок заданої кратності:

P_1 = **Вер**{*помилка в 1-ій позиції АБО помилка в 2-ій позиції ..АБО в n-й позиції*} = =

$$P_{ош}(1 - P_{ош})^{n-1} + P_{ош}(1 - P_{ош})^{n-1} + ... P_{ош}(1 - P_{ош})^{n-1} = n \cdot P_{ош}(1 - P_{ош})^{n-}; \qquad (1.44)$$

P_2 = **Вер**{*помилка в 1-ій І в 2-ій позиції АБО помилка в 2-ій І в 3-ій позиції…*} =

$$= P^2_{ош}(1 - P_{ош})^{n-2} + ... P^2_{ош}(1 - P_{ош})^{n-2} = C^n_2 P^2_{ош}(1 - P_{ош})^{n-2}. \qquad (1.45)$$

Аналогічним чином

$$P_3 = C^n_3 P^3_{ош}(1 - P_{ош})^{n-3} \text{ і т.д.} \qquad (1.46)$$

Декодер, як ми показали, виправляє всі помилки, кратність яких не перевищує

$$1 \leq INT\left[\frac{d_{min} - 1}{2}\right], \qquad (1.47)$$

тобто всі помилки кратності J (1 будуть виправлені.

Тоді помилки декодування - це помилки з кратністю, більшій кратності помилок l, що виправляються, і їх вірогідність

$$P(N) = \sum_{j=l-1}^{n} C_j^n \cdot P_{o\,ш}^j \cdot (1 - P_{o\,ш})^{n-j}. \qquad (1.48)$$

Для (7,4) -кода Хеммінга мінімальна відстань $d_{min} = 3$, т.е. $l = 1$. Отже, помилки кратності 2 і більш виправлені не будуть і

$$P(N)_{(7.4)} = \sum_{j=2}^{7} C_j^7 \cdot P_{o\,ш}^j \cdot (1 - P_{o\,ш})^{j-n}. \qquad (1.49)$$

Якщо $P_{ош} << 1$, можна вважати $(1 - P_{ош}) \approx 1$ і, крім того, $P^3_{ош} << P^2_{ош}$. Тоді

$$P(N)_{(7.4)} \approx C_2^7 \cdot P_{o\,ш}^2 \approx 21P^2. \qquad (1.50)$$

Так, наприклад, при вірогідності помилки в каналі $P_{ош} = 10^{-3}$ вірогідність невиправлення помилки $P(N) \approx 2 \cdot 10^{-5}$, тобто при такій вірогідності помилок в каналі кодування (7.4) -кодом дозволяє понизити вірогідність помилок, що залишилися невиправленими, приблизно в п'ятдесят разів.

Якщо ж вірогідність помилки в каналі буде в сто разів менше $P_{ош} = 10^{-5}$, то вірогідність її невиправлення складе вже $P(N) \approx 2 \cdot 10^{-9}$, або *в 5000 раз меньше!*

Таким чином, виграш від перешкодостійкого кодування (який можна визначити як відношення числа помилок в каналі до помилок, що залишилися невиправленими) істотно залежить від властивостей каналу зв'язку.

Якщо вірогідність помилок в каналі велика, тобто канал не дуже хороший, чекати великого ефекту від кодування не доводиться, якщо ж вірогідність помилок в каналі мала, то кодування, що коректує, зменшує її в значно більшій мірі.

Іншими словами, перешкодостійке кодування істотно покращує властивості хороших каналів, в поганих же каналах воно великого ефекту не дає.

1.3. Поліноміальні коди

Представлення кодового слова (n,k) -кода у вигляді послідовності $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_0}, \boldsymbol{U_1}, ..., \boldsymbol{U_{n-1}})$ довжиною n символів або їх завдання за допомогою системи перевірочних рівнянь і матриці, що породжує, не є єдино можливим. Ще один зручний і широко використовуваний спосіб представлення того ж кодового слова полягає в тому, що елементи $\boldsymbol{U_0}, \boldsymbol{U_1}, ..., \boldsymbol{U_{n-1}}$ є коефіцієнтами многочлена від X, тобто

$$U(x) = f(x) = U_0 + U_1 \cdot X + U_2 \cdot X^2 + ... + U_{n-1} \cdot X^{n-1} \; . \tag{1.51}$$

Використовуючи цю виставу, можна визначити поліноміальний код як безліч всіх многочленів міри, не більшою n -1, що містять як загальний множник деякий фіксований многочлен g(x).

Многочлен g(x) називається многочленом коди, що породжує.

Представлення кодових слів в такій формі дозволяє звести дії над комбінаціями символів до дії над поліномами.

Визначимо дії над поліномами в полі двійкових символів GF(2).

Сумою двох поліномів f(x) і g(x) з GF(2) називається поліном з GF(2), визначуваний таким чином:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f_i + g_i \right) \cdot x^i \; . \tag{1.52}$$

Другими словами, складанню двійкових поліномів відповідає складання по mod2 коефіцієнтів при однакових мірах x.

Наприклад:

$$\begin{array}{rl} + \quad X^3+X^2+0\cdot X+1 & \\ X+1 & \\ \hline X^3 + X^2 + X + 0 & = X^3 + X^2 + X \, , \end{array} \tag{1.53}$$

$$\begin{array}{rl} X^3 + X^2 + 0\cdot X + 1 & \\ X^2 + X + 1 & \\ \hline X^3 + 0 + X + 0 & = X^3 + X. \end{array} \tag{1.54}$$

Твором двох поліномів з GF(2) називається поліном з GF(2), визначуваний таким чином :

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{i} f_j \cdot g_{i-j} \right) \cdot x^i , \tag{1.55}$$

тобто твір виходить за звичайним правилом перемножування статечних функцій, проте отримувані коефіцієнти при даній мірі X складаються по модулю 2.

Наприклад:

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & X^3 + & X^2 + & 0 + & 1 & \\
 & & & X + & 1 & \\ \hline
 & X^3 + & X^2 + & 0 + & 1 & \\
X^4 + & X^3 + & 0 + & X & & \\ \hline
X^4 + & 0 + & X^2 + & X + & 1 & = X^4+X^2+X+1\,,
\end{array} \qquad (1.56)$$

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & X^3 + & X^2 + & 0 + & 1 & \\
 & & & X^2 + & X & & \\ \hline
 & X^4 + & X^3 + & 0 + & X & & \\
X^5 + & X^4 + & 0 + & X^2 & & & \\ \hline
X^5 + & 0 + & X^3 + & X^2 + & X & & = X^5+X^3+X^2+X\,.
\end{array} \qquad (1.57)$$

Нарешті, можна сформулювати теорему про ділення поліномів: для кожної пари поліномів З(x) і d(x), d(x)(0 існує єдина пара поліномів q(x) — частное і ((x) — залишок, такі, що

$$З(x)= q(x)(d(x)+ ((x), \qquad (1.58)$$

де міра залишку ((x) менше міри дільника d(x).

Іншими словами, ділення поліномів виробляється по правилах ділення статечних функцій, при цьому операція віднімання замінюється підсумовуванням по mod2.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l}
X^4+0+X^2+X+1 & X+1 \\ \cline{2-2}
\underline{X^4+X^3} & X^3+X^2+1 \\
X^3+X^2+X+1 & \\
\underline{X^3+X^2} & \\
X+1 & \\
\underline{X+1} & \\
0 \longleftarrow & \textit{остаток } \rho(x).
\end{array} \qquad (1.59$$

Ще раз нагадаємо, що при складанні по mod2 сума двох одиниць (тобто двох елементів полінома з однаковими мірами) дорівнюватиме нулю, а не звичним в десятковій системі числення двом. І, окрім цього, операції віднімання і складання по mod2 збігаються.

1.3.1. Циклічні коди

Частним і найбільш широко поширеним класом поліноміальних код є циклічні коди.

Лінійний (n,k) -код називається циклічним, якщо в результаті циклічного зрушення кодового слова виходить інше кодове слово даної коди. Іншими словами, якщо $\boldsymbol{U = (U_0, U_1, ...U_{n-1})}$ является кодовим словом, то і $\boldsymbol{V = (U_{n-1}, U_0, U_1, ...U_{n-2})}$, отримане циклічним зрушенням U, є кодовим словом даної коди.

Циклічні коди привабливі по двох причинах.

По-перше, операції кодування і обчислення синдрому для них виконуються дуже просто з використанням сдвигових регістрів.

По-друге, цим кодам властива структура алгебри, і можна знайти простіші і ефективніші способи їх декодування.

Основні властивості циклічних код:

1. У циклічному (n,k) -коде кожен ненульовий поліном повинен мати міру, принаймні (n-к), але не більш n-1.

2. Існує лише один кодовий поліном g(x) міри (n-к) вида

$$\boldsymbol{g(x)=1 + g_1 \cdot x + g_2 \cdot x^2 +...+ g_{n-k-1} \cdot x^{n-k-1} + x^{n-k},} \quad (1.60)$$

званий поліномом коди, що породжує.

3. Кожен кодовий поліном U(x) є кратним g(x), тобто

$$\boldsymbol{U(x)= m(x) \cdot g(x).} \quad (1.61)$$

1.3.2. Кодування з використанням циклічних код

Передбачимо, треба закодувати деяку інформаційну послідовність

$$\boldsymbol{m = (m_0, m_1, m_2... m_{k-1}).} \quad (1.62)$$

Соответствующий ей полином выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{m(x)= m_0 + m_1 \cdot x + m_2 \cdot x^2 +...+m_{k-1} \cdot x^{k-1}.} \quad (1.63)$$

Помноживши $\boldsymbol{m(x)}$ на $\boldsymbol{x^{n-k}}$:

$$x^{n-k}\cdot m(x)=m_0\cdot x^{n-k}+m_1\cdot x^{n-k+1}+...+m_{k-1}\cdot x^{n-1},$$
(1.64)

отримаємо поліном міри n-1 або меншою.

Скориставшись теоремою про ділення поліномів, можна записати

$$x^{n-k}\cdot m(x)=q(x)\cdot g(x)+\rho(x), \tag{1.65}$$

де $q(x)$ и $\rho(x)$ — частное і залишок від ділення полінома $x^{n-k}\cdot m(x)$ на поліном g(x), що породжує.

Оскільки міра g(x) рівна (n-к), то міра ((x) має бути (n-k-1) або менше, а сам поліном ((x) матиме вигляд

$$\rho(x)=\rho_0+\rho_1\cdot x+\rho_2\cdot x^2+...+\rho_{n-k-1}\cdot x^{n-k-1}. \tag{1.66}$$

З врахуванням правил арифметики в GF(2) дане вираження можна переписати таким чином:

$$\rho(x)+x^{n-k}\cdot m(x)=q(x)\cdot g(x), \tag{1.67}$$

звідки видно, що поліном $\rho(x)+x^{n-k}\cdot m(x)$ є кратним g(x) і має міру n-1 або меншу. Отже, поліном $\rho(x)+x^{n-k}\cdot m(x)$ - це кодовий поліном, відповідний кодованій інформаційній послідовності m(x).

Розкривши останнє вираження, отримаємо

$$\rho(x)+m(x)\cdot x^{n-k}=\rho_0+\rho_1 x+\rho_2 x^2\ ..+\rho_{n-k-1}x^{n-k-1}+m_0\ x^{n-k}+m_1\cdot x^{n-k+1}+..+m_{k-1}\ x^{n-1},$$

що відповідає кодовому слову

U =	$(\rho_0,\ \rho_1 ...\ \rho_{n-k-1}$,	$m_0,\ m_1 ...\ m_{k-1})$,
	перевірочні символи	*інформаційні символи*

Таким чином, кодове слово складається з незмінної інформаційної частини m, перед якою розташовано (n-к) перевірочних символів. Перевірочні символи є коефіцієнтами полінома ((x), тобто залишку від ділення $m(x)\cdot x^{n-k}$ на поліном, що породжує $g(x)$.

Аби отриманий результат був зрозуміліший, нагадаємо, що множенню деякого двійкового полінома на x^{n-k} відповідає зрушення двійкової послідовності $m=(m_0, m_1 ... m_{k-1})$ на $n-k$ разрядів вправо.

Розглянемо приклад. З використанням коди, що задається поліномом, що породжує $g(x)=1+x+x^3$, закодуємо довільну послідовність, наприклад m = (0111).

Послідовності m =(0111) відповідає поліном $m(x)=x+x^2+x^3$.

Помножимо $m(x)$ *на* x^{n-k} :

$$\boldsymbol{m(x) \cdot x^{n-k} = m(x) \cdot x^3 = (x + x^2 + x^3) \cdot x^3 = x^4 + x^5 + x^6}.$$
(1.68)

$$\begin{array}{l|l} X^6 + X^5 + X^4 & X^3 + X + 1 \\ \cline{2-2} \underline{X^6 + \ \ 0 \ \ + X^4 + X^3} & X^3 + X^2 = g(x) \\ X^5 + 0 \ + X^3 & \\ \underline{X^5 + 0 + X^3 + X^2} & \\ \qquad X^2 = \rho(x). & \end{array} \qquad (1.69)$$

Разділимо $\boldsymbol{m(x) \cdot x^{n-k}}$ на поліном, що породжує $\boldsymbol{g(x)}$:

Таким чином, кодовий поліном, відповідний інформаційній послідовності m = (0111), матиме наступний вигляд:

$$\boldsymbol{U(x) = \ 0*X^0 + 0*X^1 + 1*X^2 + \ 0*X^3 + 1*X^4 + 1*X^5 + 1*X^6}, \qquad (1.70)$$

а відповідне кодове слово U = (0010111).

Отже, циклічний (n,k) -код до-розрядної інформаційної послідовності $\boldsymbol{m = (m_0, m_1 \ldots m_{k-1})}$ отримують таким чином:

- інформаційну послідовність m умножають на $\boldsymbol{x^{n-k}}$, тобто зрушують управо на n-к розрядів;

- поліном отриманої послідовності ділять на поліном коди g(x), що породжує;

- отриманий залишок від ділення $\boldsymbol{m(x) \cdot x^{n-k}}$ на $\boldsymbol{g(x)}$ додають до $\boldsymbol{m(x) \cdot x^{n-k}}$, тобто записують в молодших n-к розрядах коди.

Алгоритм кодування, заснований на діленні поліномів, можна реалізувати, використовуючи схему ділення. Вона є регістром зрушення, в якому ланцюги зворотного зв'язку замкнуті відповідно до коефіцієнтів полінома, що породжує $\boldsymbol{g(x)}$ (рис. 1.10).

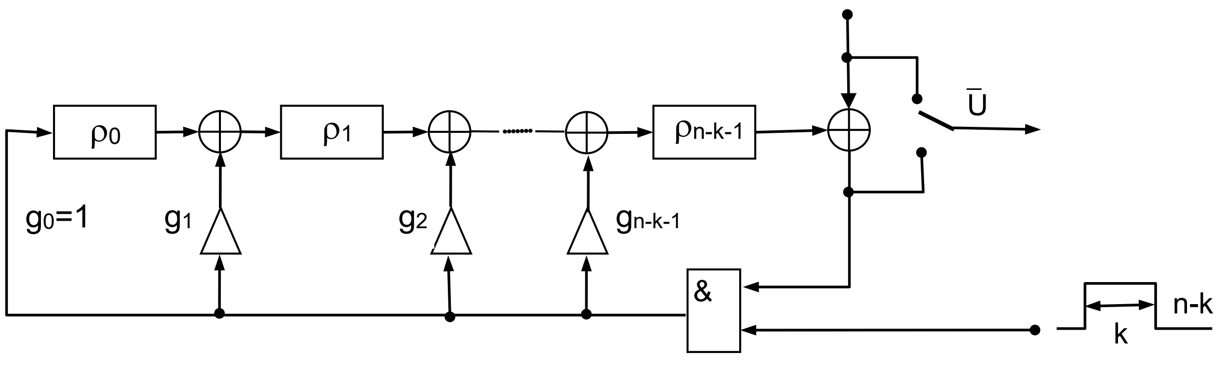


Рис. 1.10

Кодування в схемі мал. 1.10 виконується таким чином:

- до символів інформаційної послідовності m через перемикач П, що знаходиться у верхньому положенні, один за іншим передаються в канал і одночасно з цим через відкриту схему I записуються в регістр перевірочних символів, в якому завдяки наявності ланцюгів зворотного зв'язку g_0 ... g_{n-k-1} формується залишок від ділення $x^{n-k} \cdot m(x)$ *на* $g(x)$ — перевірочні символи;

- починаючи з -го такту перемикач переводиться в нижнє положення, і з сдвигового регістра виводяться (n-к) перевірочних символів; ланцюг зворотного зв'язку при цьому розімкнений (схема I - закрита).

