

**Bài tập số 4. Đạo hàm và vi phân.***Vũ Thị Hương Giang***Bài 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1.  $f(x) = x \ln x - x; (x > 0)$

2.  $f(x) = \ln^2(1 + x^2)$

3.  $y = x^{\cos x}; x > 0$

4.  $f(x) = 2^{x^2}$

5.  $f(x) = e^{x^2}(\sin x + \cos x)$

6.  $f(x) = \sqrt{1 + \arcsin x}$

7.  $f(x) = \sqrt{1 + \sin 2x}$

8.  $f(x) = (\arcsin x)^2$

9.  $y = \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cos x}$

10.  $y = \frac{\arccos x}{1 - x^2}$

11.  $f(x) = \ln \sqrt{1 + x + x^2}$

12.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$

**Bài 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1.  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x < 1 \\ (1 - x)(2 - x) & , 1 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & , x > 2 \end{cases}$

2.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & , x > 1 \\ 2 + 2x & , x \leq 1 \end{cases}$

3.  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

4.  $f(x) = x|x|.$

5.  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}.$

6.  $f(x) = \begin{cases} (x - a)^2(x - b)^2 & ; x \in [a, b] \\ 0 & ; x \in [a, b] \end{cases}.$

**Bài 3.** Với điều kiện nào của hàm số:  $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}; n \in \mathbb{N}.$  Thì:1. Hàm số liên tục tại  $x=0$ .2. Hàm số khả vi tại  $x=0$ .3. Hàm số khả vi liên tục tại  $x=0$ .**Bài 4.** Xác định  $a, b$  để hàm số sau  $f(x) = \begin{cases} \sin x + a & ; x < 0 \\ bx & ; x \geq 0 \end{cases}$  khả vi tại  $x = 0$ .**Bài 5.** Chứng minh rằng hàm  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$  khả vi với  $\forall x \in \mathbb{R}$ , tuy nhiên  $f'(x)$  khôngliên tục tại  $x = 0$ .**Bài 6.** Tìm vi phân của các hàm số sau:

**Bài tập số 4. Đạo hàm và vi phân.***Vũ Thị Hương Giang*

1.  $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, a \neq 0$

2.  $y = \arcsin \frac{x}{a}; a \neq 0$

3.  $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|; a \neq 0$

4.  $y = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$

**Bài 7.** Sử dụng công thức  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$  để tính gần đúng:

1.  $\tan 46^\circ$

2.  $\arctan 1,02$

3.  $\sqrt{64,5}$

4.  $\log 11$

5.  $\sin 88^\circ$

6.  $\arcsin 0,49$

7.  $\sin 29^\circ$

8.  $\arctan 0,98$

9.  $\ln 1,01$

10.  $\sqrt{3,99}$

11.  $\sqrt{\frac{2,037^2 - 3}{2,037^2 + 5}}$

**Bài 8.** Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

1.  $y = \sin x$

2.  $y = \sin(ax + b)$

3.  $y = \cos x$

4.  $y = \cos(ax + b)$

5.  $y = e^x$

6.  $y = e^{ax+b}$

7.  $y = \frac{1}{ax+b}$

8.  $y = \ln|ax+b|$

9.  $y = \frac{3x}{x^2 - 3x + 2}$

10.  $y = \frac{4x-3}{x^2 + 4x - 12}$

11.  $y = (x^2 + x + 1)e^x$

12.  $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 2x$

13.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

14.  $f(x) = \sin^2 x$

15.  $f(x) = (x^2 + 4)e^{2x}$

16.  $f(x) = x^2 \sin 2x$

17.  $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

18.  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 4}$

19.  $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

20.  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

21.  $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

22.  $y = e^{ax} \sin(bx + c)$

23.  $y = \ln|x^2 + x - 2|$

24.  $y = \ln|x^2 + 5x + 6|$

25.  $y = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$

**Bài 9.**

1. Tính đạo hàm cấp 4 của hàm  $y = x^3 e^{4x+5}$

**Bài tập số 4. Đạo hàm và vi phân.***Vũ Thị Hương Giang*

2. Tính đạo hàm cấp 5 của  $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 5x - 14}$
3. Tính đạo hàm cấp 3 của  $f(x) = \cos 2x \cdot \cos 4x$

**Bài 10.** Tính đạo hàm cấp cao:

- a.  $y = \frac{x^2}{1-x}$ , tính  $y^{(8)}$       b.  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ , tính  $y^{(100)}$
- c.  $y = x^2 e^{2x}$ , tính  $y^{(10)}$       d.  $y = x^2 \sin x$ , tính  $y^{(50)}$

**Bài 11.** Tìm khai triển Mac Laurin của các hàm số sau:

1.  $f(x) = e^{x^2}$       2.  $f(x) = \frac{1}{3x-1}$       3.  $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

**Bài 12.** Viết khai triển Mac Laurin với phần dư dạng Peano cho các hàm sau:

1.  $f(x) = \tan x$  đến  $x^3$       2.  $f(x) = \sin(\sin x)$  đến  $x^5$ .

