Proseminar Analysis

SoSe 2023
Universität Regensburg

Das Lemma von Urysohn und der Fortsetzungssatz von Tietze

Raphael Heinrich

09.10.2012

1 Grundlagen

1.1 Einführung

Wir alle kennen aus der Analysis I die metrischen Räume, eine Menge X, gepaart mit einer Abstandsfunktion d, wobei d gewisse Eigenschaften erfüllen muss: Definitheit, Symmetrie, Dreiecksungleichung. Auf solchen Räumen besitzen Funktionen eine Vielzahl an wünschenswerten Eigenschaften. Unter anderem werden wir sehen, dass, falls $A \subseteq X$ abgeschlossen und f eine stetige Abbildung ist, sich dann f stetig auf $\hat{f} : X \to X, f(x) = \hat{f}(x)$ für alle $x \in A$ fortsetzen lässt. In dieser Proseminararbeit wollen wir jedoch den Fokus vor allem darauf legen, was passiert, wenn wir Räume betrachten, die nicht metrisch sind, oder vielleicht sogar nicht einmal metrisierbar. Das sind dann Räume, bei denen wir wissen, dass wir nie eine Metrik finden werden. Ein Beispiel dazu werden wir später sehen.
Dies wird uns zu der Frage bringen, ob die Aussage oben auch für nicht-metrische Räume gilt, bzw. welche Eigenschaften eines Raums erhalten bleiben, und welche nicht zwingend nötig sind. Doch bevor wir dorthin gelangen, müssen wir zunächst ein paar Grundlagen klären.

1.2 Bemerkung

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ definieren wir als $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$, das bedeutet, die 0 ist für uns in den natürlichen Zahlen enthalten. Falls wir $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ benötigen, schreiben wir $\mathbb{N}^{\times}$. Die Menge der positiven Zahlen einer Menge M notieren wir mit M^+. Wir werden, soweit möglich, auf Quantoren $(\forall, \exists)$ verzichten. Das Symbol "$\subseteq$"bezeichnet für uns die Teilmenge, "$\subset$"die echte Teilmenge. Das gleiche gilt für Obermengen. Das Ende eines Beweises notieren wir mit $\square$.

1.3 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Sei außerdem $x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann nennen wir $B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y)\} < \varepsilon$ die offene Kugel um x mit Radius ε, ganz analaog zur Definition in der Analysis I.

2. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt offen, per definitionem genau dann, wenn für alle $x \in M$ ein Radius r existiert, sodass $B(x, r) \subseteq M$. Abgeschlossen sei eine Menge, wenn sie Komplement einer offenen Menge ist.

3. Wir bezeichnen die Menge $U \subseteq X$ als eine **Umgebung** von $y \in X$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B(y, \varepsilon) \subseteq U$.

4. Es wird sich später als nützlich herausstellen, nicht nur den Abstand zwischen Punkten, sondern auch zwischen Mengen sinnvoll zu messen. Seien also A, B nichtleere Teilmengen von $X, y \in X$. Dann

$$d(A, B) := \inf\{d(\lambda, \mu) \mid \lambda \in A, \mu \in B\}, \text{ und analog: } d(y, A) := \inf\{d(x, \lambda) \mid \lambda \in A\}.$$

1.4 Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x, y \in X, x \neq y$. Dann gilt folgende Trennungseigenschaft:
Es gibt ein $R > 0 : B(x, R) \cap B(y, R) = \emptyset$.
Beweis: Wählen wir $R = \frac{1}{2} \cdot d(x, y)$. Angenommen es gäbe ein $\alpha \in B(x, R) \cap B(y, R)$. Dann gelte:

