

# *База практических задач*

*Алгоритмы  
Евклида*

# ***Участники***

## ***Наш состав:***

- Афанасьев Андрей
- Арутюнян Владимир
- Кодуков Александр

Весь состав из группы № 9373.

## ***Наш руководитель:***

- Михайлов Фарид

# ***Нашей задачей было...***

- Организовать работу для всей команды и расставить приоритеты.
- Распределить нагрузку между всеми участниками команды.
- Подобрать несколько обязательно смежных с темой заданий, чтобы ввести студента в олимпиадное программирование.
- Найти, отобрать, решить и разобрать основной костяк задач по теме "Алгоритм Евклида".
- Классифицировать весь подготовленный материал по сложности и собрать все в единую базу практических задач для студентов по теме "Алгоритм Евклида".
- Отобрать несколько задач для конкурса и принять в нем участие.
- Подготовить удобную статистику для рецензирования и самим прорецензировать других.
- Подготовить данную презентацию.

# Организация

- Основными средствами связи стали **VK** и **Discord**.
- Был создан репозиторий на **GitHub** для удобного взаимодействия с файлами между членами команды.
- Разборы создавались в **MS PowerPoint**, придерживаясь одного стиля.
- Задачи брались в основном с платформы **codeforces.com**, редко из других источников.
- Задачи были разделены на два уровня сложности: **A** и **B**.
- Внутри каждого уровня задачи пронумерованы по возрастанию сложности.
- К задаче прилагается решение (код), разбор этого решения и комментарий от человека, который разбирал.
- Создана сводная таблица о проделанной работе в **Google Docs**.

# Алгоритм Евклида

Алгоритм предоставляет удобный и понятный способ вычисления **НОД** от двух чисел. На различных **ЯП** существует большое множество способов его реализации. Если рассматривать только **С/С++**, то здесь уже больше **5** вариаций.

**Мы выделяем 3 основных:**

- Классический
- Классический укороченный
- Бинарный

Также обязательно нужно отметить **Расширенный алгоритм**, который выполняет дополнительную и важную функцию: поиск частного решения **Диофантового уравнения**.

| Бинарный | Упрощенный | Классический |
|----------|------------|--------------|
| 337      | 333        | 337          |
| 344      | 314        | 317          |
| 336      | 316        | 305          |
| 336      | 314        | 311          |
| 335      | 339        | 304          |

## Сравнение

Это время, за которое алгоритм справляется с  $10^6$  пар чисел, где сами числа от 0 до  $10^7$ .

Результаты представлены в миллисекундах.

# ***Возникшие трудности***

## **Трудности:**

- Небольшое недопонимание между участниками до момента основательного изменения подхода к работе и ее организации.
- Хороших и интересных задач на алгоритмы Евклида оказалось не так уж и много на **codeforces.com**. Также попадались отнотипные задачи, отличающиеся лишь оберткой.

## **Их решения:**

- Организационное совещание.
- Использование других источников, в том числе и сочинение своих задач.

# ***Уровень А***

- Задачи на ознакомление с природой олимпиадного программирования.
- Задачи на теорию чисел и свойства **НОД**.
- Сложность колеблется от легкого уровня до среднего.



## *Пример задачи уровня А*

Манао имеет экран с отношением ширины на высоту  $A : B$ . Он собирается посмотреть фильм, картинка которого имеет соотношение  $C : D$ . Манао настроит просмотр так, чтобы фильм сохранил оригинальное соотношение сторон, но при этом занимал максимальное пространство на экране и умещался на нем полностью.

Вычислите, какая часть дисплея останется незанятой во время просмотра. Выведите ответ в виде несократимой дроби, **НОД** числителя и знаменателя которой равен **1**.

