Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Modelowanie i identyfikacja

Sprawozdanie z projektu I, zadanie 43
Analiza dynamicznego modelu ciągłego opisanego w przestrzeni stanu

Konrad Winnicki

Warszawa, 24 kwietnia 2018

Obiekt dynamiczny opisany jest ciągłym modelem w przestrzeni stanu

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} (a_1 u(t) + a_2 u^2(t) + a_3 u^3(t) + a_4 u^4(t))$$

$$y(t) = x_1(t)$$

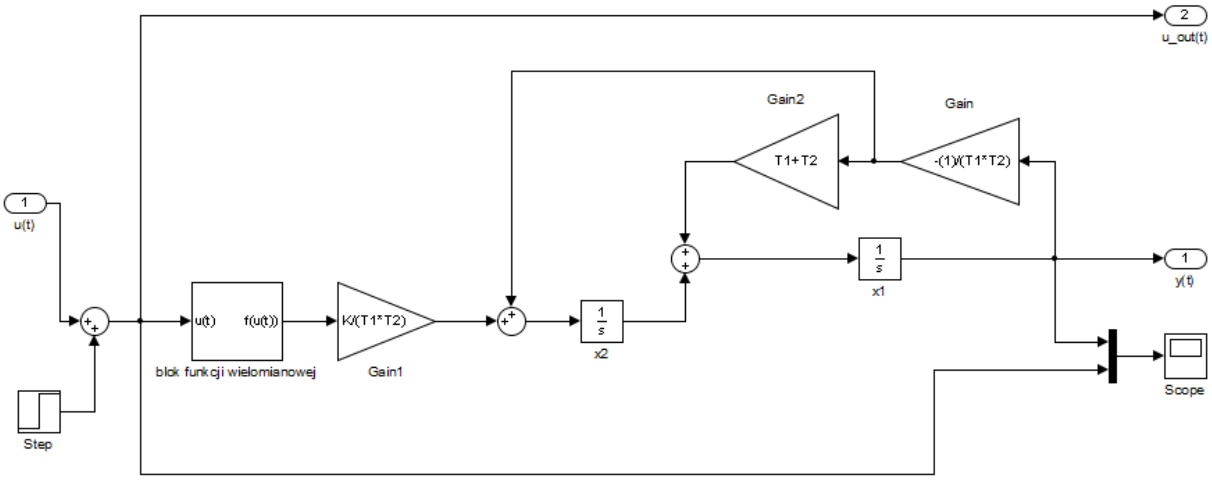
gdzie:

$K = 3.5,\ T1 = 5,\ T2 = 9,$

$a_1 = 0.39,\ a_2 = 0.45,\ a_3 = -2.91,\ a_4 = 0.25,$

a sygnał sterujący spełnia warunek $-1 \leq u \leq 1$

1. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego



Rys. 1 - Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego

2. Wyprowadzenie dynamicznego modelu dyskretnego oraz jego reprezentacja graficzna

- W celu dyskretyzacji modelu ciągłego zastosowałem metodę dyskretyzacji Eulera w tył
- Metoda ta polega na obliczaniu różnicy przyrostowej w okresie T_p pomiędzy próbką bieżącą - x[k], a poprzednią - x[k-1]. Przy czym okres próbkowania jest oznaczany jako T_p. Metodę opisuje wzór:

$$\dot{x}[\mathrm{k}] = \frac{\mathrm{x[k]-x[k-1]}}{T_p}, \ \mathrm{x(t)=x[k\text{-}1],\ u(t)=u[k]}$$

- Podstawienie do wzoru:

$$\frac{x_1[\mathrm{k}] - x_1[\mathrm{k}-1]}{T_p} = -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}x_1[k-1] + x_2[k-1]$$

$$\frac{x_2[\mathrm{k}] - x_2[\mathrm{k}-1]}{T_p} = -\frac{1}{T_1T_2}x_1[k-1] + \frac{K}{T_1T_2}(a_1u[k] + a_2u^2[k] + a_3u^3[k] + a_4u^4[k])$$

$$y[k] = x_1[k]$$

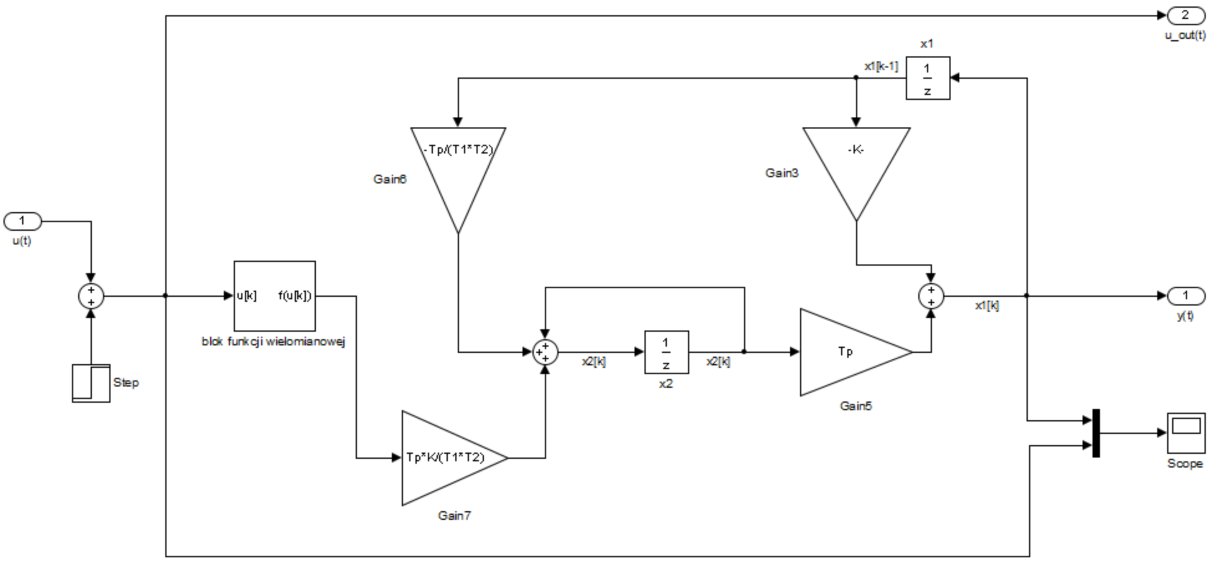
- Ostateczna postać równań modelu dyskretnego:

$$x_1[\mathrm{k}] = (1 - T_p\frac{T_1+T_2}{T_1T_2})x_1[k-1] + T_px_2[k-1]$$

$$x_2[\mathrm{k}] = -\frac{T_p}{T_1T_2}x_1[k-1] + x_2[k-1] + \frac{T_p*K}{T_1T_2}(a_1u[k] + a_2u^2[k] + a_3u^3[k] + a_4u^4[k])$$

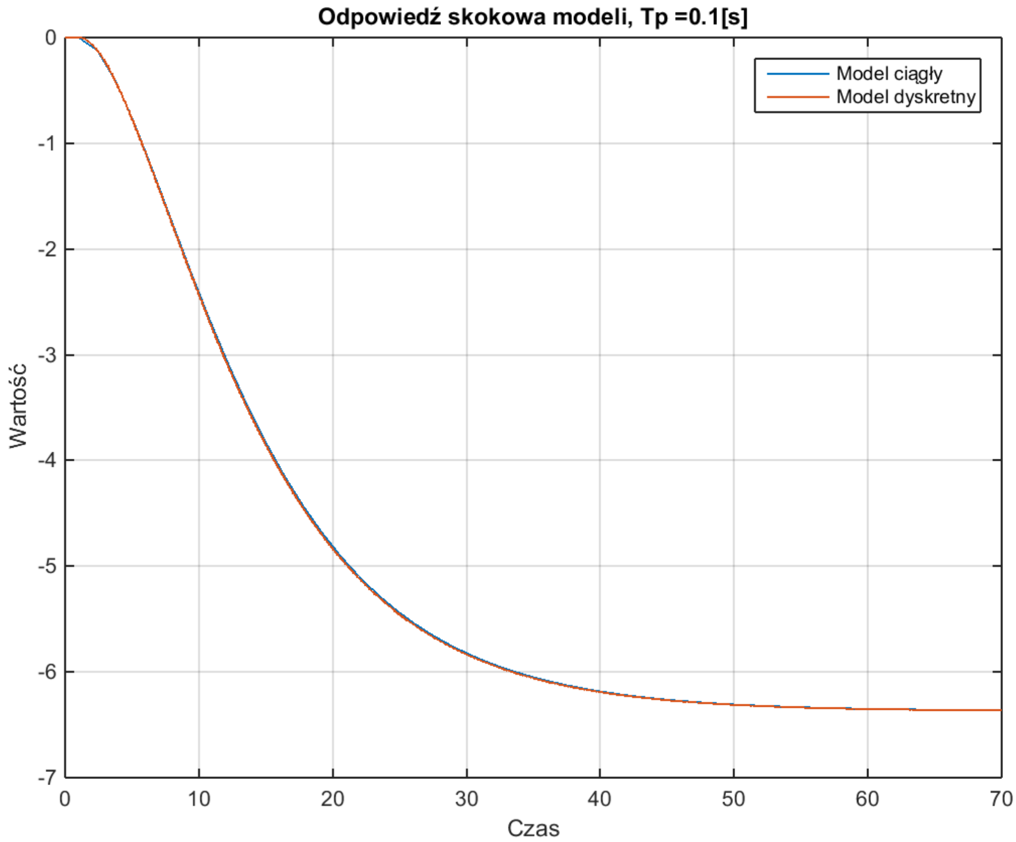
$$y[k] = x_1[k]$$

- Reprezentacja graficzna wyznaczonego modelu:

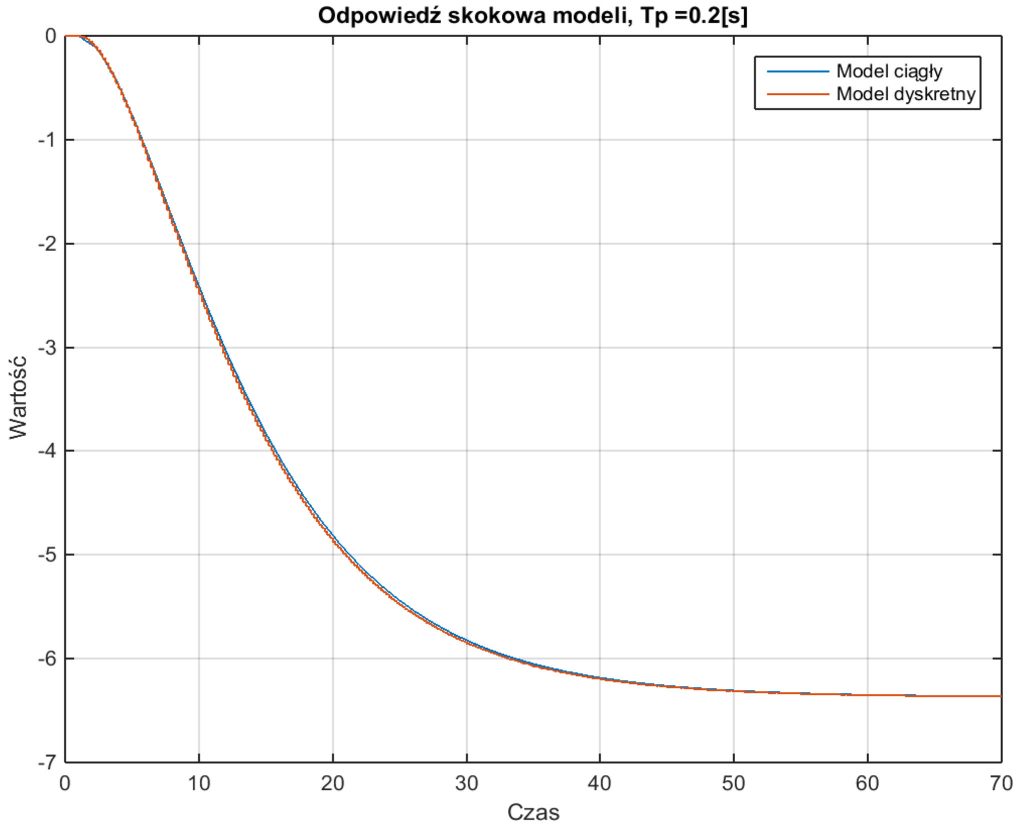


Rys. 2 – Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego

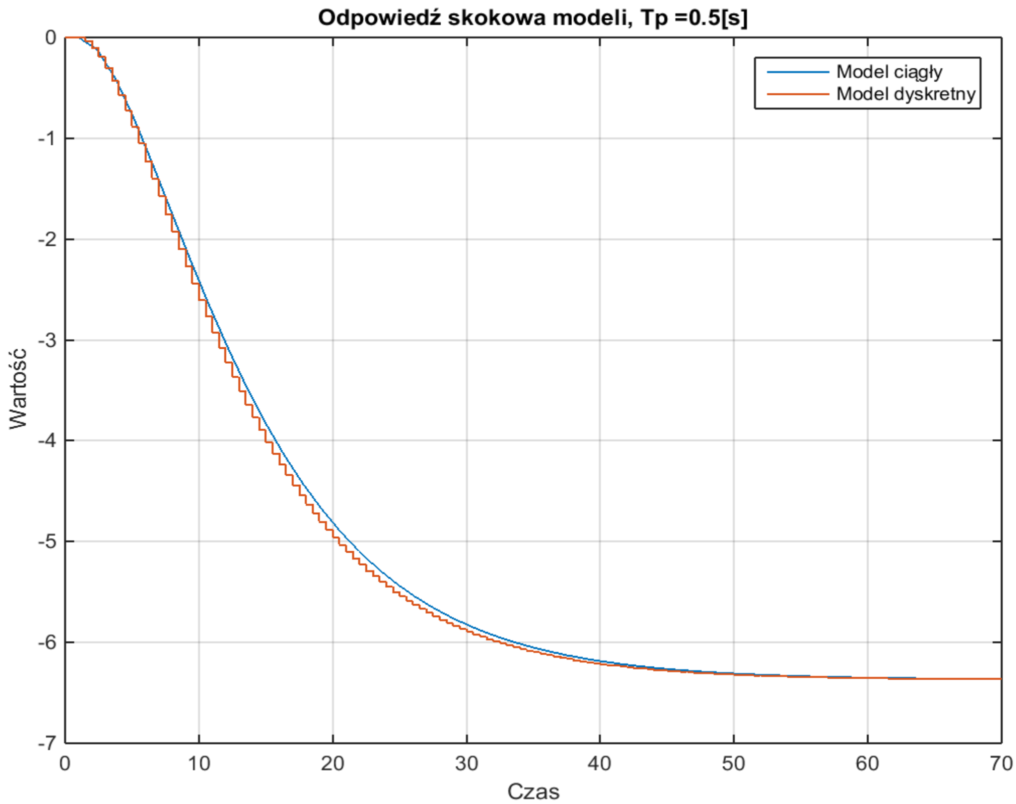
3. **Odpowiedź skokowa dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego przy zerowych warunkach początkowych. Obserwacja wpływu zmiany okresu próbkowania T_p na przebieg sygnału wyjściowego.**



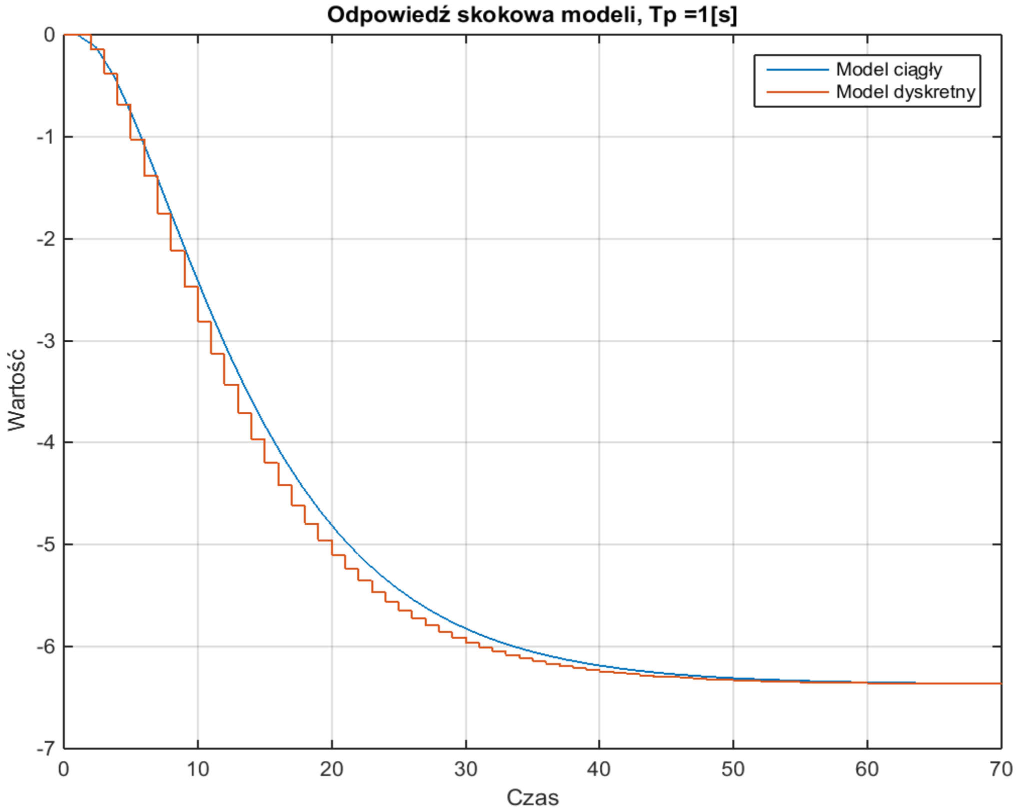
Rys. 3 – Odpowiedź skokowa dla T_p = 0.1[s]