$$2 \cdot R = d(x, y) \leq d(x, \alpha) + d(\alpha, y) < 2 \cdot R,$$

da α im Schnitt der beiden offenen Kugeln läge. Das ist ein Widerspruch zur Allgemeinheit. □
Wir können diese Trennungseigenschaft sogar problemlos auf den Abstand zwischen Mengen aus vorheriger Definition übertragen: Seien $A, C \subset X$ disjunkt, nichtleer. Dann existieren echte Obermengen $U_A \supset A$ und $U_C \supset C$ mit $U_A \cap U_C = \emptyset$.
Wählen wir für $\varepsilon > 0$ unsere Obermengen als: $\bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$, bzw. $\bigcup_{z \in C} B(z, \varepsilon)$.
Da für alle $x \in A, z \in C : x \neq z \Rightarrow U_A, U_C$ existieren $\Rightarrow d(A, C) > 0$. □

1.5 Satz

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien dazu M, N nichtleere, abgeschlossene Teilmengen von X, $M \cap N = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion

$$f : X \to [0, 1], \text{ sodass: } f(M) = \{0\}, f(N) = \{1\}.$$

Beweis: Sei im Folgenden $\xi \in X$. Konstruieren wir nun f mit den gewünschten Eigenschaften. Es ergibt durchaus Sinn, für unsere Abbildung einen Bruch aus Metriken zu definieren, da wir so leicht Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ erhalten, sobald der Zähler kleiner als der Nenner ist. Damit für f nun $f(M) = \{0\}, f(N) = \{1\}$ gilt, erkennt man durch genaues betrachten, dass

$$f : X \to [0, 1], \xi \mapsto \frac{d(\xi, M)}{d(\xi, M) + d(\xi, N)}$$

eine sinnvolle Definition für f ist. Denn es gilt für alle $x \in M$:

$$f(x) = \frac{d(x, M)}{d(x, M) + d(x, N)} = \frac{0}{0 + d(x, N)} = 0 \Rightarrow f(M) = \{0\}.$$

Und für alle $y \in N$:

$$f(y) = \frac{d(y, M)}{d(y, M) + d(y, N)} = \frac{d(y, M)}{d(y, M) + 0} = 1 \Rightarrow f(N) = \{1\}.$$

Diese Funktion ist zudem auch wohldefiniert. Da M, N disjunkt sind, gilt:

$$d(M, N) > 0 \Rightarrow d(\xi, M) + d(\xi, N) > d(\xi, M).$$

Dies dürfen wir folgern, da in metrischen Räumen die Trennungseigenschaft von obigem Lemma gilt. Somit ist $f(X) \subseteq [0, 1]$. Auch wird garantiert, dass jedes $\xi \in X$ genau ein zugehöriges Bild $f(\xi) \in f(X) = [0, 1]$ besitzt, dadurch, dass X ein metrischer Raum ist, die Metrik also schon wohldefniert ist, und damit auch Summen und Brüche von Metriken.
Verbleibt, die Stetigkeit von f zu zeigen. Hierzu benutzen wir die topologische Definition der Stetigkeit, die wir bereits aus der Analysis I kennen. Sie besagt:

$$f \text{ stetig auf X} \Leftrightarrow \text{Für alle } W \subseteq [0, 1] \text{ offen, ist } f^{-1}(W) \text{ offen.}$$

Diese ist eine kluge Definition von Stetigkeit, da diese ohne Metriken auskommt. Damit können wir den Stetigkeitsbegriff später auch außerhalb vom Kontext metrischer Räume komfortabel nutzen. Wir definieren Stetigkeit im Vornherein auf diese Weise, und beweisen nicht die

