# MỤC LỤC

# GIẢI TÍCH I

*Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng*
*và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật*

# Chương 4

# Tích phân

## 4.1 Tích phân bất định

### 4.1.1 Nguyên hàm và tích phân bất định

**Định nghĩa 4.1.1** *Cho hàm* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. *Ta nói* $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ *là nguyên hàm của* $f$ *trên khoảng* $(a,b)$ *nếu* $F(x)$ *khả vi trên* $(a,b)$ *và* $F'(x) = f(x)$ *với mọi* $x \in (a,b)$.

Ta sẽ chứng minh sau trong chương này: *mọi hàm liên tục trên* $(a,b)$ *đều tồn tại nguyên hàm trên đó.*

**Định lí 4.1.1** *Giả sử* $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ *là nguyên hàm của* $f$ *trên khoảng* $(a,b)$ *khi đó*

- $F(x) + C$ *với* $C$ *là hằng số tùy ý, cũng là nguyên hàm của* $f$ *trên* $(a,b)$.
- *Mọi nguyên hàm của* $f$ *trên* $(a,b)$ *đều có dạng* $F(x) + C$, *với* $C$ *là hằng số nào đó.*

*Chứng minh.* Giả sử $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ là nguyên hàm của $f$ trên khoảng $(a,b)$.
• $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a,b)$. Vậy $F(x) + C$ là nguyên hàm của $f$.
• Gọi $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ là nguyên hàm bất kì của $f$ trên $(a,b)$. Khi đó

$$((G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{với mọi} \quad x \in (a,b).$$

Theo định lí 3.3.1 trong chương trước, $(G(x) - F(x) \equiv C$ ($C$ là hằng số nào đó). Suy ra điều phải chứng minh

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in (a, b). \quad \blacksquare$$

**Định nghĩa 4.1.2** *Cho $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ là một nguyên hàm của $f$ trên khoảng $(a, b)$. Ta nói tích phân bất định của $f$ trên $(a, b)$ là một họ các hàm $F(x) + C$, với $C$ là hằng số tùy ý. Người ta kí hiệu tích phân*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

*và nói $f$ là hàm dưới dấu tích phân, $x$ là biến tích phân được viết một cách hình thức trong kí hiệu trên cùng với $dx$.*

Chú ý rằng do biểu thức vi phân $dF(x) = F'(x)dx$, tích phân trên còn được viết dưới dạng

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

**Ví dụ 4.1.1**

1. Một trong số các nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$, của $\operatorname{sh} x$ là $\operatorname{ch} x$ trên toàn bộ $\mathbb{R}$
$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \qquad \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$$

2. Do $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ với mọi $x$ khác 0, suy ra $\ln|x|$ chỉ là nguyên hàm của $\frac{1}{x}$ trên khoảng $(-\infty, 0)$ hoặc trên khoảng $(0, +\infty)$. *Không được coi $\ln|x|$ là nguyên hàm của $\frac{1}{x}$ trên $\mathbb{R}$ hoặc trên một khoảng nào đó chứa 0.* Khi viết
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,$$
ta ngầm hiểu chỉ xét tích phân bất định trên khoảng $(0, +\infty)$ hoặc khoảng $(-\infty, 0)$.

3. Dễ dàng nhận thấy hàm $|x|$ có một nguyên hàm trên $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
$$F(x) = \frac{x|x|}{2} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{nếu } \ x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{nếu } \ x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int |x|\, dx = \frac{x|x|}{2} + C.$$
(Ta phải chứng minh $F(x)$ khả vi tại $x = 0$ và $F'(0) = 0$).

4. Tương tự như ví dụ trên hàm $|\sin x|$ trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ có một nguyên hàm
$$G(x) = \begin{cases} \cos x & \text{nếu} \quad -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 2 - \cos x & \text{nếu} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
($G(x)$ khả vi tại $x = 0$ và $G'(0) = 0$). Toàn bộ nguyên hàm của $|\sin x|$ trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$$\int |\sin x| dx = G(x) + C.$$

Từ định nghĩa của nguyên hàm dễ dàng suy ra

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \quad \int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Tích phân một số hàm sơ cấp được suy ra ngay từ bảng đạo hàm (một vài kết quả được tính trong các ví dụ sau). Chúng ta tập hợp lại trong bảng dưới đây.

**BẢNG TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP**

| | |
|---|---|
| $\int a\,dx = ax + C$ | $\int e^x\,dx = e^x + C$ |
| $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ | $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ |
| $\int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x + C$ | $\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + C$ |
| $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ | $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ |
| $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ | $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}x + C$ |
| $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$ | $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$ |

**BẢNG TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP (tiếp theo)**

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$ | $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$ |
| $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$ | $\int \mathrm{tg}x\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\| + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\|x+\sqrt{x^2+m}\| + C$ |

## 4.1.2 Các phương pháp tính tích phân bất định

**Phương pháp đổi biến**

Các phương pháp đổi biến để tính tích phân bất định dựa trên các kết quả sau.

• Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(a,b)$ và giả thiết $u:(c,d)\to(a,b)$ là hàm khả vi trên $(c,d)$. Khi đó theo định lí đạo hàm hàm hợp

$$(F(u(t)))' = F'(u(t))\cdot u'(t) = f(u(t))\cdot u'(t) \quad \forall t\in(c,d)$$

Nói cách khác hàm hợp $F\circ u$ là nguyên hàm của $f(u(t))\cdot u'(t)$ trên $(c,d)$. Ta diễn đạt khẳng định đó dưới dạng tích phân bất định

$$\left(\int f(x)dx\right)_{x=u(t)} = \int f(u(t))\cdot u'(t)dt.$$

• Cho hàm $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Nếu $u:(c,d)\to(a,b)$ là song ánh khả vi và tồn tại tích phân bất định $\int f(u(t))\cdot u'(t)dt$ trên $(c,d)$. Khi đó

$$\int f(x)dx = \left(\int f(u(t))\cdot u'(t)dt\right)_{t=u^{-1}(x)}$$

*(Sự tồn tại hàm ngược $u^{-1}:(a,b)\to(c,d)$ được suy ra từ giả thiết: $x=u(t)$ là song ánh khả vi trên $(c,d)$.)*

Để chứng minh các khẳng định trên ta chỉ cần áp dụng các quy tắc đạo hàm hàm hợp, hàm ngược. Bây giờ ta xét các ví dụ ứng dụng chúng để tính tích phân bất định. Trong các ví dụ dưới đây, chúng ta quy ước không chỉ ra các khoảng mà tích phân chỉ được xét trong đó. Việc xác định chính xác các khoảng đó phụ thuộc vào mỗi hàm trong các ví dụ cụ thể. Bạn đọc tự xác định các khoảng lấy tích phân để hoàn thiện bài toán trong mỗi ví dụ.