Для циклічного (7,4) -кода Хеммінга (а цей код володіє властивістю циклічності), використовуваного як приклад і що має поліном, що породжує $g(x) = 1 + x + x^3$, схема кодирования выглядит следующим образом (рис. 1.11):

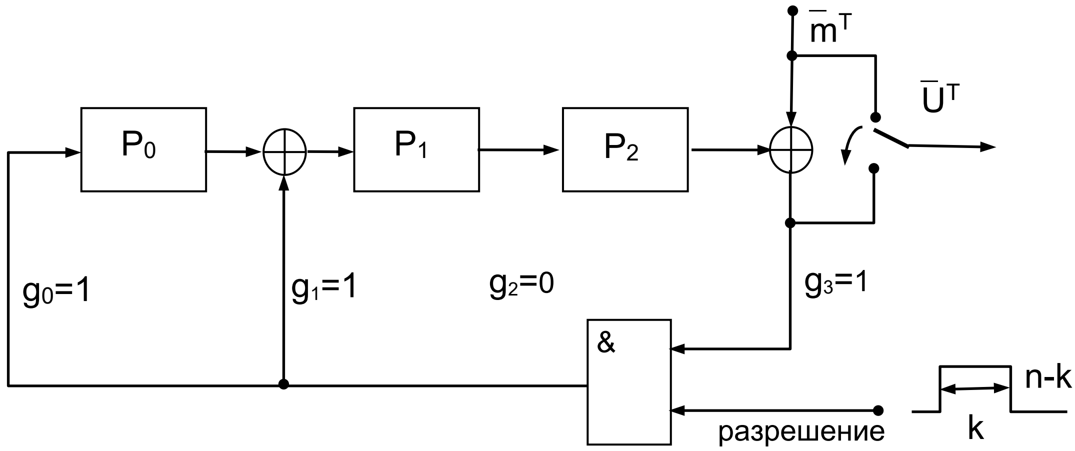


Рис. 1.11

У цій схемі, на відміну від узагальненої схеми кодера мал. 1.10, відсутні елементи в ланцюгах, де значення коефіцієнтів зворотного зв'язку g_i дорівнюють нулю, там же, де коефіцієнти передачі g_i дорівнюють одиниці, ланцюг просто замкнутий.

На прикладі цієї ж коди і відповідного йому кодера розглянемо в динаміці процес кодування довільної послідовності m.

Хай m = (1001). Тоді послідовність станів вічок сдвигового регістра із зворотними зв'язками в процесі кодування визначатиметься таблиці. 1.4 .

Таблиця 1.4

Номер такта	Положення переключателя	Рівень дозволу	Вхід m	Стан вічка регістра			Виход
				P_0	P_1	P_2	U
0	↑	1	1	1	1	0	1
1	↑	1	0	0	1	1	0
2	↑	1	0	1	1	1	0
3	↑	1	1	0	1	1	1
4	↓	0	0	0	0	1	1
5	↓	0	0		0	0	1
6	↓	0	0			0	0
7	↓	0	0				

Ще однією важливою властивістю циклічного (n,k) -кода, витікаючим з теореми про існування циклічних код, є те, що його поліном, що породжує, ділить без залишку двочлен x^n+1, тобто

$$x^n + 1 = g(x)\cdot h(x) + 0. \tag{1.71}$$

Поліном ***h(x)*** *— частка від ділення* x^n+1 *на* ***g(x)*** *- називається перевірочним поліномом.*

Оскільки h(x) однозначно пов'язаний з g(x), він також визначає код. Отже, за допомогою перевірочного полінома h(x) теж можна виробляти кодування. Схема кодування на підставі перевірочного полінома h(x) приведена на рис. 1.12.

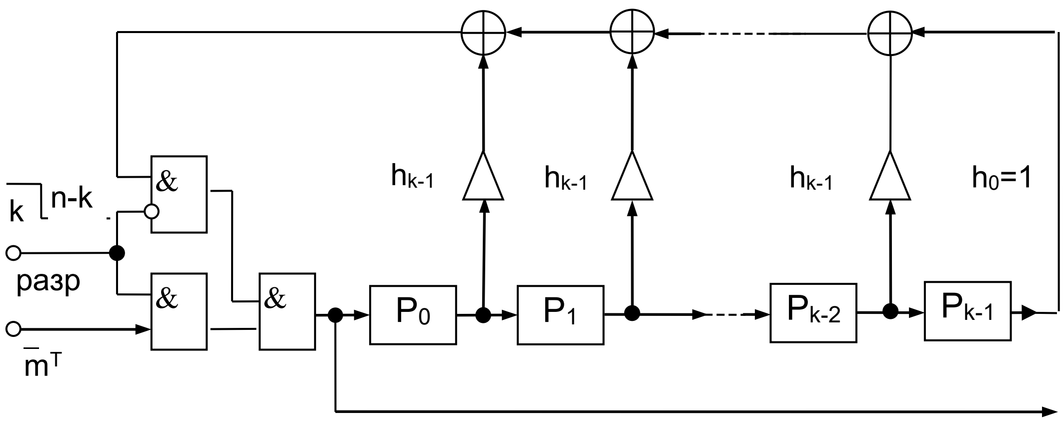


Рис. 1.12

Процедура кодування на підставі h(x) виглядає таким чином :

1. На вході "Дозвіл" встановлюється 1, при цьому відкривається нижня схема І і закривається верхня.

2. Повідомлення m послідовно записується в до-розрядний сдвиговый регістр і одночасно з цим передається в канал.

3. Після закінчення введення до інформаційних символів на вході "Дозвіл" встановлюється 0, замикаючи через верхню схему І ланцюг зворотного зв'язку.

4. Виробляється (n-к) зрушень, при цьому формуються і видаються в канал (n-к) перевірочних символів.

Для циклічного (7,4) -кода з поліномом, що породжує ***g(x)= 1+ x + x³*** перевірочний поліном h(x) має вигляд

$$h(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x+x^3} = 1+x+x^2+x^4. \qquad (1.72)$$

З врахуванням цього схема кодування на підставі полінома h(x) для (7,4) -кода виглядає таким чином (рис. 1.13):

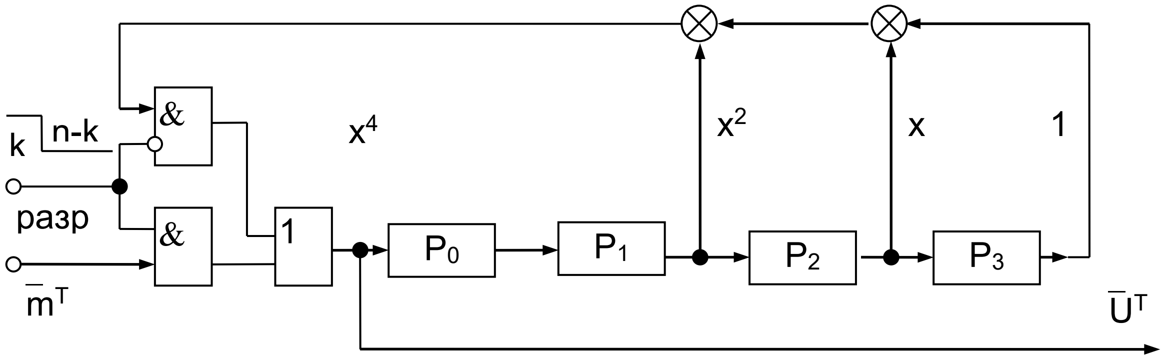


Рис. 1.13

1.3.3. Обчислення синдрому і виправлення помилок в циклічних кодах

Обчислення синдрому для циклічних код є досить простою процедурою.

Хай U(x) і r(x)- поліноми, відповідні переданому кодовому слову і прийнятій послідовності.

Розділивши r(x) на g(x), отримаємо

$$r(x)= q(x)(g(x)+ s(x) \qquad (1.73)$$

де - q(x) — частное від ділення, s(x) — залишок від ділення.

Якщо r(x) є кодовим поліномом, то він ділиться на g(x) без залишку, тобто s(x)= 0.

Отже, s(x)(0 є умовою наявності помилки в прийнятій послідовності, тобто синдромом прийнятої послідовності.

Синдром s(x) має в загальному випадку вигляд

$$S(x) = S_0 + S_1 \cdot x + ... + S_{n-k-1} \cdot x^{n-k-1} \; . \qquad (1.74)$$

Вочевидь, що схема обчислення синдрому є схемою ділення, подібною до схем кодування мал. 1.10 або 1.11 .

За наявності в прийнятій послідовності r хоч би однієї помилки вектор синдрому S матиме, принаймні, один нульовий елемент, при цьому факт наявності помилки легко виявити, об'єднавши по АБО виходи всіх вічок регістра синдрому.

Покажемо, що синдромный многочлен S(x) однозначно пов'язаний з многочленом помилки e(x), а значить, з його допомогою можна не лише виявляти, але і локалізувати помилку в прийнятій послідовності.

Хай

$$e(x) = e_0 + e_1 \cdot x + e_2 \cdot x^2 + ... + e_{n-1} \cdot x^{n-1} \qquad (1.75)$$

— поліном вектора помилки.

Тоді поліном прийнятої послідовності

$$r(x) = U(x) + e(x). \qquad (1.76)$$

Додамо в цьому виразі зліва і справа U(x), а також врахуємо, що

$$r(x) = q(x) \cdot g(x) + S(x), \; U(x) = m(x) \cdot g(x), \qquad (1.77)$$

тоді

$$e(x) = [m(x) + q(x)] \cdot g(x) + S(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot S(x), \qquad (1.78)$$

тобто синдромный поліном S(x) є залишок від ділення полінома помилки e(x) на поліном g(x), що породжує.

Звідси витікає, що по синдрому S(x) можна однозначно визначити вектор помилки e(x), а отже, виправити цю помилку.

На мал. 1.14 приведена схема синдромного декодера з виправленням однократної помилки для циклічного (7,4) -кода. По своїй структурі вона подібна до схеми, приведеної на мал. 1.6, з тією лише різницею, що обчислення синдрому прийнятої послідовності виробляється тут не множенням на перевірочну матрицю, а діленням на поліном, що породжує. При цьому вона зберігає і недолік, властивий всім синдромным декодерам: необхідність мати пристрій, що запам'ятовує, ставить у відповідність безлічі можливих синдромів S безліч векторів помилок e. Циклічність структури коди в цьому випадку не враховується.

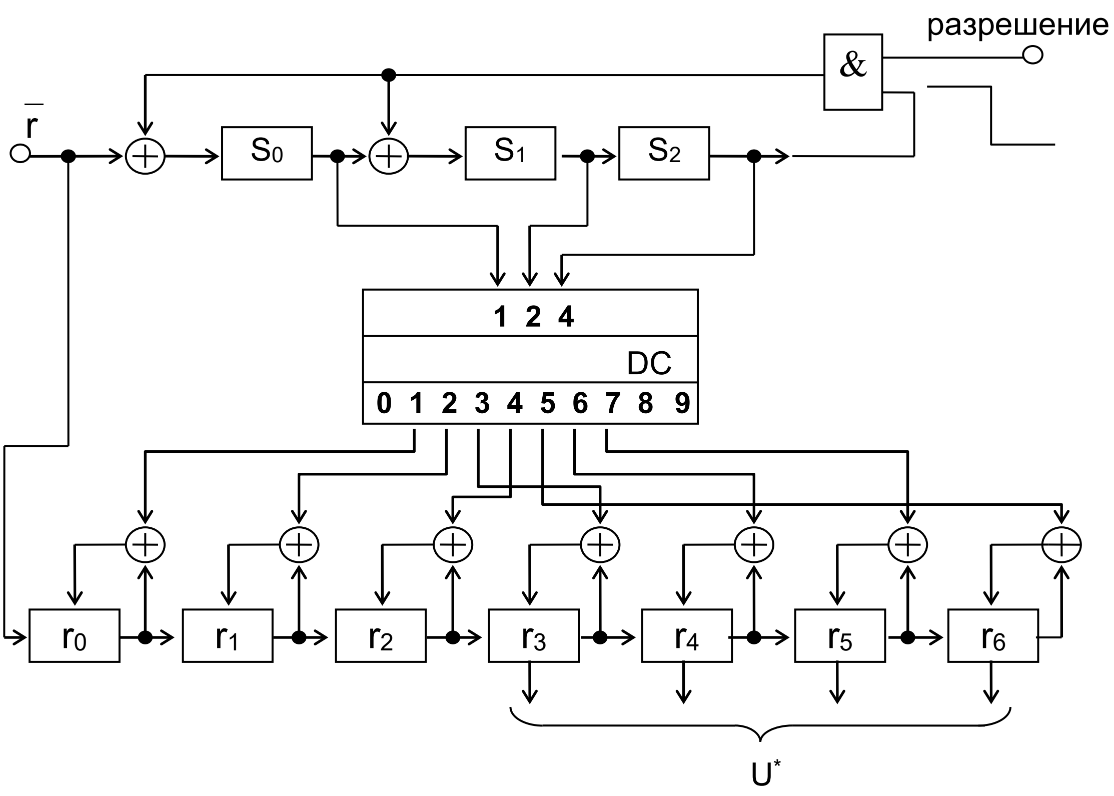


Рис. 1.14

1.3.4. Методи неалгебри декодування циклічних код

Всі методи декодування лінійних блокових код можна розбити на дві групи: алгебра і неалгебра.

У основі методів алгебри лежить вирішення систем рівнянь, задаюче значення і розташування помилок. Розглянуті синдромные декодери відносяться саме до цієї групи методів.

При методах неалгебри та ж мета досягається за допомогою простих структурних понять теорії кодування, що дозволяють знаходити комбінації помилок простішою дорогою.

Одним з методів неалгебри є декодування з використанням алгоритму Меггитта, придатного для виправлення як одиночних, так і l-кратных помилок (на практиці l (3).

При декодуванні відповідно до алгоритму Меггитта також обчислюється синдром прийнятої послідовності S(x), проте використовується він інакше, ніж в розглянутих раніше синдромных декодерах.

Ідея, лежача в основі декодера Меггитта, дуже проста і грунтується на наступних властивостях циклічних код:

- існує взаємно-однозначна відповідність між безліччю всіх помилок, що виправляються, і безліччю синдромів;

- *якщо S(x) — синдромный многочлен, відповідний многочлену помилок e(x), то x(S(x) mod g(x) — синдромный многочлен, відповідний* ***x· e(x) mod (x***^{n} ***+ 1).***

Рівність ***a(x) = b(x) mod p(x)*** читаєтся як *"**a(x),** порівнянно з **b(x)** по модулю **p(x)"** і означає, що a(x) і b(x) мають однакові залишки від ділення на поліном p(x).*

Таким чином, друга умова означає, що якщо комбінація помилок циклічно зрушена на одну позицію управо, то для здобуття нового синдрому потрібно зрушити вміст регістра зрушення із зворотними зв'язками, S(x), що містить, також на одну позицію управо.

Отже, основним елементом декодера Меггитта є сдвиговый регістр. Структурна схема декодера Меггитта для циклічних код довільної довжини приведена на рис. 1.15.

Рис. 1.15

Декодер працює таким чином. Перед початком роботи вміст всіх розрядів регістрів дорівнює нулю. Послідовність r, що приймається, протягом перших n тактів вводиться в буферний регістр і одночасно з цим в (n-к) -разрядном сдвиговом регістрі із зворотними зв'язками виробляється її ділення на поліном g(x), що породжує.

Через n тактів в буферному регістрі опиняється прийняте слово r, а в регістрі синдрому — залишок від ділення вектора помилки на поліном, що породжує.

Обчислений синдром порівнюється зі всіма табличними синдромами, і в разі збігу з одним з них старший розряд буферного регістра виправляється шляхом збільшення до його значення одиниці.

Після цього синдромный і буферні регістри один раз циклічно зрушуються. Це реалізує множення S(x) на x і діленні на g(x). Вміст вічок синдромного регістра тепер дорівнює залишку від ділення x(S(x) на g(x) або синдромі помилки $x \cdot e(x) \bmod (X^n + 1)$.

Якщо новий синдром збігається з одним їх табличних, то виправляється чергова помилка і так далі Через n тактів всі позиції будуть, таким чином, виправлені.

Розглянемо роботу декодера Меггитта для циклічного (7,4) -кода, що виправляє одиночну помилку. Схема декодера змальована на рис. 1.16.

