Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Sterowanie procesami

Sprawozdanie z projektu pierwszego
Zadanie 5

Konrad Winnicki

Warszawa, 27 kwietnia 2018

Proces dynamiczny opisany jest transmitancją ciągłą:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+5)}{(s-6)(s+7)(s+8)}$$

1. Wyznaczenie transmitancji dyskretnej, zer i biegunów transmitancji ciągłej oraz dyskretnej:

- Wykorzystując polecenie c2dm dostępne w Matlabie wyznaczam transmitancję dyskretną na podstawie ciągłej przy wykorzystaniu ekstrapolatora zerowego rzędu i okresie próbkowania równym 0.25s
  - W pierwszym kroku wymagane jest uzyskanie dwóch wektorów współczynników licznika i mianownika, które to otrzymałem wymnażając licznik i mianownik sprowadzając transmitancję ciągłą do postaci:

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s^3 + 9s^2 - 34s - 336}$$

  - Wyznaczone wektory licznika num_s i mianownika den_s:

$$num\_s \ = [\ 1, \quad 6, \quad 5\ ]$$

$$den\_s \ = [\ 1, \quad 9, \quad -34, \quad -336\ ]$$

  - Wektory licznika i mianownika transmitancji dyskretnej uzyskane funkcją c2dm:

$$[\ num\_z, \quad den\_z\ ] \ = \ c2dm(\ num\_s, \quad den\_s, \quad Tp, \quad 'zoh'\ )$$

$$num\_z \ = \ [\ 0, \quad 0.2987, \quad 0.3276, \quad 0.0660\ ]$$

$$den\_z \ = \ [\ 1.0000, \quad 4.7908, \quad 1.4088, \quad -0.1054\ ]$$

- Wyznaczona transmitancja dyskretna przyjmuje postać:

$$G(z) = \frac{0.2987z^2 + 0.3276z + 0.0660}{z^3 + 4.7908z^2 + 1.4088z - 0.1054}$$

- Zera i bieguny transmitancji:
  - Wyznaczane przy pomocy funkcji roots(vect), np. :

$$poles\_s \ = \ roots(den\_s)$$

  - Zera:

$$zeros\_s \ = \ [\ -5, \quad -1\ ]$$

$$zeros\_z \ = \ [\ 0.8312, \quad 0.2656\ ]$$

  - Bieguny:

$$poles\_s \ = \ [\ 6.0000, \quad -8.0000, \quad -7.0000\ ]$$

$$poles\_z \ = \ [\ 4.4817, \quad 0.1738, \quad 0.1353\ ]$$

2. **Reprezentacja modelu dyskretnego w przestrzeni stanu stosując oba warianty metody bezpośredniej:**
    - Zapis wektorowo macierzowy modelu w przestrzeni stanu wg wariantu pierwszego:

$$A = \begin{bmatrix} 4.7908 & -1.4088 & 0.1054 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.2987 & -0.3276 & 0.0660 \end{bmatrix} \qquad D = [0]$$

    - Zapis modelu wg wariantu pierwszego w postaci równań przestrzeni stanu:

$$\dot{x}[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$$
$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

$$\dot{x}_1[k+1] = 4.7908x_1[k] - 1.4088x_2[k] + 0.1054x_3[k] + u[k]$$
$$\dot{x}_2[k+1] = x_1[k]$$
$$\dot{x}_3[k+1] = x_2[k]$$
$$y[k] = x_1[k]$$

    - Zapis wektorowo macierzowy modelu w przestrzeni stanu wg wariantu drugiego:

$$A = \begin{bmatrix} 4.7908 & 1 & 0 \\ -1.4088 & 0 & 1 \\ 0.1054 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.2987 \\ -0.3276 \\ 0.0660 \end{bmatrix}$$

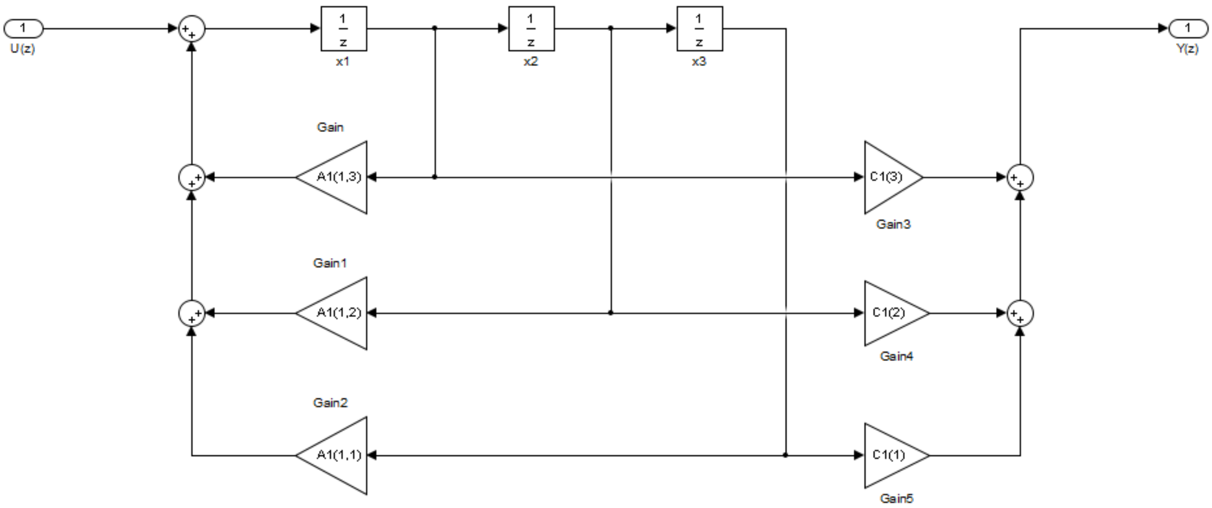
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = [0]$$

    - Zapis modelu wg wariantu drugiego w postaci równań przestrzeni stanu:

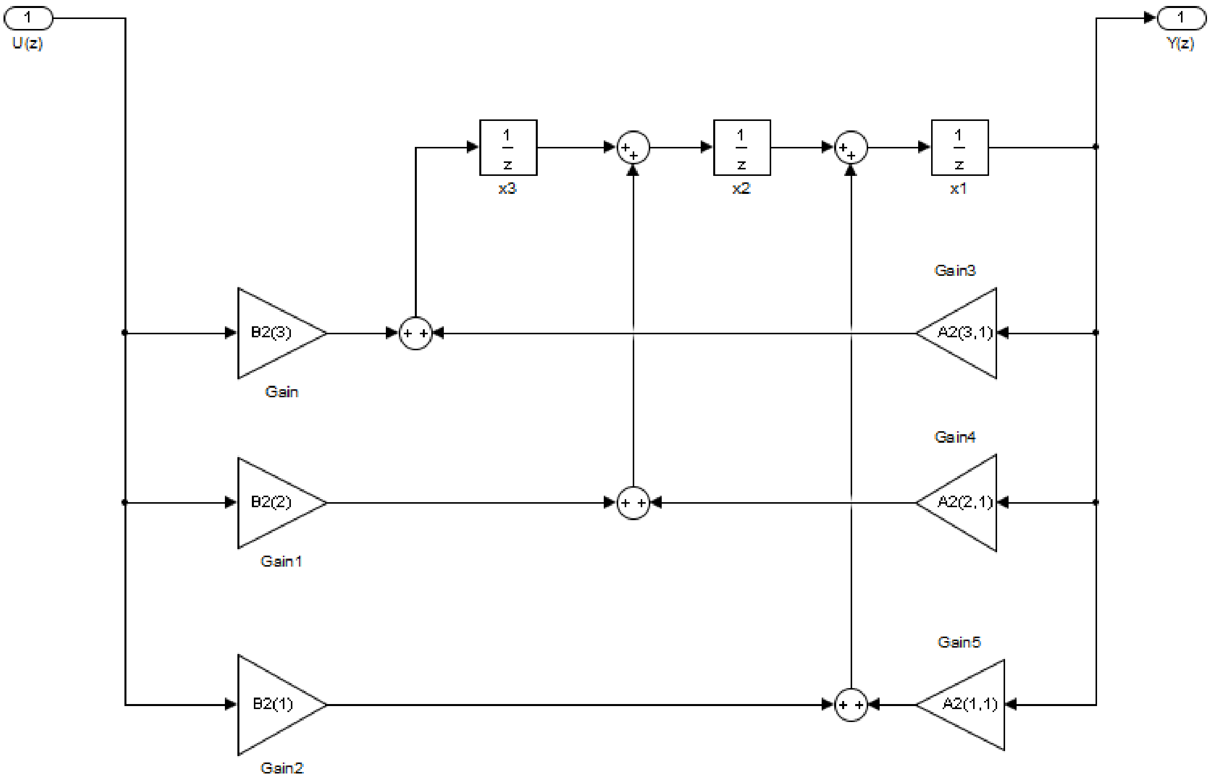
$$\dot{x}[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$$
$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

$$\dot{x}_1[k+1] = 4.7908x_1[k] + x_2[k] + 0.2987u[k]$$
$$\dot{x}_2[k+1] = -1.4088x_1[k] + x_3[k] - 0.3276u[k]$$
$$\dot{x}_3[k+1] = 0.1054x_1[k] + 0.0660u[k]$$
$$y[k] = x_1[k]$$

- Szczegółowa struktura modeli w obu wariantach:



Rys. 1 – Struktura modelu wg. wariantu pierwszego



Rys. 2 – Struktura modelu wg. wariantu drugiego

3. Symboliczne wyznaczenie i porównanie transmitancji modeli w przestrzeni stanu:

- W ogólności transmitancję na podstawie macierzy stanu modelu wyznacza się ze wzoru poniżej:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

- Aby wyznaczyć transmitancję wg tego wzoru wymagane jest zadeklarowanie symbolu z w workspace Matlaba. Uzyskałem tą metodą identyczne postacie transmitancji dla obydwu modeli, jednakże ich postać była bardzo rozwlekła – zapis transmitancji był stosunkowo długi, więc postanowiłem użyć innej metody wyznaczającej transmitancję i jednocześnie zapewniającej stosowną postać wyniku. Finalnie użyłem zestawu funkcji przekształcających macierze stanu kolejno do postaci klasy modelu w przestrzeni stanu(ss()), a następnie do postaci transmitancji dyskretnej(tf())

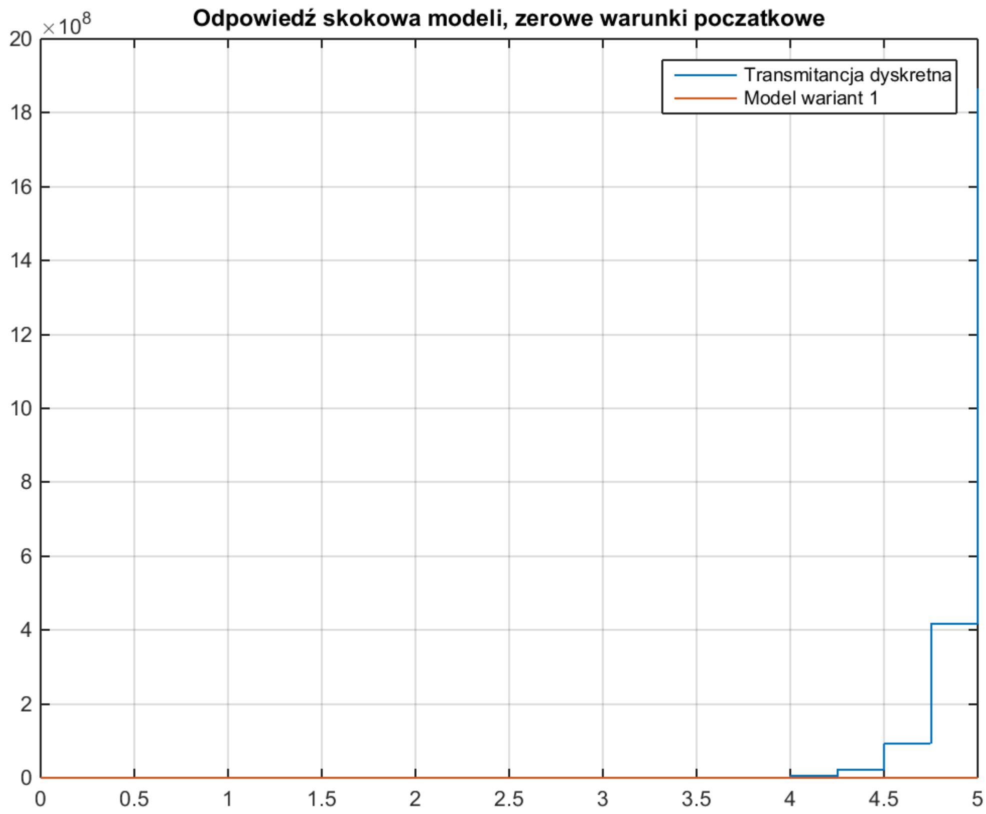
$$transmit\_1 = tf(\ ss(\ A1, B1, C1, D1, Tp\ )\ )$$
$$transmit\_2 = tf(\ ss(\ A2, B2, C2, D2, Tp\ )\ )$$

- Otrzymane tą metodą transmitancje dla obydwu modeli okazały się jednakowe, a ponadto jest ona zgodna z transmitancją dyskretną pierwotną G(z):