Äquivalenz zur ε-δ-Definition. Das bequemste Instrument für Offenheit im Kontext metrischer Räume sind die offenen Kugeln. Daher liegt es nahe, dass wir uns im Stetigkeitsbeweis dieser bedienen werden.
Sei $W \subset [0,1] = f(X)$ offen. Sei nun außerdem $c \in f^{-1}(W) \Rightarrow f(c) \in W$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B_2(f(c), \varepsilon) \subseteq W$, wegen Offenheit von W.
Daraus folgt, dass für $c \in f^{-1}(W)$ ein $r > 0$ existiert, sodass:

$$B_X(c,r) \cap M = \emptyset \text{ und } B_X(c,r) \cap N = \emptyset$$

Denn wäre $c \in M$ oder $c \in N$, so ist ihr Bild nach Definition von f abgeschlossen, wodurch sie für den Stetigkeitsbeweis irrelevant werden.
Jetzt existiert aber zu jedem $\eta \in B_2(f(c), \varepsilon)$ ein $\xi \in B_X(c,r)$. Sobald wir r passend wählen, folgt:

$$B_X(c,r) \subseteq f^{-1}(W) \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

$\square$

1.6 Beispiel

Das wohl einfachste Beispiel stellt Folgendes dar: Sei $(\mathbb{R}, d_2)$ ein euklidischer metrischer Raum, $M = \{0\}, N = \{1\}, M \cap N = \emptyset$. Dann existiert die stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$, sodass $f(M) = \{0\}, f(N) = \{1\}$.
Findet ihr noch weitere Beispiele, wo sich zeigt, dass diese Regel erfüllt ist?

1.7 Beispiel

1.8 Bemerkung

Sei A eine Menge. Dann bezeichnen wir mit $\overline{A}$ den topologischen Abschluss von A, also

$$\overline{A} := \bigcap_{\mathcal{C}, A \subseteq \mathcal{C} \subseteq X, \mathcal{C} \text{ abgeschlossen}}$$

im Gegensatz zur Definition mithilfe der Häufungspunkte aus der Analysis I. Die bekannte Definition können wir leider nicht mehr verwenden, da es in der Topologie unter anderem auch Räume gibt, in denen unsere Definition von Häufungspunkten keinen Sinn mehr ergibt.

2 Das Lemma von Urysohn

2.1 Definition

Eine essentielle Definition in der Topologie stellt die der Topologie dar. Als **Topologie** τ auf einer Menge X bezeichnen wir ein Mengensystem, also eine Menge von Mengen, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Sei I eine beliebige Indexmenge. Falls $O_i \in \tau$ für alle $i \in I$, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} \in \tau$.
2. Sei J eine endliche Indexmenge. Falls $O_j \in \tau$ für alle $j \in J$, dann ist auch $\bigcap_{j \in J} \in \tau$.
3. $X, \emptyset \in \tau$.

Das Paar (X, τ) aus einer Menge X und einer Topologie τ nennen wir einen topologischen Raum. Eine beliebige Menge $\mathcal{O} \in \tau$ nennen wir offene Menge des topologischen Raums.

2.2 Definition

Bevor wir das Lemma von Urysohn jedoch formulieren können, müssen wir noch einige weitere Grundlagen legen. Dafür definieren wir, was es für einen topologischen Raum bedeutet, normal zu sein: Eine Raum (X,τ) heißt **normaler Raum** per definitionem genau dann, wenn für

$$A, C \subseteq X, A \cap C = \emptyset \text{ gilt, dass: } U_A \supseteq A, U_C \supseteq C \text{ existieren mit: } U_A \cap U_C = \emptyset.[1]$$

Wir sehen leicht, dass wir für normale Räume letztenendes lediglich die Trennungseigenschaft von Lemma 1.4 fordern, ohne jedoch Metriken zu benutzen. Daraus folgt direkt, dass alle metrischen Räume normal sind.

2.3 Bemerkung

Bereits in der Analysis I sieht man Beispiele, in denen Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ andere Wertebereiche als $\mathbb{R}$ besitzen. Für den Beweis des Lemmas von Urysohn werden wir eine Menge $D \subset \mathbb{Q}$ definieren, die Wertebereich unserer Folge sein soll.
Zudem liegt es nahe, dass Folgen nicht unbedingt den Definitionsbereich der natürlichen Zahlen besitzen müssen. Auch andere (nicht unbedingt abzählbare) Mengen wären denkbar. Im Folgenden werden wir eine Folge

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$$

für eine bestimmte Teilmenge $D \subset \mathbb{Q}$ definieren. Die Handhabung hier unterscheidet sich nicht grundlegend von der Handhabung „gewöhnlicher“ Folgen (wie zB. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von oben), jedoch bietet die „besondere“ Definition von φ gewisse Vorteile für den Beweis des folgenden Lemmas.