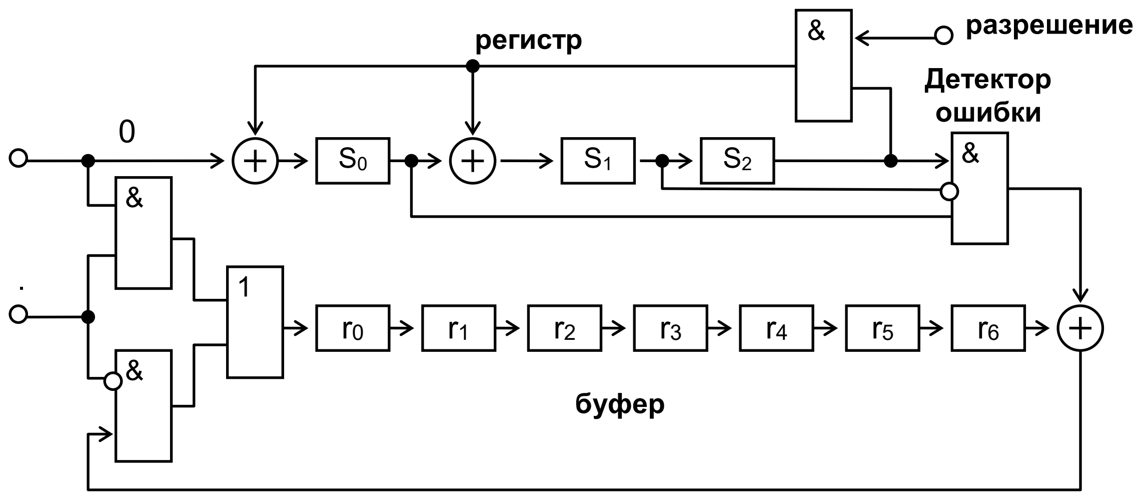


Рис. 1.16

Принцип роботи декодера полягає в тому, що незалежно від того, в якій позиції сталася помилка, здійснюється її зрушення в останнє вічко буферного регістра з відповідним перерахунком синдрому і її виправлення в цій позиції.

Поліном помилки в старшому розряді для (7,4) -кода Хеммінга має вигляд $e_6(x) = x^6$, відповідний йому синдромный поліном $S_6(x) = 1 + x^3$ ($S = (101)$), детектор помилки налаштований на це значення синдрому.

Хай, наприклад, передана послідовність U = (1001011), їй відповідає кодовий поліном $U(x) = 1 + x^3 + x^5 + x^6$. Сталася помилка в третій позиції $e(x) = x^3$, прийнятий вектор має вигляд r = (1000011), його поліном $r(x) = 1 + x^5 + x^6$.

Когда прийнята послідовність повністю входить в буферний регістр, в регістрі синдрому опиняється синдром, відповідний помилці $e(x) = x^3$ $S_3 =$

(110). Оскільки він не збігається з табличним для е6, на виході детектора помилок буде 0 і виправлення не відбувається.

Далі виробляються однократне циклічне зрушення прийнятої послідовності в буферному регістрі, однократне ділення синдрому $\boldsymbol{x \cdot S_3}$ на поліном, що породжує, в регістрі із зворотними зв'язками і перевірка на збіг синдрому із заданим.

Послідовність станів регістрів декодера в процесі декодування показана на рис. 1.17.

Рис. 1.17

Таким чином, виправлення помилки в декодері Меггитта здійснюється за 2(n тактів: протягом n тактів виробляється введення прийнятої послідовності в буферний регістр, протягом l тактів — виправлення помилки, і ще в перебіг n - l - відновлення буферного регістра у вихідний стан з виправленим словом. Простота декодера досягається збільшенням часу декодування.

Слід зазначити, що у зв'язку з успіхами в розробці БІС і пристроїв пам'яті в значній мірі знімається питання про розміри таблиць, що зв'язують значення синдрому і вектора помилки (для синдромних декодерів) і навіть значення кодових слів і прийнятих послідовностей (для декодера максимальної правдоподібності). Тому в перспективі можливе зниження інтересу до кодів, що володіють спеціальною структурою, і до методів їх декодування.

2. Згортальні коди

Методи кодування і декодування, розглянуті раніше, відносилися до блокових кодів. При використанні таких код інформаційна послідовність розбивається на окремі блоки, які кодуються незалежно один від одного. Таким чином, закодована послідовність стає послідовністю незалежних слів однакової довжини.

При використанні згортальних код потік даних розбивається на набагато менші блоки завдовжки до символів (у окремому випадку $\boldsymbol{k_0 = 1}$), які називаються кадрами інформаційних символів.

Кадри інформаційних символів кодуються кадрами кодових символів завдовжки $\boldsymbol{n_0}$ символів. При цьому кодування кадру інформаційних символів в кадр кодового слова виробляється з врахуванням попередніх m кадрів інформаційних символів. Процедура кодування, таким чином, зв'язує між собою послідовні кадри кодових слів. Передавана послідовність стає одним напівбезконечним кодовим словом.

Розвиток теорії і практики згортальних код помітно відрізняється від розвитку блокових код. При побудові блокових код і методів їх декодування широко використовувалися методи алгебри. В разі згортальних код це не так. Більшість хороших згортальних код були знайдені шляхом перегляду за допомогою ЕОМ великого числа код і подальшого вибору код з хорошими властивостями. Декодування згортальних код виробляється методами, близькими до методів максимальної правдоподібності, причому в цьому випадку вони реалізуються досить просто.

2.1. Кодування з використанням згортальних код

Основними характеристиками згортальних код є величини:

- $\boldsymbol{k_0}$ – *розмір кадру інформаційних символів;*
- $\boldsymbol{n_0}$ – *розмір кадру кодових символів;*
- $\boldsymbol{m}$ – *довжина пам'яті коди;*
- $\boldsymbol{k = (m+1) \cdot k_0}$ - *інформаційна довжина слова;*
- $\boldsymbol{n = (m+1) \cdot n_0}$ - *кодова довжина блоку.*

Кодова довжина блоку - це довжина кодової послідовності, на якій зберігається вплив одного кадру інформаційних символів.

Нарешті, згортальний код має ще один важливий параметр - швидкість R = k/n, яка характеризує міру надмірності коди, що вводиться для забезпечення виправляючих властивостей коди.

Як і блокові, згортальні коди можуть бути систематичними і несистематичними і позначаються як лінійні згортальні (n,k) -коды.

Систематичним згортальним кодом є такий код, для якого у вихідній послідовності кодових символів міститься без зміни послідовність інформаційних символів, що породила його. Інакше згортальний код є несистематичним.

Приклади схем кодерів для систематичного (8,4) і несистематичного згортальних (6,3) -кодів приведені на рис. 2.1 и 2.2.

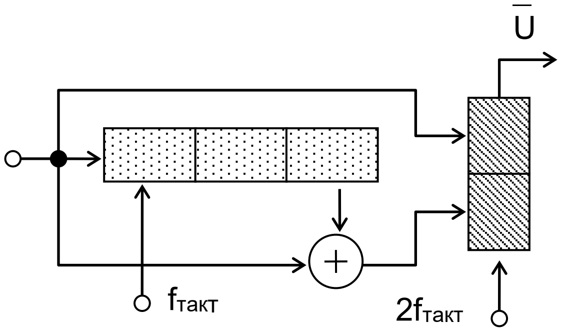


Рис. 2.1

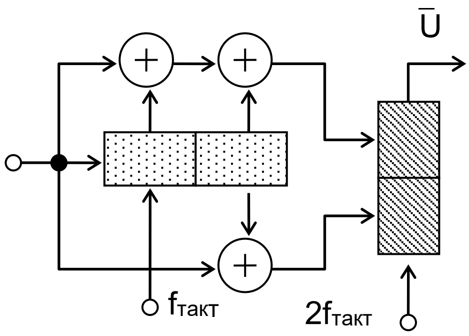


Рис. 2.2

Можливі різні способи опису згортальних код, наприклад, за допомогою матриці, що породжує. Правда, через нескінченність кодованої послідовності і матриця, що породжує, матиме безконечні розміри. Точніше, вона складатиметься з безконечного числа матриць **G** для звичайної блокової коди, розташованих уздовж головної діагоналі напівбезконечної матриці. Вся інша її частина заповнюється нулями.

Проте зручнішим способом опису згортальної коди є його завдання за допомогою імпульсної перехідної характеристики еквівалентного фільтру або відповідного їй полінома, що породжує.

Імпульсна перехідна характеристика фільтру (ІПХ) (а кодер згортальної коди, по суті справи, є фільтром) є реакція на одиничну дію вигляду $\bar{\delta}$ = (***10000.....*** Для кодерів, змальованих на мал. 2.1 і 2.2, відповідні імпульсні характеристики матимуть вигляд:

$$\boldsymbol{H_a = (11.00.00.01.00.00\ldots,} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{H_б = (11.10.11.00.00.00\ldots.} \tag{2.2}$$

Ще одна форма завдання згортальних код – це використання поліномів, що породжують, однозначно пов'язаних з ІПХ еквівалентного фільтру:

$$\boldsymbol{H_a(x) = 1 + x + x^7,} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{H_б(x) = 1 + x + x^2 + x^4 + x^5.} \tag{2.4}$$

При цьому кодова послідовність U на виході згортального кодера виходить в результаті свертки вхідної інформаційної послідовності m з імпульсною перехідною характеристикою H.

Розглянемо приклади кодування послідовностей з використанням імпульсної характеристики еквівалентного фільтру.

Хай ***m*** = (***110*** ... , тоді для кодера з ***ИПХ H*** = (***11.00.00.01.00.00....***

U = 11.00.00.01.00.00…
11.00.00.01.00…

U = 11.11.00.01.01.00.00… ,

або ***m*** = (***1011000…***

U = 11.00.00.01.00.00.00…
11.00.00.01.00…
11.00.00.01…

U = 11.00.11.10.00.01.01.00*… .*

Інколи зручніше розглядати повний поліном згортальної коди G(x), що породжує, як сукупність декількох многочленів менших мір, відповідних вічкам вихідного регістра кодера. Так, для кодера мал. 2.2 відповідних часткових поліномів, що породжують, будуть наступними:

$$G_1(x) = 1 + x + x^2, \quad (2.5)$$

$$G_2(x) = 1 + x^2. \quad (2.6)$$

Хай, наприклад, кодується послідовність m = (1010. . Відповідний інформаційний поліном запишеться як m(x)= 1 + x2.
Тоді на вході першого вічка вихідного регістра при кодуванні буде послідовність U 1 = (11011000., якою відповідає поліном $U_1(x) = 1 + x + x^3 + x^4$, а на вході другого вічка — U 2 = (10001000. і, відповідно, поліном $U_2(x) = 1 + x^4$.

Легко відмітити, що при цьому справедлива рівність

$$U_1(x) = m(x) \cdot G_1(x), \quad (2.7)$$

$$U_2(x) = m(x) \cdot G_2(x). \quad (2.8)$$

Така форма запису зручна, оскільки видно структура кодуючого пристрою (по набору поліномів можна відразу синтезувати пристрій). На практиці поліноми задаються набором своїх коефіцієнтів. У таблиці. 2.1

наведені приклади кодерів згортальних код, заданих своїми коефіцієнтами при мірах поліномів, що породжують.

Таблиця 2.1

G1	***G2***
111	***101***
1111	***1101***
11101	***10011***
111011	***10100111***
110001	***11111001***

Як приклад кодера з $\boldsymbol{k_0 \neq 1}$ можно привести кодер згортального ***(12,9)*** кода *Вайнера-Эша* з параметрами: $\boldsymbol{k_0 = 3}$, $\boldsymbol{n_0 = 4}$, $\boldsymbol{k = 9}$, $\boldsymbol{n = 12}$, $\boldsymbol{R = 3/4}$ (рис. 2.3).

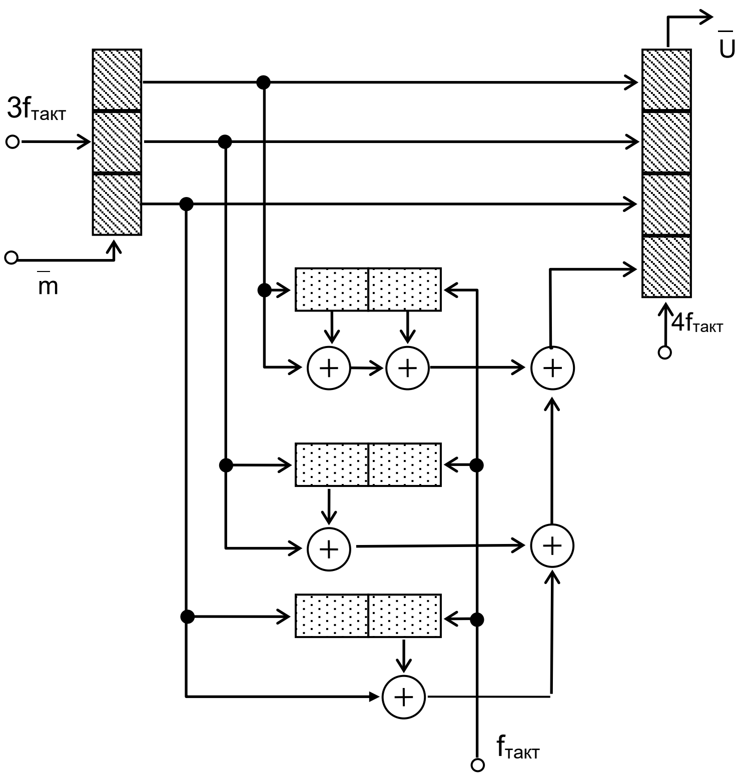


Рис. 2.3

Хай, наприклад, m = (100.000.000.... Тоді кодове слово U = =(1001.0001.0001.0000....). Видно, що це – систематичний код, в якому до трьох інформаційних символів додається один перевірочний, залежний від значень інформаційних символів не лише поточного кадру, але і двох попередніх кадрів. При цьому вплив одного кадру інформаційних символів поширюється на 12 символів кодової послідовності, тобто кодова довжина блоку для цієї коди n = 12.

2.2. Синдромноє декодування згортальних код

Передбачимо, що нами прийнята напівбезконечна послідовність r, що складається із слова згортальної коди і вектора помилки:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{e}. \tag{2.9}$$

Аналогічно тому, як це робиться для блокових код, можна обчислити синдром прийнятої послідовності:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{r} \cdot \underline{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{e} \cdot \underline{\boldsymbol{H}}. \tag{2.10}$$

Проте через безконечну довжину прийнятої послідовності (а згортальний код є безперервною безконечною послідовністю двійкових символів) синдром також матиме безконечну довжину і його пряме обчислення не має сенсу.

В той же час можна відмітити, що для розглянутих нами згортальних код вплив одного інформаційного кадру поширюється всього на декілька кодових кадрів. Тому декодер може переглядати не весь синдром, а обчислювати його компоненты у міру вступу кадрів кодової послідовності, виправляти поточні помилки і скидати ті компоненты синдрому, які обчислені давно.

Для виправлення помилок при цьому декодер повинен містити таблицю сегментів синдромів і сегментів конфігурацій помилок, створюючих дані конфігурації синдрому. Якщо декодер знаходить в таблиці отриманий сегмент синдрому, він виправляє початковий сегмент кодового слова.

Схема декодера для згортального (12,9) -кода Вайнера-Еша змальована нижчим (мал. 2.4). Виправлення помилок за допомогою даного декодера виробляється на сегментах з трьох кодових кадрів - n = 12.

Декодер працює таким чином. У вхідний регістр записується перший кадр послідовності r, що приймається (чотири символи). По перших трьох (інформаційним) символах кадру по тих же правилах, що і при кодуванні, визначається значення контрольного біта, який далі порівнюється з четвертим (перевірочним) символом прийнятого кадру.

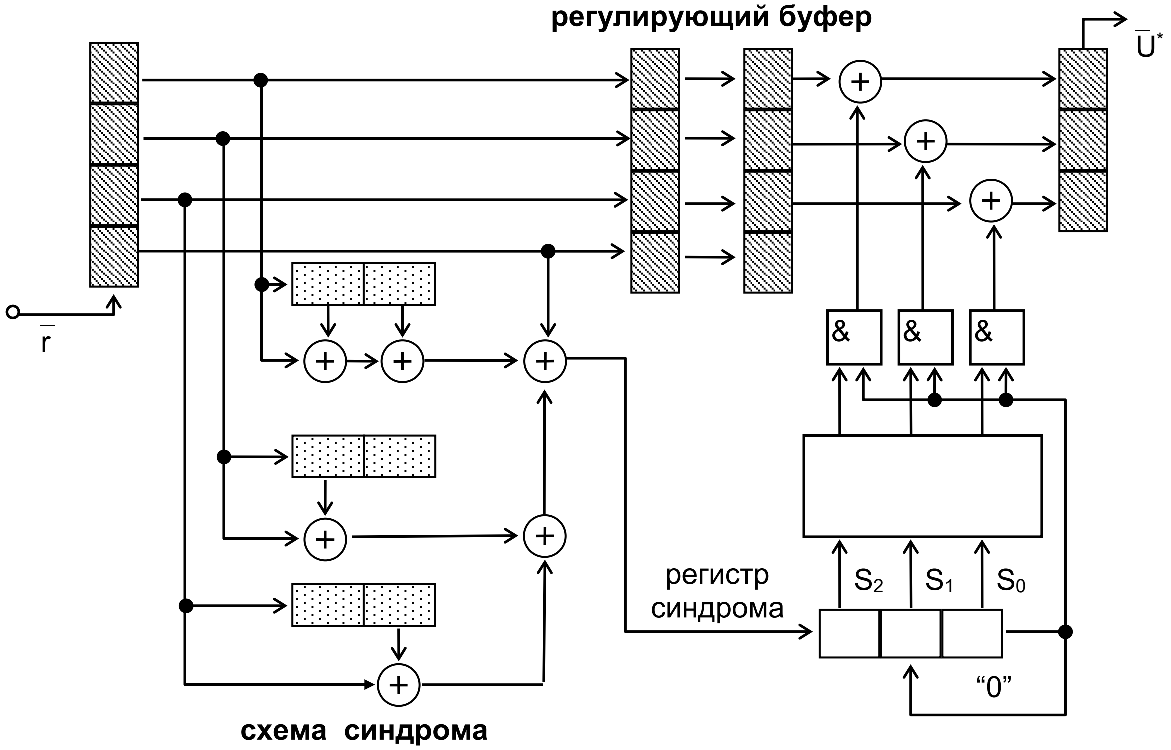


Рис. 2.4

При збігу контрольного і перевірочного бітів (а це буде, якщо помилки в першому кадрі немає) в перше вічко синдромного регістра записується 0, якщо ж в кадрі помилка є ? то 1. Далі перший кадр прийнятої послідовності переноситься в регулюючий буфер, а у вхідний регістр заноситься черговий кадр прийнятої послідовності.