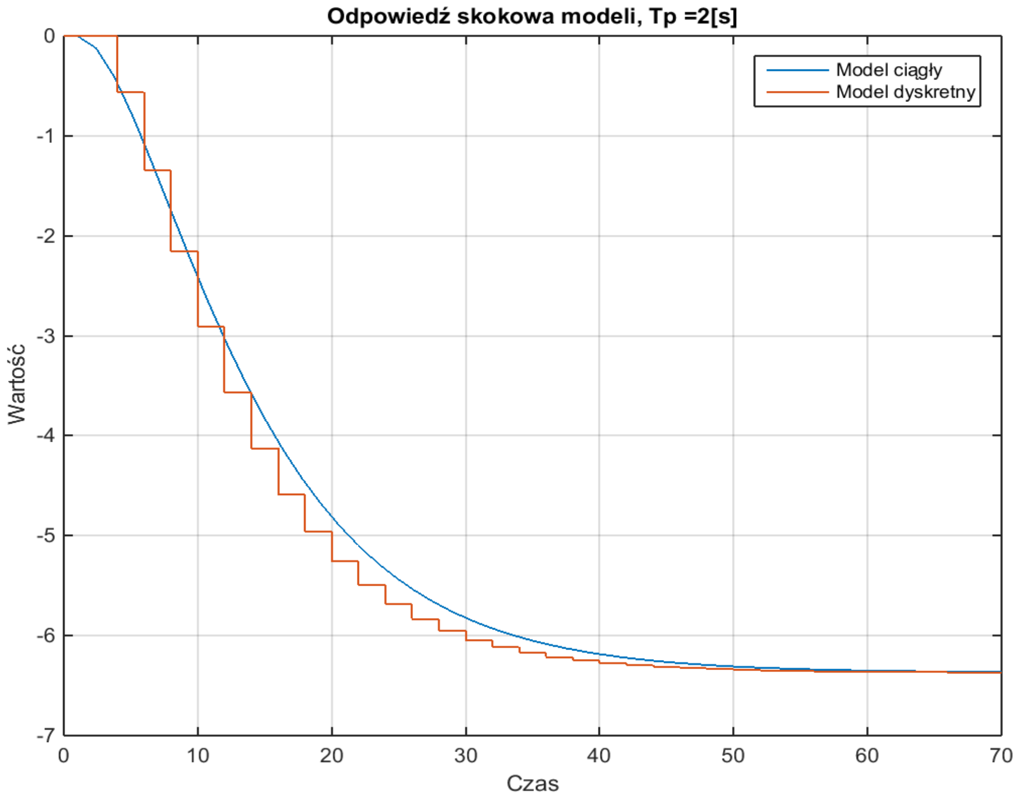
Rys. 4 – Odpowiedź skokowa dla T_p = 0.2[s]



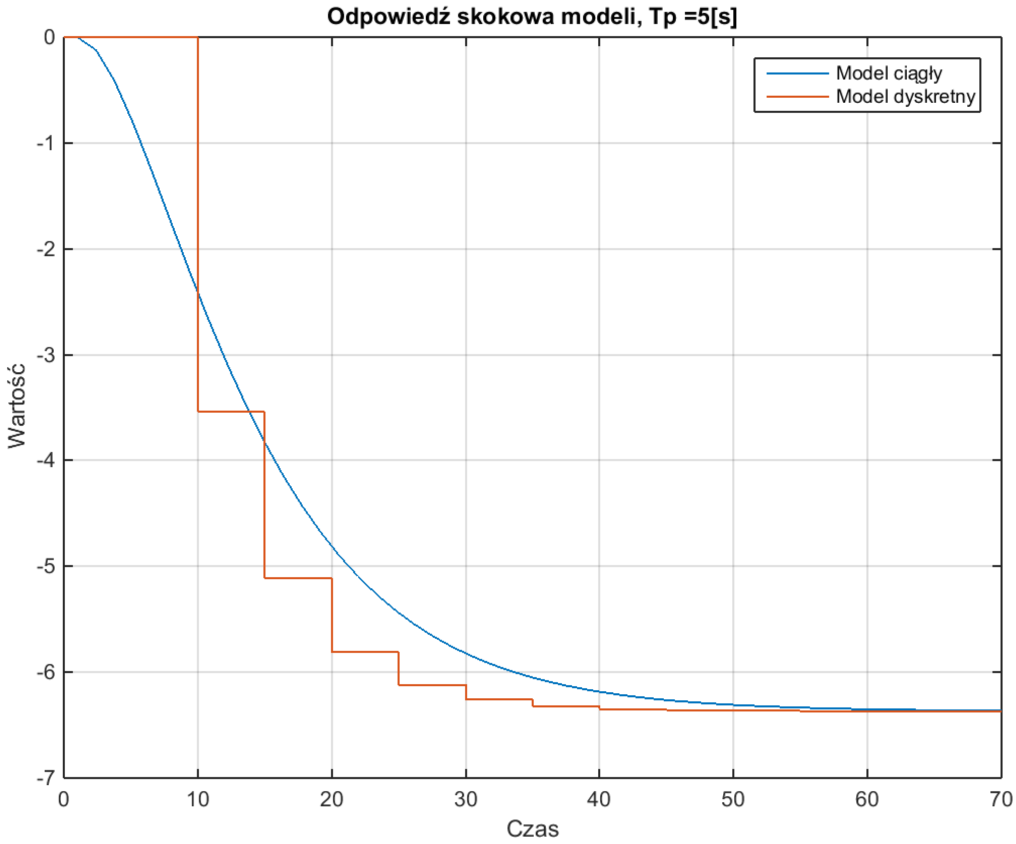
Rys. 5 – Odpowiedź skokowa dla T_p = 0.5[s]



Rys. 6 – Odpowiedź skokowa dla T_p = 1.0[s]



Rys. 7– Odpowiedź skokowa dla T_p = 2.0[s]



Rys. 8 – Odpowiedź skokowa dla T_p = 5.0[s]

- Wraz ze wzrostem okresu próbkowania coraz bardziej widoczny staje się dyskretny charakter modelu dyskretnego. Możemy zaobserwować schodkowy charakter zmian sygnału wyjściowego – zmiany sygnału następują wyłącznie w chwili będącej wielokrotnością okresu próbkowania
- Wraz ze wzrostem okresu próbkowania model rzadziej zmienia stan swojego wyjścia
- W ogólności sygnał wyjściowy modelu dyskretnego pokrywa się z sygnałem wyjściowym modelu ciągłego
- Okres próbkowania równy jednej sekundzie w danym przypadku jest bliski wartości optymalnej