2.4 Lemma (Urysohn)

Ein topologischer Raum (X,τ) ist **normal**, genau dann, wenn es eine Funktion $f : X \to [0,1]$ gibt, sodass für $M, N \subset X$ nichtleer, disjunkt, gilt: $f(M) = \{0\}, f(N) = \{1\}$.
Anmerkung: Man sieht leicht, dass die geforderte Bedingung der Hinrichtung genau die gleiche Bedingung ist, die wir in Satz 1.5 schon für metrische Räume bewiesen haben. Der Beweis des Lemmas von Urysohn impliziert also, dass jeder metrische Raum normal ist.
Beweis: Zeigen wir zunächst die Hinrichtung. Sei

$$D := \{\frac{p}{2^k} \mid p, k \in \mathbb{N}, 0 \le p \le 2^k\}.$$

Definieren wir auf dieser Menge die Folge $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$ folgendermaßen:

$$\varphi = (\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots).$$

Wählen wir nun offene Mengen G_0, G_1 so, dass:

$$M \subset G_0 \subset \overline{G_0} \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset (X \setminus N).$$

Mithilfe vollständiger Induktion ordnen wir jeder weiteren Zahl $d \in D$ den Folgegliedern nach eine offene Menge G_d zu, sodass für $d < \tilde{d} : \overline{G_d} \subset G_{\tilde{d}}$.
So erreichen wir prinzipiell, die Größe von Zahlen $d \in D$ auf „die Größe von Mengen G_d“ zu übertragen.
Sei $b = \frac{2p+1}{2^n}$ Folgenglied von φ, so ist jedem $d \in D$ vor b bereits einer offenen Menge zugeordnet, sodass $\overline{G_d} \subset G_{\tilde{d}}$, falls $d, \tilde{d}$ vor b in der Folge stehen und $d < \tilde{d}$.
Nach voriger Definition von φ ist

$$\varphi = (..., \frac{p}{2^{n-1}} =: a, b, c := \frac{p+1}{2^{n-1}}, ...).$$

Sei $G_b \subset X$ nun offen, sodass:

$$\overline{G_a} \subset G_b \subset \overline{G_b} \subset G_c.$$

Für $\mu \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$G_\mu := \bigcup_{d \in D, d \leq \mu} G_d.$$

Dies stellt sich insofern als sinnvoll heraus, als dass G_μ sowohl stets offen ist, als Vereinigung offener Mengen, als auch $\overline{G_\mu} \subset G_{\tilde{\mu}}$ für $\mu < \tilde{\mu}$.
Bei genauerer Betrachtung liegt nahe, $f : X \to [0,1]$ folgendermaßen zu definieren:

$$f : X \to [0,1], x \mapsto \begin{cases} \inf\{\mu \in [0,1] \mid x \in G_\mu\}, & \text{falls } x \in G_1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt schon $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in X$ wegen der Definition der Zuordnungsvorschrift von f, was aufgrund der Eindeutigkeit des Infimums schon Wohldefiniertheit garantiert.

$$\text{Außerdem gilt: } f(M) = \{0\},$$
$$\text{sowie: } f(N) = \{1\}, \text{da } 1 \notin G_1$$

Bei einer solchen Definition unserer Funktion ist natürlich zweifelhaft, ob diese wirklich stetig ist. Dies wird sich jedoch als wahr herausstellen, indem wir wieder wie oben die topologische Definition der Stetigkeit ausnutzen, also:

$$f \text{ stetig auf } X \Leftrightarrow \text{Für alle } W \subset [0,1] \text{ offen, ist } f^{-1}(W) \text{ offen.}$$