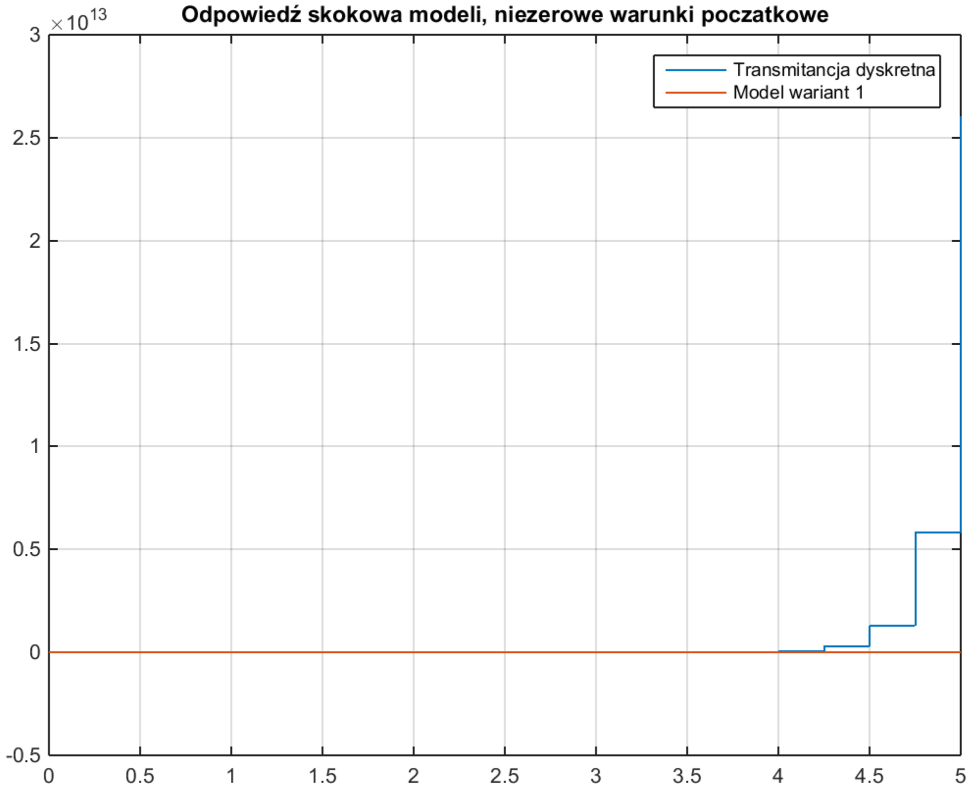
$$transmit\_1 = \frac{0.2987\ z^2 -\ 0.3276\ z\ +\ 0.06595}{z^3 -\ 4.791\ z^2 +\ 1.409\ z\ -\ 0.1054}$$
$$Sample\ time\text{: } 0.25\ seconds$$
$$Discrete - time\ transfer\ function.$$

$$transmit\_2 = \frac{0.2987\ z^2 -\ 0.3276\ z\ +\ 0.06595}{z^3 -\ 4.791\ z^2 +\ 1.409\ z\ -\ 0.1054}$$
$$Sample\ time\text{: } 0.25\ seconds$$
$$Discrete - time\ transfer\ function.$$

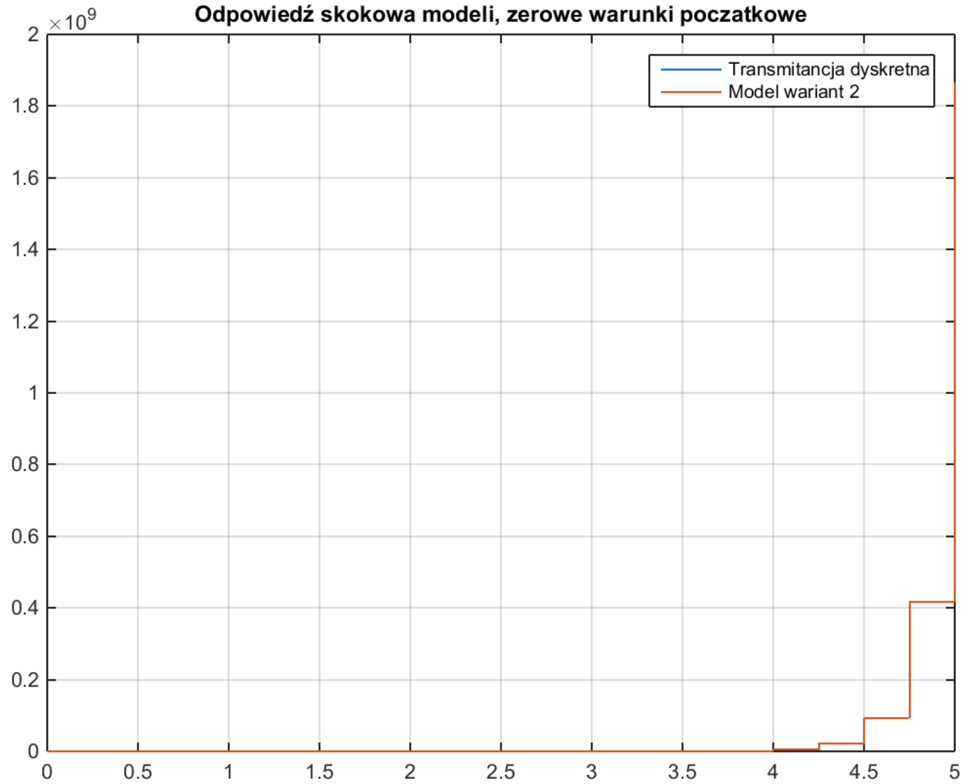
4. Porównanie odpowiedzi skokowych transmitancji dyskretnej oraz modeli w przestrzeni stanu:



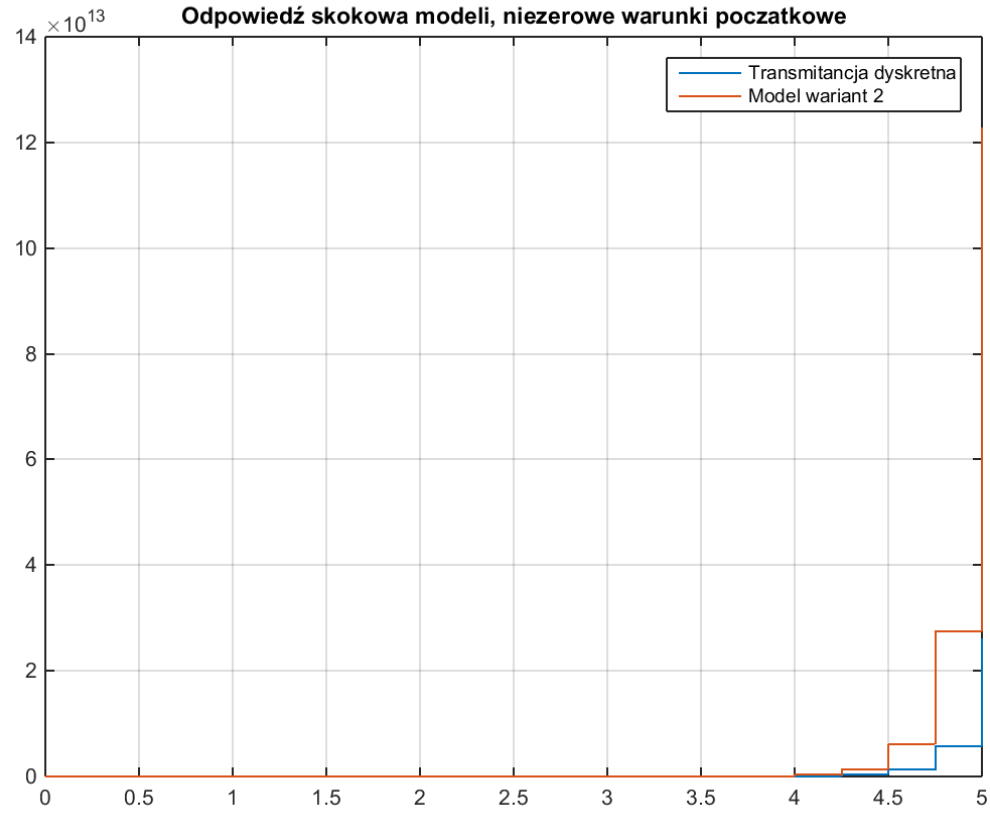
Rys. 3 – Odpowiedź skokowa transmitancji dyskretnej i modelu wg 1 wariantu



Rys. 4 – Odpowiedź skokowa transmitancji dyskretnej i modelu wg 1 wariantu



Rys. 5 – Odpowiedź skokowa transmitancji dyskretnej i modelu wg 2 wariantu



Rys. 6 – Odpowiedź skokowa transmitancji dyskretnej i modelu wg 2 wariantu

- Przedstawione odpowiedzi skokowe dążą do nieskończoności co jest skutkiem:
  - W przypadku modeli dyskretnych:
    - występowania biegunów spoza koła jednostkowego(moduł zera mianownika transmitancji dyskretnej większy od jedności),
  - A w przypadku transmitancji ciągłej:
    - Występowanie zer mianownika(biegunów) na prawej półpłaszczyźnie(dodatnie bieguny)
- Dążenie do nieskończoności odpowiedzi skokowych świadczy o niestabilności modeli.

5. Sterowalność i obserwowalność modelu wg drugiego wariantu:

- Sprawdzenie sterowalności sprowadza się do sprawdzenia czy kwadratowa macierz sterowalności S jest pełnego rzędu, co sprawdza się obliczając wyznacznik macierzy S:

$$S = [\,B \quad A*B \quad A^2*B\,]$$

$$\det(S) \approx -0.0022463$$

- Wyznacznik macierzy S ma stosunkowo małą, ale różną od zera wartość, oznacza to, że model jest sterowalny jednakże jest on słabo sterowalny.
- Sprawdzenie obserwowalności sprowadza się do sprawdzenia czy kwadratowa macierz obserwowalności O jest pełnego rzędu, co sprawdza się obliczając wyznacznik macierzy O:

$$O = [\,C;\ C*A;\ C*A\hat{}2\,]$$

$$\det(O) = 1$$

- Wyznacznik macierzy O jest różny od zera, oznacza to, że model jest obserwowalny

6. Regulator ze sprzężeniem od stanu:

- Po podaniu sygnału sprzężenia zwrotnego na wejście modelu sygnał u[k] przyjmuje postać:

$$u[k] = -Kx[k] + (N_u + KN_x)y^{zad}$$

- W konsekwencji równanie kolejnych wartości zmiennych stanu:

$$x[k+1] = (A - BK)x[k] + (\mathrm{N_u} + \mathrm{KN_x})y^{zad}[k]$$

- Gdzie poszeczególne nowe wektory:
  - N_u i N_x pełnią rolę przy zerowaniu uchybu ustalonego:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{3x1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

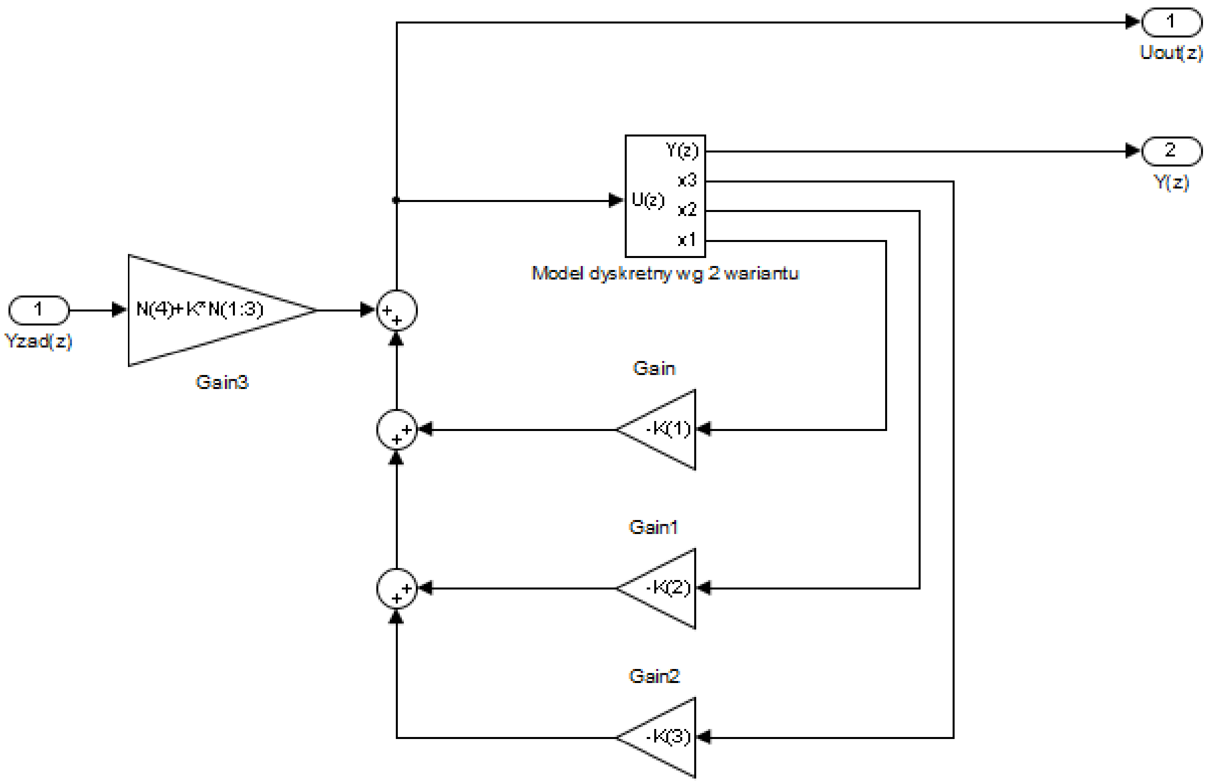
  - K jest wektorem sprzężeń od stanu, ważnymi parametrami przy wyznaczaniu jego wartości są pożądane bieguny z:

$$K = acker(\,A, B, [\,z_1, z_2, z_3])$$

- Równanie charakterystyczne układu przyjmuje postać:

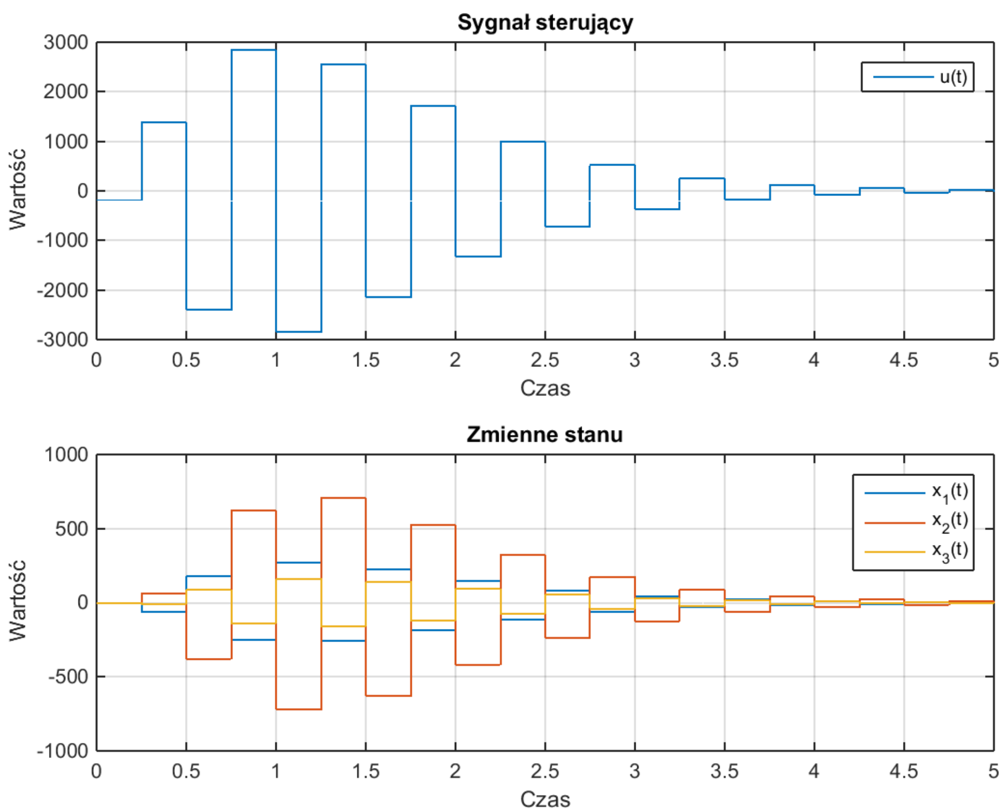
$$|zI - (A - BK)|$$

- Taka postać równania zależna od K pozwala lokować bieguny modelu, co w naszym przypadku może pomóc ustabilizować obiekt

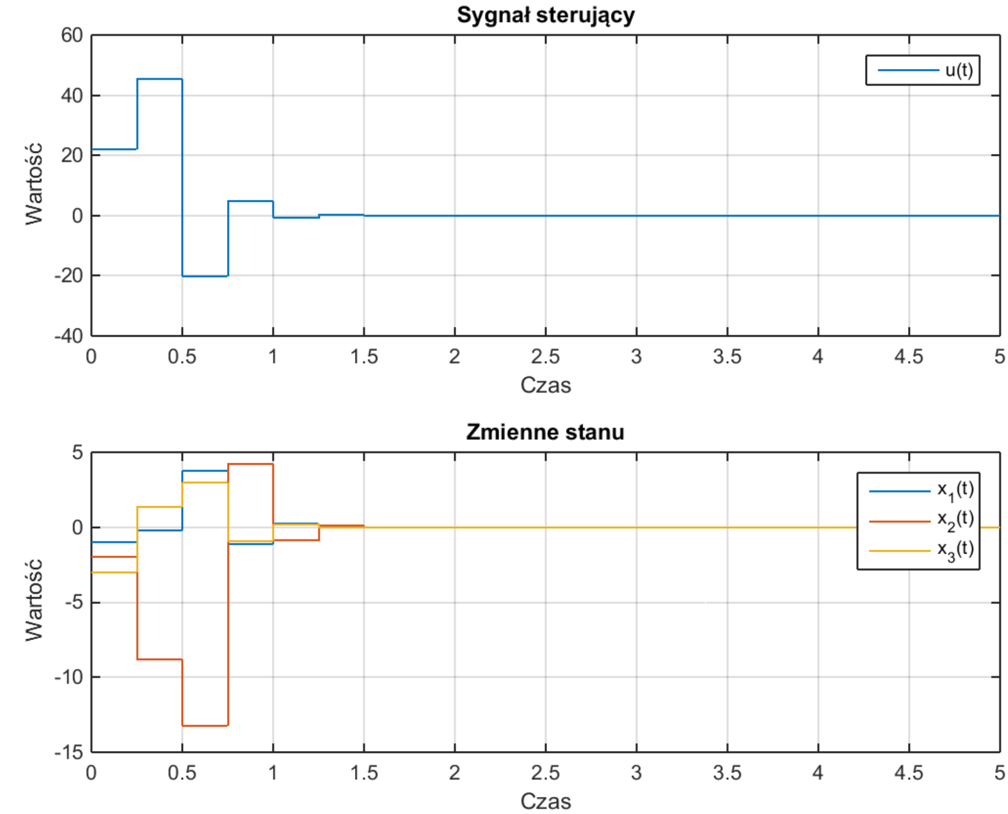


Rys. 7 – Struktura układu regulacji ze sprzężeniem od stanu

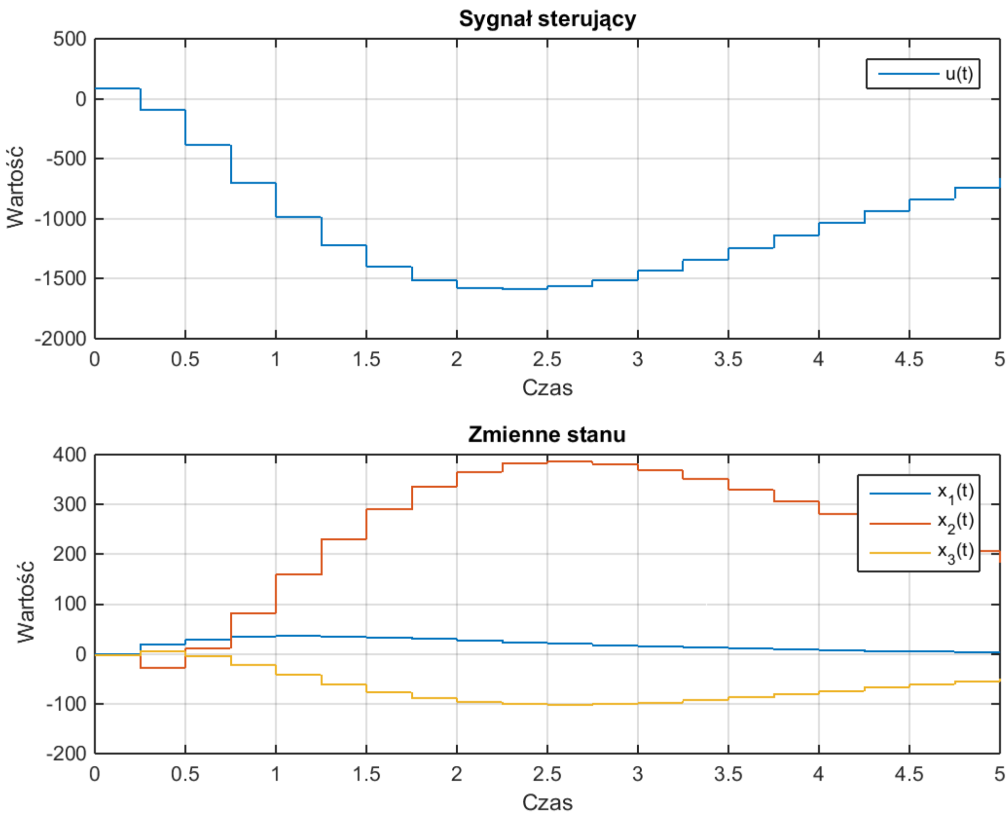
- Symulacja modelu dla trzech takich samych biegunów rzeczywistych:



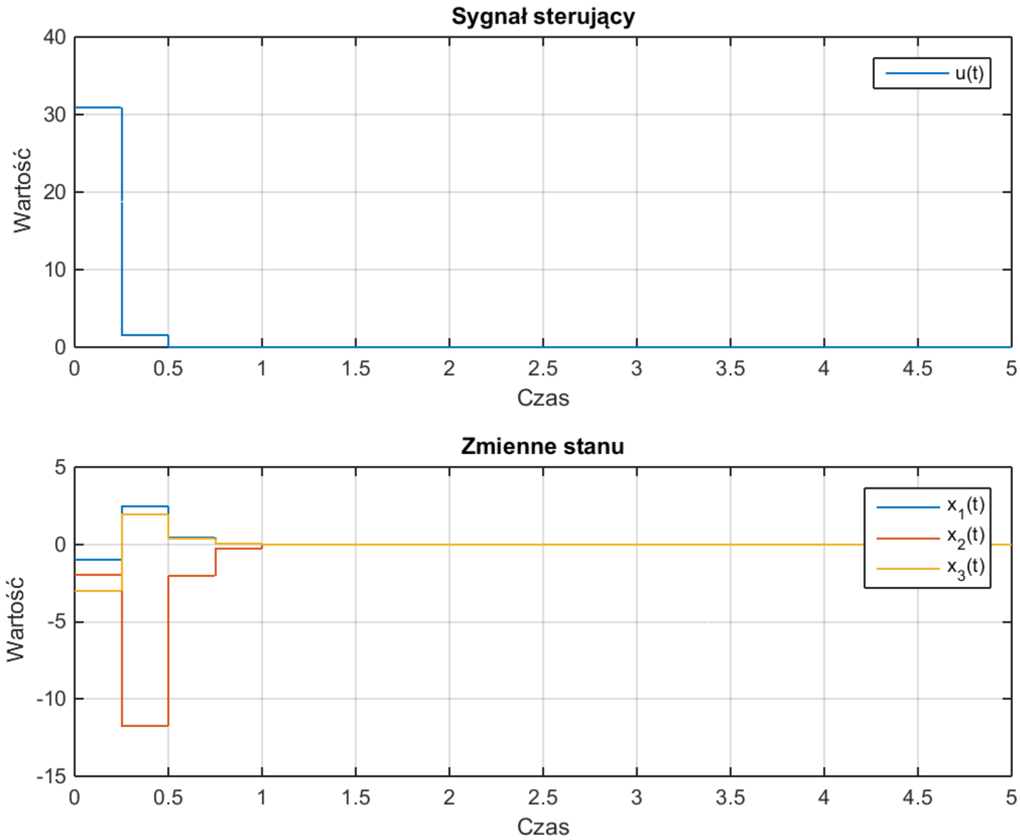
Rys. 8 – Symulacja regulatora, ujemne bieguny rzeczywiste, z_b=-0.6



Rys. 9 – Symulacja regulatora, ujemne bieguny rzeczywiste, z_b=-0.1



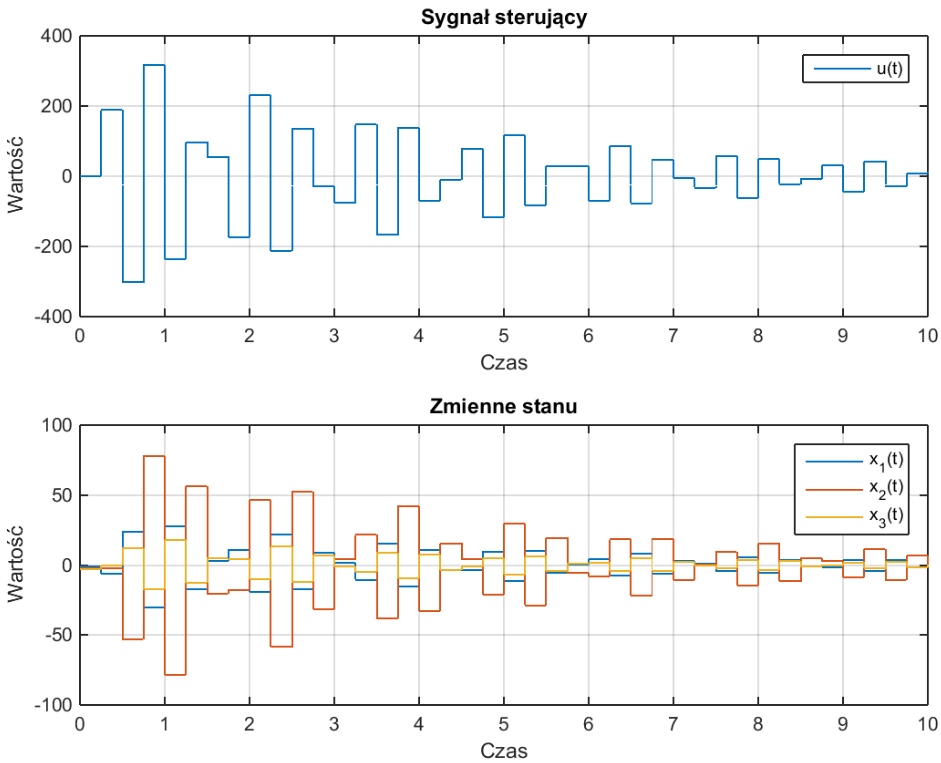
Rys. 10 – Symulacja regulatora, dodatnie bieguny rzeczywiste, z_b=0.8



