Задача

Рассмотрим таблицу $\boldsymbol{G}$ размером $\boldsymbol{n}$ на $\boldsymbol{m}$ такую, что $\boldsymbol{G(i, j) = \text{НОД}(i, j)}$ для всех $\boldsymbol{1 \le i \le n}$ и $\boldsymbol{1 \le j \le m}$.

Вам дана последовательность натуральных чисел $\boldsymbol{A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}}$.

Будем говорить, что она встречается в $\boldsymbol{G}$, если она совпадает с подряд идущими элементами в некоторой строке начиная с некоторой позиции. Более формально, должны существовать такие числа $\boldsymbol{1 \le i \le n}$ и $\boldsymbol{1 \le j \le m - k + 1}$, что $\boldsymbol{G(i, j + t - 1) = a_t}$ для всех $\boldsymbol{1 \le t \le k}$.

Определите, встречается ли последовательность $\boldsymbol{A}$ в таблице $\boldsymbol{G}$.

Дополнительные условия

Входные данные

Три целых n, m и k $(1 \le n, m \le 10^{12}; 1 \le k \le 10^3)$, записанные через пробел, в первой строке. Во второй строке через пробел записаны k целых $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(1 \le a_i \le 10^{12})$.

Выходные данные

Выведите единственное **YES**, если данная последовательность встречается в G, и **NO** в противном случае.

Ограничения: 1 секунда, 256 мегабайт.

Разбор

Если A встречается в G, то она должна встречаться в строке $i = LCM(a[1], \ldots, a[k])$. Понятно, что теоретически она может встречаться только в строках, номера которых кратны i, так как номер строки должен делиться на каждое число из A.

Рассмотрим некоторую строку с номером $t = i * x$ $(x > 1)$. Строки i и t отличаются только в таких элементах j, что t и j делятся на некоторое простое число p^q, на которое не делится i (соответственно $G(t, j)$ делится на p^q). Но ни одно число из A на такое p^q делиться не может, потому что тогда бы и i делилось на p^q .

Соответственно, если A находится в строке t, то она не может содержать индекса j. Раз она может содержать только те индексы, где элементы в строках i и t совпадают, достаточно проверять лишь i -ую строку. Отсюда ясно, что если $i > n$, то ответ задачи **NO**.

Теперь про позицию в строке

Искомый правый j индекс должен удовлетворять систему линейных уравнений:

$j = 0 \bmod A[1]$

$j + 1 = 0 \bmod A[2]$

…

$j + h - 1 = 0 \bmod A[h + 1]$

…

$j + k - 1 = 0 \bmod A[k]$

Иными словами, $j + h$ должно делиться на $A[h + 1]$ для каждого $h = \{1, \ldots, k\}$, потому что правый индекс каждого числа из A должен делиться на само это число.

Понятно, что если $j + k > m$, то ответом будет **NO**.

Алгоритм

Рассмотрим как можно найти решение системы и проверить её решаемость, используя Китайскую теорему об остатках.

Для этого можно использовать метод, который для данных пар R_1, M_1 и R_2, M_2 находит минимальное число U такое, что $U = R_1 \bmod M_1$ и $U = R_2 \bmod M_2$, или определяет что его не существует. Пусть $U = R_1 + M_1 * x$, тогда мы имеем $R_1 + M_1 * x = R_2 \bmod M_2$.

Это можно представить в виде Диофантового уравнения $M_1 * x + M_2 * y = R_2 - R_1$, решение которого происходит с помощью расширенного алгоритма Евклида. Наименьший неотрицательный x, если таковой существует, даёт нам искомое $U = R_1 + M_1 * x$. Теперь этот метод можно использовать, чтобы найти минимальное решение U_0, удовлетворяющее первые два уравнения.

Теперь можно считать, что у нас новая система из $k - 1$ уравнений, которая отличается от прошлой тем, что у нее вместо двух первых уравнений новое $j = U_0 \bmod LCM(A[1], A[2])$, и повторить эту же процедуру снова. Используя этот метод $k - 1$ раз, мы получим итоговое решение для всей системы.

КТО и необходимое условие

Частное решение для всей системы уравнений $X_ч = X_{1ч} + \ldots + X_{kч}$. (в нашем случае это U_0)

Решение однородной системы $X_o = НОК(A[1], \ldots, A[k])$.

$X = X_ч + X_o$. Решение существует только тогда, когда все модули попарно взаимно просты.

Необходимое условие для решение Диофантового уравнения $M_1 * x + M_2 * y = R_2 - R_1$:

$R_2 - R_1 = 0 \bmod НОД(M_1, M_2)$. Это очевидно, ведь:

[$НОД(M_1, M_2) = d$], тогда $(M_1 / d) * x + (M_2 / d) * y = (R_2 - R_1) / d$. Правая часть должна быть целой. Если это условие не выполняется, то ответ **NO**.

Разбор

Вы уже догадались, что нужно использовать цикл.

Представим, что первое уравнение из системы это $j = U_0 \bmod LCM(A[1])$, тогда понятно, что $X_o = LCM(A[1]) = A[1]$ и $U_0 = 0$.

Тогда, если взять любое уравнение из системы, из них получится Диофантово уравнение: $X_o * x + A[h] * y = 1 - h - U_0$.

Новое частное решение, подходящее для взятых нами двух уравнений, получится из выражения:

$$U_0 = U_0 + \{ [x * (1 - h - U_0) / \text{НОД}(X_o, A[h])] \% [A[h] / \text{НОД}(X_o, A[h])] \} * X_o .$$

Новое однородное решение будет получаться из выражения

$X_o = X_o / \text{НОД}(X_o, A[h]) * A[h]$, так как $\text{НОД}(V, L) * \text{НОК}(V, L) = V * L$.

Ответ

В конце мы получим два числа $\boldsymbol{X_o}$ и $\boldsymbol{U_0}$, которые являются $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ индексами первого элемента в $\boldsymbol{A}$. Но $\boldsymbol{U_0}$ потенциально может быть равным $\mathbf{0}$, потому что остаток от деления может быть нулевым, а индексация в таблице начинается с $\mathbf{1}$. В таком случае к $\boldsymbol{U_0}$ нужно прибавить $\boldsymbol{X_o}$.

Осталось проверить совпадает ли $\boldsymbol{A}$ с той последовательностью в таблице. Если не совпадает, то ответ **NO**, иначе **YES**.