**Ví dụ 4.1.2**

1. Tính $I=\displaystyle\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^x\,dx}{e^x(1+e^x)}=\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)d(e^x)$

   $\Rightarrow\quad I=x-\ln(1+e^x)+C.$

2. Tính $I=\displaystyle\int x(1-x)^{10}\,dx=\int(1-x)^{10}\,dx-\int(1-x)^{11}\,dx=$

   $$=-\int(1-x)^{10}\,d(1-x)+\int(1-x)^{11}\,d(1-x)=\frac{(1-x)^{12}}{12}-\frac{(1-x)^{11}}{11}+C.$$

3. Tính tích phân $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}.$

   Trên khoảng $(0,+\infty)$

   $$\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$$

   Trên khoảng $(-\infty,-1)$

   $$\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=-2\int\frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}}=-2\ln(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x})+C.$$

4. $$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x)^{10}} = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{10}} dx = \int \frac{dx}{(1-x)^8} +$$

$$-\int \frac{2dx}{(1-x)^9} + \int \frac{dx}{(1-x)^{10}} = \frac{-1}{7(1-x)^7} + \frac{2}{8(1-x)^8} - \frac{1}{9(1-x)^9} + C$$

5. Tính $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

Đổi biến $x = a\sin t$ (xét trong khoảng $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int \cos t \cdot \cos t\,dx = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})$$

Thay $t = \arcsin\frac{x}{a}$ vào kết quả vừa tính

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

6. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a > 0)$.

Đặt $x = a\mathrm{sh}\,t$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\mathrm{ch}\,t\,dt}{a\mathrm{ch}\,t} = t + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

Tương tự để tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a > 0)$, đặt $x = a\mathrm{ch}\,t$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

7. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1 + e^{-2x}}} = -\ln|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 1}| + C$$

8. Tính $I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$. Đặt $x = a\operatorname{sh} t \quad (\Rightarrow t = \operatorname{sh}^{-1}\frac{x}{a})$

$$I = \int \sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + a^2}\, a\operatorname{ch} t\, dt = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\int (\operatorname{ch}2t + 1)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}2t}{2} + t\right) = \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{sh} t\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} + t\right)\Big|_{t=\operatorname{sh}^{-1}\frac{x}{a}} =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

Tương tự

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

9. $$\int \frac{3x+1}{(x+1)^3}dx = \int \left(\frac{-2}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)}$$

10. Các công thức thường được sử dụng để tính tích phân

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \quad \text{và} \quad \int \frac{f'(x)dx}{f(x)^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)f(x)^{\alpha-1}} + C$$

**Phương pháp tích phân từng phần**

Phương pháp tích phân từng phần dựa trên công thức đạo hàm của tích hai hàm số

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{hay} \quad d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Suy ra

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

**Ví dụ 4.1.3**

1. $\displaystyle\int x\mathrm{arctg}x\,dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C$

2. Tính tích phân $I = \int e^x \sin x\,dx$

$$\int e^x \sin x\,dx = \int e^x d(-\cos x) = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần tiếp $\int e^x \cos x\,dx = \int e^x\,d\sin x$

$$I = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \;\Rightarrow\; I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

3. Tính $I = \int x\ln^3 x\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int \ln^3 x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln^3 x - \frac{3}{2}\int x\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^3 x +$$

$$-\frac{3}{4}\int \ln^2 x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln^3 x - \frac{3}{4}x^2\ln^2 x + \frac{3}{2}\int x\ln x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln^3 x - \frac{3}{4}x^2\ln^2 x + \frac{3}{4}x^2\ln x - \frac{3}{8}x^2 + C$$

4. Tính tích phân

$$I = \int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

5. Tích phân sau được tính bằng phương pháp tích phân từng phần sau đó đổi biến (đã tính ở phần các ví dụ về phương pháp đổi biến)

$$I = \int \sqrt{x^2+m}\,dx = x\sqrt{x^2+m} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}} = x\sqrt{x^2+m} +$$

$$-\int \frac{(x^2+m-m)dx}{\sqrt{x^2+m}} = x\sqrt{x^2+m} - \left(\int \sqrt{x^2+m}\,dx - m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}\right)$$

$$\Rightarrow\ 2I = x\sqrt{x^2+m} + m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+m} + \frac{m}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+m} + \frac{m}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+m}| + C. \end{aligned}$$

6. Tính tích phân $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.
Đặt $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n},\ dv = dx$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int \frac{2nx^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}$$

ta được công thức truy hồi

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right)$$

Dễ dàng tính được $I_1$ và sử dụng công thức truy hồi trên

$$I_1 = \frac{1}{a}\text{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\text{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

### 4.1.3 Tích phân hàm hữu tỉ

Hàm hữu tỉ là hàm viết được dưới dạng thương của hai đa thức

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Nếu đa thức $Q(x)$ được phân tích thành tích của các thừa số bất khả quy

$$Q(x) = a_0(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_m)^{k_m}(x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1} \cdots (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}$$

trong đó thừa số bất khả quy bậc hai có dạng

$$x^2 + p_i x + q_i = (x + p)^2 + q^2,$$

khi đó hàm hữu tỉ $f(x)$ phân tích thành tổng của một đa thức và các phân thức đơn giản

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_i \sum_{m=1}^{k_i} \frac{A_{i,m}}{(x - a_i)^m} + \sum_i \sum_{m=1}^{n_i} \frac{B_{i,m}x + C_{i,m}}{(x^2 + p_i x + q_i)^m}$$

Người ta sử dụng phương pháp hệ số bất định để phân tích một hàm hữu tỉ bất kì thành tổng của một đa thức và các phân thức đơn giản.