Після аналогічних перевірок для другого і третього кадрів прийнятої послідовності на виході регулюючого буфера виявляється перший кадр прийнятої послідовності, в регістрі синдрому — трьохбітовий синдром, відповідний прийнятому сегменту з трьох кадрів, а на виході адресної логіки — що дешифрується по синдрому S вектор помилки e.

Виправлений кадр записується у вихідний регістр, при цьому виправлення виробляється лише за наявності одиниці на входах схем "І", що відповідає присутності помилки саме в першому кадрі. Після виправлення помилки регістр синдрому скидається. Втрата другого і третього бітів синдрому при цьому не має значення, оскільки ні в другому, ні в третьому кадрах помилки бути не повинно (вона була в першому кадрі, а значить, у фрагменті з трьох кадрів помилки більше бути не повинно).

Всі можливі конфігурації помилок по-перше трьох кадрах і відповідні їм перші три біта синдрому приведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Конфігурація помилок в прийнятому сегменті				Синдром
1-й кадр	2-й кадр	3-й кадр	…	…
1000	0000	0000		111
0100	0000	0000		011
0010	0000	0000		101
0001	0000	0000		001
0000	1000	0000		110
0000	0100	0000		110
0000	0010	0000		010
0000	0001	0000		010
0000	0000	1000		100
0000	0000	0100		100
0000	0000	0010		100

2.3. Кодове дерево і гратчаста діаграма

Ще одним дуже наочним способом опису і ілюстрації роботи згортальних код є використання так званого кодового дерева.

Розглянемо згортальний (6.3) -код з схемою, змальованою на мал. 2.5.

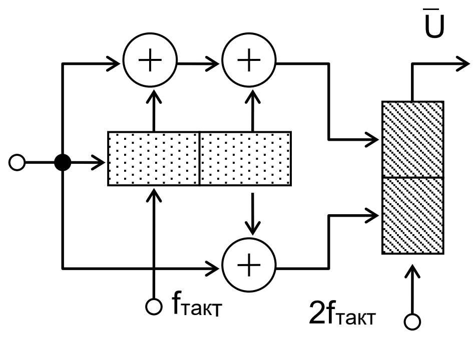


Рис. 2.5

Відповідне цьому кодеру кодове дерево – послідовність вихідних станів кодера при подачі на його вхід ланцюжка вхідних символів 0 і 1 – наведено на рис. 2.6.

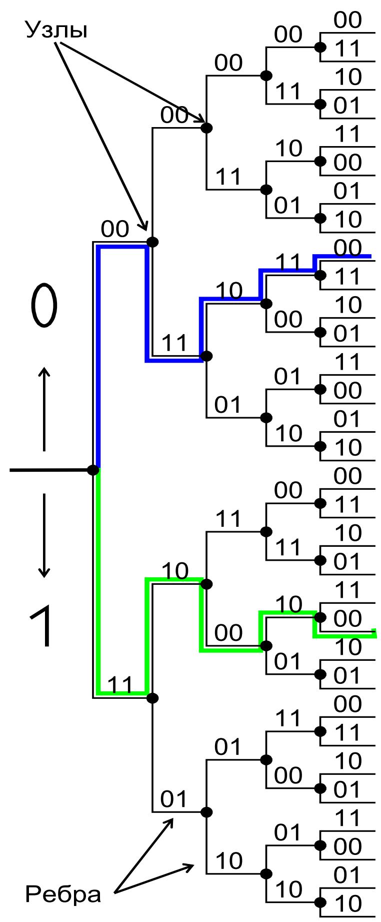


Рис. 2.6

На діаграмі мал. 2.6 змальовані вхідні і вихідні послідовності кодера: вхідні — напрямом руху по дереву (вгору - 0, вниз - 1), вихідні — символами уздовж ребер дерева. При цьому кодування полягає в русі управо по кодовому дереву.

Наприклад, вхідна послідовність m = (01000.. кодується як U = (0011101100000., послідовність m = (1010100000. - як U = (1110001000. .

Якщо уважно поглянути на будову приведеного на мал. 2.6 кодового дерева, можна відмітити, що починаючи з четвертого ребра його структура повторюється, тобто яким би не був перший крок, починаючи з четвертого ребра значення вихідних символів кодера повторюються. Однакові ж вузли можуть бути об'єднані, і тоді починаючи з деякого перетину розмір кодового дерева перестане збільшуватися.

Іншими словами, вихідна кодова послідовність в певний момент перестає залежати від значень вхідних символів, введених в кодер раніше.

Дійсно, з мал. 2.6 видно, що, коли третій вхідний символ вводиться в кодер, перший вхідний символ покидає сдвиговый регістр і не зможе надалі робити впливу на вихідні символи кодера.

З врахуванням цього необмежене кодове дерево, змальоване на мал. 2.6, переходить в обмежену гратчасту діаграму (кодове дерево з вузлами, що зливаються) рис. 2.7.

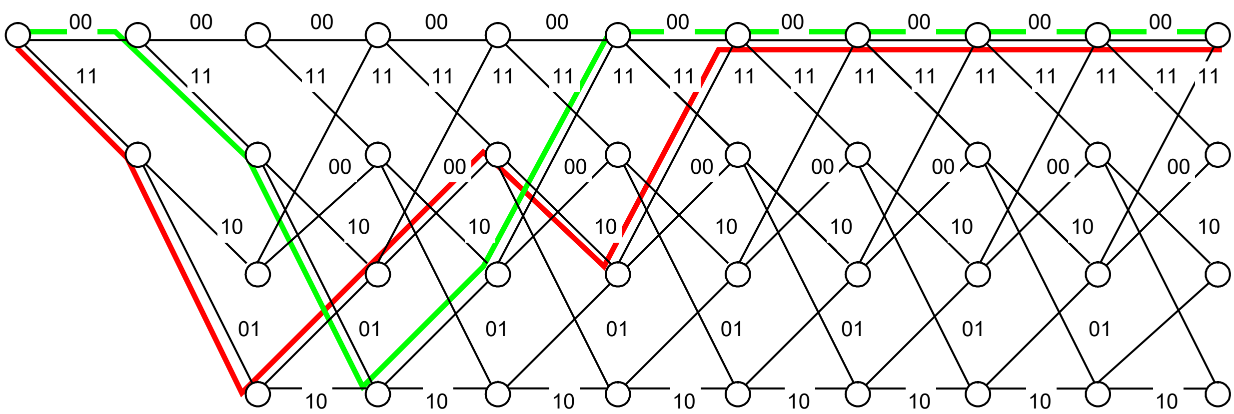


Рис. 2.7

Кодування згортальними кодами з використанням гратчастої діаграми, як і у випадку з кодовим деревом, є надзвичайно простою процедурою: чергові символи вхідної послідовності визначають напрям руху з вузлів грат: якщо 0, то йдемо по верхньому ребру, якщо 1 - по нижньому ребру. Проте на відміну від кодового дерева гратчаста діаграма не розростається по ширині з кожним кроком, а має починаючи з третього перетину постійну ширину.

Як приклад закодуємо за допомогою гратчастої діаграми декілька інформаційних послідовностей.

Хай m=(0110000. . Відповідна їй кодова послідовність матиме вигляд:

U = (001101011100.,

або m = (110100., тоді

U = (1101010010110000.;

або m = (000000., тоді

U = (1101010010110000

і так далі, простіше не придумаєш.

2.4. Декодування згортальних код. Алгоритм Вітербі

Найкращою схемою декодування код, що коректують, як вже наголошувалося, є декодування методом максимальної правдоподібності, коли декодер визначає набір умовної вірогідності $P(r/U_i)$, відповідних всім можливим кодовим векторам U_i , і рішення приймає на користь кодового слова, відповідного максимальному $P(r/U_i)$.

Для двійкового симетричного каналу без пам'яті (каналу, в якому вірогідність передачі 0 і 1, а також вірогідності помилок вигляду 0 (1 і 1 (0 однакові, помилки в j-м і i-м символах коди незалежні) декодер максимальної правдоподібності зводиться до декодера мінімальної хеммингова відстані. Останній обчислює відстань Хеммінга між прийнятою послідовністю r і всіма можливими кодовими векторами Ui і виносить ухвалу на користь того вектора, який виявляється ближчим до прийнятого.

Природно, що в загальному випадку такий декодер виявляється дуже складним і при великих розмірах код n і до що практично не реалізовується.

Характерна структура згортальних код (повторюваність структури за межами вікна довжиною n) дозволяє створити сповна прийнятний по складності декодер максимальної правдоподібності.

Вперше ідея такого декодера була запропонована Вітербі. Працює він таким чином.

Передбачимо, на вхід декодера поступив сегмент послідовності r довжиною b, що перевищує кодову довжину блоку n. Назвемо b вікном декодування. Порівняємо всі кодові слова даної коди (в межах сегменту довжиною b) з прийнятим словом і виберемо кодове слово, найближче до прийнятого. Перший інформаційний кадр вибраного кодового слова приймемо як оцінку інформаційного кадру декодованого слова.

Після цього в декодер вводиться n0 нових символів, а введені раніше найстаріші n0 символів скидаються, і процес повторюється для визначення наступного інформаційного кадру.

Таким чином, декодер Вітербі послідовно обробляє кадр за кадром, рухаючись по гратах, аналогічних використовуваних кодером. У кожен момент часу декодер не знає, в якому вузлі знаходиться кодер, і не намагається його декодувати. Замість цього декодер по прийнятій послідовності визначає найбільш правдоподібну дорогу до кожного вузла і визначає відстань між кожним таким дорогою і прийнятою послідовністю. Ця відстань називається мірою расходимости дороги. Як оцінка прийнятої послідовності вибирається сегмент, що має найменшу міру расходимости. Дорога з найменшою мірою расходимости називається дорогою, що вижила.

Розглянемо роботу декодера Вітербі на простому прикладі. Вважаємо, що кодування виробляється з використанням згортального (6,3) -кода (схема кодера приведена на мал. 2.5, гратчаста діаграма, відповідна цьому кодеру, – на мал. 2.7).

Користуючись гратчастою діаграмою кодера, спробуємо, прийнявши деякий сегмент r, прослідити найбільш вірогідну дорогу кодера. При цьому для кожного перетину гратчастої діаграми відзначатимемо міру расходимости дороги до кожного її вузла.

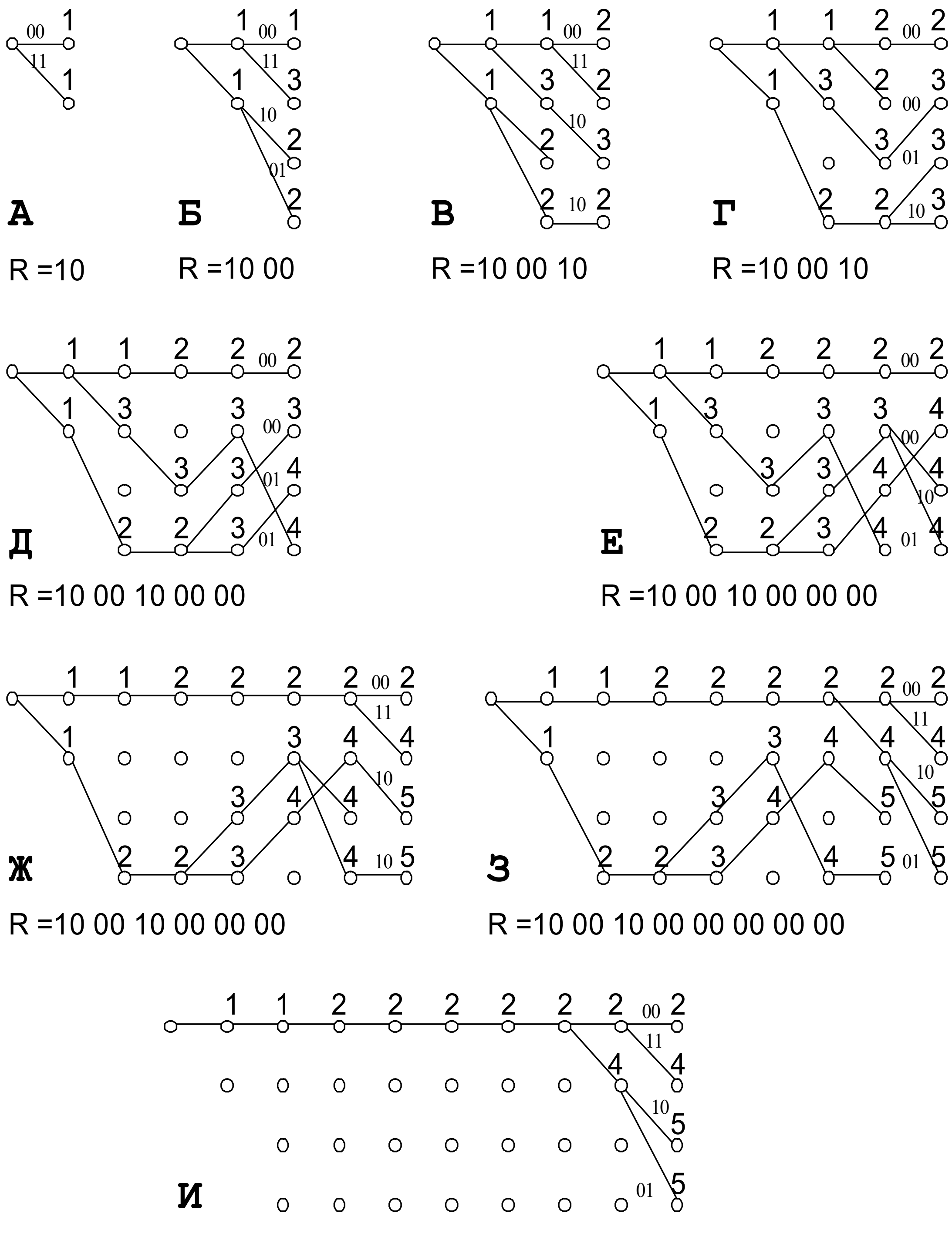
Передбачимо, що передана кодова послідовність U = = (0000000.), а прийнята послідовність має вигляд r = (10001000 00...), тобто в першому і в третьому кадрах кодового слова виникли помилки. Як ми вже переконалися, процедура і результат декодування не залежать від передаваного кодового слова і визначаються лише помилкою, що міститься в прийнятій послідовності. Тому найпростіше вважати, що передана нульова послідовність, тобто U = (0000000.).

Прийнявши першу пару символів (10), визначимо міру расходимости для першого перетину грат (див. мал. 2.7), прийнявши наступну пару символів (00), — для другого перетину і так далі При цьому з вхідних в кожен вузол доріг залишаємо дорогу з меншою расходимостью, оскільки дорога з більшою на даний момент расходимостью вже не зможе стати надалі коротше.

Відмітимо, що для даного прикладу починаючи з четвертого рівня метрика (або міра расходимости) нульової дороги менше будь-якої іншої метрики. Оскільки помилок в каналі більше не було, ясно, що врешті-решт як відповідь буде вибраний саме ця дорога. З цього прикладу також видно, що дороги, що вижили, можуть достатньо довго відрізнятися один від одного.

Проте на жердиною - сьомому рівні перші сім ребер всіх доріг, що вижили, збіжаться один з одним. У цей момент згідно алгоритму Вітербі і приймається рішення про передані символи, оскільки всі дороги, що вижили, виходять з однієї вершини, тобто відповідають одному інформаційному символу.