4. Charakterystyka statyczna modelu ciągłego

- Aby wyznaczyć charakterystykę statyczną modelu przyjąłem wartości pochodnych $\dot{x}_1(t) = 0$ oraz $\dot{x}_2(t) = 0$ co pozwala wyprowadzić wzór na charakterystykę statyczną modelu ciągłego
- Podstawiając do wzoru

$$0 = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1 + x_2$$

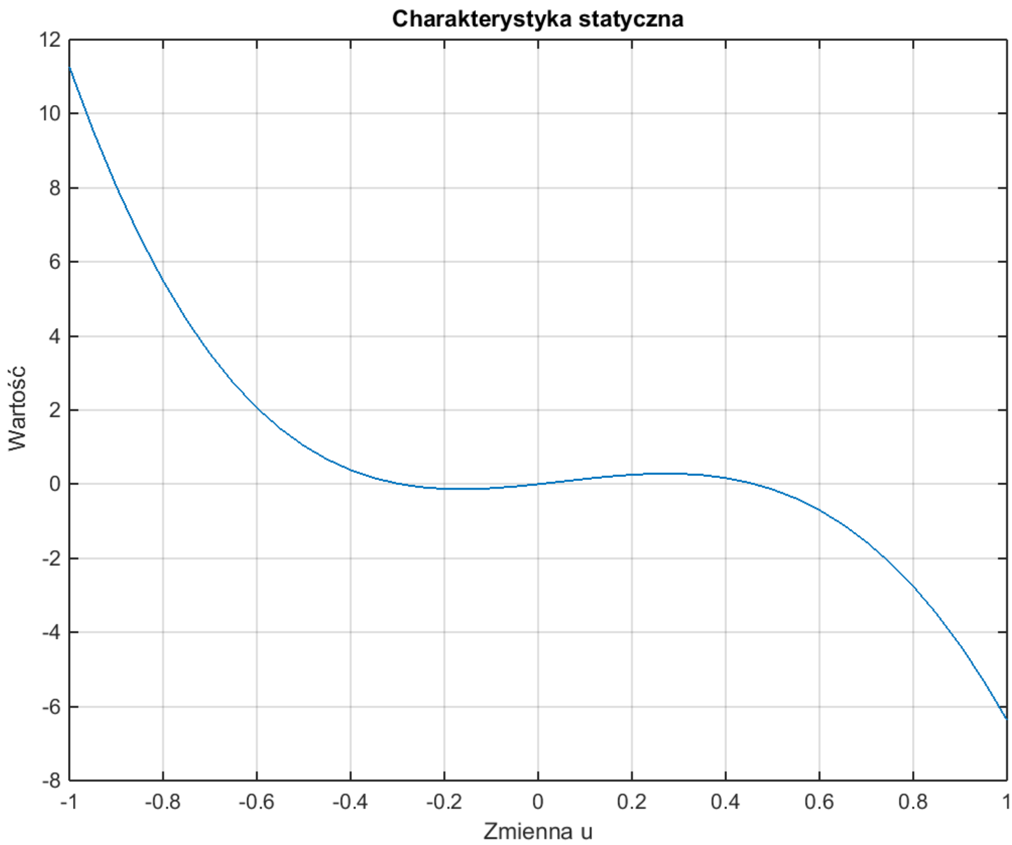
$$0 = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1 + \frac{K}{T_1 T_2}(a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4)$$

$$y(u) = x_1$$

$$x_2 = \frac{T_1+T_2}{T_1 T_2} x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{T_1+T_2}{T_1 T_2} K(a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4)$$

$$x_1 = K(a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4)$$

$$y(u) = x_1 \quad \Rightarrow \quad y(u) = K(a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4)$$



Rys. 10 – Charakterystyka statyczna modelu ciągłego

5. Analityczne wyznaczenie charakterystyki statycznej zlinearyzowanej w dowolnym punkcie linearyzacji $\bar{u}$

- Źródłem nieliniowości charakterystyki jest składnik wielomianowy, linearyzacja charakterystyki sprowadza się do zlinearyzowania tego składnika.
- Do linearyzacji stosuję wzór Taylora:

$$y(u) \approx y(\bar{u}) + \left.\frac{\mathrm{dy(u)}}{\mathrm{du}}\right|_{u=\bar{u}} * (u - \bar{u})$$

- Funkcja linearyzowana:

$$y(u) = K(a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4)$$

- Linearyzacja:

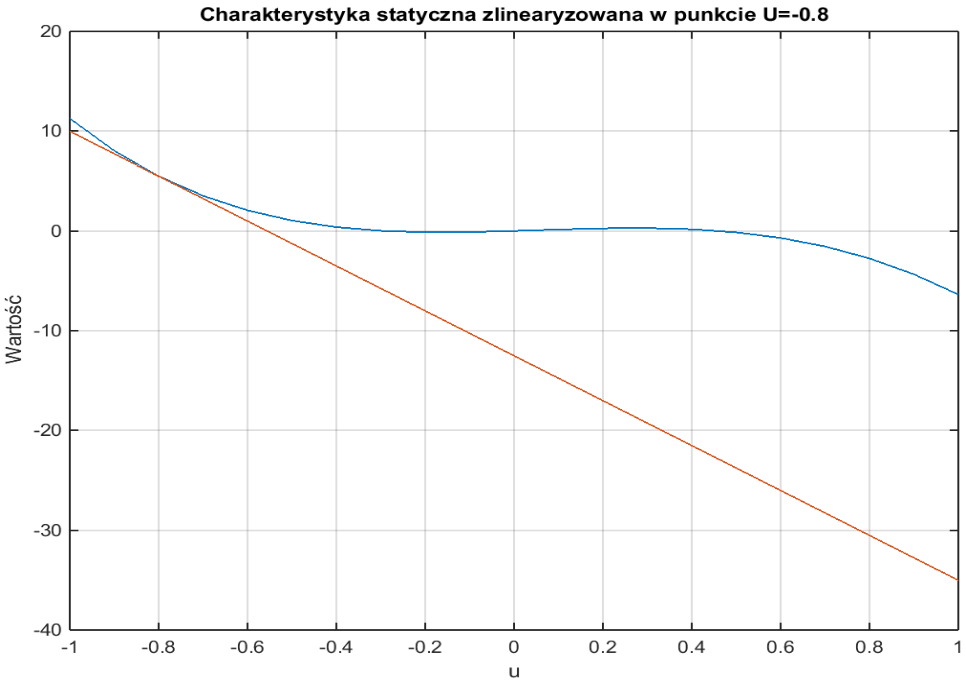
$$y(\bar{u}) = K(a_1 \bar{u} + a_2 \bar{u}^2 + a_3 \bar{u}^3 + a_4 \bar{u}^4)$$

$$\left.\frac{\mathrm{dy(u)}}{\mathrm{du}}\right|_{u=\bar{u}} = K(4a_4 \bar{u}^3 + 3a_3 \bar{u}^2 + 2a_2 \bar{u} + a_1)$$

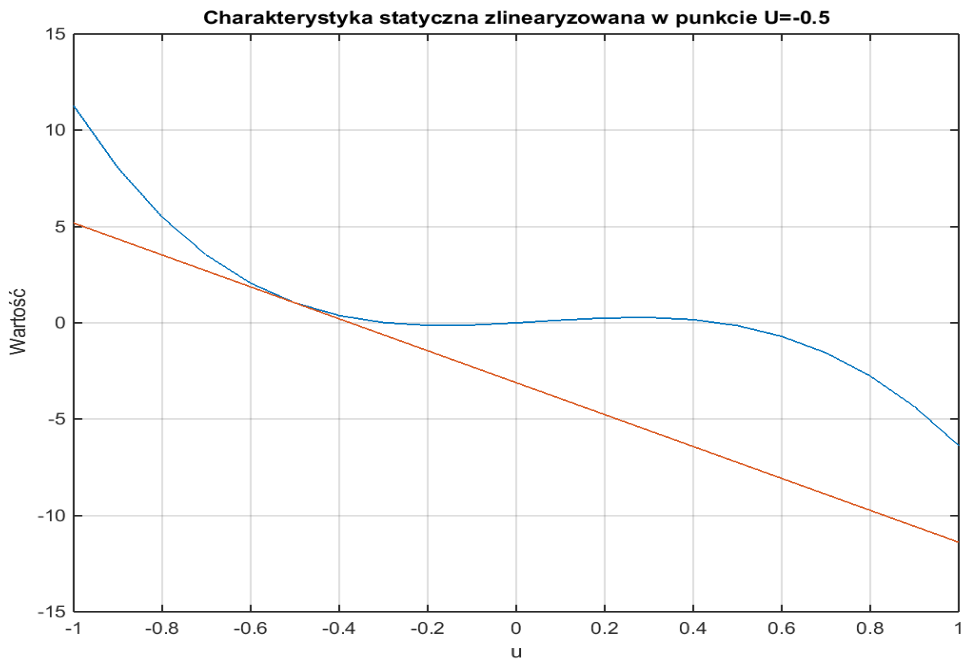
$$y(u) \approx K(a_1 \bar{u} + a_2 \bar{u}^2 + a_3 \bar{u}^3 + a_4 \bar{u}^4) + K(4a_4 \bar{u}^3 + 3a_3 \bar{u}^2 + 2a_2 \bar{u} + a_1) * (u - \bar{u})$$