Xét ví dụ

$$f(x) = \frac{2x^7 + x^5 - 10x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 17x + 6}{x^5 - 4x^2 + 3x} =$$

$$\frac{2x^7 + x^5 - 10x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 17x + 6}{x(x-1)^2((x+1)^2 + 2)} =$$

$$= 2x^2 + 1 + \frac{-2x^4 + 14x + 6}{x(x-1)^2((x+1)^2 + 2)}$$

Phương pháp hệ số bất định biểu diễn phân thức dưới dạng

$$\frac{-2x^4 + 14x + 6}{x(x-1)^2((x+1)^2 + 2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2x + 3}$$

Quy đồng mẫu số vế phải và đồng nhất các tử số ở 2 vế với nhau, ta được hệ phương trình tuyến tính. Giải hệ phương trình tuyến tính đó ta được các nghiệm

$$A = 3, B = -4, C = 2, D = 1, E = 0$$

Bằng cách đó, hàm hữu tỉ $f(x)$ phân tích thành

$$f(x) = 2x^2 + 1 + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2+2x+3}.$$

Do vậy việc tính tích phân hàm hữu tỉ dẫn đến tính tích phân các phân thức đơn giản

$$\int f(x)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x + \int \frac{3dx}{(x-1)^2} - \int \frac{4dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x + 2\ln|x| - 4\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x + 2\ln|x| - 4\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

**Ví dụ 4.1.4**

1. Tính $\quad I = \displaystyle\int \frac{6-10x}{(x^2-1)(x-3)}\,dx$

   Gọi $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân

   $$f(x) = \frac{6-10x}{(x^2-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

   Bằng phương pháp hệ số bất định, suy ra $A = 1, B = 2, C = -3$

   $$I = \int \frac{6-10x}{(x^2-1)(x-3)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{x+1} - \int \frac{3dx}{x-3} =$$

   $$\int \frac{6-10x}{(x^2-1)(x-3)}\,dx = \ln|x-1| + 2\ln|x+1| - 3\ln|x-3| + C$$

2. Tích phân hàm hữu tỉ dưới đây không nên sử dụng phương pháp hệ số bất định, mà sử dụng đổi biến để tính toán gọn hơn

   $$\int \frac{xdx}{(x-1)^5} = \int \frac{(x-1+1)dx}{(x-1)^5} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^4} + \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^5}$$

   $$\int \frac{xdx}{(x-1)^5} = -\frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C.$$

### 4.1.4 Tích phân các hàm lượng giác

Để tính tích phân một lớp hàm lượng giác có dạng $R(\cos x, \sin x)$, trong đó $R(u,v)$ là hàm hữu tỉ, ta dùng phương pháp đổi biến $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Khi đó

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \ x = 2\operatorname{arctg} t,\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Tích phân $\int R(\cos x, \sin x)dx$ đưa về dạng tích phân một hàm hữu tỉ theo biến $t$

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

**Ví dụ 4.1.5**

1. Tính $I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$. Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

2. Tính $I = \int \frac{(1+\cos x)dx}{\sin x+\cos x}$.

$$I = \int \frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{4dt}{1+2t+2t^3-t^4} = \int \frac{(t-1)dt}{1+t^2} +$$

$$+\int \frac{(3-t)dt}{t^2-2t-1} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \operatorname{arctg} t - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\ln(\sqrt{2}-1+t) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ln(\sqrt{2}-1-t) + C, \quad \text{thay lại} \quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\ln(\sqrt{2}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ln(\sqrt{2}-1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C$$

Chú ý phép đổi biến $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ có thể dẫn đến tích phân hàm hữu tỉ phức tạp. Trong một số trường hợp sau tích phân $\int R(\cos x, \sin x)dx$ có thể được tính đơn giản hơn

- Nếu $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, đặt $t = \cos x$.
- Nếu $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, đặt $t = \sin x$.
- Nếu $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$, đặt $t = \operatorname{tg} x$

**Ví dụ 4.1.6**

1. Đổi biến $t = \sin x$

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2+t^4} dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}\right) dt$$

$$= t - \frac{2}{t} - 6\operatorname{arctg} t + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}(\sin x) + C$$

2. Tính tích phân $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. Đặt $t = \operatorname{tg} x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$$

3. Tích phân

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx, \quad \text{với } m, n \in Z$$

được tính tùy theo $m, n$ chẵn hay lẻ. Chẳng hạn

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$$

### 4.1.5 Tích phân một số hàm vô tỉ

• Để tính tích phân các hàm vô tỉ có dạng

$$R\bigg(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}}, \cdots\bigg)$$

trong đó $\mathbb{R}$ là hàm hữu tỉ, $p_i, q_i$ là các số nguyên, ta đặt

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

$k$ là bội số chung nhỏ nhất của các số $q_1, q_2, ...$

• Tích phân các hàm vô tỉ có dạng

$$R\big(x, \sqrt{1+x^2}\big) \quad \text{hoặc} \quad R\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)$$

có thể tính bằng một trong các phép đổi biến sao cho hàm dưới dấu tích phân không chứa căn thức

$$t = \operatorname{tg} x \quad \text{hoặc} \quad t = \sin x ...$$

**Ví dụ 4.1.7**

1. Tính tích phân

$$I = \int \frac{4-x}{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx =$$

$$= \int \bigg(\frac{4-2x}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} + \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\bigg) dx =$$

$$= \int \frac{d(-x^2+4x-3)}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} + \int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx =$$

$$= \sqrt{-x^2+4x-3} + \int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}} d(x-2)$$

Tích phân $\int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}} d(x-2)$ được tính bằng phép đổi biến

$$x - 2 = \sin t \quad \text{hay} \quad t = \operatorname{arsin}(x-2),$$

ta có
$$\int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}}d(x-2) = \int \frac{2\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = 2t.$$
Vậy
$$I = \sqrt{-x^2+4x-3} + 2\text{arcsin}(x-2) + C.$$

2. Tính
$$I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}dx$$
Đặt $t^2 = \frac{x+1}{x-2}$, khi đó
$$x = \frac{2t^2+1}{t^2-1} \Rightarrow dx = -\frac{6t\,dt}{(t^2-1)^2}$$
$$I = \int -\frac{6t^2\,dt}{(t^2-1)^2} = \frac{6t}{2(t^2-1)} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C$$
Thay
$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$
vào kết quả trên ta được tích phân cần tính.

## 4.2 Tích phân xác định

Trong mục này chúng ta sẽ xây dựng khái niệm và cách tính tích phân xác định hàm số thực. Tư tưởng của tích phân xác định được sử dụng vào nhiều lĩnh vực khác nhau. Cùng với phép tính vi phân, tích phân xác định là nền tảng của giải tích toán học và được ứng dụng rộng rãi trong các ngành khoa học, kĩ thuật khác.

### 4.2.1 Định nghĩa tích phân xác định

Khi xây dựng khái niệm tích phân xác định chúng ta cần một khái niệm gọi là phép chia đoạn $[a, b]$ hay còn gọi là phân hoạch đoạn $[a, b]$.