Процедура декодування послідовності з двома помилками ілюструється послідовністю, представленою на мал. 2.8.



Мал. 2.8

Глибина, на якій відбувається злиття доріг, що вижили, не може бути обчислена заздалегідь; вона є випадковою величиною, залежною від кратності і вірогідності помилок, що виникають в каналі. Тому на практиці зазвичай не чекають злиття доріг, а встановлюють фіксовану глибину декодування.

З мал. 2.8 видно, що вже на рівні Е міра відмінності метрик правильної і неправильної доріг досить велика (dпр = 2, dош = 4), тобто в даному випадку можна було б обмежити глибину декодування величиною b ? 6. Але інколи довша до даного перетину дорога може виявитися зрештою найкоротшою, тому особливо захоплюватися зменшенням розміру вікна декодування b з метою спрощення роботи декодера не стоїть.

На практиці глибину декодування зазвичай вибирають в діапазоні n (b ? n + l, де l - число що виправляються даним кодом помилок.

З мал. 2.8 видно також, що, не дивлячись на наявність в прийнятому фрагменті двох помилок, його декодування сталося без помилки і як відповідь буде прийнята передана нульова послідовність.

2.5. Алгоритми пошуку по гратах

Характеристики згортальних код, як і будь-яких інших код, покращуються у міру збільшення їх розміру, в даному випадку - кодової довжини блоку n. При цьому, проте, декодер Вітербі стає не реалізовується складним. Так, при n = 10 він повинен пам'ятати вже не менше 210 = 1024 доріг, що вижили.

Для зменшення складності декодера максимальної правдоподібності при великих n була розроблена стратегія, що ігнорує маловірогідні дороги пошуку по гратах, як тільки вони стають маловірогідними. Проте рішення про те, аби остаточно відкинути дану дорогу, не приймається. Час від часу декодер повертається назад і продовжує залишену дорогу.

Подібні стратегії пошуку найбільш вірогідної дороги по гратах відомі під загальною назвою послідовного декодування.

На відміну від оптимальної процедури Вітербі послідовний декодер, проглянувши перший кадр, переходить в черговий вузол грат з найменшою на даний момент расходимостью. З цього вузла він аналізує наступний кадр, вибираючи ребро, найближче до даного кадру, і переходить в наступний вузол і так далі.

За відсутності помилок ця процедура працює дуже добре, проте при виникненні помилок на якому-небудь кроці декодер може випадково вибрати неправильну гілку. Якщо він продовжить слідувати по неправильній дорозі, то дуже скоро виявить, що відбувається надто багато помилок, і рас-ходимость дорозі почне швидко наростати. Але це будуть помилки декодера, а не каналу. Тому декодер повертається на декілька кадрів назад і починає досліджувати інші дороги, поки не знайде найбільш правдоподібний. Потім він слідуватиме уздовж цієї нової дороги.

Найбільш простим послідовним алгоритмом декодування є алгоритм Фано. Для його реалізації необхідно знати середню вірогідність появи помилок в каналі зв'язку Рош.

Поки декодер слідує по правильній дорозі, вірогідне число помилок по-перше l кадрах (це буде мірою расходимости дороги за l кадрів) приблизно рівно

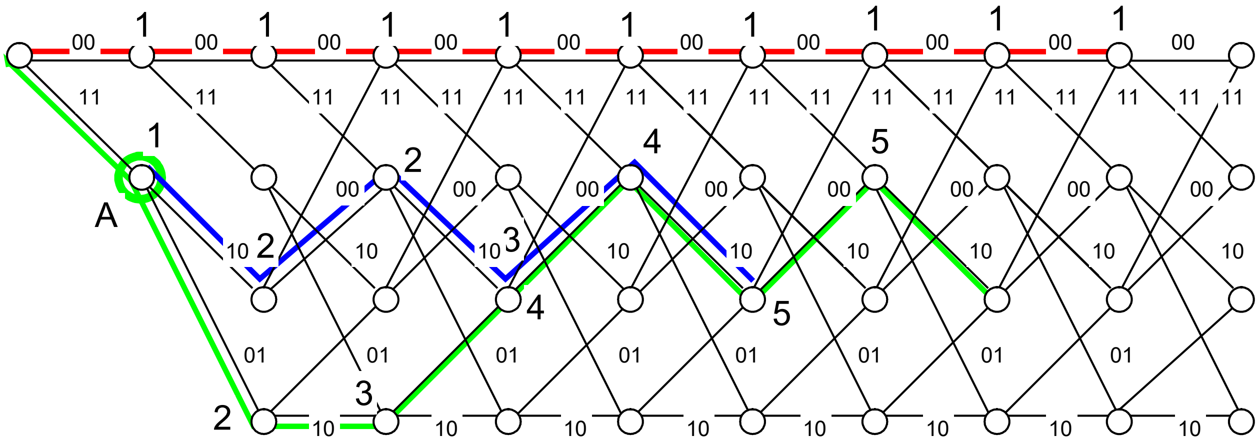
dl = Рош (n0 (l .

(2.11)

Якщо ж помилок стає набагато більше, то декодер приймає рішення, що він на помилковій дорозі, і повертається на декілька кадрів назад.

Процедура декодування послідовності r = (01000000..., що містить помилку в другому символі, показана на мал. 2.9.

Хай U = (0000000000000000. і прийнята послідовність r = (0100000000000., тобто виникла помилка в другій позиції коди. Прослідимо дорогу декодера Фано по гратах мал. 2.9.



Мал. 2.9

Видно, що якщо на першому кроці вибрана вірна дорога, то расходимость не збільшується і декодування виконується без помилки. Проте на першому кроці міг бути вибраний і неправильна дорога (вниз), що має таку ж метрику. При цьому расходимость починає швидко наростати, що свідчить про неправильний вибір дороги. Необхідно повернутися, але на скільки кроків? Передбачимо, що повернення сталося в крапку А і з неї здійснюється пошук по недослідженій дорозі. Дуже швидко, проте, декодер переконається в неправильності вибору і знову повинен повернутися. Але тепер уже не має сенсу повертатися в крапку А, потрібно зробити принаймні ще один крок назад і знову піти по недослідженій дорозі. В даному випадку це буде правильна дорога.

Декодер Фано набагато простіше в реалізації, ніж декодер Вітербі, і майже не поступається йому у вірогідності помилкового декодування. Але він володіє і серйозним недоліком. Якщо вірогідність помилок в каналі велика, то зростає і вірогідність ухвалення неправильних рішень при переході з одного вузла грат в іншій, а отже, зростає число повернень до попередніх вузлів, що вимагає витрат часу. Вхідна послідовність при цьому щоб уникнути втрати даних повинна зберігатися в спеціальному нагромаджуючому регістрі. Зрештою можуть статися переповнювання цього регістра і відмова декодера.

3. Вживання кодування, що коректує, в системах зв'язку

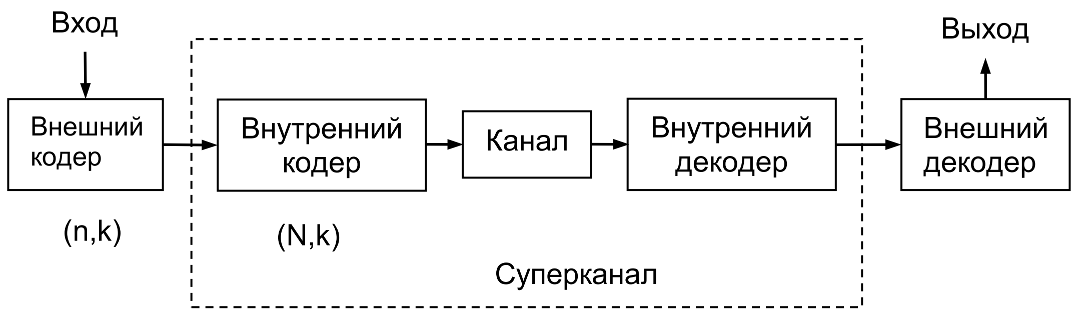
Приведені нижче декілька типових прикладів вживання допоможуть зрозуміти, як ефективніше на практиці здійснювати кодування в системах зв'язку. Один з типових випадків характерний для систем, в яких потрібні дуже потужні коди. Звичайний метод реалізації таких код полягає в тому, що каскадує два або простіших код.

Ще однією цікавою проблемою є кодування для каналів, в яких помилки виникають не незалежно, а пакетами. Розглянуті раніше методи кодування при цьому стають абсолютно неефективними, оскільки всі їх характеристики визначалися виходячи з того, що помилки в окремих символах незалежні один від одного.

3.1. Каскадні коди

Каскадні коди були вперше запропоновані Форні як метод практичної реалізації коди з великою довжиною блоку і високою здатністю, що коректувала. Ця мета досягається введенням декількох рівнів кодування, зазвичай – два.

Основну ідею каскадного кодування з двома рівнями ілюструє мал. 3.1.



Мал. 3.1

У цій схемі комбінацію внутрішнього кодера, каналу і внутрішнього декодера інколи називають суперканалом, аналогічно, комбінацію зовнішнього і внутрішнього кодерів - суперкодером, а комбінацію внутрішнього і зовнішнього декодерів – супердекодером.

Довжина каскадної коди виходить рівною $N1 = N \cdot n$ двійкових символів, де N - довжина зовнішньої коди, а n - довжина внутрішньої коди. При цьому інформаційна довжина коди складає $K1 = K \cdot$ до двійкових символів, а швидкість коди $R1 = R \cdot r$. Не дивлячись на те, що загальна довжина коди виходить великою і, відповідно, значно зростає його виправляюча здатність, його декодування може виконуватися за допомогою двох декодерів, розрахованих на довжини складових його код n і N. Це дозволяє багато разів понизити складність декодера порівняно з тим, якби така виправляюча здатність досягалася однорівневим кодуванням.

Простою ілюстрацією до каскадного кодування є ітеративний код, розглянутий в параграфі 1.2.2. Цей код складається з простих код з перевіркою на парність (по рядках і стовпцях), але в той же час володіє виправляючою здатністю. На практиці, звичайно, використовуються набагато складніші коди.

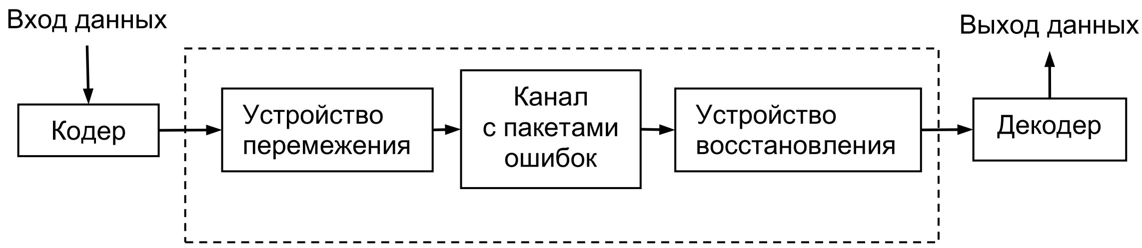
Звичайне зовнішнє кодування виконується блоковими кодами, а внутрішнє – більш пристосованими для побітової передачі по радіоканалу згортальними кодами. Каскадне кодування широко застосовується на практиці, зокрема, при перешкодостійкому кодуванні мовної інформації в системі стільникового зв'язку формату GSM.

3.2. Кодування з перемежением

Всі розглянуті раніше методи кодування і приклади розрахунку їх ефективності відносилися до каналів без пам'яті, тобто до каналів, в яких вірогідність помилки постійна і не залежить від часу. На практиці ж властивості каналів зв'язку такі, що помилки зазвичай групуються так званими пакетами. При постійній деякій середній вірогідності помилок на великому інтервалі часу значення Рош на окремих коротких інтервалах може значно перевищувати середнє значення - Рош ср. Якщо для виправлення таких помилок використовувати традиційні методи кодування-декодування, це зажадає вживання складних код з великою виправляючою здатністю і, відповідно, великою надмірністю.

Одне з можливих рішень в таких випадках може полягати у використанні досить простої коди, розрахованої на виправлення одиночних помилок, разом з парою пристроїв, виконуючих перемежение закодованих символів перед їх передачею в канал і відновлення (деперемежение) після прийому. При такій обробці кодової і прийнятої послідовностей помилки на вході декодера розподіляються більш рівномірно.

Структурна схема системи з перемежением показана на мал. 3.2.



Мал. 3.2

Пристрій перемежения в цій схемі переупорядковує (переставляє) символи передаваної послідовності деяким детермінованим чином. За допомогою пристрою відновлення виробляється зворотна перестановка, поновлююча вихідний порядок дотримання символів. Використовуються різні способи перемеження-восстановления. Перший спосіб – періодичне перемежение. Він простіший, але при зміні характеру перешкод може виявитися нестійким. Складніше – псевдовипадкове перемежение, яке володіє при нестаціонарних помилках набагато більшою стійкістю.

Періодичне перемежение

При періодичному перемежении функція перестановок періодична з деяким періодом. Перемеженіє може бути блоковим, коли перестановки виконуються над блоком даних фіксованого розміру, або згортальним, коли процедура виконується над безперервною послідовністю.

Типовий блоковий пристрій перемежения працює таким чином. Кодові символи записуються в матрицю, N рядків і M стовпців, що має, відрядковий, а читаються з неї по стовпцях. На приймальній стороні операція виконується в зворотному порядку: запис виробляється по стовпцях, а читання - по рядках. При цьому відбувається відновлення вихідного порядку дотримання символів. Природно, що процедури перемежения і деперемежения мають засинхронізуватися.

При такому перемежении досягається наступне: будь-який пакет помилок довжиною m ? M переходить на виході пристрою відновлення в одиночні помилки, кожна пара яких розділена не менше чим N символами. Правда, при цьому будь-яка періодична з періодом M одиночна помилка перетворюється на пакет, але вірогідність такого перетворення дуже мала, хоча і існує. У цьому, власне, і полягає головний недолік періодичного перемежения: якщо з'явилася перешкода з частотою дотримання помилок, співпадаючою з періодом перемежения або кратною йому, то до тих пір, поки характеристики перешкоди не зміняться, з одиночних помилок виникатимуть пакети помилок, що не виправляються.

Псевдовипадкове перемежение

При псевдовипадковому перемежении блоки з L символів записуються в пам'ять з довільною вибіркою (ЗУПВ), а потім прочитуються з неї псевдовипадковим чином. Порядок перестановок, однаковий для пристроїв перемежения і відновлення, можна записати в ПЗП і використовувати його для адресації ЗУПВ.

Як і для періодичного перемежения, існує вірогідність того, що помилки слідуватимуть таким чином, що одиночні помилки групуватимуться в пакети. Але така вірогідність надзвичайно мала (якщо, звичайно, це не організована перешкода і противник не знає порядку перемежения). Випадковий же збіг порядку дотримання перестановок при перемежении і імпульсах перешкоди при достатній довжині L практично неймовірно.

Що стосується характеру псевдовипадкового перемеження, то для цього можуть використовуватися будь-які псевдовипадкові послідовності - лінійні і нелінійні послідовності максимальної довжини, послідовності, засновані на лінійному порівнянні, а також будь-які алгоритми формування псевдовипадкових чисел з необхідним періодом повторення.

На цьому короткий екскурс в теорію перешкодостійкого кодування завершений, детальніше в різних аспектах практичного вживання кодування, що коректує, для підвищення перешкодостійкості систем зв'язку можна розібратися з використанням літературних джерел [4,5].

Як ми вже відзначали, перешкодостійке кодування, взагалі-то, не є обов'язковою операцією при передачі інформації. Ця процедура (і відповідний нею елемент структурної схеми РТС ПІ) може бути відсутньою. Проте це може привести до дуже істотних втрат в перешкодостійкості системи, значному зменшенню швидкості передачі і зниженню якості передачі інформації. Тому практично всі сучасні системи (за виключенням, мабуть, найпростіших) повинні включати і обов'язково включають перешкодостійке кодування даних.

4. Завдання і практичні питання до курсу

1. По каналу зв'язку з нормальним білим шумом передається інформація із швидкістю Vпи = 10 кбит/с. При цьому середня вірогідність помилок в каналі складає Рош = 10 -6.

Для поліпшення якості передачі інформації розглядається декілька варіантів рішення:

- кодування кодом, що коректує, з матрицею, що породжує
  ***G* = | 111 |;**
- кодування згортальним (6,3) -кодом;
- кодування (8,4) -кодом Хеммінга;
- зменшення на 20% швидкостей передачі .

Яке із запропонованих рішень забезпечить більший ефект, якщо по-перше трьох випадках швидкість передачі інформації повинна зберегтися колишньою?