6. Porównanie nieliniowej i zlinearyzowanej charakterystyki statycznej dla różnych punktów linearyzacji

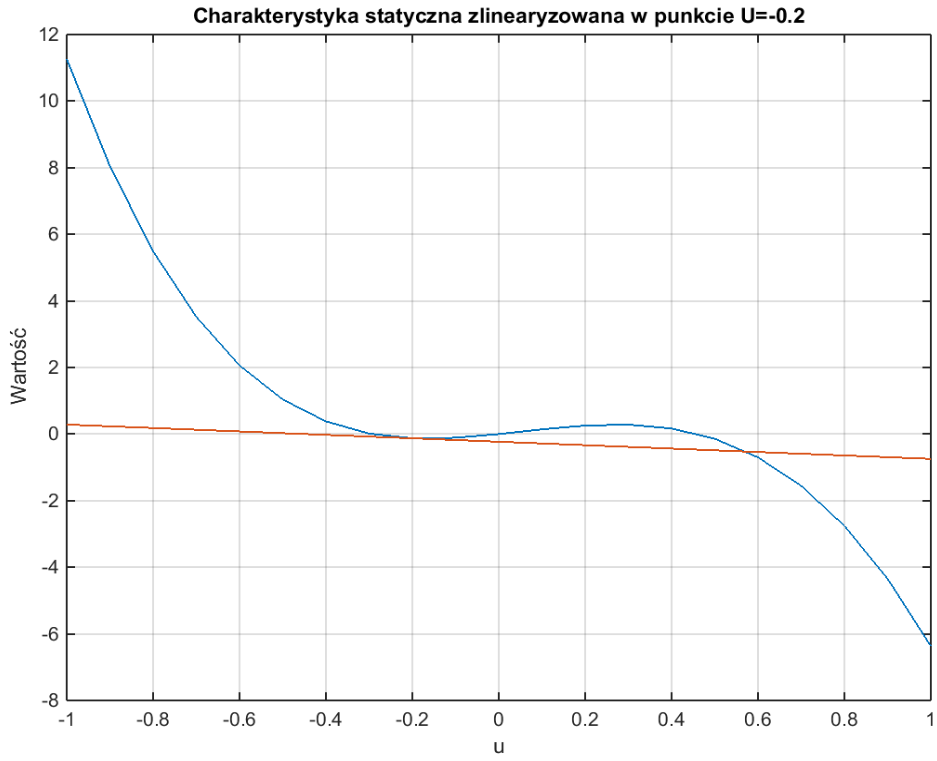
- Przedstawione poniżej punkty linearyzacji wybrałem na podstawie analizy średniego błędu linearyzacji, polegało to na przeliczeniu charakterystyki dla wielu potencjalnych punktów linearyzacji i wyznaczeniu współczynnika błędu linearyzacji. Otrzymałem w ten sposób zestaw wykresów z których wybrałem dwa potencjalnie najlepsze i jeden punkt jako przykład potencjalnie nieprzydatnego punktu linearyzacji



Rys . 11 – Wspólne charakterystyki statyczne ū = - 0.8



Rys . 12 – Wspólne charakterystyki statyczne ū = - 0.5



Rys . 13 – Wspólne charakterystyki statyczne ū= - 0.2

- Charakterystyka zlinearyzowana jest styczna do charakterystyki nieliniowej w punkcie linearyzacji, od wyboru tego punktu zależy błąd wynikający z linearyzacji.
- Wybór punktu -0.2 daje nam szeroki zakres dostatecznej zbieżności z funkcją nieliniową
- Punkt -0.8 poza swoim wąskim zakresem pracy stosunkowo szybko odbiega od funkcji nieliniowej.

7. Dynamiczny dyskretny model zlinearyzowany w dowolnym punkcie linearyzacji ū

- Nieliniowość wprowadza człon wielomianowej funkcji wejściowej, linearyzacja tego elementu została przeprowadzona już w zadaniu 5 przy okazji linearyzacji charakterystyki statycznej
- Stosując wzór Taylora linearyzuję człon funkcji wejściowej:

$$y(u) \approx y(\bar{u}) + \left.\frac{\mathrm{dy(u)}}{\mathrm{du}}\right|_{u=\bar{u}} * (u - \bar{u})$$

- Funkcja linearyzowana:

$$f[k] = \frac{T_p * K}{T_1 T_2}(a_1 u[k] + a_2 u^2[k] + a_3 u^3[k] + a_4 u^4[k])$$

- Linearyzacja:

$$f(\bar{u}) = \frac{T_p * K}{T_1 T_2}(a_1 \bar{u} + a_2 \bar{u}^2 + a_3 \bar{u}^3 + a_4 \bar{u}^4)$$

$$\left.\frac{\mathrm{df(u)}}{\mathrm{du}}\right|_{u=\bar{u}} = \frac{T_p * K}{T_1 T_2}(4a_4 \bar{u}^3 + 3a_3 \bar{u}^2 + 2a_2 \bar{u} + a_1)$$

$$f[k] \approx \frac{T_p * K}{T_1 T_2}(a_1 \bar{u} + a_2 \bar{u}^2 + a_3 \bar{u}^3 + a_4 \bar{u}^4) +$$
$$\frac{T_p * K}{T_1 T_2}(4a_4 \bar{u}^3 + 3a_3 \bar{u}^2 + 2a_2 \bar{u} + a_1) * (u[k] - \bar{u})$$

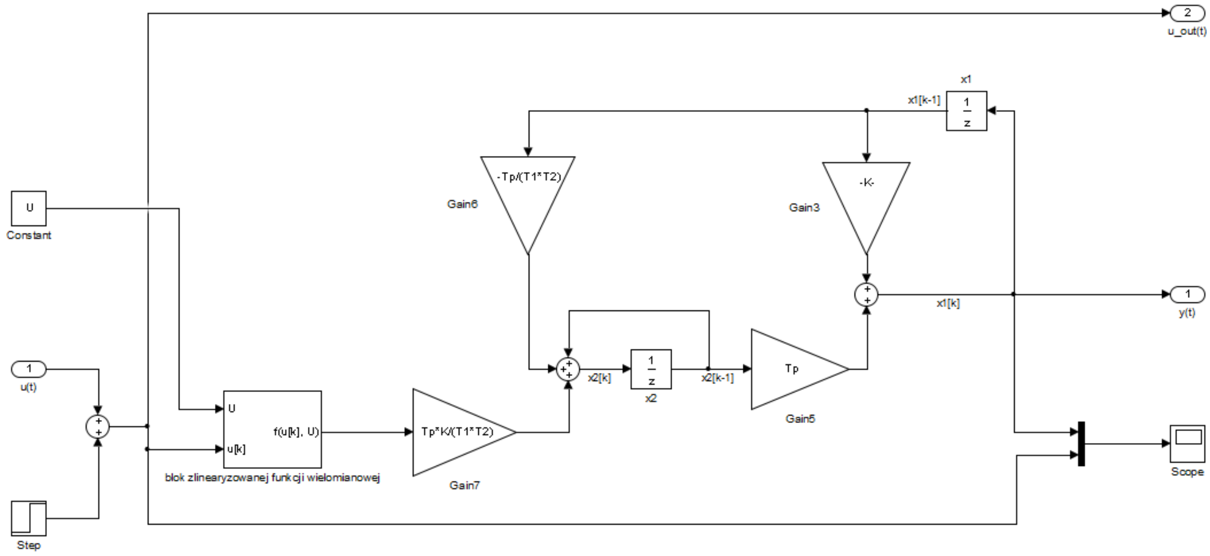
- Model zlinearyzowany:

$$x_1[\mathrm{k}] = (1 - T_p \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}) x_1[k-1] + T_p x_2[k-1]$$

$$x_2[\mathrm{k}] = -\frac{T_p}{T_1 T_2} x_1[k-1] + x_2[k-1] +$$
$$+\frac{T_p * K}{T_1 T_2}[(a_1 \bar{u} + a_2 \bar{u}^2 + a_3 \bar{u}^3 + a_4 \bar{u}^4) + (4a_4 \bar{u}^3 + 3a_3 \bar{u}^2 + 2a_2 \bar{u} + a_1) * (u[k] - \bar{u})]$$