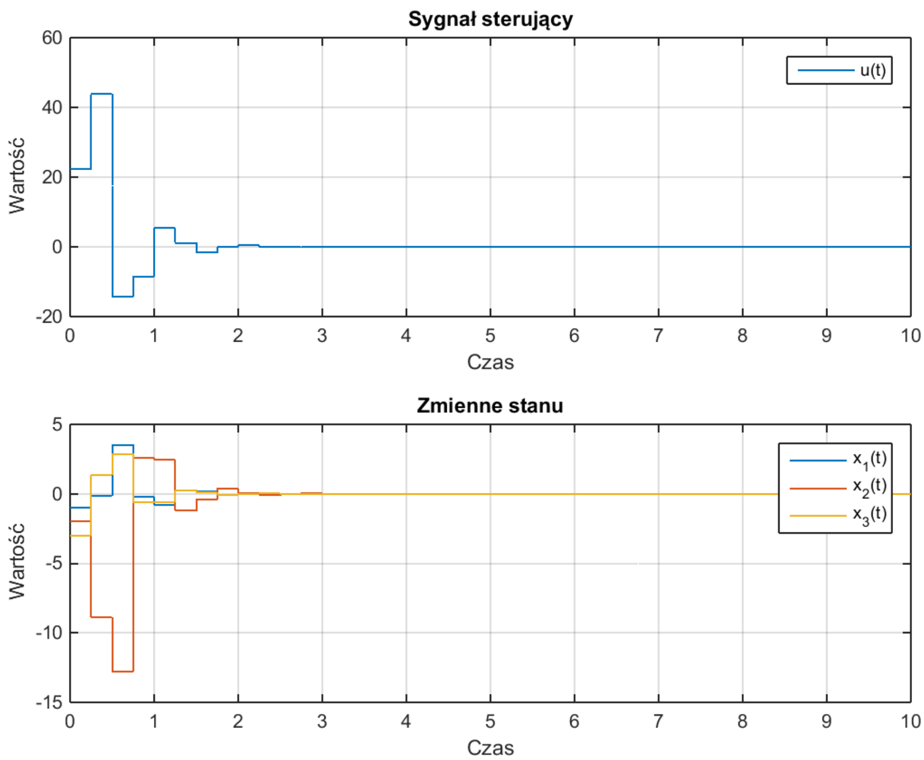
Rys. 11 – Symulacja regulatora, dodatnie bieguny rzeczywiste, z_b=0.1

- Symulacje wykazały niestabilność lub wartości ponad ustaloną granicę(wartości ponad 10^3 dla zmiennych stanu i 10^6 dla sygnału sterujacego) dla biegunów mniejszych od -0.6 i większych od 0.8
- T_{konc} dobrany doświadczalnie – czas 5 sekund
- Ujemne bieguny wraz ze wzrostem wartości ich modułu skutkują coraz wolniej gasnącymi szybkozmiennymi oscylacjami o większej amplitudzie – wzrost przeregulowania oraz czasu regulacji, dodatkowo dla wzrastających wartości modułu biegunów obserwuję wzrastające wartości sygnału sterującego i zmiennych stanu
    - Pogorszenie jakości regulacji dla rosnących wartości modułów biegunów
- Dodatnie bieguny wraz ze wzrostem ich wartości skutkują coraz dłużej trwającym zbieganiem do stanu ustalonego, nie występują oscylacje, dodatkowo obserwuję wzrost wartości sygnału sterującego i zmiennych stanu przy narastających wartościach biegunów
- Symulacje wykazały, że można przyjąć bieguny zerowe, regulator przy biegunach zerowych jest stabilny i był wręcz kandydatem na najlepszy regulator wariantu pierwszego.

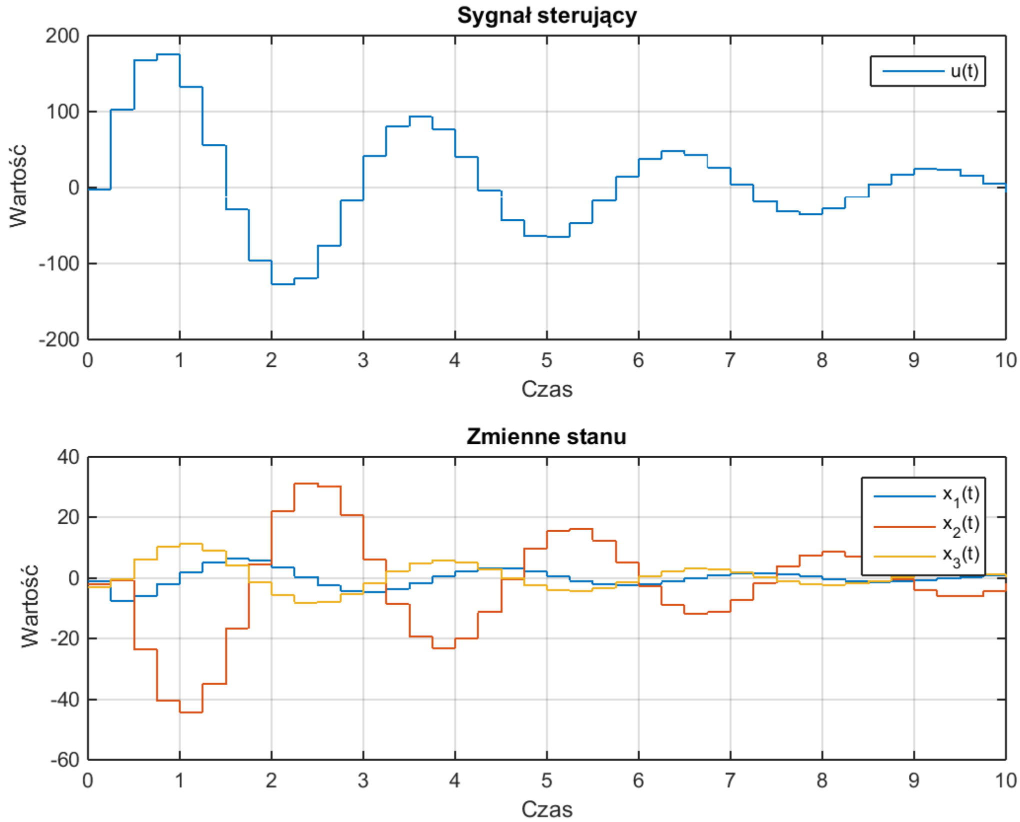
- Symulacja modelu dla jednego bieguna rzeczywistego i dwóch biegunów sprzężonych:



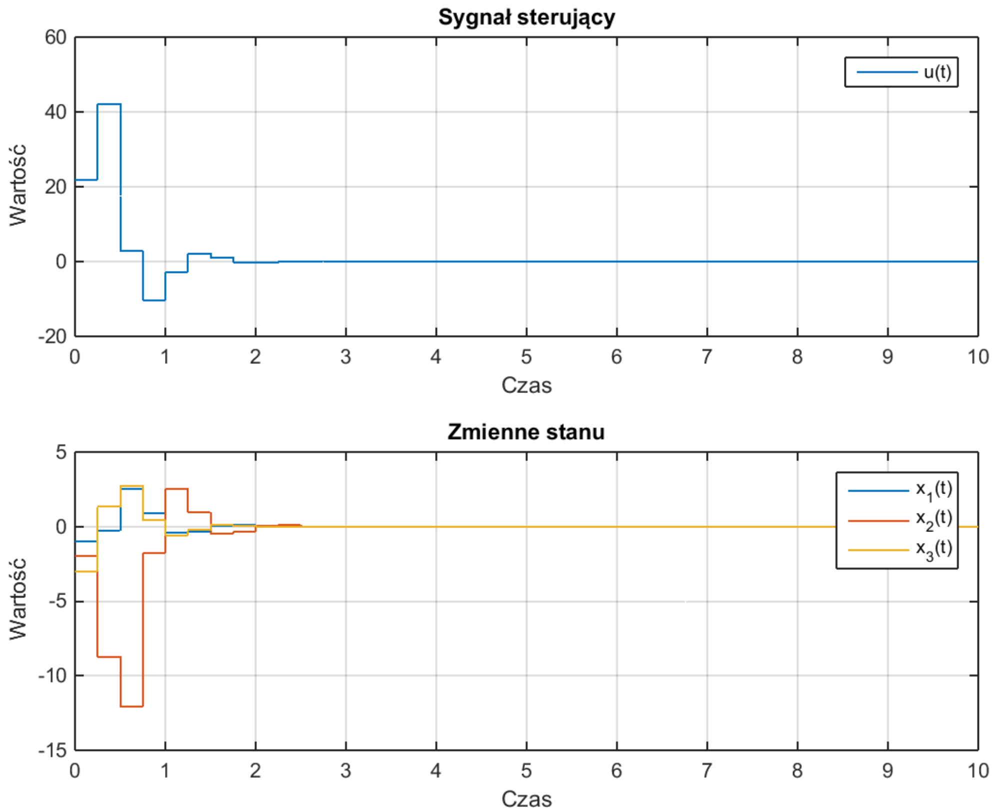
Rys. 12 – Symulacja regulatora, duża ujemna cześć rzeczywista



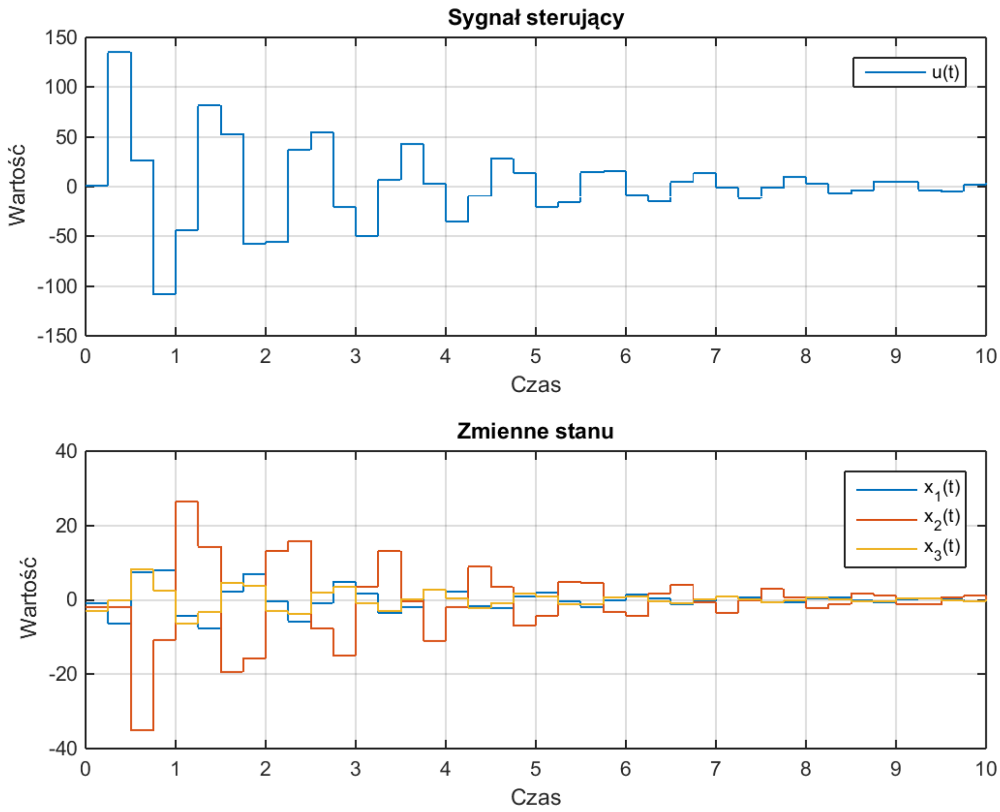
Rys. 13 – Symulacja regulatora, mała ujemna część rzeczywista