**Định nghĩa 4.2.1** *Cho đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Người ta gọi $F$ là phép chia đoạn $[a, b]$ nếu ta chia đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Kí hiệu $d(F)$ là độ dài lớn nhất trong số tất cả các đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ nói trên:*

$$F : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b, \quad d(F) = \max_{1 \le i \le n} \{x_i - x_{i-1}\},$$

*$d(F)$ được gọi là đường kính của phép chia $F$.*

*Gọi $F$ và $F'$ là hai phép chia đoạn $[a, b]$, ta nói $F$ mịn hơn $F'$ nếu tập hợp mọi điểm chia của $F$ chứa tập hợp các điểm chia của $F'$ (hay nói cách khác mọi điểm chia của $F'$ cũng là điểm chia của $F$).*

*Ví dụ* phép chia $F$ đoạn $[0, 5]$ bởi các điểm chia $0 < 1 < 2 < 4 < 5$ mịn hơn phép chia $F'$ đoạn $[0, 5]$ bởi các điểm chia $0 < 2 < 4 < 5$, nhưng phép chia $F$ không mịn hơn phép chia $F^* : 0 < 3 < 5$.

*Hợp của hai phép chia* $F$ và $F'$ là phép chia, kí hiệu $F \cup F'$ mà các điểm chia là tập hợp các điểm chia của cả $F$ và $F'$. Hiển nhiên phép chia $F \cup F'$ mịn hơn $F$ và cũng mịn hơn $F'$.

Cho đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$, hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ xác định trên $[a, b]$. Gọi $F$ là một phép chia đoạn $[a, b]$ $\quad F : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ là điểm tuỳ ý với $\forall\ 1 \le i \le n$. Khi đó

$$S(F) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

được gọi là *tổng tích phân* của hàm $f$ ứng với phép chia $F$ và các điểm chọn $\xi_i, i = 1, 2, ..., n$.

**Định nghĩa 4.2.2** *Ta nói hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả tích Riemann (hay đơn giản là khả tích) trên $[a, b]$, nếu tổng tích phân $S(F) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ có giới hạn $I \in \mathbb{R}$ khi $d(F) \to 0$, tức là: với $\forall\ \varepsilon > 0$ tuỳ ý $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi phép chia $F$ mà $d(F) < \delta$ và các điểm chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| \le \varepsilon \quad (\textit{viết là:} \quad \lim_{d(F) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = I).$$

*Khi đó ta nói $I$ là tích phân xác định của hàm $f$ trên [a, b] và được viết như sau:*

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad hay \qquad I = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

*$f$ được gọi là hàm khả tích trên $[a,b]$, $b$ và $a$ là các cận trên và cận dưới của tích phân, $x$ là biến tích phân và hiển nhiên tích phân $I$ không phụ thuộc vào việc kí hiệu biến tích phân là $t$ hay $x$.*

*Ví dụ* xét tích phân hàm hằng số $f(x) \equiv C$ trên $[a,b]$. Khi đó với mọi phép chia $F$ đoạn $[a,b]$ và các điểm chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý

$$S(F) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C\,dx = \lim S(F) = C(b-a).$$

**Định lí 4.2.1 (Điều kiện cần để hàm khả tích)** *Cho hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ khả tích trên $[a,b]$. Khi đó hàm bị chặn trên đoạn đó.*

*Chứng minh* Giả sử hàm không bị chặn trên $[a,b]$. Theo giả thiết hàm khả tích, suy ra $\exists I$, một phép chia $F : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ và các điểm chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý:

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| \leq 1 \tag{4.1}$$

Theo giả thiết phản chứng hàm không bị chặn trên $[a,b] \Rightarrow \exists$ một khoảng $[x_{k-1}, x_k]$ nào đó của phép chia $F$ mà $f$ không bị chặn trên trên đó. Từ (4.1) suy ra

$$|f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| \leq |\sum_{i=1, i\neq k}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + 1$$

Cho $\xi_k$ biến thiên trong đoạn $[x_{k-1}, x_k]$, còn cố định các biến khác, khi đó vế phải của bất đẳng thức trên là một số cố định, trong khi vế trái không bị chặn, vô lí do giả thiết phản chứng. Định lí được chứng minh. ■

Do định lí trên, trong mục này ta chỉ xét những hàm bị chặn.

## 4.2.2 Tổng Darboux

Hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ xác định và bị chặn trên $[a,b]$. Gọi $F$ là một phép chia đoạn $[a,b]: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Đặt

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$S_*(F) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S^*(F) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Khi đó $S_*(F)$ và $S^*(F)$ được gọi là tổng Darboux dưới và tổng Darboux trên ứng với phép chia $F$. Rõ ràng với mọi phép chia $F$ : $\quad S_*(F) \le S^*(F)$.

**Định lí 4.2.2** *Cho $F$ và $F'$ là hai phép chia đoạn $[a,b]$, $\quad F$ mịn hơn $F'$. Khi đó*

$$S_*(F') \le S_*(F) \le S^*(F) \le S^*(F').$$

*Chứng minh* Giả sử tập các điểm chia của $F$ nhiều hơn tập các điểm chia của $F'$ một phần tử:

$$F': \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b$$

$$F: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < c < x_k < ... < x_n = b$$

Khi đó hiển nhiên

$$S_*(F) - S_*(F') = m_k^{(1)}(x_k - c) + m_k^{(2)}(c - x_{k-1}) - m_k(x_k - x_{k-1})$$

trong đó

$$m_k^{(1)} = \inf_{x\in[c,x_k]} f(x), \quad m_k^{(2)} = \inf_{x\in[x_{k-1},c]} f(x).$$

Do

$$m_k^{(1)} = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \ge \inf_{x\in[c,x_k]} f(x) = m_k, \quad m_k^{(2)} = \inf_{x\in[x_{k-1},c]} f(x) \ge m_k$$

suy ra

$$S_*(F) - S_*(F') = m_k^{(1)}(x_k - c) + m_k^{(2)}(c - x_{k-1}) - m_k(x_k - x_{k-1}) \ge 0$$

hay $S_*(F') \le S_*(F)$. Lập luận tương tự với $\sup f$ trên các đoạn nhỏ $[x_{k-1}, c]$, $[c, x_k]$, ta được

$$S^*(F) \le S^*(F').$$

Hiển nhiên sử dụng kết quả này ta sẽ chứng minh được định lí trong trường hợp tập các điểm chia của $F$ nhiều hơn tập các điểm chia của $F'$ hữu hạn phần tử.■