2. Матриця лінійної блокової коди, що породжує, має вигляд

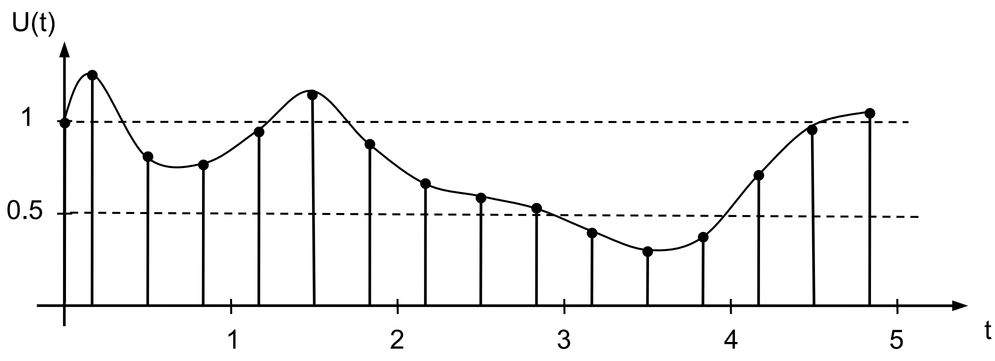
$$\boldsymbol{G} = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| .$$

Визначити для даної коди H, dmin. Змалювати схему кодера і декодера.

Визначити число помилок, не виправлених даним кодом за 1 годину роботи, якщо Vпи = 10 кбит/с, Рош = 10 -4.

3. У каналі зв'язку з шумами виробляється кодування інформації з використанням коди з матрицею вигляду G, що породжує = | 11111 |.

На вході приймального пристрою на інтервалі часі, відповідному довжині кодової послідовності, присутнє вагання вигляду U(t) (мал. 4.1)



Мал. 4.1

Сигнал U(t) в приймальному пристрої піддається дискретизації (по 3 відліки на інтервал, відповідний одному символу кодової послідовності).

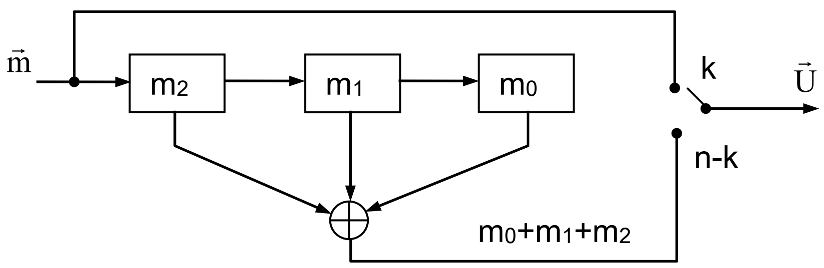
Яке рішення відносне m прийме:

- жорсткий мажоритарний декодер;
- м'який декодер максимальної правдоподібності?

4. Для кодера згортальної коди з схемою, показаною на мал. 2.5, визначити k0, n0, m, n, до, R, b, змалювати кодове дерево і гратчасту діаграму, закодувати послідовність m = (1100100000....., декодувати r з помилкою в другому кадрі з використанням алгоритму Вітербі.

5. Запропонувати варіант схем кодера і декодера згортального (9.6) - кода Вайнера-Еша (по аналогії з (12,9) -кодом), що виправляє одиночну помилку на сегменті з трьох кодових кадрів. Проілюструвати роботу кодера і декодера на прикладі.

6. Схема кодера лінійної блокової коди приведена на мал. 4.2. Знайти для нього H, G, dmin, Pно, Pні. Змалювати схему синдромного декодера.



Мал. 4.2

7. Для згортальної коди з схемою мал. 2.5 ((6,3)-код) визначити dmin, закодувати послідовність m = (1100000000......, декодувати прийняту послідовність з подвійною помилкою в третьому кадрі з використанням алгоритму Вітербі і Фано.

8. Змалювати схему кодера і декодера Меггитта для циклічного (8,4) - кода. Навести приклад кодування і декодування з одиночною помилкою.

9. По каналу зв'язку з шумами передається двійкова інформація із швидкістю Vпи = 1 Мбіт/с. При цьому в середньому 1 раз на хвилину в каналі виникає помилка.

Для зменшення частоти помилок запропоновано використовувати декілька варіантів кодування:

- (7,4)-кодом Хеммінга;
- згортальним (6,3) -кодом;
- кодом з матрицею вигляду G, що породжує = | 111 |.

Яке із запропонованих рішень забезпечить більший ефект, якщо швидкість передачі інформації Vпи повинна залишитися незмінною?

10. Запропонувати варіанти схем кодера і декодера згортального (15,12) -кода (по аналогії з (12,9) -кодом Вайнера-Еша, що виправляє одиночну помилку на сегменті з трьох кодових кадрів).

Навести приклад кодування і декодування.

11. У цифровій двійковій системі зв'язку інформація передається із швидкістю 2 Мбіт/с, при цьому в середньому один раз в хвилину в каналі виникає помилка.

Як зміниться частота появи помилок, якщо в каналі виробляти кодування згортальним (6,3) -кодом і для збереження швидкості передачі інформації в 2 рази підвищити швидкість передачі двійкових символів?

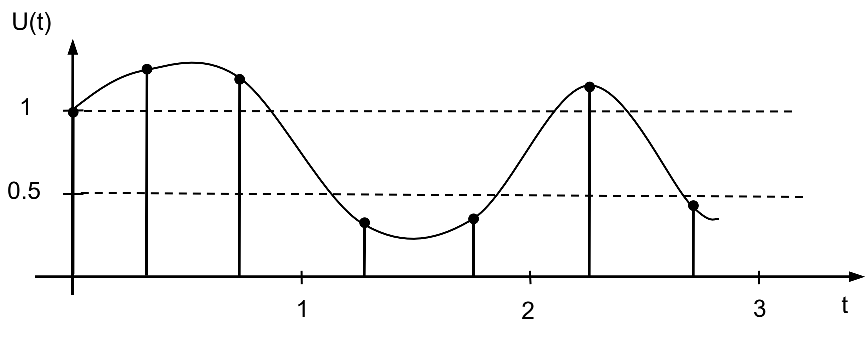
12. Змалювати схему декодера Меггитта для циклічного (7,3) -кода. Навести приклад кодування і декодування з одиночною помилкою.

13. Матриця блокової коди, що породжує, має вигляд G = | 111 |. Знайти H, dmin, Рно, Рни даної коди. Змалювати схему кодера і декодера.

14. У каналі зв'язку з шумами виробляється кодування інформації з використанням блокової коди з матрицею G, що породжує = | 11111 |. На вході приймального пристрою присутнє вагання U(t) вигляду, показаного на мал. 4.3. Сигнал U(t) піддається дискретизації, причому на інтервал тривалістю в один символ доводиться два відліки U(t).

Яке рішення відносне m винесе по прийнятій реалізації:

- м'який декодер максимальної правдоподібності;
- жорсткий мажоритарний декодер?



Мал. 4.3

15. Двійковий циклічний код, заданий поліномом, що породжує

$$g(x)= 1 + X2 + X3 + X4$$

дозволяє виправляти пакети помилок завдовжки 2 (подвійні помилки в сусідніх символах).

Визначити довжину коди. Сконструювати декодер Меггитта для даної коди.

16. Матриця лінійної блокової коди G, що породжує, має вигляд

$$\boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Змалювати схему кодування і декодування з використанням даної коди. Визначити час до першої помилки, що не виявляється кодом, якщо швидкість передачі складає Vпи = 1 Мбіт/с, а вірогідність помилки в каналі рівна Рош = 10 -7.

17. Змалювати схему, побудувати кодове дерево і гратчасту діаграму для несистематичної згортальної коди з R = 1/3, m = 2 і що має поліноми вигляду, що породжують

$$\boldsymbol{g1(x) = 1 + X + X2,\ \ g2(x) = 1 + X + X2\ і\ \ g3(x) = 1 + X2.}$$

18. По двійковому каналу зв'язку передається інформація із швидкістю 9600 бит/с.

Скільки часу знадобиться для передачі 1000 с. російського тексту (ентропія Н (() = 2 бит/букву) з використанням примітивної рівномірної двійкової коди і коди без надмірності (одна сторінка - 2000 букв)?

19. Ітеративний код заданий матрицею вигляду

$$\boldsymbol{U} = \begin{vmatrix} m0 & m1 & p0 \\ m2 & m3 & p1 \\ p2 & p3 & p4 \end{vmatrix}.$$

Записати матрицю, що породжує, еквівалентного йому лінійного блокового систематичного (n,k) -кода. Визначити виправляючу здатність коди, знайти вірогідність невиправлення помилки, якщо вірогідність помилок в каналі складає Рош = 10 -4 .

20. Ітеративний код заданий матрицею вигляду

$$U = \begin{matrix} m0 & m1 & m2 & m0+m1 & m1+m2 \\ m3 & m4 & m5 & m3+m4 & m4+m5 \\ m6 & m7 & m8 & m6+m7 & m7+m8 \\ m0+m3 & m1+m4 & m2+m5 & p1 & p2 \\ m5+m6 & m4+m7 & m5+m8 & p3 & p4 \end{matrix}.$$

Перевірочні символи P1..P4 формуються шляхом підсумовування всіх інформаційних символів, що входять у відповідні стовпці і рядки матриці, наприклад p1 = m0 + m1 + m3 + m4 + m6 + m7 + m0 + m3 + +m1 + m4 + m2 + m5.

Записати матрицю, що породжує, еквівалентного лінійного блокового систематичного (n,k) -кода. Визначити виправляючу здатність коди. Знайти вірогідність такою, що не виправляється даним кодом помилки, якщо вірогідність помилки в каналі складає Рош = 10 -3.

21. Що виправляє подвійні помилки циклічний (15,7) -код БЧХ має поліном вигляду, що породжує

$$G(x)= X8 + X7 + X6 + X4 + 1.$$

Побудувати кодер і декодер Меггитта для цієї коди.

22. Дискретне джерело видає символи з ансамблю { ai } об'ємом До = 50.

Яке мінімальне число розрядів повинен мати рівномірний двійковий код, призначений для кодування символів даного ансамблю? Записати приклади кодових слів. Яка надмірність примітивної коди, якщо ентропія джерела складає 3 бит/букву?

23. Ансамбль дискретних символів { ai } об'ємом До = 32 має ентропію H(A)= 2 бит/символ.

Знайти мінімальну кількість кодових символів, яку треба витратити на кодування символу джерела рівномірним примітивним двійковим кодом. Яка надлишкова кількість символів в порівнянні з оптимальним кодом доводиться використовувати на один символ джерела при примітивному кодуванні?

24. Закодувати двійковим кодом Шеннона-Фано ансамбль { ai }, якщо вірогідність символів має значення, приведені нижче.

a1	***a2***	***a3***	***a4***	***a5***	***a6***	***a7***	***a8***
0.25	0.25	0.125	0.125	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625

Знайти середнє число символів кодової комбінації. Визначити надмірність коди.

25. У цифровій системі телебачення високої чіткості (ТВЧ) передача одного кадру зображення розміром 1500*1000 елементів з числом градацій яскравості M = 256 виробляється за Тк = 40 мс.

Яку смугу частот займатиме цифровий телевізійний сигнал при використанні примітивною КИМ? Як зміниться ця величина, якщо міра кореляції сусідніх елементів зображення складає 0.95 і виробляється кодування з повним усуненням надмірності?

26. Деяке дискретне джерело видає незалежні символи з ансамблю { ai } (i = 1,2,...9) з вірогідністю, визначеною таким чином:

a1	***a2***	***a3***	***a4***	***a5***	***a6***	***a7***	***a8***	***a9***
0.2	0.15	0.15	0.12	0.1	0.1	.08	0.06	0.04

Закодувати символи даного ансамблю кодом Хаффмена. Побудувати кодове дерево і визначити середню довжину кодового слова.

27. Циклічний (15,4) -код заданий поліномом вигляду, що породжує

$$g(x)= X11+ X8 + X5 + X3 + X2 + X + 1.$$

Побудувати кодер і декодер Меггитта для цієї коди. Визначити мінімальну хеммингово відстань і виправляючу здатність коди. Знайти вірогідність невиправлення помилки, якщо вірогідність помилки в каналі складає Рош = 10 -5.

28. Показати, що хороший декодер лінійної блокової коди повинен виробляти нелінійні операції, для чого довести:

а) що процедура обчислення синдрому лінійна по відношенню до вектора помилок, тобто якщо S = F(e), то F(e1 +e2)= F(e1)+F(e2);

б) що лінійний декодер - це такий декодер, в якого функція e = f(S), що зв'язує синдром і оцінку вектора помилок, задовольняє умові f (S1 +S2) = f(S1)+f(S2);

в) що якщо ми хочемо, аби декодер виправляв всі одиночні помилки, то функція e = f(S), що зв'язує синдром і оцінку вектора помилок, має бути нелінійною.

Довести, що лінійний декодер може виправляти не більш n-к з n можливих одиночних помилок.

29. Поліноміальний (17,9) -код заданий многочленом вигляду, що породжує

$$g(x)= X8 + X5 + X4 + X3 + 1.$$

Визначити мінімальну відстань Хеммінга для даної коди. Скільки помилок може виправити цей код? Побудувати кодер і декодер Меггитта для даної коди. Визначити вірогідність помилки, що не виправляється кодом, якщо вірогідність помилки в каналі складає Рош = 10 -3.

30. Кодом з перевіркою на парність називається код, який утворюється шляхом додавання до до-розрядної інформаційної послідовності одного символу так, щоб число одиниць в отриманому коді було парне.

Побудувати кодер і декодер для (8,7) -кода з перевіркою на парність. Визначити вірогідність помилки, що не виявляється, якщо вірогідність помилки прийому символу складає Рош = 10-3 . Змалювати схеми кодера і декодера.

31. Що виправляє три помилки (23,12) -код є циклічним з поліномом, що породжує

G(x)= X11 + X10 + X6 + X5 + X4 + X2 + 1,

або G(x)= X11 + X9 + X7 + X6 + X5 + X + 1.

Знайти перевірочний многочлен h(x) для даної коди. Побудувати кодер на основі g(x). Побудувати декодер Меггитта для даної коди.

32. Розглянути лінійний блоковий код, кодове слово якого формується за правилом :

U = (x0, x1, x2, x3, x4, x0+x1+x2+x3+x4, x0+x2+x3+x4, x0+x1+x2+x4, x0+x1+x2+x3).

Знайти перевірочну матрицю коди і параметри n, до .

33. Додати до коду з попереднього завдання загальну перевірку на парність і побудувати відповідну перевірочну матрицю.

Чому дорівнює мінімальна кодова відстань отриманої коди?

34. Побудувати для код з попередніх завдань матриці, що породжують, по перевірочних.

35. Двійковий код, призначений для кодування повідомлень джерела з алфавітом M = 8, містить наступні кодові слова:

U1=00000; U2=10011; U3=01010; U4=11001;

U5=00101; U6=10110; U7=01111; U8=11100.

Чи є даний код лінійним і систематичним?

Визначити можливості коди по виявленню і виправленню помилок.

Якщо код є лінійним, побудувати матриці коди, що породжують і перевірочну, схеми кодування і декодування.

36. Спроектувати блоки кодування і декодування даних для системи передачі інформації.

Вихідні дані:

- джерело видає інформацію блоками по 4 біта;
- продуктивність джерела = 0,4 Мбіт/с;
- використовується (7,3) -код Хеммінга;
- загасання сигналу на трасі D = 150 дБ;
- коефіцієнт посилення передавальної і приймальної антен G = 32;
- чутливість приймача радіолінії N0 = 10 -18 Вт/Гц;
- прийом повідомлення - посимвольний з використанням ортогональних сигналів.

Визначити потужність передавача системи зв'язку, що забезпечує вірогідність безпомилкового прийому блоку повідомлення P = 0,999999.

37. Одним із способів поліпшення властивостей код, що коректують, є додавання загальної перевірки на парність (якщо число одиниць в кодовому слові непарно, додається 1, якщо парно - 0), що еквівалентно перекодувало кодових слів таким чином:

$$\boldsymbol{U1 = m*G1, \qquad U2 = U1*G2\,.}$$

Записати вираження для перекодирующей матриці G2, відповідної початковому (7,3) -коду Хеммінга.

Записати вираження для перевірочної матриці нової коди. Змалювати схеми кодуючого і декодуючого пристроїв.

Як зміниться вірогідність невиявлення помилки P(E) порівняно з вихідним (7,3) -кодом, якщо вірогідність помилки в каналі Рош = 10 -5 ?

38. По каналу зв'язку передається інформація із швидкістю V = 2 кбит/с. Використовуються двійкові сигнали типа 1 і – 1. Потужність сигналу на вході приймача складає P = 10 -14 Вт. Спектральна щільність потужності перешкод, приведена до входу, N0 = 10-18 Вт/Гц. При передачі використовується -код Хеммінга, що коректує (7,3).