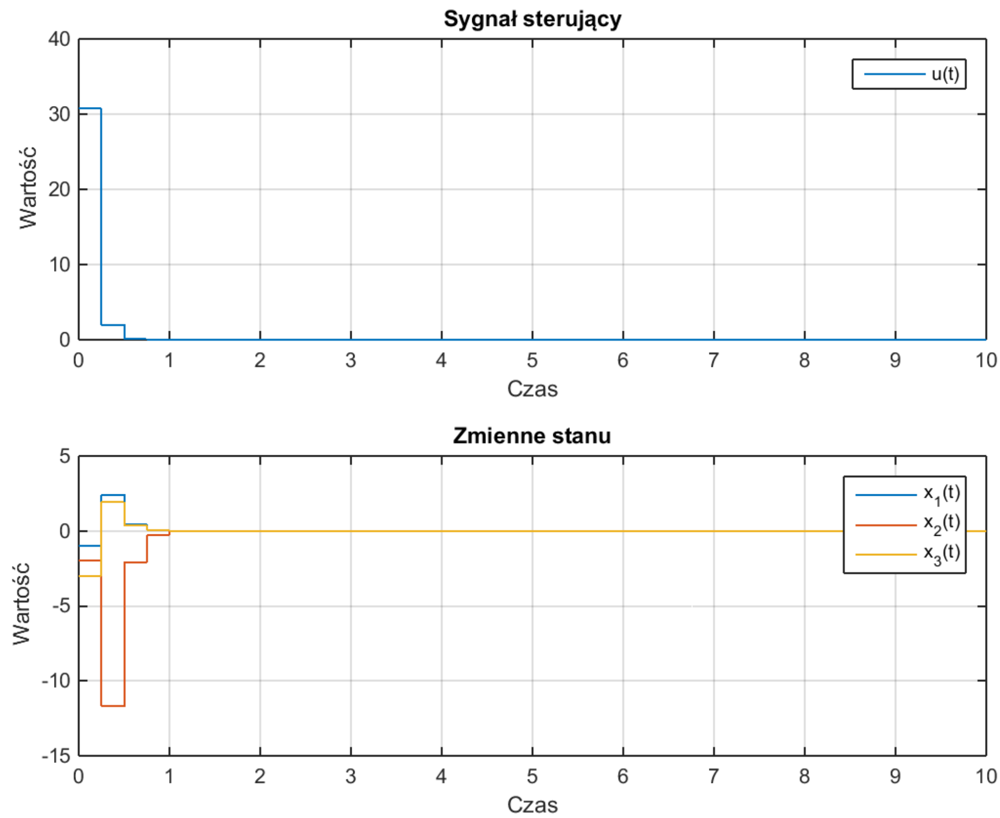
Rys. 14 – Symulacja regulatora, duża dodatnia część rzeczywista



Rys. 15 – Symulacja regulatora, mała dodatnia część rzeczywista



Rys. 16 – Symulacja regulatora, duża część urojona



Rys. 17 – Symulacja regulatora, mała część urojona

- Symulacje wykazały niestabilność obiektu dla modułów biegunów większych od jedności – bieguny spoza koła jednostkowego
- Ujemna część rzeczywista biegunu wprowadza szybkozmienne gasnące oscylacje sygnałów obserwowanych
    - Wzrost czasu regulacji oraz przeregulowania przy wzroście wartości modułu cześci rzeczywistej biegunów
    - Dodatkowo zaobserwowałem wzrost wartości sygnałów obserwowanych przy wyżej wymienionej zmianie bieguna
- Dodatnia część rzeczywista bieguna wprowadza wolnozmienne oscylacje sygnałów obserwowanych
    - Wzrost czasu regulacji oraz wartości sygnałów przy wyżej wzroście wartosci części rzeczywistej bieguna
- Składową urojoną badałem w zakresie „od zera w górę", ujęcie wartości ujemnych nie miałoby sensu ze względu na występowanie pary sprzężonych biegunów.
- Narastająca część urojona wprowadza dość nieregularne oscylacje, oraz wydłuża czas regulacji, oraz jednocześnie zaobserwowałem wzrost wartości sygnałów

7. Wybór najlepszego regulatora:

- Na podstawie analizy symulacji wybrałem jako najlepsze wersje regulatorów:
    - Dla wariantu pierwszego: bieguny o wartościach 0.1
    - Dla wariantu drugiego: wartości a=0.1 i b=0.2
- Analiza symulacji polegała na ocenie wartości przeregulowania, czasu regulacji, wartościach zmiennych stanu i sygnału sterującego.
- Posłużyłem się przy okazji wskaźnikiem jakości zawartym w skrypcie jako suma wagowa sugnału sterującego i zmiennych stanu
    - Regulator minimalizujący dany wskaćnik jakości można wyznaczyć za pomocą wywołania funkcji Matlaba:

$$[K, S, E] = dlqr(A, B, Q, R, N)$$

    - Gdzie poszczególne argumenty to:
        - Q, R i N to macierze wagowe
        - A i B to macierze danego modelu

8. Obserwator zredukowanego zrzędu o dwóch biegunach rzeczywistych, brak pomiaru zmiennych stanu x_2 i x_3:

- Zmienne stanu odtwarzane przez obserwator zapisywane są „z daszkiem”
- Wektor zmiennych stanu przyjmuje postać:

$$x[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ \hat{x}_2[k] \\ \hat{x}_3[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ w[k] \end{bmatrix}$$

- Dotychczasowo uzywane równanie stanu układu przyjmuje postać:

$$x_1[k+1] = A_{11}x_1[k] + A_{12}w[k] + B_1u[k]$$
$$w[k+1] = A_{21}x_1[k] + A_{22}w[k] + B_2u[k]$$

- Gdzie poszczególne macierze to:

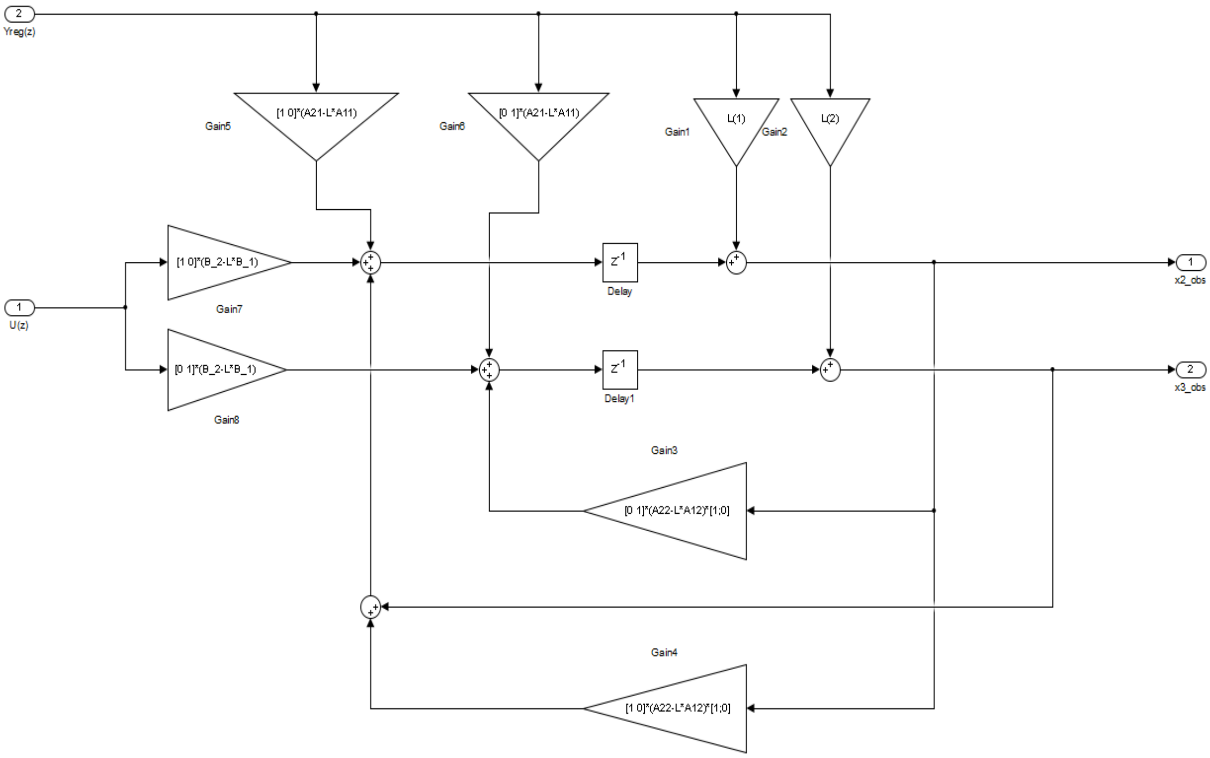
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

- Równanie charakterystyczne:

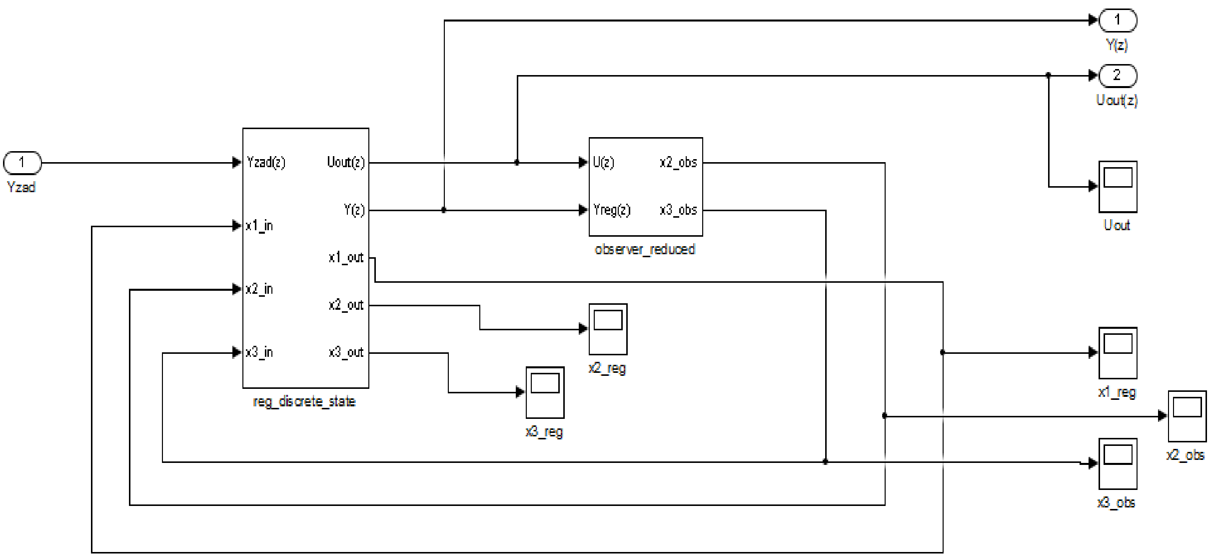
$$|zI - (A_{22} - LA_{12})|$$

- Wekor L wyznaczany jest m.in. z parametrów będącymi biegunami obserwatora:

$$L = acker(A22', A12', [z_2 \;\; z_3])'$$



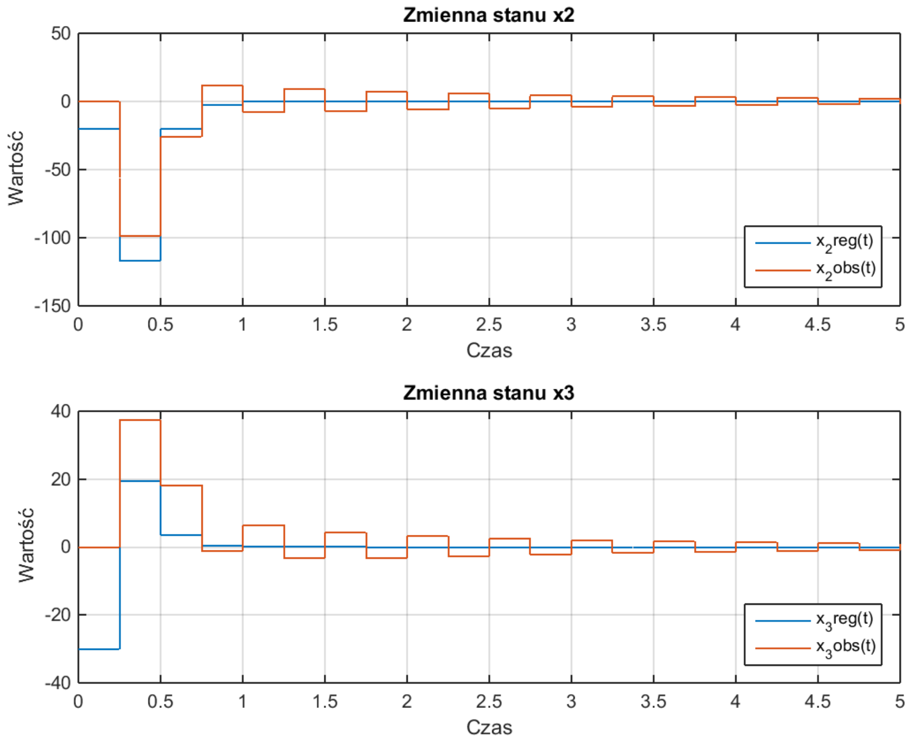
Rys. 18 – Szczegółowa struktura obserwatora zredukowanego rzędu