**Hệ quả 4.2.1** *Cho $F_1$ và $F_2$ là hai phép chia tuỳ ý đoạn $[a,b]$, khi đó*

$$S_*(F_1) \le S^*(F_2).$$

Điều này suy ra từ định lí trên khi xét phép chia $F_1 \cup F_2$ mịn hơn $F_1$ và cũng mịn hơn $F_2$

$$S_*(F_1) \le S_*(F_1 \cup F_2) \le S^*(F_1 \cup F_2) \le S^*(F_2).$$

**Định nghĩa 4.2.3** *Người ta gọi*

$$I^* = \sup_F\{S_*(F) \mid \textit{với mọi phép chia } F \textit{ đoạn } [a,b]\}$$

$$I_* = \inf_F\{S^*(F) \mid \textit{với mọi phép chia } F \textit{ đoạn } [a,b]\}$$

*lần lượt là tích phân trên và tích phân dưới của hàm $f$ trên $[a,b]$. Kí hiệu các tích phân đó*

$$I^* = \int^* f(x)dx, \quad I_* = \int_* f(x)dx$$

Từ hệ quả trên ta luôn luôn có $I_* \le I^*$.

<u>*Ví dụ hàm Dirichlet*</u> Cho hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$$

Khi đó với mọi phép chia $F$:

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0, \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 1$$

$$S_*(F) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0, \quad S^*(F) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = 1\cdot(b-a) = b-a$$

Tích phân dưới, tích phân trên của hàm $f$

$$I_* = \int_* f(x)dx = 0, \quad I^* = \int^* f(x)dx = b-a$$

**Định lí 4.2.3** *Cho hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ xác định và bị chặn trên $[a,b]$. Điều kiện cần và đủ để tích phân dưới bằng tích phân trên $I_* = I^*$ là với mọi $\varepsilon > 0$ tuỳ ý tồn tại một phép chia $F$ đoạn $[a,b]$ sao cho*

$$0 \le S^*(F) - S_*(F) \le \varepsilon.$$

*Chứng minh điều kiện cần* Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý, từ định nghĩa của $I_*, I^*$ tồn tại các phép chia $F_1$ và $F_2$ sao cho:

$$I_* - S_*(F_1) \le \varepsilon/2, \quad I^* - S^*(F_2) \le \varepsilon/2$$

Xét $F = F_1 \cup F_2$, theo hệ quả trên $I_* - S_*(F) \le \varepsilon/2, \quad I^* - S^*(F) \le \varepsilon/2$. Vậy

$$0 \le S^*(F) - S_*(F) \le |I_* - S_*(F)| + |I^* - S^*(F_2)| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

*Điều kiện đủ* là hiển nhiên. ■

### 4.2.3 Điều kiện khả tích

**Định lí 4.2.4** *Hàm bị chặn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả tích trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $I_* = I^*$, đồng thời*

$$\int_a^b f(x)dx = I_* = I^*.$$

*Chứng minh điều kiện cần* Giả sử $f$ khả tích trên $[a, b]$, khi đó với mọi $\varepsilon > 0, \exists$ phép chia $F$ , số $I$ và các điểm chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho:

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| \leq \varepsilon/2$$

Do $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý suy ra

$$|\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) - I| \leq \varepsilon/2 \quad \text{và} \quad |\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - I| \leq \varepsilon/2$$

hay $|S_*(F) - I| \leq \varepsilon/2, |S^*(F) - I| \leq \varepsilon/2$. Mặt khác hiển nhiên

$$S_*(F) - S_*(F) = |S_*(F) - I + I - S_*(F)| \leq |S^*(F) - I| + |S_*(F) - I| \leq \varepsilon.$$

Theo định lí 4.2.3 ở trên, $I_* = I^*$.

*Điều kiện đủ.* Giả sử $I = I_* = I^*$, với mọi $\varepsilon > 0, \exists$ phép chia $F$ đoạn $[a, b]$

$$F: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

sao cho $S^*(F) - S_*(F) \leq \varepsilon/2$. Gọi $L$ là giá trị mà $|f(x)| \leq L$ với $\forall\ x \in [a, b]$. Đặt

$$\Delta = \min_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1}), \quad \delta = \min\{\Delta, \frac{\varepsilon}{4nL}\}$$

Giả sử $P$ là phép chia tuỳ ý đoạn $[a, b]$ : $a = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_m = b$ có đường kính $d(P) < \delta$. Khi đó

$$S^*(P) - S_*(P) = \sum_{i=1}^{m} (M_i^{(P)} - m_i^{(P)})(y_i - y_{i-1})$$

tách thành hai tổng: tổng thứ nhất chỉ cộng các số hạng $(M_i^{(P)} - m_i^{(P)})(y_i - y_{i-1})$ mà các đoạn nhỏ $[y_{i-1}, y_i]$ của $P$ không chứa một điểm chia $x_j$ nào của $F$ và tổng thứ hai gồm đúng $n$ số hạng còn lại. (Do $\delta = \min\{\Delta, \frac{\varepsilon}{4nL}\}$, nên mỗi đoạn nhỏ $[y_{i-1}, y_i]$ của $P$ chứa nhiều nhất một điểm chia $x_j$ nào của $F$). Ta ước lượng hai tổng đó:

$$S^*(P) - S_*(P) = \sum_{i=1}^{m} (M_i^{(P)} - m_i^{(P)})(y_i - y_{i-1}) \le$$

$$\le (S^*(F) - S_*(F)) + 2L \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{4nL} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Mặt khác một tổng tích phân bất kì của hàm $f$ tương ứng với phép chia $P$ luôn thoả mãn

$$|S(P) - I| \le S^*(P) - S_*(P).$$

Vậy với các phép chia đoạn $[a, b]$ có đường kính $d(P) < \delta$

$$|S(P) - I| \le S^*(P) - S_*(P) \le \varepsilon.$$

Điều này có nghĩa $f$ khả tích trên $[a, b]$. ∎

*Ví dụ hàm Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$ đã nói đến ở trên không khả tích trên $[a, b]$ (vì $0 = I_* < I^* = b - a$).

**Định lí 4.2.5** *Hàm liên tục $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ trên $[a, b]$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ đó.*

*Chứng minh.* Theo định lí **??**, hàm $f$ liên tục đều trên đoạn $[a, b]$, do đó với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Xét phép chia $F$ đoạn $[a, b]$ với đường kính $d(F) < \delta$

$$M_i - m_i \leq \varepsilon \Rightarrow S^*(F) - S_*(F) \leq \varepsilon(b - a) \quad \text{nhỏ tùy ý.}$$

Từ định lí 4.2.3 suy ra $f$ khả tích trên $[a, b]$ ■.