Sei zunächst für alle $\mu < 0 : G_\mu := \emptyset$, sowie für alle $\mu > 1 : G_\mu := X$. Da $\emptyset$ und X offene Mengen sind, bleibt nur noch Stetigkeit von f für $\mu \in [0,1]$ zu zeigen.
Sei $\xi \in X$ und $0 < \delta < \varepsilon$. Dann gilt:

$$\xi \in W := G_{f(\xi)+\epsilon-\delta} \setminus \overline{G}_{f(\xi)-\varepsilon} \subset f^{-1}(]f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon[),$$

und W ist offen, und $]f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon[$ ist per definition offen, also ist f stetig in ξ.
Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass es zu $M, N \subset X$ abgeschlossen, disjunkt und nichtleer eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gibt, für die $f(M) = \{0\}, f(N) = \{1\}$ gilt. Dann ist – wegen Stetigkeit von f – (X, τ) schon normal.

□

3 Der Fortsetzungssatz von Tietze

Um den eigentlichen Beweis etwas übersichtlicher zu halten, beweisen wir zwei Lemmas.

3.1 Lemma

Sei (X, τ) normaler Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, $f : A \to [-1,1] \subset \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu f eine Funktionenfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n : X \to \mathbb{R}$ stetig für alle n, sodass

1. Für alle $x \in X : (\frac{2}{3})^n - 1 \leq g_n(x) \leq 1 - (\frac{2}{3})^n$,
2. Für alle $x \in A : |f(x) - g_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$,
3. Für alle $x \in X : |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n$ und

4. Für alle $x \in X$ und $m, n \geq p : |g_n(x) - g_m(x)| \leq (\frac{2}{3})^p$ für $m, p \in \mathbb{N}$ gelten.

Beweis: Wir definieren die Folge per vollständige Induktion über den Index $n \in \mathbb{N}$.
Anfang: $n = 0$: Setzen wir $g_0(x) := 0$ für $x \in X$, dann sind wegen $-1 \leq 0 \leq 1$ und $|f(x)| \leq 1$ die Bedingungen 1. und 2. erfüllt. Da 3. und 4. Aussagen über $n > 0$ treffen, fahren wir fort.
Schluss: Wir nehmen an, für $m \leq n$ erfüllen alle g_m die Bedingungen 1.–3. Dann seien:

$$B_{n+1} := \left\{ x \in A \middle| f(x) - g_n(x) \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \text{ und}$$

$$C_{n+1} := \left\{ x \in A \middle| f(x) - g_n(x) \leq -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}.$$

Mit dem Lemma von Urysohn existiert für n:

$$\phi_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \text{ stetig, mit:}$$

$$\phi_n(B_{n+1}) = \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \text{ und } \phi_n(C_{n+1}) = \left\{ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}.$$

Dann definieren wir $g_{n+1} := g_n - \phi_n$. Offensichtlich ist 3. erfüllt. Mit:

$$g_n - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1, \text{ aber } g_n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ist nun auch 1. erfüllt. Betrachtet man:

$$\big|f(x) - g_{n+1}(x)\big| = \big|f(x) - \big(g_n(x) - \phi_n(x)\big)\big| \leq \big|f(x) - g_n(x)\big| \overset{\text{IV}}{\leq} \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

so ist klar, dass 2. auch gilt.
Die so konstruierte Folge können wir nun wiefolgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\big|g_{n+k}(x) - g_n(x)\big| = \big|g_{n+k-1}(x) - \phi_{n+k-1}(x) - g_n(x)\big| = \\
&\big|g_n(x) - \phi_{n+k-1}(x) - \phi_{n+k-2}(x) - ... - \phi_n(x) - g_n(x)\big| \leq \big|g_n - \phi_n(x)\big| + \\
&\big|g_n(x) - \phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\big| + ... + \big|g_n(x) - \phi_n(x) - ... - \phi_{n+k}(x)\big| = \\
&\sum_{i=1}^{k} \big|g_{n+i}(x) - g_{n+i-1}(x)\big| \overset{(3.)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+i-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

Es folgt für $m, n \leq p \in \mathbb{N}$: $\big|g_n(x) - g_m(x)\big| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p$ und damit die Behauptung.