$$y[k] = x_1[k]$$

8. Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego



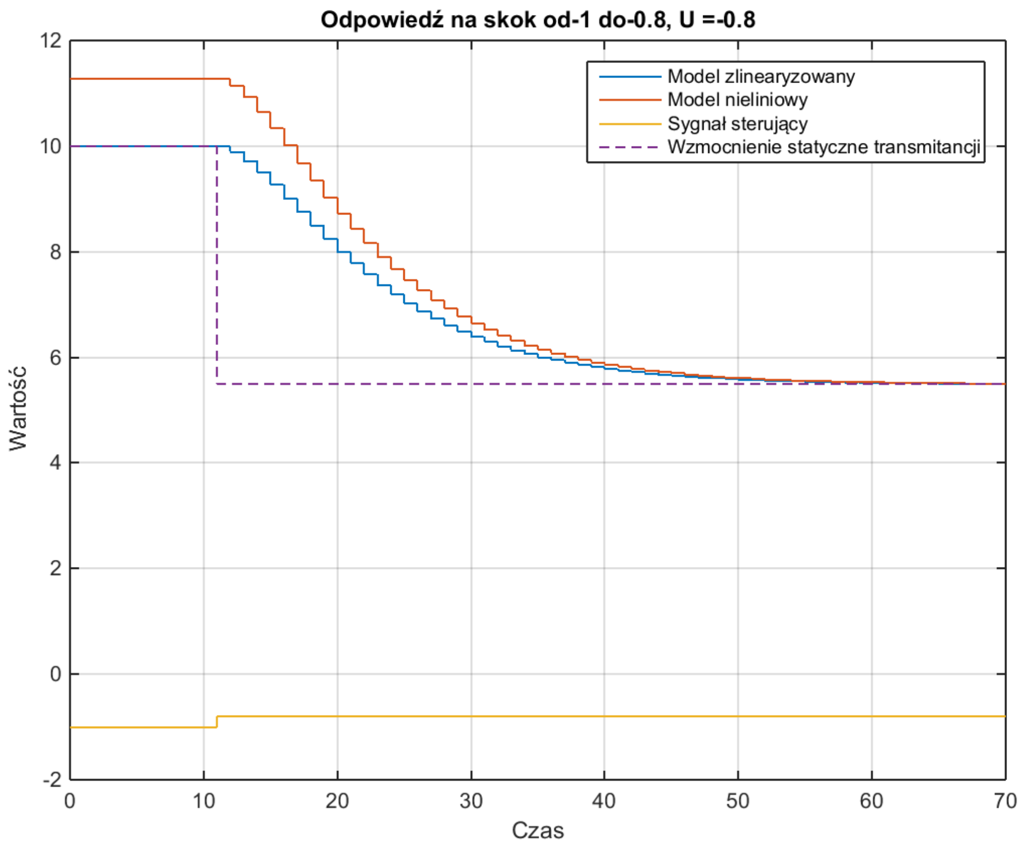
Rys. 14 –Reprezentacja graficzna modelu

9. Porównanie odpowiedzi skokowych modeli w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla wartości wymuszenia, oraz dla różnych punktów linearyzacji

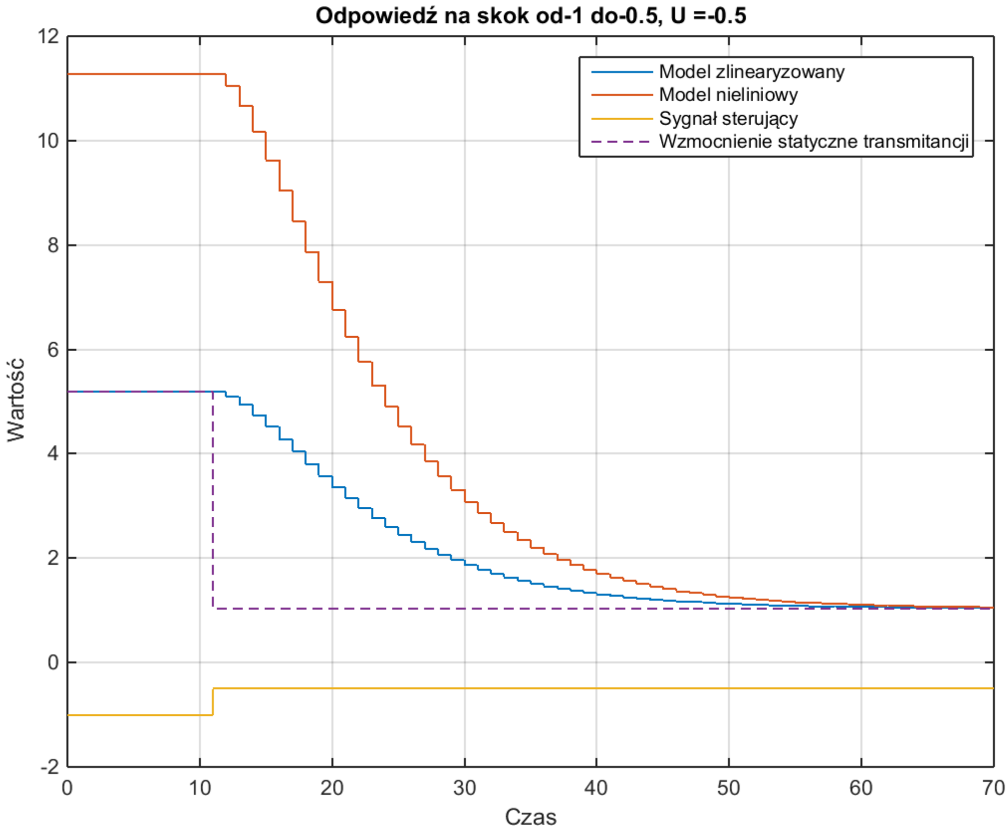
- Do symulacji wybrałem punkty linearyzacji z zadania 6:

$$\bar{u} = [\,-0.8; -0.5; -0.2;]$$

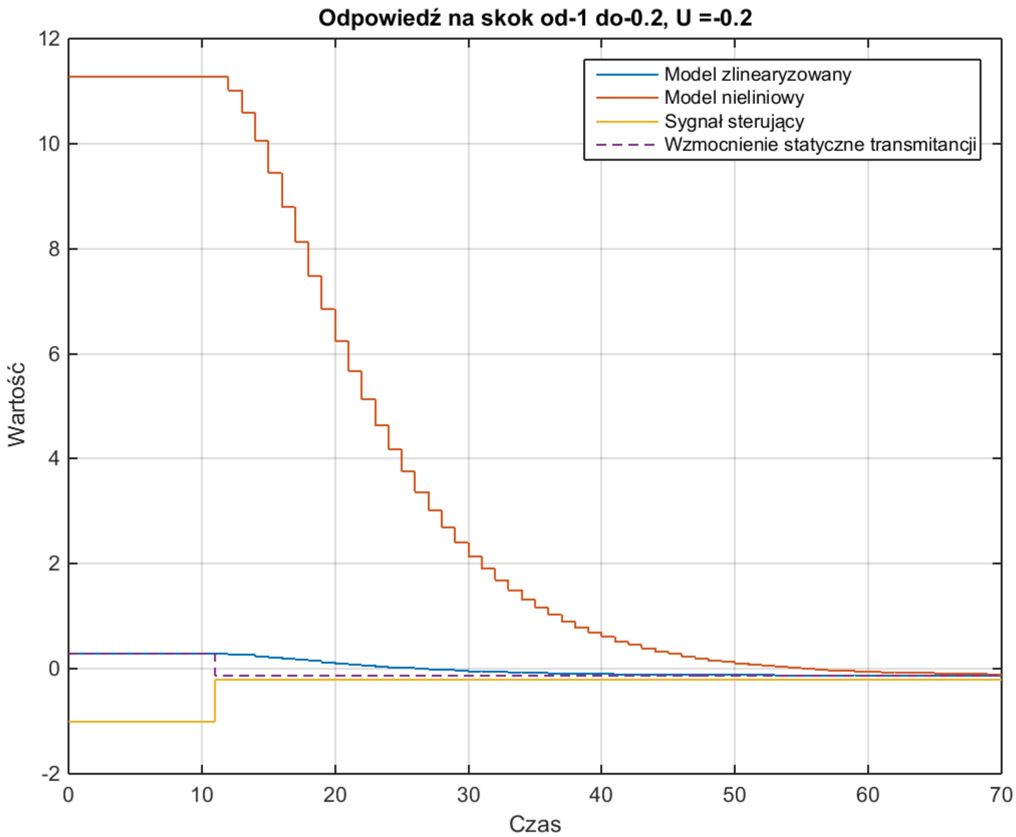
- Jako sygnał wejściowy modeli zastosowałem jednokrotny skok wartości następujący około 10 sekundy symulacji o różnych wartościach początkowych i końcowych w poszczególnych próbach.
    - Skok od -1 do wartości punktu linearyzacji
    - Skok w otoczeniu punktu linearyzacji, wartość początkowa mniejsza o 0.1, a wartość końcowa większa o 0.1 w stosunku do wartości punktu linearyzacji
- Modele w chwili początkowej osiągnęły stan ustalony
- Rysunki zawierają dodatkowo wykres wzmocnienia statycznego transmitancji co wykorzystuję w zadaniu dodatkowym drugim w dalszej części sprawozdania.
- Numeracja w opisach odpowiada numerom plików generowanych przez skrypt Matlaba dedykowany zadaniu 9