**Bài 13.** Viết đa thức sau dưới dạng lũy thừa của  $x-2$ 

1.  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 9$       2.  $f(x) = -2x^4 + 11x^3 - 18x^2 + 8x - 1$

**Bài 14.** Dùng quy tắc L'Hospital để tính:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$       2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln(1 - \cos x)}$       3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right)$       5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$       6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

**Bài 15.** Khai triển Taylor để tính các giới hạn sau:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}$       2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{1 - \cos x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$       4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{\tan x - \sin x}$

**Bài 16.** Trong các công thức sau, công thức nào đúng:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

**Bài 17.** Sử dụng công thức Taylor để tính đạo hàm cấp  $n$  tại  $x=0$  của các hàm số sau:

**Bài tập số 4. Đạo hàm và vi phân.***Vũ Thị Hương Giang*

1.  $y = x^3 \cdot e^x$

2.  $y = \arctan x$

3.  $y = \arcsin x$

**Bài 18.** Sử dụng công thức tính gần đúng:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Hãy tính  $\cos 0,05$  và  $\ln(1,5)$  và đánh giá sai số.**Bài 19.** Viết khai triển Mac Laurin của các hàm số sau đây:

a)  $y = e^x$

b)  $y = \sin x$

c)  $y = \cos x$

d)  $y = (1+x)^m$

e)  $y = \frac{1}{1 \pm x}$

f)  $y = \ln(1 \pm x)$

g)  $y = \frac{x^2 + 5}{x^2 + x - 12}$

h)  $y = \frac{1}{x^4 - 3x^2 - 4}$

i)  $y = \ln \frac{3+x}{2-x}$

k)  $y = \cos^3 x$

l)  $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$  theo  $(x-2)$

**Bài 20.**1. Khai triển  $P(x) = x^3 + x - 1$  theo lũy thừa nguyên dương của  $x-1$ .2. Khai triển đa thức  $P(x) = x^5 + x^3 - 3x^2 + 1$  theo lũy thừa nguyên dương của  $x-1$ .3. Khai triển Taylor đến cấp 2 tại điểm  $x = \frac{1}{2}$  với phần dư dạng peano của hàm số  $f(x) = \arcsin x$ .4. Khai triển Taylor đến cấp 5 tại điểm  $x=1$  với phần dư dạng peano của hàm số  $f(x) = (x-1)3\arccos(x-1)$ .5. Khai triển hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{x+7}$  theo lũy thừa của  $x-1$  đến bậc 3 với phần dư dạng peano.6. Khai triển Mac – Laurin đến cấp 4 của hàm số  $f(x) = \int_0^x \ln(1+t)dt$ .**Bài 21.**1. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = x^2 \sin 2x + 3$ .2. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ .

**Bài tập số 4. Đạo hàm và vi phân.****Vũ Thị Hương Giang**

3. Khai triển Taylor theo lũy thừa của  $x-1$  đến bậc ba của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
4. Khai triển Taylor theo lũy thừa của  $x-1$  đến bậc ba của hàm số  $f(x) = x^x - 1$ .
5. Khai triển Taylor theo lũy thừa của  $x-2$  đến bậc ba của hàm số  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ .
6. Khai triển Taylor theo lũy thừa của  $x-1$  đến bậc ba của hàm số  $f(x) = \ln(1-x+x^2)$ .
7. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ .
8. Khai triển Mac – Laurin đến lũy thừa bậc 3 của  $x$  của hàm số  $f(x) = e^{\sin x}$ .
9. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = e^{\tan x}$  đến bậc 5 của  $x$ .
10. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x-12}$ .
11. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = \cos^3 x$ .
12. Khai triển Taylor của hàm số  $f(x) = \ln\left(\frac{(x-1)^{x-2}}{3-x}\right)$  đến cấp 4 của  $x-2$  với phần dư dạng Peano.