Визначити число помилок, що не виявляються і невиправлених, проходящих по каналу зв'язку за одну годину роботи.

39. Для кодування інформації в системі зв'язку використовується (7,3) - код Хеммінга. Швидкість передачі - 1 кбит/с. У каналі зв'язку діє нормальна "біла" перешкода із спектральною щільністю N0 = 10 -18 Вт/Гц.

При якій потужності сигналу на вході приймача вірогідність невиправленої помилки складе Рни = 10 -8 ?

40. Матриця коди, що породжує, має вигляд

$$G = \begin{vmatrix} 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1\,1 \end{vmatrix}.$$

Знайти перевірочну матрицю коди; змалювати схеми кодуючого і декодуючого пристроїв; знайти мінімальну кодову відстань коди; визначити можливості коди по виявленню і виправленню помилок.

Визначити вірогідність пропуску помилки Р(Е), що не виявляється, якщо Р ош = 10 -6 .

41. Матриця коди, що породжує, має вигляд

$$G = \begin{vmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \end{vmatrix}.$$

Знайти перевірочну матрицю коди; змалювати схеми кодуючого і декодуючого пристроїв; знайти d коди; визначити можливості коди по виявленню і виправленню помилок.

42. Перевірочна матриця має вигляд

$$H = \begin{vmatrix} 1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,1 \end{vmatrix}.$$

Знайти матрицю коди, що породжує; змалювати схеми кодуючого і декодуючого пристроїв; знайти dmin коди; визначити можливості коди по виявленню і виправленню помилок.

43. З борту космічного апарату (КА) “Марс 2002” передається телевізійне зображення поверхні планети. Розмір кадру зображення - 512*512 елементи, кожен елемент квантується на 128 рівнів і кодується з використанням згортального (6,3) -кода. Потужність передавача КА - 100 Вт, коефіцієнт посилення антени - G = 50.

Передача двійкових символів кодових послідовностей здійснюється з використанням протилежних сигналів. Прийом сигналу виробляється на антену площею S = 100 м2, чутливість приймача - N =10 -22 Вт/Гц.

За який час може бути прийнятий один кадр зображення, якщо прийом виробляється посимвольний і відношення сигнал/шум по потужності на виході приймача повинне скласти не менше 500? (Відстань до КА R = 50 млн. км.)

Як зміниться цей час, якщо замість перешкодостійкого кодування використовувати передачу елементів зображення ортогональними сигналами і здійснювати прийом в цілому?

44. В ході зондування радіолокації Венери, здійснюваного радіолокатором з синтезованою апертурою, вироблялася передача радіозображення поверхні кадрами розміром 2048*128 елементами, причому кожен елемент квантувався на 64 рівні. Передача здійснювалася з використанням двійкової цифрової радіолінії, що використовує протилежні сигнали.

Параметри радіолінії зв'язку:

- потужність передавача P = 50 Вт;
- коефіцієнт посилення антени передавача G = 40;
- площа приймальної антени S = 300 м2 ;
- чутливість приймального пристрою (спектральна щільність шумів, приведена до входу) N0 = 10-20 Вт/Гц;
- максимальна відстань R =10 8 км.

Необхідне відношення сигнал/шум по потужності на виході приймача радіолінії передачі зображення (Рс / Рш) = 1000 .

Скільки часу знадобиться на передачу одного кадру зображення при посимвольному прийомі? Як зміниться цей час, якщо кодування елементів зображення виробляється згортальним (6,3) -кодом, що виправляє подвійні помилки?

45. У цифровій двійковій системі зв'язку інформація передається із швидкістю 1 Мбіт/с, при цьому в середньому один раз в хвилину в каналі відбувається помилка.

Як зміниться частота помилок, якщо в каналі використовувати кодування (7,3) -кодом Хеммінга і для збереження швидкості передачі інформації тривалість передаваних символів буде зменшена в (7/3) разу? Визначити величину виграшу (програшу) по частоті помилок за рахунок кодування при середній вірогідності помилок в каналі без кодування Рош = 10 -3 . 10 -6.

46. Лінійний блоковий код заданий матрицею G вигляду, що породжує

$$G = \begin{matrix} 1\,0\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,1 \end{matrix}\ .$$

Змалювати схему кодера і синдромного декодера для цієї коди. Скласти таблицю декодування з виправленням одиночних помилок для декодера максимальної правдоподібності.

47. Скласти структурні схеми кодера і синдромного декодера для циклічного (7,4) -кода, заданого поліномом, що породжує

$$g(x) = 1 + x + x3\ .$$

Описати процес кодування і декодування з виправленням одиночних помилок.

48. Двійковий циклічний код, заданий поліномом, що породжує

$$g(x) = 1 + x2 + x3 + x4$$

дозволяє виправляти пакети помилок завдовжки 2 (подвійні помилки в сусідніх символах).

Чому дорівнює довжина цієї коди?

Знайти мінімальну кодову відстань даної коди.

Сконструювати систематичний кодер для цієї коди.

Сконструювати декодер, що дозволяє виправляти пакети по 2 помилки.

49. Побудувати що кодує і декодує за схемою Меггитта пристрою для циклічного (15,11) -кода Хеммінга, що має многочлен вигляду, що породжує

$$g(x) = 1 + x + x4.$$

Скільки помилок в прийнятій послідовності може виявити і виправити даний код?

50. Спроектувати блоки кодування і декодування для системи передачі даних з наступними вихідними умовами:

- джерело видає безперервний потік двійкових символів;
- продуктивність джерела V = 0,3 Мбіт/с;
- використовується згортальний (12,9) -код Вайнера-Еша;
- декодування згортальної коди - синдромное;
- загасання сигналу на трасі D = 160 дБ;
- коефіцієнт посилення передавальної і приймальної антен G = 32;
- чутливість приймача N0 = 10 -21 Вт/Гц;

- прийом сигналу посимвольний з використанням ортогональних (протилежних) сигналів;

Определить потужність передавача системи зв'язку, що забезпечує вірогідність безпомилкового прийому символу повідомлення P = 10-10.

51. Напруга корисного сигналу на вході приймача U = 1 мкВ; вхідний опір приймача R = 50 Ом ; сигнали протилежні; спектральна щільність перешкод на вході приймача N0 = 10 -13 Вт/Гц.

При якій тривалості інтервалу спостереження вірогідність помилкового розрізнення двох протилежних сигналів складе Рош=10-5? Як зміниться величина Рош, якщо використовувати не протилежні, а ортогональні сигнали?

52. Значення напруги на вході приймача S, що діє = 1 мкВ; ширина смуги пропускання приймального пристрою F = 10 кГц; спектральна щільність перешкод, приведена до входу, N0 = 10-17 Вт/Гц; вхідний опір приймача R = 100 Ом.

Визначити відношення сигнал/шум по потужності на вході приймача.

Визначити вірогідність помилки при розрізненні двох ортогональних сигналів тривалістю (= 50 мс.

Побудувати графік Рош(() для (= 1мс....1с .

53. Напруженість поля корисного сигналу в точці прийому складає E = 1 мкВ/м, висота антени h, що діє = 2.5 м, вхідний опір приймача R = 75 Ом. Смуга пропускання вхідних ланцюгів приймача F = 50 кГц, спектральна щільність перешкод, приведена до входу, N 0 = 10-17 Вт/Гц.

Визначити відношення сигнал/шум по потужності на вході приймача, а також відношення сигнал/шум по енергії на виході, якщо час прийому складає T = 10 мс.

При якій довжині інтервалу спостереження сигналу вірогідність правильного прийому складе 0.9999?

54. Радіолінія зв'язку системи охоронної сигналізації призначена для передачі сигналів 0 - 1 (0 - охорона об'єкту не порушена, 1 - охорона порушена); сигнали 0 - 1 – ортогональні; прийом сигналу ведеться відповідно до оптимального правила розрізнення двох відомих сигналів на тлі нормального білого шуму.

Радіолінія має наступні параметри:

- напруженість поля сигналу в точці прийому - 0.5 мкВ/м ;
- висота антени приймача , що діє, - 1 м;
- вхідний опір приймача - 100 Ом;
- смуга пропускання приймача - 2 кГц;
- чутливість приймача рівна 1 мкВ при відношенні сигнал/шум по потужності в смузі прийому 0 дБ.

Яким має бути інтервал когерентної обробки сигналу (час інтеграції в кореляторі), аби помилкові тривоги в системі виникали з вірогідністю не більше 10 -9 ?

55. Оптимальний приймач-розрізнювач двох відомих сигналів виробляє прийом сигналів (сигнали - протилежні) на тлі нормального шуму з рівномірною в смузі ?Fпр спектральною щільністю N0 = 10-12 Вт/Гц. Потужність сигналу на вході приймача Рпр = 10-10 Вт, інтервал прийому сигналу Т (час інтеграції) - 0.1 с.

Визначити потужність шумів на вході приймача при смузі ?Fпр = =10 кГц. Визначити вірогідність помилки при розрізненні сигналів. Як зміниться потужність шуму, якщо смугу пропускання приймача звузити до ?Fпр = 100 Гц? Як при цьому зміниться вірогідність помилки розрізнення?

56. Безперервне повідомлення A(t) з шириною смуги 2Fm = 10кГц передається по каналу зв'язку з використанням простої КИМ і посимвольного прийому. Мощность корисного сигналу на вході приймача Р =10 -13 Вт. Спектральна щільність шумів, що заважають, приведена до входу, N0 = 10 -18 Вт/Гц, сигнал - типа 0 - 1.

Визначити оптимальне з точки зору відношення сигнал/шум на виході приймача число рівнів квантування сигналу.

57. На геостационарной орбіті (Н = 40000 км.) встановлений супутник безпосереднього ТБ мовлення, що працює в звичайному ТБ стандарті:

- односмугова модуляція;
- ***F = 6 Мгц;***
- ***Р = 1 кВт;***
- ***G = 100 .***

Спектральна щільність шумів, що заважають, приведена до входу приймача, N0 = 10 -21 Вт/Гц.

Какую площа повинна мати антена приймача ТБ сигналу, аби відношення сигнал/шум в каналі зображення було не гірше (Рс /Рш) =50 дБ.

58. Завдання 57 за умови: частотна модуляція mчм = 3.

59. Яку потужність повинен мати передавач радіолінії зв'язку (портативний радіотелефон) з амплітудною модуляцією, якщо:

- чутливість приймача при відношенні сигнал/шум по потужності в смузі прийому (Рс / Рш) = +10 дБ - 10 мкВ;

- висота антени приймача , що діє, - 0.5 м ;
- смуга пропускання приймача - 20 кГц ;
- глибина амплітудної модуляції mам - 0.3;
- загасання сигналу в каналі зв'язку - не більше 90 дБ;

і потрібно забезпечити відношення сигнал/шум (Рс / Рш) вых на виході приймача не менше + 30 дБ.

60. Над територією, що охороняється, на висоті Н = 300 км. пролітає розвідувальний супутник, що збирає інформацію з автоматичних передавальних станцій. Передавач станції працює на ненапрямлену антену (G = 1) і передає інформацію блоками по 6 біт за 1 мс. Прийом сигналу на супутнику здійснюється в цілому. Площа приймальної антени S = 1 м2. Спектральна щільність перешкод, приведена до входу приймача, N0 = 10 -17 Вт/Гц.

Какую потужність повинен мати передавач, аби вірогідність правильного прийому блоку складала не менше Рпр = 0,99999999 ?

Як зміниться величина необхідної потужності, якщо перейти на посимвольний прийом блоку?

Як зміниться вірогідність правильного прийому блоку, якщо потужність передавача не зміниться, але прийом виробляється посимвольний ?

61. Яку потужність повинен мати передавач, встановлений на геостационарном супутнику (Н = 40000 км.), працюючий на антену з посиленням G = 10 і передавальний інформацію із смугою 2Fm = 25 кГц з використанням:

1) АМ;
2) ЧМ, mчм = 10;
3) ВІМ (= 10 мкс; (F = 10 мГц

аби відношення сигнал/шум на виході приймача було не менше 50 дБ? Площа приймальної антени S = 10 м2, спектральна щільність шумів приймача N0 = 10-18 Вт/Гц.

62. У системі зв'язку з ВІm передається повідомлення ((t) із смугою 2Fm = = 10 кГц. Для передачі використовуються 3 види сигналів:

1) простий імпульс (= 1мкс; S0 = 1В;
2) ЛЧМ-импульс з (= 10 мкс; S0 = 0,1В; (F = 10 МГц;
3) ЛЧМ-импульс з (= 45 мкс; S0 = 0,5В; (F = 1 Мгц.

При використанні якого сигналу відношення сигнал/шум на виході приймача буде найбільшим?

63. У скільки разів можна зменшити потужність передавача дискретної системи зв'язку при переході з посимвольного прийому на прийом в цілому з

використанням ортогональних сигналів, якщо передається одне з 128 відомих повідомлень і необхідно забезпечити вірогідність правильного прийому повідомлення Р = 0,999999 ?

64. Смуга системи зв'язку з ВІМ (F = 1 МГц. Спектральна потужність шумів приймача N0 = 10 -16 Вт/Гц. Потужність сигналу на вході приймача Р = 10 -10 Вт. Смуга передаваного повідомлення - 2Fm = 20 кГц.

Определить максимально досяжне відношення сигнал/шум в системі. При якому значенні параметра сигналу (воно буде забезпечено?

65. З космічного апарату, що знаходиться в районі Марса (R = =50 млн. км.) передається телевізійне зображення. Розмір кадру - 1000 * *1000 елементів. Точность квантування елементу зображення бА /А = =5*10-3. Осуществляется передача з використанням простої КИМ, прийом - посимвольний, сигнали 0-1 - протилежні.

Параметри радіолінії:

- ***P = 100 Вт;***
- ***G = 100;***
- ***S = 250 м 2;***
- ***N0 = 10 -21 Вт/Гц.***

За який час може бути переданий кадр зображення, якщо допустима вірогідність помилки в одному елементі зображення Рош = 0.00001? Як зміниться цей час, якщо прийом елементу зображення виробляється в цілому і сигнали Sj - ортогональні?

66. При роботі двійкової ШСС, передавальній інформацію ортогональними сигналами із швидкістю 1 кбит/с і що займає смугу ?F = 1 Мгц, в середньому один раз в хвилину допускається помилка, обумовлена дією на вході приймача нормального білого шуму. У загальному каналі зв'язку може працювати велике число систем зв'язку з ШШС за умови, що сигнали різних систем ортогональні. Вважаємо, що сигнали ШСС, що заважають, займають ту ж смугу, що і корисний сигнал, і рівні всіх сигналів, що заважають , однакові і дорівнюють корисному сигналу.

При якому числі сигналів, що заважають, частота помилок зросте до однієї помилки в секунду?

67. На вході приймача двійкової ШСС, що використовує для передачі символів 0 і 1 протилежні сигнали і передавальною інформацію із швидкістю 10 кбит/с, спектральна щільність перешкод Nп в 50 разів перевищує спектральну щільність корисного сигналу Ns.

Яку смугу повинен мати ШПС, аби вірогідність помилок при прийомі не перевищувала Рош = 0.001?

68. У двійковій ШСС, що використовує для передачі символів 0 і 1 ортогональні сигнали, спектральна щільність перешкод на вході приймача Nп в 100 разів перевищує спектральну щільність сигналу Ns . Вірогідність помилок при передачі складає P = 10-3. Смуга частот, займаних системою ?F = 10 Мгц.

Яка максимальна швидкість передачі інформації (кбит/с) при заданій вірогідності Рош ?

69. Об'єм інформації, що нагромаджується метеосупутником за один виток довкола Землі, складає 10000 Мбайт. Скидання інформації виробляється при прольоті над станціями збору метеоданных, при цьому інтервал стійкої радіовидимості складає 8 хвилин. Передача інформації виробляється байтами (8-бітовими словами) з використанням ортогональных сигналів. Прийом слова виробляється в цілому. Система зв'язку має наступні параметри:

- коефіцієнт посилення бортової передавальної антени G = 100;
- потужність передавача P = 10 Вт;
- висота орбіти супутника R = 5000 км.;
- чутливість приймача станції спостереження N0 = 10 -21Вт/Гц;
- загасання сигналу в тропосфері D = 6 дБ.

Яку площу повинна мати антена станції спостереження, аби вірогідність помилок при прийомі одного слова не перевищувала P = 0.000001 ?

70. Радіотелефон стільникової системи зв'язку з модуляцією ВІМ - ШПС має наступні параметри :

- тривалість імпульсу ВІМ-ШПС - 10 мкс;
- ширина смуги імпульсу ВІМ-ШПС - 10 Мгц;
- частота дискретизації повідомлення Fдискр = 2Fmax = 10 кГц ;
- індекс модуляції m вим - 0.5 ;
- мінімальне енергетичне відношення сигнал/белый шум на вході приймача - 300.