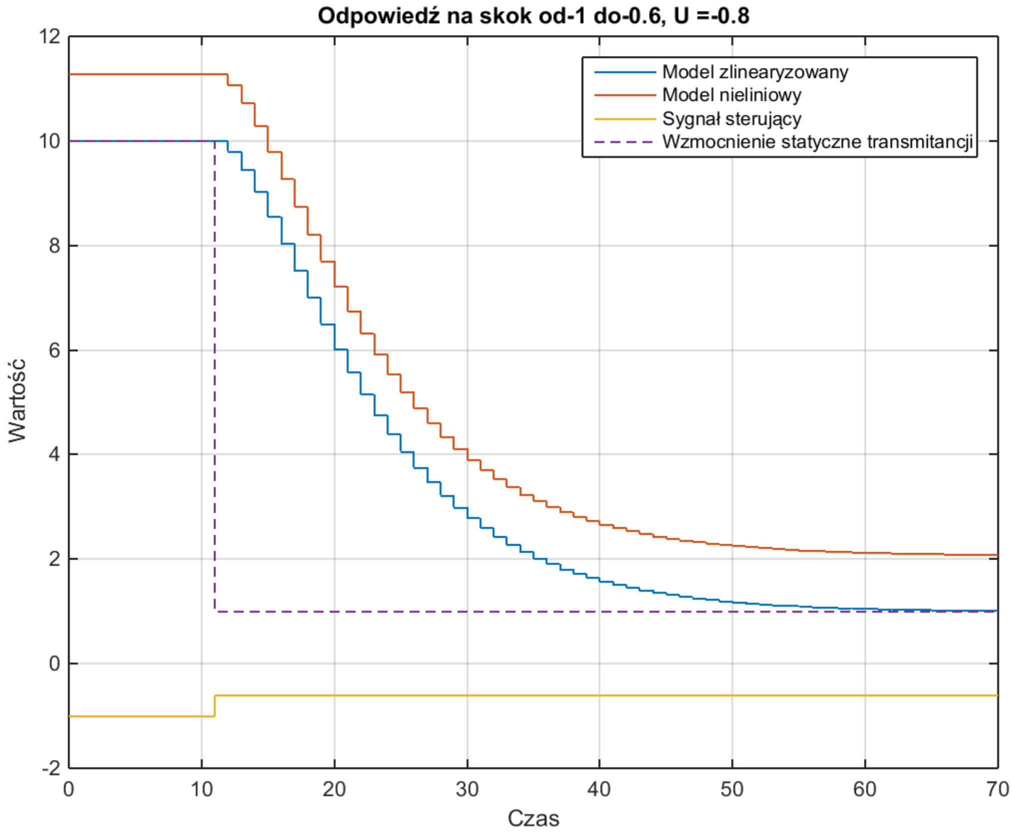
Rys . 15 – Odpowiedź skokowa modeli na skok numer 1



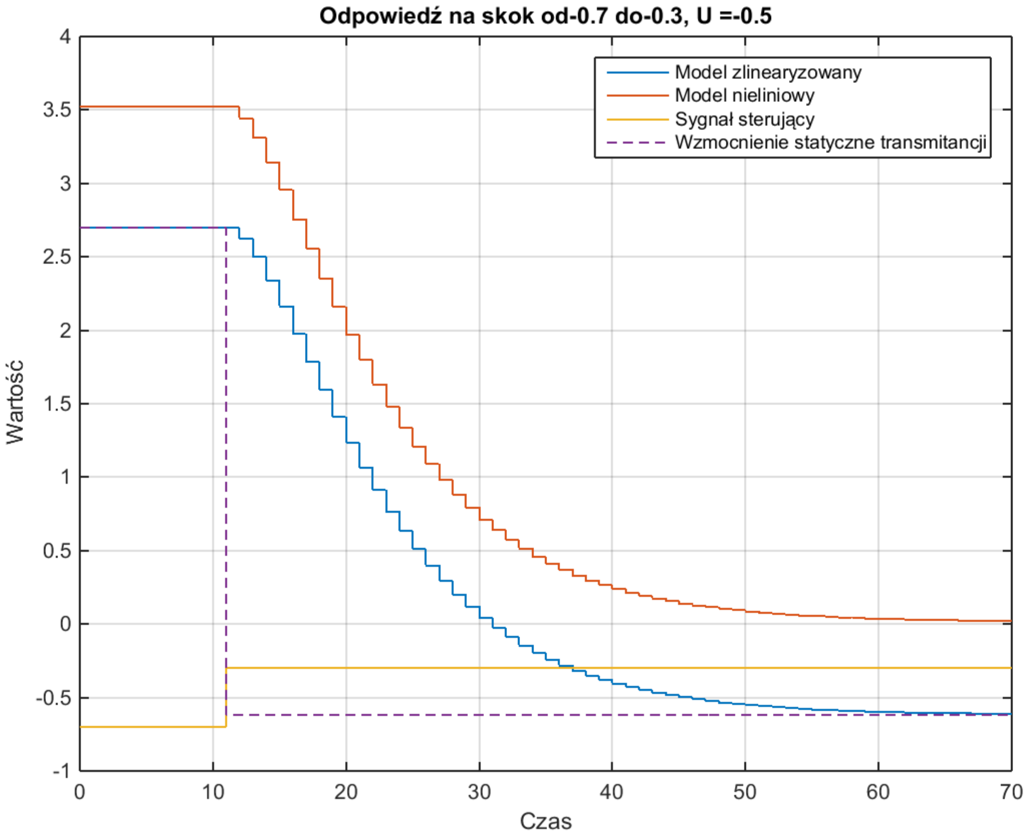
Rys . 16 – Odpowiedź skokowa modeli na skok numer 8



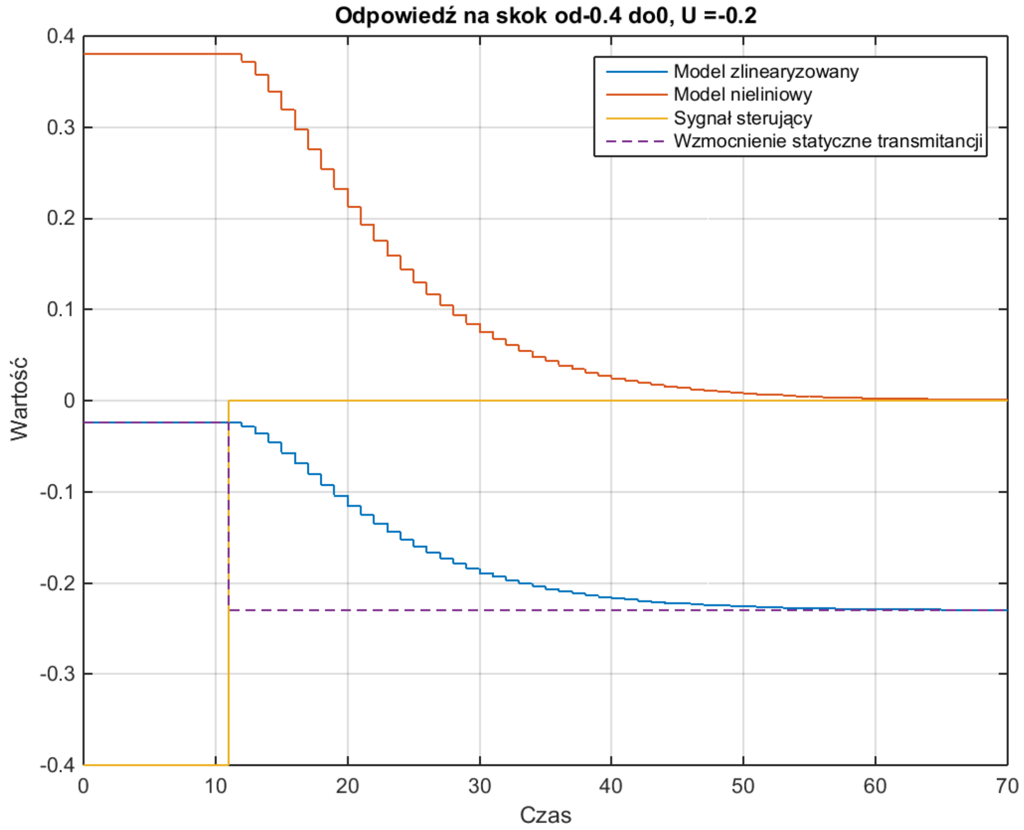
Rys . 17 – Odpowiedź skokowa modeli na skok numer 15