**Định lí 4.2.6** *Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bị chặn và gián đoạn tại hữu hạn điểm trên $[a, b]$, khi đó $f$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ đó.*

Định lí dễ dàng được chứng minh nếu $f$ chỉ gián đoạn tại một điểm và từ đó suy ra toàn bộ định lí trường hợp hàm gián đoạn tại hữu hạn điểm.

**Định lí 4.2.7** *Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bị chặn và đơn điệu, khi đó $f$ khả tích trên đoạn $[a, b]$.*

*Chứng minh.* Ta chứng minh định lí trong trường hợp $f$ đơn điệu tăng trên $[a, b]$. (Trường hợp $f$ đơn điệu giảm được chứng minh tương tự).
Đặt $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Chọn $\varepsilon > 0$ tùy ý, xét phép chia $F$ đoạn $[a, b]$ với đường kính $d(F) < \delta = \frac{\varepsilon}{M-m}$

$$S^*(F) - S_*(F) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\delta = (M - m) \cdot \delta = \varepsilon$$

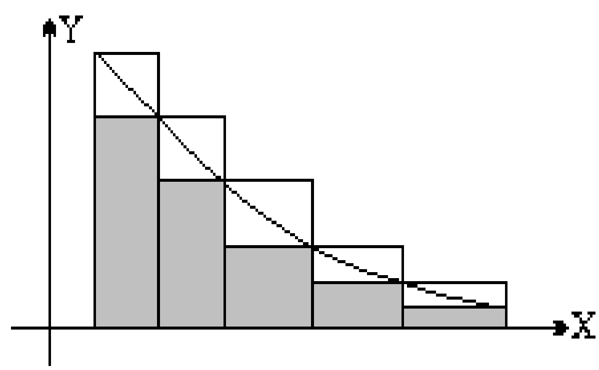
Từ định lí 4.2.3 và 4.2.4 suy ra $f$ khả tích trên $[a, b]$. ■

### 4.2.4 Ý nghĩa hình học và tính chất của tích phân xác định

Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm không âm khả tích trên $[a, b]$. Đồ thị của $f$ thường được biểu diễn như một đường cong trong $\mathbb{R}^2$. Phần mặt phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành $y = 0$ và các đường thẳng $x = a, x = b$, được gọi là *hình thang cong* ứng với hàm không âm $f$.

Do các tổng Darboux dưới $S_*(F)$ là tổng các diện tích của các hình chữ nhật nằm trong hình thang cong (phần tô đậm trên hình 4.1) và tổng Darboux trên $S^*(F)$ là tổng các diện tích của các hình chữ nhật chứa hình thang cong, đồng thời $f$ khả tích trên $[a, b]$ (hay $\sup\limits_F S_*(F) = \inf\limits_F S^*(F)$), suy ra hình thang cong có diện tích và diện tích hình thang cong, kí hiệu $S$, bằng giá trị tích phân hàm $f$ trên $[a, b]$

$$S = \sup_F S_*(F) = \inf_F S^*(F) = \int_a^b f(x)dx.$$




Hình 4.1: Tổng Darboux $S_*(F)$ và $S^*(F)$

Với $f$ là hàm khả tích có dấu bất kì trên $[a, b]$, phần miền phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành $y = 0$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ có diện tích và diện tích đó bằng $\int_a^b |f(x)|dx$.

**Tính chất của tích phân xác định**

1. Giả sử $f$ và $g$ là các hàm khả tích trên $[a, b]$.

   (a) Với mọi $\alpha \in R, \quad \alpha f$ cũng khả tích trên $[a, b]$ và

   $$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

   (b) $f + g$ cũng khả tích trên $[a, b]$ và

   $$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

   (c) Nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$, khi đó $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Đặc biệt nếu $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$

   $$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b - a).$$

   (d) Nếu $f(x) = g(x) \ \forall x \in [a, b]$ có thể trừ hữu hạn điểm trong $[a, b]$, khi đó

   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

2. $f$ khả tích trên $[a, b]$ và khả tích trên $[b, c]$, khi đó $f$ khả tích trên $[a, c]$

   $$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

   *Người ta quy ước $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$, do vậy đẳng thức trên đúng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, giả thiết rằng tích phân trên đoạn lớn nhất tồn tại.*

3. Nếu $f$ khả tích trên $[a, b]$, khi đó $|f|$ cũng khả tích trên $[a, b]$ và

   $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

   Ta chỉ cần chứng minh $|f|$ cũng khả tích trên $[a, b]$. *Trước hết ta nhận xét rằng đối với 1 hàm u bất kì xác định trên $[\alpha, \beta]$*

   $$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |u(x)| - \inf_{x \in [\alpha, \beta]} |u(x)| \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} u(x) - \inf_{x \in [\alpha, \beta]} u(x).$$

Với phép chia $F$ tùy ý đoạn $[a,b]:\quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Kí hiệu

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$m_i^* = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|,\quad M_i^* = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|$$

Theo nhận xét trên

$$M_i^* - m_i^* \le M_i - m_i \Rightarrow S^*(F;|f|) - S_*(F;|f|) \le S^*(F;f) - S_*(F;f).$$

Do định lí 4.2.3 suy ra nếu $f$ khả tích trên $[a,b]$ thì $|f|$ cũng khả tích trên $[a,b]$.

4. Tính chất sau còn được gọi là *định lí về giá trị trung bình của tích phân*

Giả sử $f$ liên tục trên $[a,b]$, khi đó tồn tại một điểm $\xi \in [a,b]$ sao cho

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Thật vậy kết quả được suy ra từ tính chất hàm liên tục và

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \text{hay } m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

**Định lí 4.2.8 (Đạo hàm theo cận trên)** *Cho hàm $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$. Kí hiệu $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, khi đó $F(x)$ liên tục trên $[a,b]$.*

*Ngoài ra nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in [a,b]$, khi đó $F(x)$ khả vi tại $x = x_0$ đồng thời $F'(x_0) = f(x_0)$*

*Chứng minh.* Theo giả thiết $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$, suy ra hàm $f(x)$ bị chặn

$$|f(x)| \le K, \quad \text{với mọi} \quad x \in [a,b]$$

$$|F(x+\Delta x) - F(x)| = |\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt| \le \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \le K\Delta x$$

Vậy $\lim(F(x+\Delta x) - F(x)) = 0$ khi $\Delta x \to 0$ với mọi $x \in [a,b]$.