□

3.2 Lemma

Sei $A \subset X$ Teilmenge eines normalen Raumes (X, τ).
Eine stetige Funktion $\hat{f} : A \to (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ lässt sich stetig zu $F : X \to (-1, 1)$ fortsetzen.
Beweis: Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n : X \to \mathbb{R}$ die Funktionenfolge aus vergangenem Lemma. Dann liefert ihre Eigenschaft 4. gerade gleichmäßige Konvergenz, mit Grenzfunktion $\lim_{n\to\infty}(g_n(x)) := F(x)$. Die Stetigkeit von F folgt, da nach Analysis I gleichmäßige Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen die Stetigkeit der Grenzfunktion garantiert.
Sei $f : A \to [-1, 1]$ wie eben. Für $x \in A$ gilt wegen 2. im vorigen Lemma, dass:

$$\big|f(x) - F(x)\big| = \big|f(x) - \lim_{n\to\infty}(g_n(x))\big| = \lim_{n\to\infty}\big|f(x) - g_n(x)\big| = 0,$$

also $f = F \mid A$. Mit 1. aus dem vorangegangenen Lemma folgt für alle $x \in X : (-1) \leq F(x) \leq 1$. Damit ist gezeigt, dass sich eine stetige Funktion $f : A \to [-1,1]$ auf eine stetige Funktion $F : X \to [-1,1]$ fortsetzen lässt.
Sei nun $\hat{f} : A \to (-1,1)$ stetig, $F : X \to [-1,1]$ stetige Fortsetzung von $\hat{f}$ auf ganz X und $B := \{x \in X \mid |F(x)| = 1\}$. Dann ist B abgeschlossen und disjunkt zu A.
Dann existiert eine stetige Funktion $g : X \to [0,1]$ mit $g(A) = \{1\}$ und $g(B) \subseteq \{0\}$. Folglich ist $\hat{F} := F \cdot g$ stetig mit $F\big|_A = \hat{f}$ und $|\hat{F}(x)| < 1$ für alle $x \in X$. Und damit folgt die Behauptung.

□

3.3 Satz (Tietze)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann normal, wenn sich jede auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ definierte stetige Funktion auf ganz X stetig fortsetzen lässt.
Beweis: Lässt sich jede auf einer abgeschlossenen Menge A definierte Funktion f auf ganz X fortsetzen, dann gibt es zu disjunkten, abgeschlossenen Mengen $M, N \subset X$ eine stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit

$$f(M) = \{0\}, f(N) = \{1\}$$

Dann folgt, dass $f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$ und $f^{-1}(]\frac{1}{2}, \infty[)$ die Mengen M, N disjunkt umgeben. $\Rightarrow X$ ist normal.
Angenommen X ist normal. Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig.
Sei zudem $h : \mathbb{R} \to]-1,1[$ ein Homöomorphismus, wir wählen $h(x) := \frac{1}{1+|x|}$.
Mit Lemma 3.2 existiert eine stetige Fortsetzung $\hat{F} : X \to]-1,1[$ von $\hat{f} := h \circ f$.
Dann ist $F := h^{-1} \circ \hat{F}$ stetig und $F\big|M = h^{-1} \circ \hat{f} = f$.
Dann ist F stetige Fortsetzung von f, womit die Existenz gezeigt ist.

□

Literatur

[1] Bartsch, René: *Allgemeine Topologie I.* Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2007.

[2] von Querenburg, Boto: *Mengentheoretische Topologie*, 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, 2001.