Яке число радіотелефонів може одночасно працювати у відведеній смузі частот (10 мГц), якщо необхідно забезпечити відношення сигнал/шум на виході приймача (Рс/Рш) вим не менше 30 дБ? (Врахувати, що при неспівпаданні імпульсів ВІМ-ШПС за часом вони не створюють взаємних перешкод).

71. Для підвищення відношення сигнал/шум на виході системи з КИМ при посимвольному прийомі інколи використовується так звана КИМ з посиленим старшим розрядом. До такого КИМ для зменшення вірогідності помилки в старшому розряді коди, що вносить найбільший вклад до помилки прийому повідомлення, виробляється додаткове кодування цього розряду, наприклад, шляхом збільшення тривалості символу, соответ-

ствующего цьому розряду, або шляхом його багатократної передачі і мажоритарного (по більшості) прийому.

У системі цифрового мовлення використовується проста 13-розрядна КИМ з посимвольним прийомом. Відношення сигнал/шум на виході приймача з КИМ (з врахуванням шумів квантування і помилок прийому символів) складає 76 дБ.

Як зміниться відношення сигнал/шум на виході приймача КИМ, якщо старший розряд коди піддається трикратній передачі і ухвала про його значення виноситься за правилом " два з трьох "?

72. Попереднє завдання за умови, що імпульс, відповідний старшому розряду коди, подовжується удвічі порівняно з останніми розрядами, що забезпечує меншу вірогідність помилки при його прийомі.

73. Завдання 71 за умови, що дублюється і мажоритарно приймається не лише старший (N-й), але і N-1-й розряд коди.

74. Як зміниться відношення сигнал/шум на виході системи з умовами завдання 71, якщо передача виробляється з використанням не 13, а 15-розрядних слів ? Прийом, як і раніше, посимвольний.

75. Як зміниться відношення сигнал/шум на виході приймача КИМ, якщо від посимвольної передачі і прийому перейти до передачі блоками по три символи (пятнадцатиразрядное слово передавати як п'ять блоків по три символи) з кодуванням блоків ортогональними сигналами S1....S8?

Запропонувати метод об'єднання символів вихідної кодової послідовності в блоки, що забезпечує найкращу якість прийому повідомлення.

76. При розробці системи низового радіотелефонного зв'язку запропоновано два альтернативні варіанти її побудови:

1. КИМ - система з кодово-імпульсною модуляцією і посимвольним прийомом. Передачу символів 0 і 1 передбачається виробляти з використанням протилежних сигналів.

2. ВІМ-ШПС - система з імпульсною для часу модуляцією, як імпульс ВІМ що використовує широкосмуговий шумоподобный сигнал Sшпс(t).

У обох випадках система повинна відповідати наступним вимогам :

- частота дискретизації передаваного повідомлення Fдискр = 10 кГц;
- мінімальне енергетичне відношення сигнал/шум на вході приймача, приведене до інтервалу дискретизації

$$\mu = Ps*Tдискр / N0 \;>= 50;$$

- відношення сигнал/шум по потужності на виході приймача у гіршому разі має бути не менше + 30 дБ.

Який з варіантів системи, що задовольняють заданим вимогам, буде менш широкосмуговим ?

Яка з систем забезпечить краще відношення сигнал/шум на виході приймача, якщо смуга частот, займана системою, не повинна перевищувати 100 кГц?

77. Для умов попереднього завдання розглянути варіанти использования амплітудної і дискретної частотної модуляції.

78. Як зміниться міра переваги різних варіантів постро-ения системи (завдання 77,78), якщо енергетичне відношення сигнал/шум в каналі збільшити до 200 ?

79. Підприємство комерційного зв'язку надає послуги з передачі дискретних повідомлень по міжнародній лінії зв'язку.

Передача виробляється з використанням алфавіту { Ai } розміром в 128 букв, простою КИМ без надлишкового кодування з посимвольним прийомом. Параметри лінії зв'язку такі, що при швидкості передачі V = 33 кбит/с в середньому допускається одна помилка в секунду.

Плата, взымаемая із замовника за передачу однієї сторінки тексту (2 тис. букв), складає 50 коп .

Штраф, що виплачується замовникові за одну допущену помилку на сторінку тексту, - 2 грн. .

Який максимальний прибуток, який може отримати підприємство зв'язку за 1 годину безперервної роботи?

80. Як зміниться величина максимального прибутку, якщо в каналі застосувати перешкодостійке кодування (11,7) -кодом Хеммінга, що виправляє одиночні помилки ?

Як зміниться розмір прибутку (завдання 79), якщо розмір використовуваного алфавіту { Ai } зменшиться до 32 букв ?

81. По каналу зв'язку з перешкодами з використанням двійкової системи зв'язку (0-1) передається текстова інформація. Розмір словника повідомлення (кількість букв в тексті) До = 32. Середня ентропія передаваних повідомлень складає 3 бита/букву.

При швидкості передачі Vп = 9.6 кбит/с вірогідність помилки в каналі складає Рош = 10-4.

Сума, взымаемая із замовника за передачу 1 кбита інформації, складає 20 коп.

Штраф, що виплачується замовникові за одну допущену помилку, - 1 грн.

Вибрати і обгрунтувати найкращий спосіб передачі інформації і знайти швидкість передачі, що забезпечують максимальний прибуток за 1 годину роботи системи:

а) примітивне двійкове кодування, передача з використанням сигналів типа 0 - 1;
б) то ж, сигнали - ортогональні;
в) то ж, сигнали - типа -1 +1;
г) варіанти "а" і "б", але із застосуванням економного кодування;
д) варіанти "а" і "б" із застосуванням кодування (7,4) -кодом Хеммінга, що коректує;
е) варіанти "а" і "б" із застосуванням згортального (6,3) -кода;
ж) одночасне вживання економного і коректуючого кодування згортальним (6,3) -кодом.

82. По каналу зв'язку з перешкодами із застосуванням двійкової системи зв'язку передається текстова інформація. Словник повідомлення (кількість букв в тексті) До = 128. Середня ентропія передаваних повідомлень складає 4 бита/букву.

При швидкості передачі Vп = 100 кбит/сек вірогідність помилки в каналі складає Рош = 10 -5.

Сума, взымаемая із замовника за передачу 1 кбита інформації, складає 5 коп. Штраф, що виплачується замовникові за одну помилку, - 1 грн.

Запропонувати спосіб передачі інформації і знайти швидкість передачі, що забезпечують максимальний прибуток за 1 годину роботи системи:

а) примітивне двійкове кодування, передача з використанням сигналів типа 0 - 1;
б) то ж, сигнали - ортогональні;
в) то ж, сигнали - типа -1 +1;
г) варіанти "а" і "б" але із застосуванням економного кодування;
д) варіанти "а" і "б" з використанням того, що коректує кодирова-ния (7,4) -кодом Хеммінга;
е) варіанти "а" і "б" із застосуванням згортального (6,3) -кода;
ж) одночасне вживання економного і коректуючого кодування згортальним (6,3) -кодом;
з) варіант "ж", але код (7,4);
и) перехід на вісімкову передачу із застосуванням ортогональних сигналів;
к) будь-яка із запропонованих комбінацій, що забезпечує найбільший ефект.

83. По каналу зв'язку з перешкодами з використанням двійкової системи зв'язку передається текстова інформація. Розмір словника

повідомлення К= 256 символів. Середня ентропія передаваних повідомлень складає 5 бит/букву.

При швидкості передачі Vп = 100 кбит/с вірогідність помилки в каналі складає Рош = 10-5.

Який із способів передачі дасть кращий ефект в сенсі числа помилок:
- кодування згортальним (6,3) -кодом;
- кодування безнадмірності;
- і те і інше?

84. З борту орбітальної станції «АЛЬФА» з використанням цифрової системи передачі даних передається телевізійне зображення поверхні планети. Розмір кадру зображення NXM елементів. Зображення піддається скалярному квантуванню і стискуванню із застосуванням ефективного алгоритму Хаффмена. Потік двійкових даних кодується з використанням (n,k) -сверточного коди.

Скільки часу знадобиться для прийому одного кадру зображення, якщо прийом виробляється посимвольний, декодування прийнятої послідовності - з використанням алгоритму Вітербі і відношення сигнал/шум по потужності на виході приймача повинне скласти не менше В дБ?

Як зміниться цей час, якщо відмовитися від кодування, що коректує, і вважати, що Рош = Рнеїспр ?

При якій швидкості передачі даних відношення сигнал/шум на виході приймача погіршає удвічі порівняно з максимально досяжним?

Виконати завдання з використанням вихідних даних, приведених в таблицю. 4.1.

Таблиця 4.1

Номер варіанту / Вихідні дані	1	2	3
Розмір кадру зображення елементів M x N	512x512	512x1024	512x2048
Число рівнів квантування	256	512	256
Середня ентропія джерела H(Y) бит/пиксел	2	3	2,5
Параметри згортальної коди (n,k)	(6,3)	(8,4)	(4,2)
Потужність передавача P, Вт	10	12	15
Коефіцієнт посилення передавальної антени G	200	100	150

Частота радіолінії F0, що несе, ГГц	11	12	14
Загасання сигналу в тропосфері D, дБ	4	6	8
Висота орбіти H, км.	500	400	1000
Площа приймальної антени S, м2	100	200	50
Чутливість приймача N 0, Вт/Гц	10^{-20}	5x10-21	10^{-21}
Відношення сигнал/шум по потужності на виході приймача B, дБ	40	50	44

85. При розробці системи високоякісного радіотелефонного зв'язку запропоновано два альтернативні варіанти її побудови:

- КИМ - система з кодово-імпульсною модуляцією і посимвольним прийомом; передачу символів 0 і 1 передбачається виробляти з використанням протилежних (КИМ-ФМ) або ортогональних (КИМ-ЧМ) сигналів;

- ВІМ - ШПС - система з імпульсною для часу модуляцією, як імпульс ВІМ що використовує широкосмуговий сигнал S шпс(t).

У обох випадках система повинна відповідати наступним вимогам:

- мінімальне енергетичне відношення сигнал/шум на вході приймача, приведене до інтервалу дискретизації (= Ps·Тдискр /N0 >(min;

- відношення сигнал/шум по потужності (з врахуванням шумів квантування при КИМ) на виході приймача у гіршому разі має бути не менше Bmin дБ.

Змалювати функціональну схему приймача РТС для обох варіантів побудови.

Обгрунтувати вибір числа рівнів квантування сигналу в системі з КИМ, що забезпечує найбільше відношення сигнал/шум на виході приймача при заданому (.

Який з варіантів системи, що задовольняють заданим вимогам, буде менш широкосмуговим?

Яка з систем забезпечить краще відношення сигнал/шум на виході приймача, якщо смуга займаних частот не повинна перевищувати (F ?

Як зміниться міра переваги, якщо смугу частот, займану системою, скоротити удвічі?

Як зміниться міра переваги різних варіантів побудови системи, якщо відношення сигнал/шум в каналі (збільшити удвічі?

Виконати завдання з використанням вихідних даних таблиць. 4.2.

Таблиця 4.2

Номер варіанту / Вихідні дані	1	2	3
Частота дискретизації сигналу F дискр, кГц	10	8	15
Енергетичне відношення сигнал/шум (	50	100	150
Відношення сигнал/шум по потужності на виході B, дБ	50	60	55
Допустима смуга частот (F, кГц	100	100	150
Індекс імпульсної для часу модуляції m вим	0.5	0.7	0.6
Спосіб передачі сигналу з КИМ	***КИМ-ЧМ***	***КИМ-ФМ***	***КИМ-ЧМ***

86. Змалювати функціональну схему, побудувати кодове дерево і гратчасту діаграму для лінійного згортального (n,k) -кода, заданого поліномами G1(X) і G2(X), що породжують.

Закодувати послідовність вигляду m = (101101...., внести до прийнятої послідовності одиночну помилку і з використанням алгоритму Вітербі (Фано) декодувати прийняту послідовність r.

Визначити вірогідність пропуску помилки Pнеиспр, що не виправляється, при вірогідності помилки в каналі Pош.

Змалювати тимчасові діаграми роботи схеми при подачі на її вхід кодованої послідовності m вигляду (101101......

Виконати завдання з використанням даних таблиць. 4.3.

Таблиця 4.3

Параметри коди n, до, r	6,3,1/2	4,2,1/2	8
Коефіцієнти полінома G1(X), що	111	10	1000

породжує			
Коефіцієнти полінома G2(X), що породжує	101	11	1001
Прийнята послідовність r	11010001010010..	110101000100.	10100010100010..
Вірогідність помилки в каналі Рош	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}

87. По каналу зв'язку з перешкодами з використанням двійкової системи зв'язку передається текстова інформація.

Енергетичні параметри каналу зв'язку такі, що при швидкості передачі Vп, кбит/с, вірогідність помилки в каналі (обумовленою дією білого шуму) складає Рош.

Сума, взымаемая із замовника за безпомилкову передачу 1 кбита інформації, складає 0.05 грн. Штраф, що виплачується замовникові за одну помилку, допущену при прийомі переданого повідомлення, - 1 грн.

Змінюючи швидкість передачі інформації, спосіб передачі і прийому, параметри використовуваних сигналів, забезпечити максимальну величину чистого прибутку, що отримується за 1 годину безперервної роботи системи.

Потужність передавача і чутливість приймача вважати незмінною.

Оптимізацію проводити в рамках наступних варіантів побудови системи:

- використовується примітивне двійкове кодування, передача ортогональними сигналами;
- то ж, сигнали протилежні;
- застосовується економне кодування з повним усуненням надмірності в повідомленні;
- використовується перешкодостійке кодування (7,4) -кодом Хеммінга;
- застосовується перешкодостійке кодування (6,3) -сверточным кодом.
- одночасно використовуються всі розглянуті заходи, обеспе-чивающие підвищення чистого прибутку від системи.

Як зміниться величина прибутку, якщо розмір алфавіту джерела збільшиться удвічі?

Виконати завдання з використанням даних таблиць. 4.4.

Таблиця 4.4

Номер варіанту / Вихідні дані	1	2	3
Розмір алфавіту джерела K	128	256	128
Середня ентропія передаваного повідомлення H, бит/букву	3	4	3,5
Вихідна швидкість передачі Vп, кбит/с	9,6	19,2	2,4
Вірогідність помилки в каналі при заданій швидкості Vп - Рош	10^{-6}	10^{-5}	10^{-7}

При вирішенні завдань можна користуватися приведеною нижче таблицею значень інтеграла вкроятности 1 - Ф(Z) – таблиця. 4.5.

Таблиця 4.5

Z	***1 - Ф(Z)***
0	0.5
0.1	0.46
0.2	0.42
0.5	0.31
0.8	0.21
1.0	0.16
1.2	0.115
1.5	0.067
2.0	0.0227
2.2	0.0122
2.5	0.0062
3.0	0.0013
3.5	2*10(-4)
4.0	3.16*10(-5)
4.5	4.43*10(-6)
5.0	2.86*10(-7)
6.0	9.86*10(-10)
7.0	1.28*10(-12)
8.0	6.22*10(-16)
9.0	1.13*10(-19)

Бібліографічний список

1. Лезин Ю.С. Введение в теорию и технику радиотехнических систем. - М.: Радио и связь, 1986.

2. Зюко А.Г., Коробов Ю.Ф. Теория передачи сигналов. - М.: Сов. радио, 1972.

3. Радиотехнические системы/ Под ред. Ю.М. Казаринова - М.: Сов. радио, 1968.

4. Чердынцев В.А. Радиотехнические системы. – Минск: Вышэйш. шк., 1988.

6. Пенин П.И. Системы передачи цифровой информации. - М.: Сов. радио, 1976.

7. Мордухович Л.Г., Степанов А.Г. Системы радиосвязи (курсовое проектирование). - М.: Радио и связь, l987.

8. Гуткин Л.С. Проектирование радиосистем и радиоустройств. - М.: Радио и связь, 1986.

9. Пестряков В.Б., Кузенков В.Д. Радиотехнические системы. - М.: Радио и связь, 1988.

10. Калинин А.Н., Черенков Е.П. Распространение радиоволн и работа радиолиний. - М.: Радио и связь, 1971.

11. Справочник по радиорелейной связи/ Под ред. С.В. Бородича - М.: Радио и связь, 1981.

I2. Коржик В.И., Финк Л.М., Шелкунов К.Н.. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений. - М.: Радио и связь, 1981.

13. Тепляков И.П., Рощин Б.В. Радиосистемы передачи информации. - М.: Радио и связь, 1982.

14. Банкет В.Л., Дорофеев В.П. Цифровые методы в спутниковой связи. - М.: Радио и связь, 1988.

15. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. – М.: Радио и связь, 1987.

16. Кузьмин И.В. Основы теории информации и кодирования. - Минск: Вышэйш. шк., 1986.

17. Хемминг Р.В. Теория информации и теория кодирования. - М.: Радио и связь, 1983.