Rys . 18 – Odpowiedź skokowa modeli na skok numer 4



Rys . 19 – Odpowiedź skokowa modeli na skok numer 11



Rys . 20 – Odpowiedź skokowa modeli na skok numer 18

- Pierwsze trzy wykresy przedstawiają skoki sygnału sterującego od minus jedynki do wartości konkretnego punktu linearyzacji
    - Różnice w wartościach sygnałów wyjściowych w pierwszych sekundach symulacji pokazują wpływ błędu linearyzacji – model zlinearyzowany otrzymuje wartość sterowania różną od punktu linearyzacji. W zależności od uwarunkowania punktu linearyzacji błąd ten jest różny dla rozpatrywanych przypadków
    - Po wystąpieniu skoku sterowania model zlinearyzowany zbiega do identycznej wartości co model nieliniowy
- Kolejne trzy wykresy przedstawiają skok sterowania w otoczeniu punktu linearyzacji
    - Skok od wartości mniejszej o 0.2 do wartości większej o 0.2 w stosunku do wartości punktu linearyzacji
    - Zauważalna jest różnica pomiędzy sygnałem modelu nieliniowego a sygnałem modelu zlinearyzowanego, różnica ta jest zależna od punktu linearyzacji i jest najmniejsza dla punktu -2 i wynosi około 0.25, a największa dla punktu 0.8 i wynosi około 1

10. Wyznaczenie transmitancji na podstawie zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego z uwzględnieniem dowolnego punktu linearyzacji

- Macierze modelu w przestrzeni stanu uzyskałem odrzucając składową stałą z równań zlinearyzowanego modelu dynamicznego i podstawiłem do wzoru:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

  - gdzie poszczególne macierze prezentują się następująco:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T_1+T_2}{T_1T_2} & T_p \\ -\frac{T_p}{T_1T_2} & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K\frac{T_p}{T_1T_2}\dot{f}(\bar{u}) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = [0]$$

$$\dot{f}(\bar{u}) = \left(4a_4 * \bar{u}^3 + 3a_3 * \bar{u}^2 + 2a_2 * \bar{u} + a_1\right)$$

- Wykorzystując pakiet symboliczny Matlaba oraz podane macierze otrzymałem następującą ogólną postać transmitancji:

$$G(z) = \frac{K * {T_p}^2\dot{f}(\bar{u})}{T_1T_2 * z^2 + \left[T_p(T_1 + T_2) - 2T_1T_2\right] * z + T_1T_2 - T_1T_p - T_2T_p + {T_p}^2}$$

- Po podstawieniu danych z zadania otrzymałem postać:

$$G(z) = \frac{7 * {T_p}^2(\bar{u}^3 - 8.73\bar{u}^2 + 0.9\bar{u} + 0.39)}{2\left({T_p}^2 + 14T_p * z - 14T_p + 45 * z^2 - 90 * z + 45\right)}$$

I. Zadanie dodatkowe pierwsze:

- **Wzmocnienie statyczne K transmitancji w zależności od punktu linearyzacji**
  - Wzmocnienie statyczne transmitancji dyskretnej wyznacza się obliczając wartość transmitancji przy z zbiegającym do jedności

$$K_{STAT} = \lim_{z \to 1} G(z)$$

  - W efekcie otrzymujemy wzór na wzmocnienie statyczne zależne jedynie od punktu linearyzacji – brak wpływu od okresu próbkowania

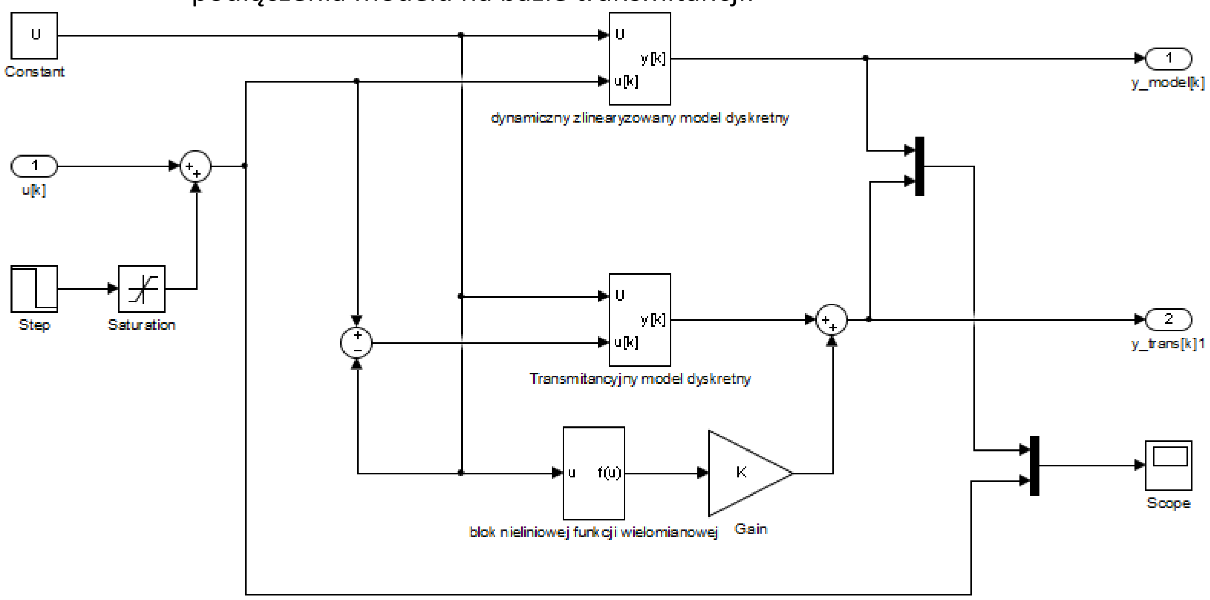
$$K_{STAT} = K * (4a_4 * \bar{u}^3 + 3a_3 * \bar{u}^2 + 2a_2 * \bar{u} + a_1)$$

  - Po podstawieniu danych z zadania otrzymałem ostateczną postać wzoru transmitancji statycznej

$$K_{STAT} = 3.5\bar{u}^3 + 30.555\bar{u}^2 + 3.15\bar{u} + 1.365$$

II. Zadanie dodatkowe drugie:

- **Porównanie wzmocnień statycznych transmitancji i dynamicznego układu zlinearyzowanego**
- Ważnym faktem w tym przypadku jest fakt iż transmitancja określa jedynie zmianę sygnału wyjściowego w funkcji sygnału wejściowego. Wyznaczając transmitancję odrzuciłem składową stałą pochodzącą od punktu linearyzacji.
- Aby wzmocnienia statyczne modeli pokrywały się na wykresach konieczne było odpowiednie wysterowanie wejścia i przesunięcie wyjścia transmitancji stosownie do ustalonego punktu linearyzacji.
- Poniższy obraz przedstawia model w Symulinku obrazujący sposób podłączenia modelu na bazie transmitancji:



Rys . 21 – Symulacja transmitancji i modelu dynamicznego

- Jako sygnał wejściowy transmitancji podałem różnicę sygnału u i wartości punktu linearyzacji, a do sygnału wyjściowego dodaję odpowiednio przemnożoną wartość punktu linearyzacji
- W celu porównania wzmocnień statycznych odczekuję aż wyjście modelu dynamicznego zlinearyzowanego osiągnie stan ustalony po czym podaję na wejścia jednokrotny skok wartości i ponownie oczekuję na ustalenie się sygnału na wyjściu.
- Wykresy symulacji zawarłem w zadaniu 9 w którym to fioletowa przerywana linia przedstawia wartość wzmocnienia statycznego transmitancji, a ciągła niebieska linia przedstawia odpowiedź zlinearyzowanego modelu dynamicznego
- Łatwo zauważyć iż wartości sygnału wyjściowego w stanie ustalonym pokrywają się dla różnych punktów linearyzacji co jest jednoznaczne równym wzmocnieniom statycznym modeli.
- Aby wyznaczyć wartość wzmocnienia statycznego za pomocą wykresów należy posłużyć się wzorem na iloraz zmiany sygnału wyjściowego do zmiany sygnału wejściowego, wybieramy oczywiście wartości ze stanu ustalonego.
  - $K_{STAT} = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$