**Bài 22.** Sử dụng khai triển Taylor để tính giới hạn:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 x}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1-x)} - \frac{1}{x} \right)$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot x - \frac{1}{x} \right)$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+5x-x-1}}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3 + 3x^4}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - x^2}{x^5 \sin x}$ .

**Bài 23\*.** Sử dụng khai triển Taylor để chứng minh bất đẳng thức:

5. Cho  $x > -1$ . Chứng minh rằng:

**Bài tập số 4. Đạo hàm và vi phân.***Vũ Thị Hương Giang*

a.  $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x, \alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

b.  $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x, \alpha \in (0, 1)$

6.  $\forall x \geq 0, \alpha > 2: (1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2.$

7.  $\frac{1}{x+1} > 1-x+x^2-x^3, \forall x > 0.$

8.  $\frac{1}{x+1} < 1-x+x^2-x^3+x^4, \forall x > 0.$

9.  $e^x \geq 1+x, \forall x \in \mathbb{R}.$

10.  $a^x \geq 1+x, \forall x \in \mathbb{R}^+, a \geq e.$

11.  $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0.$

12.  $e^x \leq 1+x+\frac{x^2}{2}, \forall x \leq 0$

**Bài 24.** Sử dụng khai triển Taylor để tính đạo hàm cấp cao tại điểm  $x_0$ .1. Tính đạo hàm cấp  $n$  của hàm số:  $y = x^3 e^x$  tại  $x = 0$ .2. Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$ . Tính  $f^{(7)}(0)$ .3. Cho hàm số  $f(x) = \sin(\sin x)$ . Tính  $f^{(3)}(0), f^{(4)}(0)$ .4. Tính đạo hàm cấp 3 tại  $x = 0$  của hàm số  $f(x) = e^x \sin x$ .5. Tính đạo hàm cấp 3 tại  $x = 0$  của hàm số  $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ .6. Tính đạo hàm cấp 12 tại  $x = 0$  của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2+x^3}$ .7. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = (x^3+1)e^{x^3}$  từ đó tính đạo hàm  $f^{(2019)}(0)$ .8. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = (x^2+1)\cos x$ , từ đó tính đạo hàm  $f^{(2020)}(0)$ .9. Khai triển Mac – Laurin của hàm số  $f(x) = \ln(1+x^2)$  từ đó tính  $f^{(2020)}(0)$ .**Bài 25.** Sử dụng khai triển Taylor để tính giá trị gần đúng:1: Khai triển Taylor hàm số  $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$  đến cấp 2 tại điểm  $x = 31$ , từ đó tính  $\sqrt[5]{33}$  và đánh giá sai số.2. Tính gần đúng  $\cos \frac{\pi}{18}$  chính xác đến 0,0001.

**Bài tập số 4. Đạo hàm và vi phân.***Vũ Thị Hương Giang*

2. Dùng công thức tính gần đúng  $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$  để tính gần đúng  $\ln(1,5)$  và đánh giá sai số.

4. Tính gần đúng:  $e^{0,1}$ .

**Bài 26.** Viết khai triển Mac Laurin đến số hạng chứa  $x^3$  của hàm số:  $f(x) = \arctan x$ .

Áp dụng tính gần đúng  $\arctan(0,1)$ .

Áp dụng tính:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$ .

**Bài 27.** Viết khai triển Mac laurin đến số hạng chứa  $x^3$  của hàm số:  $f(x) = \sqrt[3]{1+2x}$ .

Áp dụng tính gần đúng  $\sqrt[3]{1,02}$ .

**Bài 28.** Viết khai triển Taylor đến cấp 3 của hàm số:  $f(x) = \ln x$  xung quanh điểm  $x_0 = 1$ .

Áp dụng tính gần đúng  $\ln(1,1)$ .

**Bài 29.** Viết khai triển Mac Laurin đến cấp 3 của hàm số:  $f(x) = \sqrt{1-3x}$  xung quanh điểm  $x_0 = 1$ .

Áp dụng tính gần đúng  $\sqrt{0,7}$ .

**Bài 30.** Viết khai triển Taylor đến cấp 3 của hàm số:  $f(x) = \cos 2x$  xung quanh điểm  $x_0 = 0$ .

Áp dụng tính  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ .

**Bài 31.** Dùng định lý Lagrange để chứng minh:

1.  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

2.  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ .

3.  $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|, \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

4.  $\arcsin x < \frac{x}{1-x^2}, x \in (0,1)$ .

5.  $\arctan x < \frac{x}{1+x^2}, x > 0$ .

6. Chứng minh:  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}; a > b > 0$ .

.