Bây giờ giả thiết $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in [a,b]$. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại lân cận $U_\delta(x_0)$ sao khi $x \in U_\delta(x_0)$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Với $x$ như vậy

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} = \frac{\int\limits_{x_0}^{x} (f(x_0) + f(t) - f(x_0))\,dt}{x - x_0} =$$

$$= f(x_0) + \frac{\int\limits_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt}{x - x_0} \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \le \varepsilon$$

Hay $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, đ.p.c.m. ■ Từ định lí trên ta có hệ quả:

**Hệ quả 4.2.2** *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khi đó tồn tại nguyên hàm trên đó*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{với mọi} \quad x \in [a,b].$$

**Định lí 4.2.9 (Newton-Leibnitz)** *Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Giả thiết $\Phi(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$. Khi đó*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

*Người ta thường kí hiệu $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$.*

*Chứng minh* Gọi $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ với mọi $x \in [a,b]$. Từ định lí đạo hàm theo cận trên, $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$. Như vậy $\Phi(x)$ và $F(x)$ chỉ sai khác nhau một hằng số

$$\Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad ■$$

Định lí có thể mở rộng trong trường hợp $f(x)$ có hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a,b]$

**Định lí 4.2.10** *Cho hàm $f(x)$ bị chặn trên đoạn $[a,b]$, liên tục tại mọi điểm thuộc $[a,b]$ trừ hữu hạn điểm tại đó hàm có thể gián đoạn. Giả thiết rằng $\Phi(x)$ là hàm liên tục trên $[a,b]$, đồng thời cũng là nguyên hàm trên các khoảng liên tục của $f(x)$. Khi đó*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

*Chứng minh* Bằng quy nạp, ta chỉ cần chứng minh định lí trong trường hợp hàm có 1 điểm gián đoạn duy nhất $x = c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Áp dụng định lí Niutơn-Lepnit cho 2 tích phân thứ nhất và thứ ba ở vế phải, rồi chuyển qua giới hạn trong quá trình $\varepsilon \to 0+$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\Phi(c-\varepsilon) - \Phi(a)) + (\Phi(b) - \Phi(c-\varepsilon)) + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx =$$

$$= (\Phi(c) - \Phi(a)) + (\Phi(b) - \Phi(c)) + 0 = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \blacksquare$$

**Ví dụ 4.2.1**

1. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)dx}{(x+1)^3} - \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3} = \frac{-1}{(x+1)}\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}$$

2. Kí hiệu $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ là hàm dấu của $x$, $\Phi(x) = |x|$ là nguyên hàm của $\operatorname{sign}(x)$ trên các khoảng $(-1, 0)$ và $(0, 3)$ đồng thời liên tục trên đoạn $[-1, 3]$. Do đó

$$\int_{-1}^{3} \operatorname{sign}(x)\,dx = \Phi(3) - \Phi(-1) = 3 - 1 = 2.$$

3. Tính các tích phân xác định sau

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\,dx}{1 + \sin x} = \left(\frac{1}{4}\cos 2x + \sin x\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}} = \int_0^1 (\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x})dx = \frac{2}{9}(7-3\sqrt{3})$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{4}(1+\cos^2 2x+2\cos 2x)dx = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = 4.$$

4. $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx = \int\limits_0^{2\pi} |\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|dx$. Chia khoảng lấy tích phân thành các khoảng $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\int_0^{2\pi} \left|\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right| dx = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx = 4\sqrt{2}.$$

(Cũng có thể tính cách khác $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(x+\frac{\pi}{2})}dx = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}dx = \int\limits_0^{2\pi} |\sin\frac{x}{2}|dx$)

5. Để tính các tích phân sau người ta thường chia khoảng lấy tích phân thành các khoảng nhỏ

$$\int_0^2 |x^2-x|dx = 1, \quad \int_0^{\pi} |\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx = \frac{4}{3}, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 2x|\,dx = 1$$

6. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, với $ab \neq 0$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{a}{b}tgx\right)}{1+\left(\frac{a}{b}tgx\right)^2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{b}{a}cotgx\right)}{1+\left(\frac{b}{a}cotgx\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(arctg\frac{a}{b}+arctg\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2|ab|}.$$

7. Với $\alpha \in (0, \pi)$ hãy tính

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha} \int_{-1}^{1} \frac{d\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(arctg\left(tg\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

8. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

Xét tích phân

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

Do $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$, hàm khả tích trên đó. Lập tổng tích phân hàm $\sqrt{x}$, tương ứng với phép chia đoạn $[0, 1]$ thành $n$ đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia $\frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, ..., n$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

Vậy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$$

### 4.2.5 Các phương pháp tính tích phân xác định

Định lí Newton-Leibnitz đưa ra cách tính tích phân xác định thông qua việc tìm nguyên hàm (tích phân bất định). Tuy nhiên việc tìm nguyên hàm của một số lớn các hàm số sẽ gặp nhiều khó khăn. Tương tự như cách tính tích phân bất định, chúng ta sẽ nêu lên hai phương pháp dưới đây: phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân xác định một cách hiệu quả.

**Phương pháp đổi biến**

Để tính $\int_a^b f(x)dx$ trong đó $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục, ta đổi biến $x=\varphi(t)$ trong đó

- $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ khả vi liên tục trên $[\alpha,\beta]$.
- $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$

Khi đó
$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$
Thật vậy nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f$ trên $[a,b]$ thì $F(\varphi(t))$ là nguyên hàm của $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ trên $[\alpha,\beta]$. Theo định lí Newton-Leibnitz
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta}=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=$$
$$=\int_a^b f(x)dx.$$
*Nhận xét rằng công thức đổi biến nêu trên không đòi hỏi hàm $x=\varphi(t)$ đơn điệu trên $[\alpha,\beta]$, chỉ cần $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$.*

Chú ý rằng trong một số tài liệu người ta còn nhắc tới một phương pháp đổi biến khác $t=\varphi(x)$ để tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$. Giả thiết

- Hàm $t=\varphi(x)$ khả vi liên tục trên $[a,b]$.
- Biểu thức dưới dấu tích phân $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$, trong đó *hàm $g$ liên tục trên một khoảng chứa tập giá trị của hàm $\varphi(x)$*. Nói cách khác $g\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)=f(x)$ với mọi $x\in[a,b]$.

