

### Bài tập số 3.

**Bài 1.** Tính các giới hạn sau:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$$

$$\text{v)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$$

$$\text{vi)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$$

$$\text{vii)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1}$$

$$\text{viii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{-1+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\text{ix)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x-x^2}{x-2}$$

**Bài 2.** Tính các giới hạn sau:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x^2}$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{\arctg(x+2)}$$

$$\text{v)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$$

$$\text{vi)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$$

$$\text{vii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$\text{viii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$$

$$\text{ix)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$$

$$\text{x)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$$

$$\text{xi)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2\cos x}-1}$$

$$\text{xii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$$

**Bài 3.** Tính các giới hạn sau:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\cos x}} - \operatorname{tg} x\right)$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x} - \cot gx\right)$$

$$\text{v)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\text{vi)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1})$$

$$\text{vii)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+x})$$

$$\text{viii)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right)$$

**Bài 4.** Tính các giới hạn sau:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \frac{1}{\sin\left(3\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cot g 2x \cdot \cot g\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctg x$$

**Bài 5.** Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll}
1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x+2} \right)^x & 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+2} \right)^{2x} & 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-1} \right)^{3x} \\
4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-4} \right)^{6x-2} & 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^{3x-4} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(1+x) - \ln(x)] \\
8. \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}} & 9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} & 10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)^{3x-4} \\
11. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+\tan x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} & 12. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} & 13. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\tan^2 2x}
\end{array}$$

**Bài 6.** Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll}
1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin x (1-2x)}{4x^2-1} & 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{1 - \cos x} \\
4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\cos 2x - \cos x} & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 2x} - 1}{1 - \cos 3x} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 1 + \sin 4x}{\sin 3x - \sin 4x^2} \\
7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2-4x} - \cos 2x}{1 - \cos 3x} & 8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x-2} - 1}{\sin(x-1)} & 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \ln(1+2x)}{2x^2} \\
10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{2x^2} & 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos^2 x}{\sin^4 x} & 12. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)
\end{array}$$

**Bài 7.** Xét tính liên tục của hàm số:

$$\begin{array}{lll}
1. f(x) = \begin{cases} x \ln x^2 & \text{ khi } x \neq 0 \\ a & \text{ khi } x = 0 \end{cases} & 2. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}; & x > -1. \\ a & ; \quad x \leq -1. \end{cases} & 3. f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}; & x \neq 0. \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}
\end{array}$$

**Bài 8.** Tìm giá trị của a, b để hàm số sau liên tục:

$$\begin{array}{ll}
1. f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3 + 1}{2x^2 + x} & x \neq 0 \\ 5x + a & x = 0 \end{cases} & 2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases} \\
3. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 2a - 1; & x = 0 \end{cases} & 4. f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & x > 1 \end{cases}
\end{array}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x < 0 \\ a+x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \geq 0 \\ a \cos x + b \sin x & x < 0 \end{cases}$$

**Bài 9.** Xét tính liên tục tại  $x = 3$ .

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x^2 - x - 6} & \text{khi } x \neq 3 \\ \frac{10}{3} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x < 3 \\ (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$$

**Bài 10.** Xét tính liên tục tại điểm đã chỉ ra:

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - x - 2|}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 4 \end{cases} \text{ tại } x = 4$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}-1} + 2 & \text{khi } x > 1 \\ 3x^2 + x - 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại } x = 1$$

**Bài 11.** Xét tính liên tục tại  $x = 2$ .

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8} & \text{khi } x < 2 \\ ax^2 + x + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

**Bài 12.** Xét tính liên tục của các hàm số sau:

$$a) f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x, & x < 0 \\ 2a + x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$d) f(x) = x + \frac{2+x}{|2+x|}$$

$$e) f(x) = \frac{2|x-1|}{x^2 - x^3}.$$

**Bài 13.** Sử dụng nguyên lý kẹp để tính:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin x - 5 \cos 2x}{4x + 3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sin x - 5 \cos 2x - 3x^2}{4x^2 + 3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin x + 3x^2 \cos 3x - 3x^3}{2x^3 - 4x + 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \sin 3x + 3 \cos 4x}{e^{3x-4}}$$