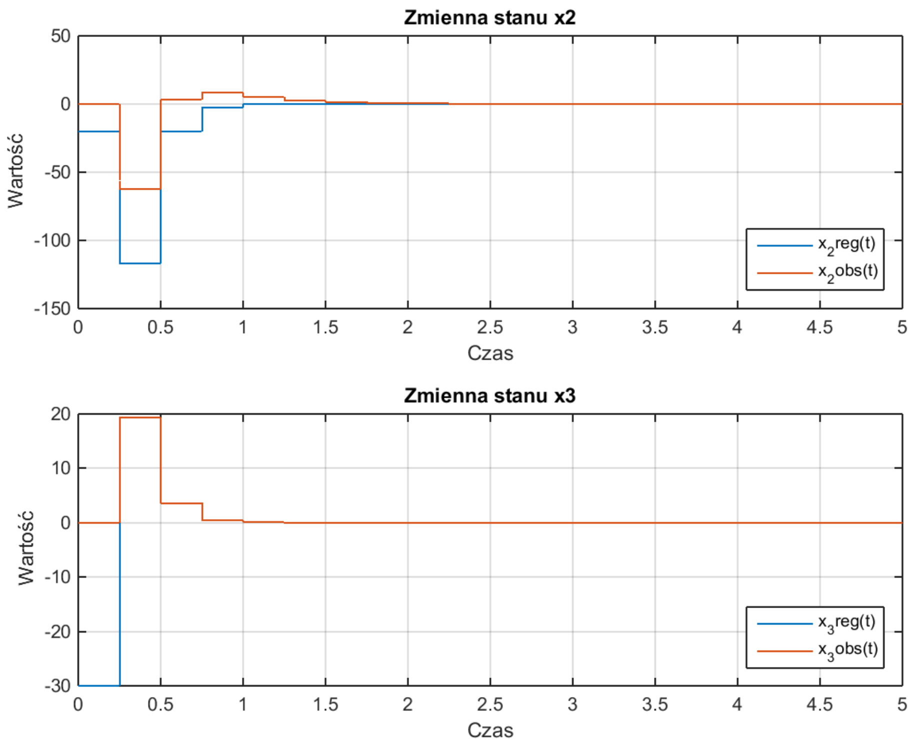
Rys. 19 – Ogólna struktura układu regulacji z obserwatorem

9. Porównanie zmiennych stanu odtwarzanych i rzeczywistych:

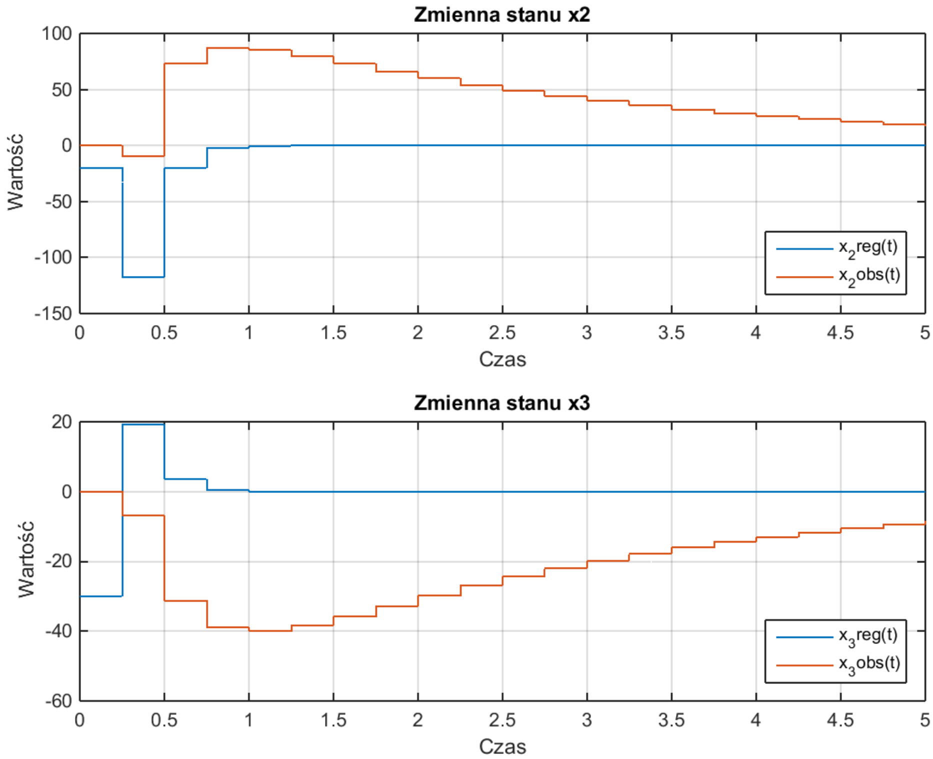
- Testy działania obserwatora przy regulatorze o biegunach rzeczywistych zmiana jednego z biegunów:



Rys. 20 – Odpowiedź obserwatora wolnego, wariant 1, z_2=-0.9, z_3=0.5

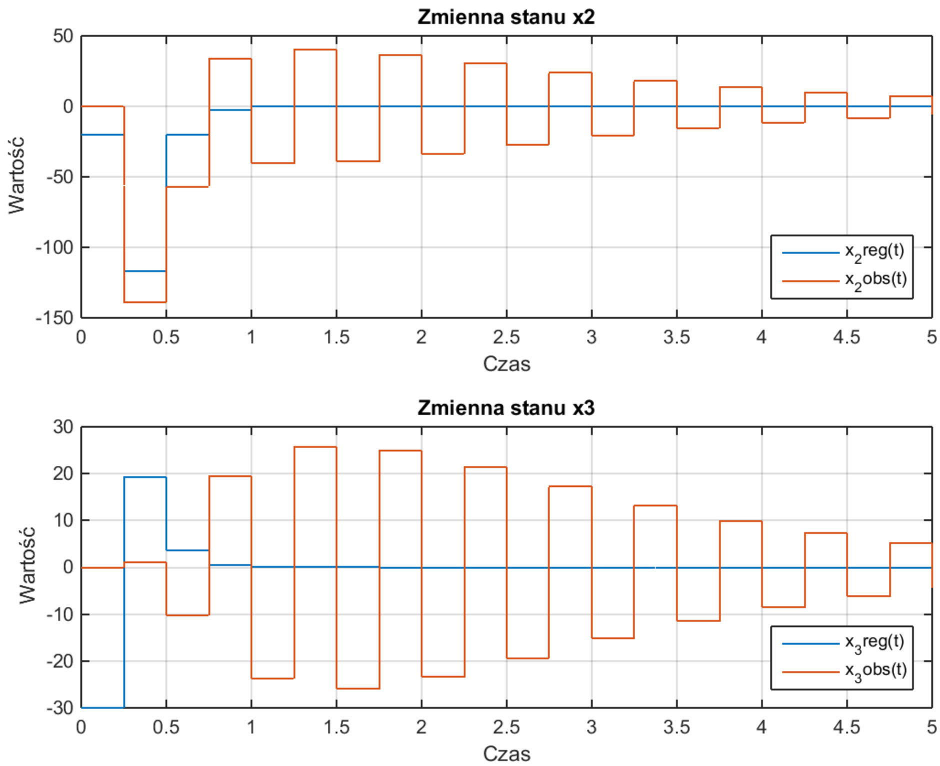


Rys. 21 – Odpowiedź obserwatora szybkiego, wariant 1, z_2=0.0, z_3=0.5

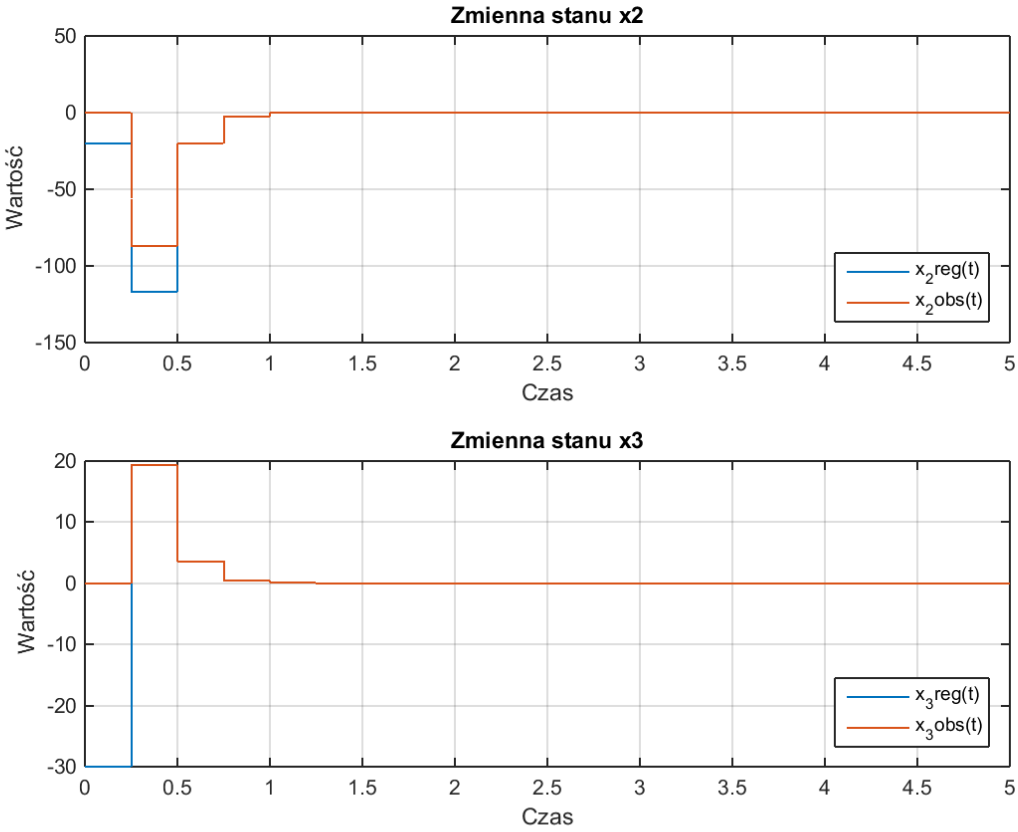


Rys. 22 – Odpowiedź obserwatora wolnego, wariant 1, z_2=0.9, z_3=0.5

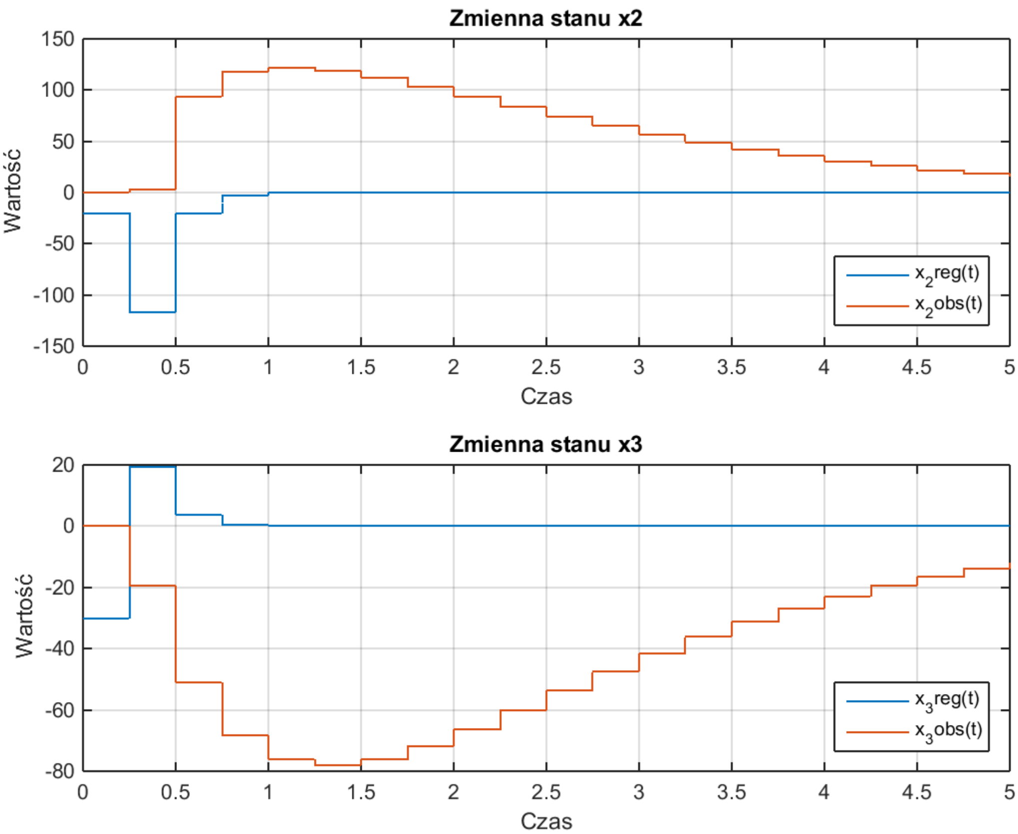
- Testy działania obserwatora przy regulatorze o biegunach rzeczywistych zmieniane obydwa bieguny na raz:



Rys. 23 – Odpowiedź obserwatora wolnego, wariant 1, z_2=-0.8, z_3=-0.8

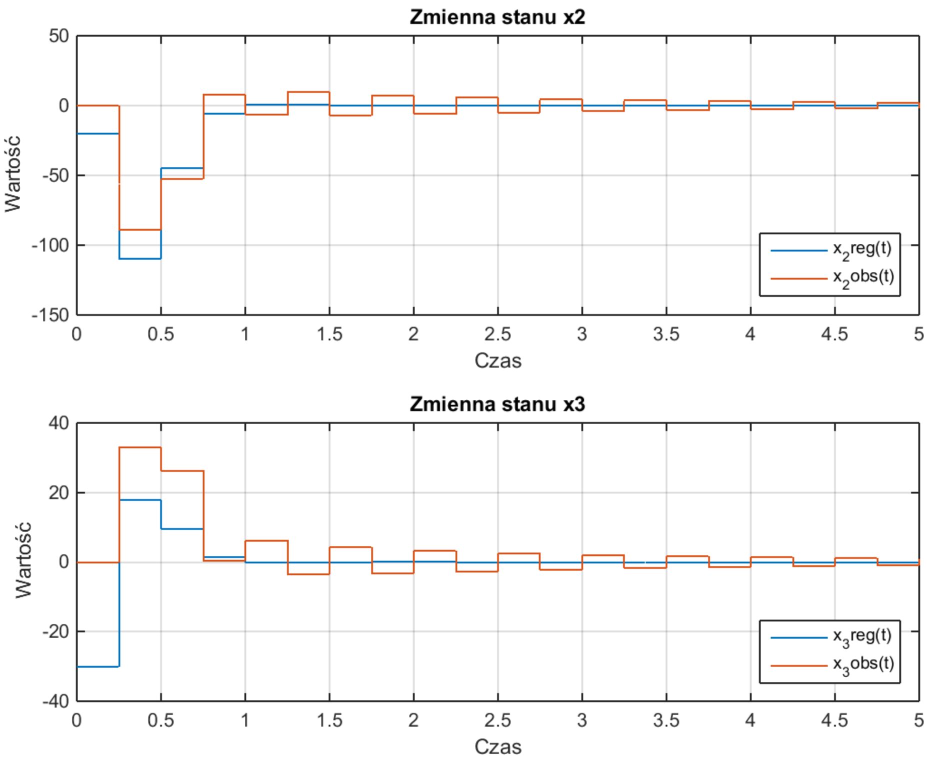


Rys. 24 – Odpowiedź obserwatora szybkiego, wariant 1, z_2=0.0, z_3=0.0

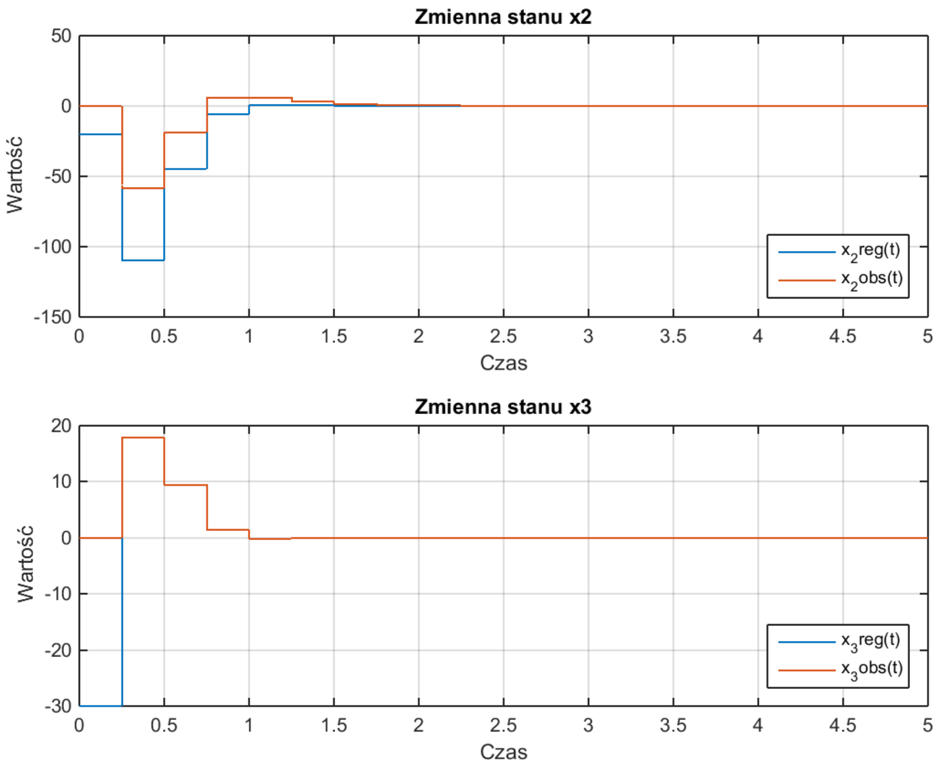


Rys. 25 – Odpowiedź obserwatora wolnego, wariant 1, z_2=0.8, z_3=0.8

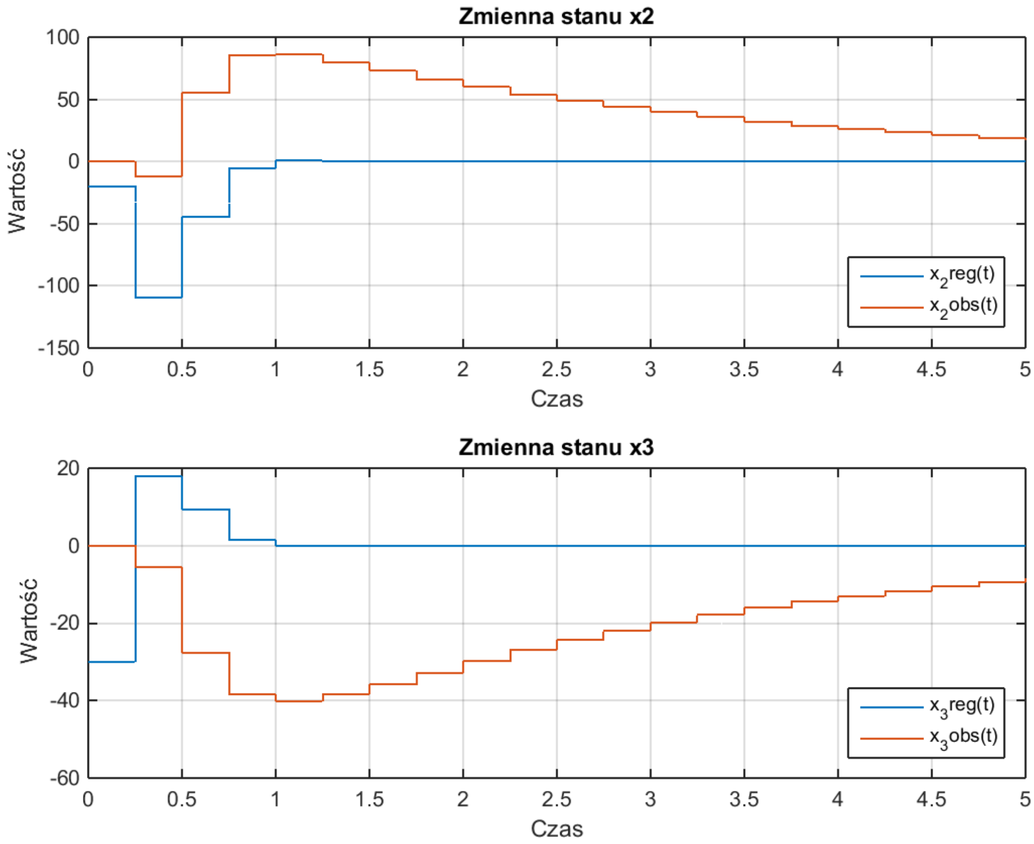
- Testy działania obserwatora przy regulatorze o biegunach zespolonych zmieniany jeden biegun na raz:



Rys. 26 – Odpowiedź obserwatora wolnego, wariant 2, z_2=-0.9, z_3=0.5

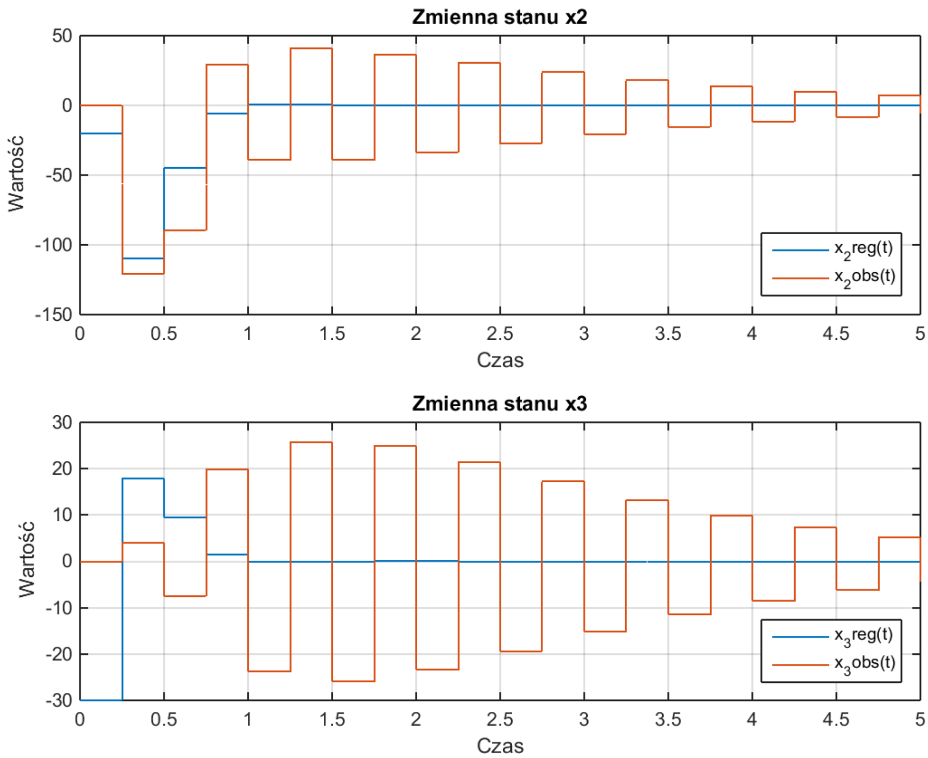


Rys. 27 – Odpowiedź obserwatora szybkiego, wariant 2, z_2=0.0, z_3=0.5

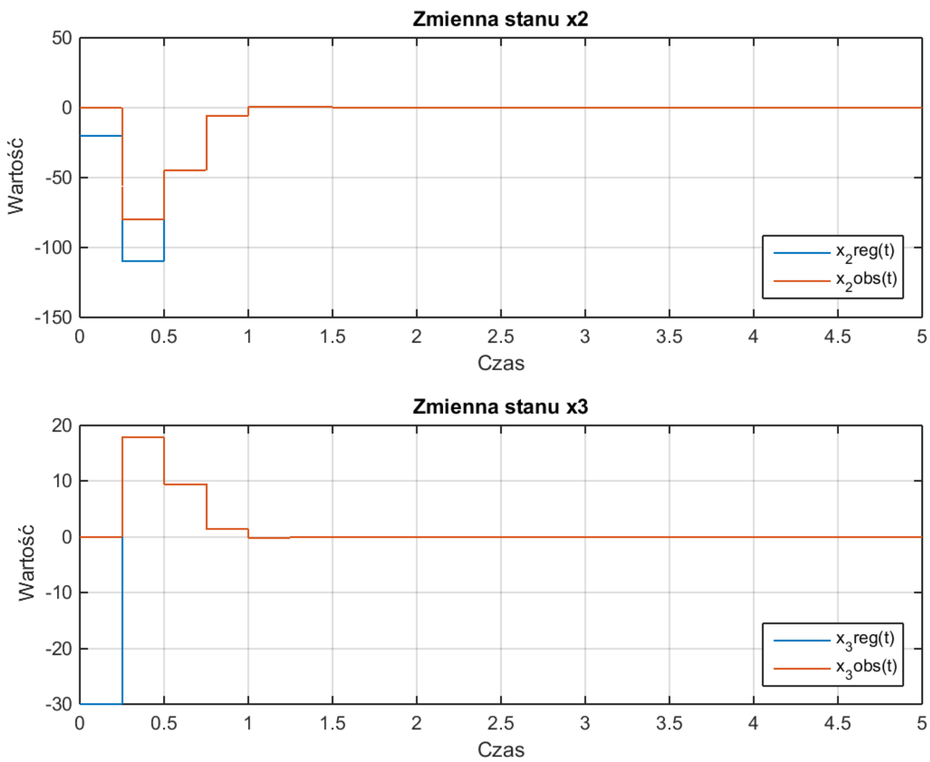


Rys. 28 – Odpowiedź obserwatora wolnego, wariant 2, z_2=0.9, z_3=0.5

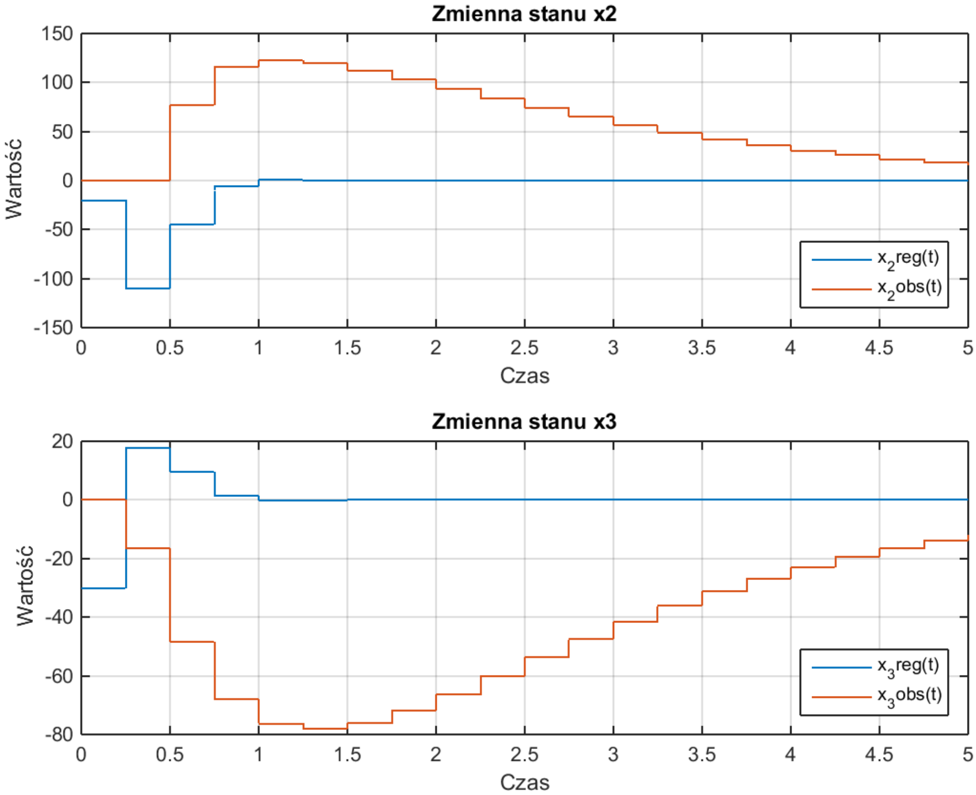
- Testy działania obserwatora przy regulatorze o biegunach zespolonych zmieniane oba bieguny na raz:



Rys. 29 – Odpowiedź obserwatora wolnego, wariant 2, z_2=-0.9, z_3=-0.9



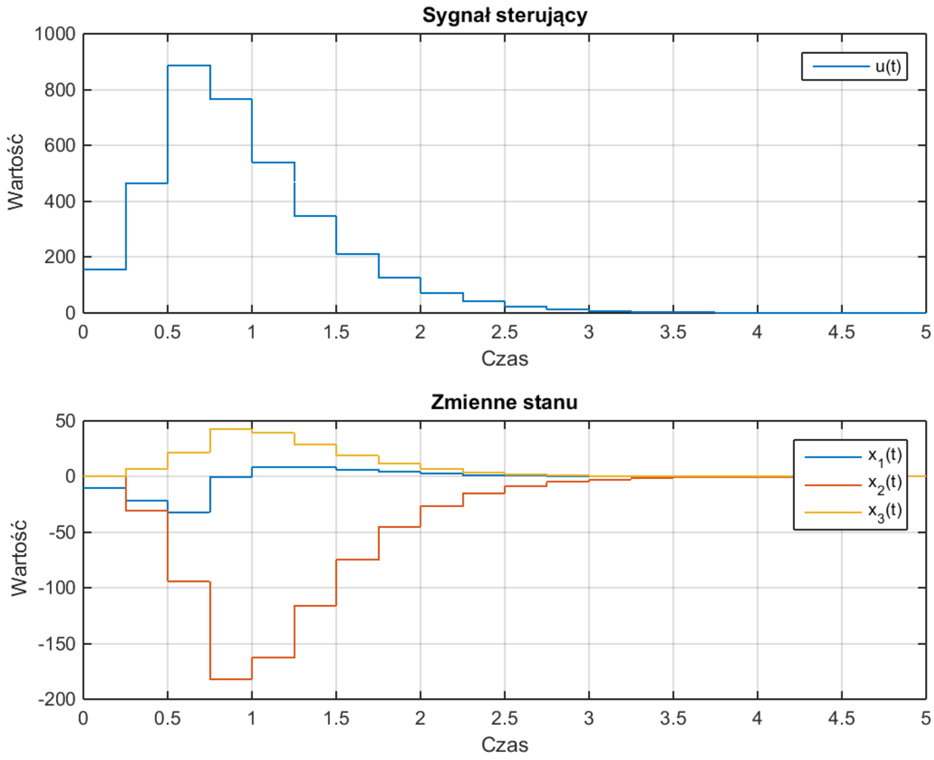
Rys. 30 – Odpowiedź obserwatora szybkiego, wariant 2, z2=0.0, z_3=0.0



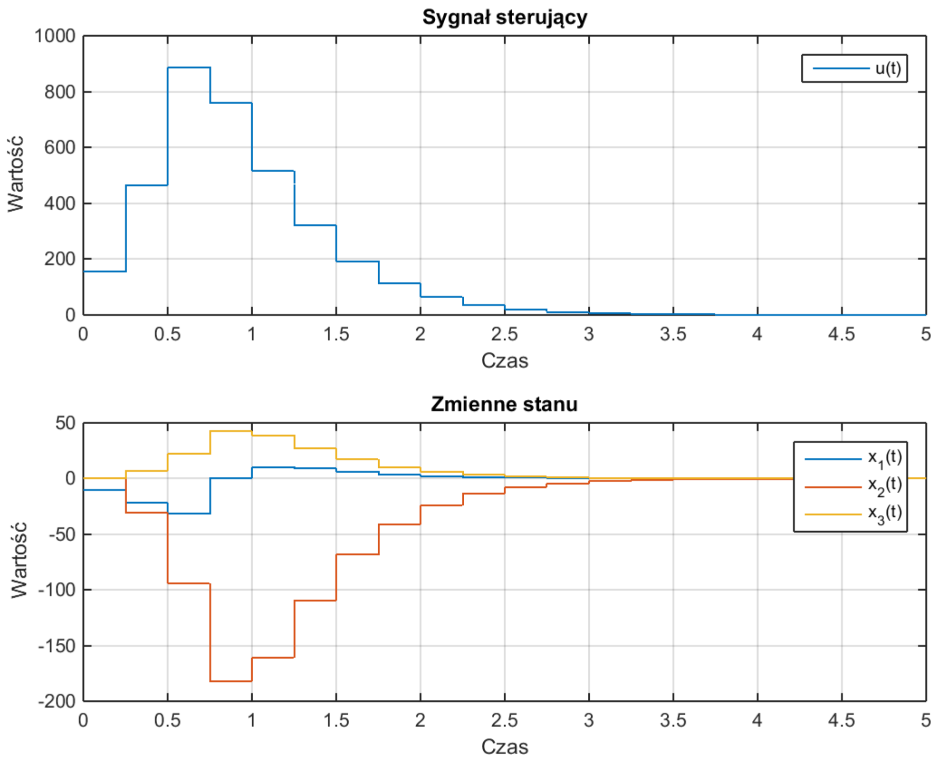
Rys. 31 – Odpowiedź obserwatora wolnego, wariant 2, z_2=0.8, z_3=0.8

- Zaobserwowana podczas symulacji zbieżność stanu obserwatora do stanu rzeczywistego dla biegunów obserwatora z obszaru koła jednostkowego.
- Podobnie jak w przypadku dobierania regulatora obserwujemy gasnace szybkozmienne oscylacje dla ujemnych biegunów i zbieżność w zróżnicowanym tempie dla dodatnich biegunów obserwatora
- Jako najlepszy osberwator szybki wybrałem ten o biegunach ulokowanych w zerze co jednocześnie odpowiada twierdząco na pytanie o możliwość ulokowania biegunów obserwatora z zerze
  - Bieguny obserwatora szybkiego: 0.0 i 0.0
- Jako obserwator wolny wybrałem ten którego bieguny dawały jako skutek czas regulacji w okolicach połowy założonego początkowo czasu t_{konc} – około 2.5 sekundy
- Bieguny obserwatora wolnego: 0.5 i 0.5

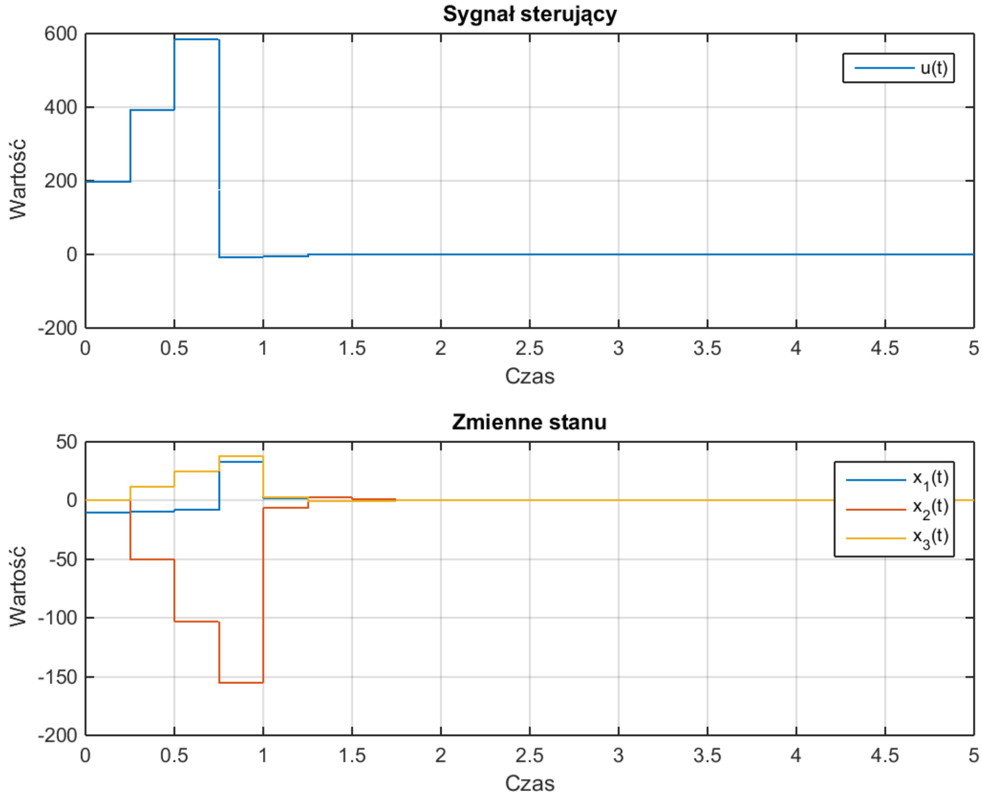
10. Testy najlepszych regulator ze sprzężeniem od stanu wykorzystującymi zmienne stanu odtwarzane przez obserwator zredukowanego rzędu:



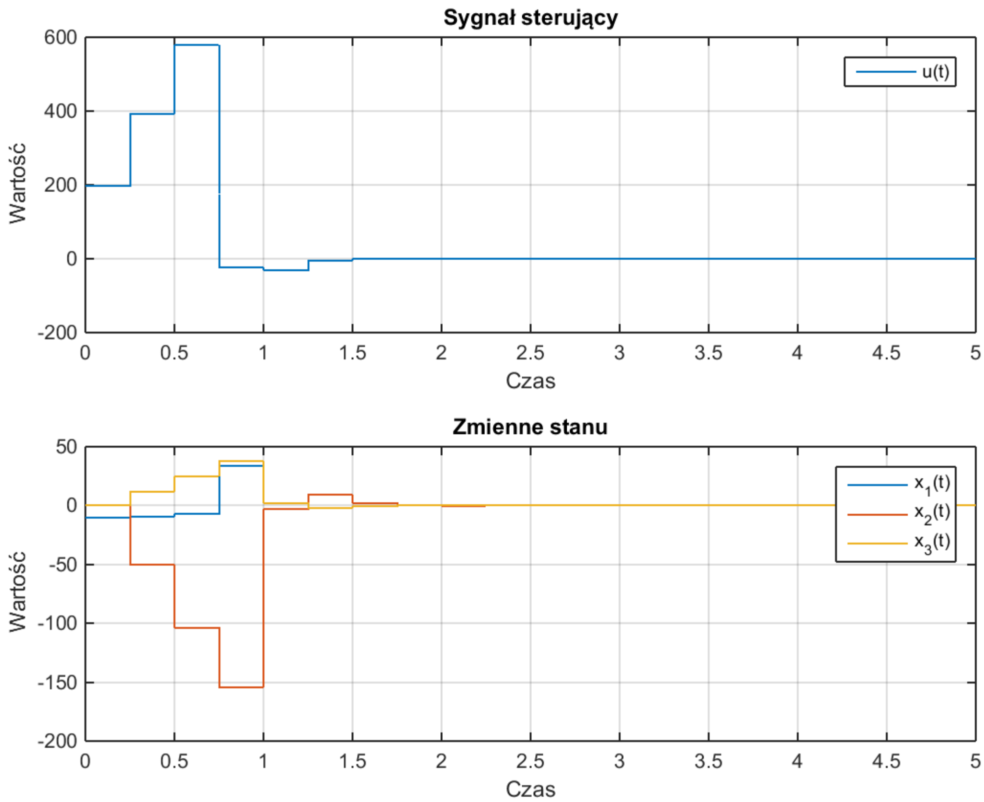
Rys. 32 – Regulator z biegunami rzeczywistymi przy obserwatorze wolnym



Rys. 33 – Regulator z biegunami zespolonymi przy obserwatorze wolnym



Rys. 34 – Regulator z biegunami rzeczywistymi przy obserwatorze szybkim



Rys. 35 – Regulator z biegunami zespolonymi przy obserwatorze szybkim

- Regulacja przebiega szybko i skutecznie w przypadku regulatora z obserwatorem szybkim w porównaniu do regulatora korzystającego z wartośći rzeczywistych
- W przypadku regulatora przy obserwatorze wolnym regulacja trwa dłużej, jednakże nadal jest skuteczna, obserwuję iż czas regulacji jest zblizony do czasu zbiegania obserwatora do stanu rzwczywistego.