Khi đó
$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt.$$
Thật vậy gọi $G(t)$ là nguyên hàm của $g(t)$ trên một khoảng nào đó chứa miền giá trị của $\varphi(x)$. Khi đó $G\big(\varphi(x)\big)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$. Theo công thức Niutơn-Lepnit
$$\int_a^b f(x)dx=G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big)=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt.$$

Thực chất phương pháp đổi biến này không có gì khác với phương pháp đổi biến trước, tuy nhiên chỉ nói $f(x)dx = g(t)dt$ chưa đủ mà phải khẳng định $g(t)$ *có nguyên hàm trên một khoảng nào đó chứa miền giá trị của* $\varphi(x)$. Phép đổi biến $t = \varphi(x)$ *không bắt buộc hàm* $\varphi(x)$ *phải đơn điệu trên* $[a, b]$.

**Ví dụ 4.2.2**

1. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$. Đổi biến $x = \sin t$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Nhận xét rằng nếu phép đổi biến $x = \sin t$ nói trên được xét với $t$ thuộc khoảng rộng hơn, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ (hàm $x = \sin t$ không đơn điệu trên khoảng đó) ta vẫn có kết quả

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t\, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{2} \frac{2x}{x^2 - 9}\, dx$

Ta dễ dàng nhận thấy $F(x) = \ln(9 - x^2)$ là nguyên hàm của $\dfrac{2x}{x^2 - 9}$ trên khoảng $[-1, 2]$. Áp dụng định lí Niutơn-Lepnit ta được $I = \ln 5 - \ln 8$.

Ta cũng có thể tính tích phân $\int\limits_{-1}^{2} \frac{2x}{x^2 - 9}\, dx$ bằng phép đổi biến

$$t = \varphi(x) = x^2 - 9, \quad \text{giá trị tại các mút } \ \varphi(-1) = -8, \varphi(2) = -5.$$

Miền giá trị của hàm $\varphi(x), -1 \le x \le 2$ là khoảng $[-9, -5]$.

$$I = \int\limits_{-1}^{2} \frac{2x}{x^2 - 9}\, dx = \int\limits_{-1}^{2} \frac{d(x^2 - 9)}{x^2 - 9}\, dx = \int\limits_{-8}^{-5} \frac{dt}{t}$$

Hàm $g(t) = \dfrac{1}{t}$ có nguyên hàm $G(t) = \ln|t|$ trên khoảng $[-9, -5]$ (chứa miền giá trị của hàm $\varphi(x)\big)$. Vậy

$$I = \int\limits_{-8}^{-5} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{-8}^{-5} = \ln 5 - \ln 8.$$

Hàm $\varphi(x) = x^2 - 9$ trong phép đổi biến hiển nhiên không đơn điệu với $-1 \le x \le 2$.

Trong các ví dụ về sau, mặc dù không chỉ ra chi tiết hàm $g(t)$ có nguyên hàm trên một khoảng chứa miền giá trị của $\varphi(x)$, song trước tiên chúng ta luôn luôn phải kiểm tra điều kiện đó.

3. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn, khả tích trên $[-a, a]$, khi đó

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Thật vậy tích phân $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ được tách thành hai tích phân

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Đổi biến $x = -t$ để tính tích phân thứ nhất ở vế phải và sử dụng tính chất hàm chẵn $f(t) = f(-t)$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Tương tự nếu $f(x)$ là hàm lẻ, khả tích trên $[-a, a]$, khi đó

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Chẳng hạn do hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ

$$\int_{-1}^{1} \frac{x\cos x\,dx}{x^2+1} = 0$$

4. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $T$, liên tục trên $\mathbb{R}$, khi đó với mọi $a \in \mathbb{R}$
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$
Thật vậy
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$
Đổi biến $x = u + T$ để tính tích phân thứ hai ở vế phải và sử dụng tính chất tuần hoàn $f(u+T) = f(u)$
$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u+T)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$
Suy ra
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$
• Áp dụng kết quả trên vào tích phân
$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx +$$
$$+ \int_{2\pi}^{3\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx + \cdots = 100\int_0^{\pi} \sqrt{2}\sin x\,dx = 200\sqrt{2}.$$
• Tương tự
$$\int_0^{2\pi} \sin(3x + \sin 4x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x + \sin 4x)\,dx.$$
Hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ, vậy giá trị tích phân bằng 0.

5. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$
Đặt $x = \pi - t$
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

Suy ra

$$2\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx \Rightarrow \int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

Áp dụng để tính

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x\,dx}{\cos^2 x+1} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

**Phương pháp tích phân từng phần**

Giả sử $u, v : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, khi đó

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = \big(u(x)\cdot v(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx.$$

Công thức trên được gọi là công thức tính tích phân từng phần, ta thường viết gọn hơn dưới dạng

$$\int_a^b u\,dv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Thật vậy công thức tính tích phân từng phần được suy ra ngay từ hệ thức

$$\int_a^b \big(u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x)\big)dx = \int \big(u(x)\cdot v(x)\big)'\,dx = \big(u(x)\cdot v(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

**Ví dụ 4.2.3**

Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

1. $I = \int_1^e \ln x\,dx$. Đặt $u = \ln x, v = x$, ta có

$$I = \int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_{x=1}^{x=e} - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx = e-(e-1) = 1.$$

2. $I = \int_0^\pi e^t \cos t\, dt$. Đặt $u = e^t, v = \sin t$, ta có
$$I = e^t \sin t\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^t \sin t\, dt = \int_0^\pi e^t d\cos t.$$
Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tiếp bằng cách đặt $u = e^t, v = \cos t$, ta có
$$I = e^t \cos t\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos t\, dt = e^\pi - 1 - I \;\Rightarrow\; I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

3. $I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\, dx$. Trước hết ta đổi biến $x = e^t$
$$\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\, dx = \int_0^\pi e^t \cos t\, dt$$
Sử dụng kết quả của tích phân $\int_0^\pi e^t \cos t\, dt$ trong ví dụ trước
$$I = \int_0^\pi e^t \cos t\, dt = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x\, dx$. Xét tổng và hiệu của hai tích phân
$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = \frac{\pi^2}{8}$$
$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\, dx = \frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{-1}{2}$$
Vậy
$$I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}, \quad J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

5. Tính $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x\, dx$
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n-2} x \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n-2} x d\mathrm{tg}\, x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}.$$
Từ công thức truy hồi trên ta có thể tính được $I_n$.

6. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx \quad (n \geq 2)$. Chứng minh rằng $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
   Đặt $u = \sin^{n-1} x, v = -\cos x$, ta có

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_{n-1}.$$

   Suy ra $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ hay $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Từ công thức truy hồi và sử dụng các kết quả

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1,\ I_0 = \frac{\pi}{2}$$

   ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

   Chú ý rằng, bằng phép đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$ ta dễ dàng chứng minh được $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$. Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

   Công thức này được sử dụng nhiều trong các bài tập tính tích phân xác định.