# ***Некоторые условия***

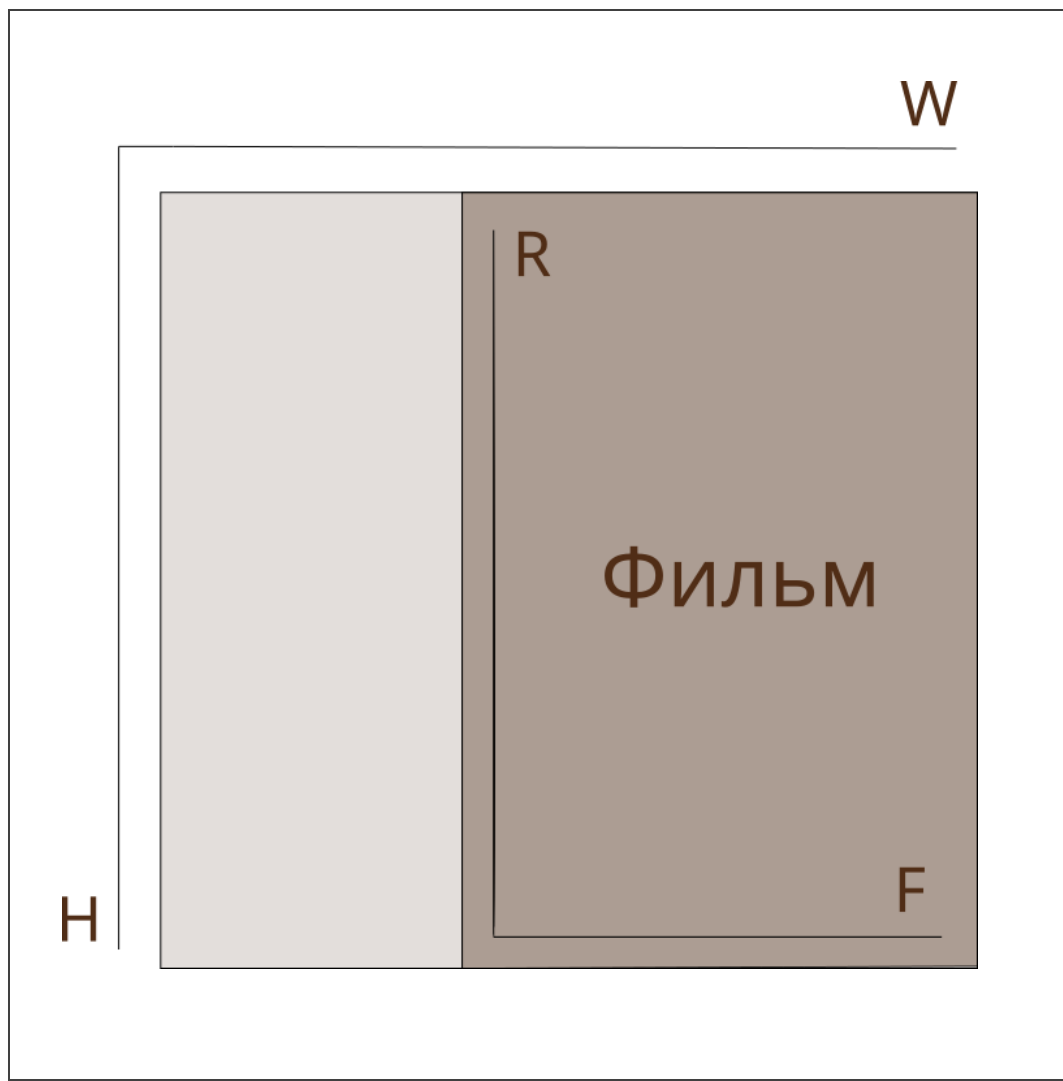
## **Входные данные:**

Четыре целых числа  $A, B, C, D$  ( $1 \leq A, B, C, D \leq 1000$ ), записанных через пробел.

## **Выходные данные:**

Выведите ответ в виде несократимой дроби  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  — целое неотрицательное число,  $q$  — целое положительное число.

**Ограничения:** 1 секунда, 256 мегабайт.



## ***Разбор***

Пусть **W** и **H** будут шириной и высотой экрана, а **F** и **R** - шириной и высотой фильма.

Это значит, что

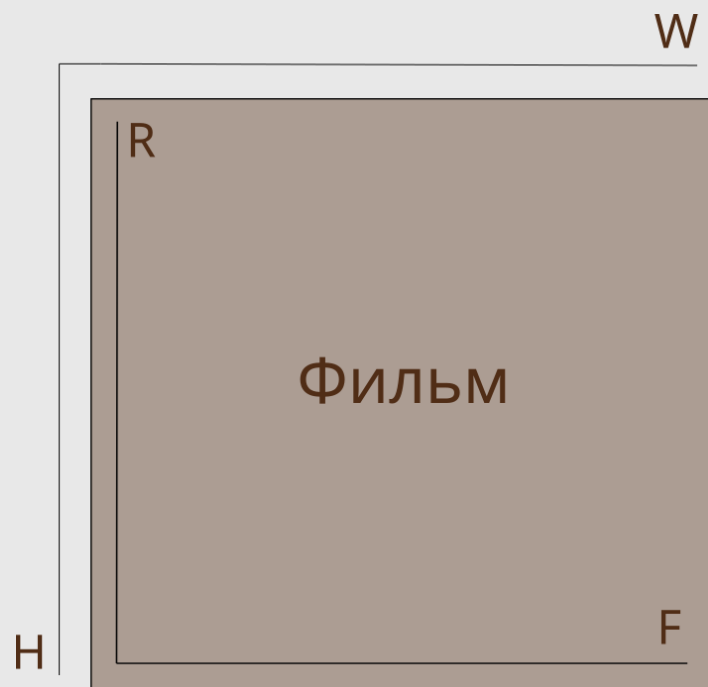
$$\mathbf{W : H = A : B,}$$

$$\mathbf{F : R = C : D.}$$

Из этого нетрудно получить выражения:

$$\mathbf{W = \frac{HA}{B}, \quad F = \frac{RC}{D}.}$$

# Случай первый

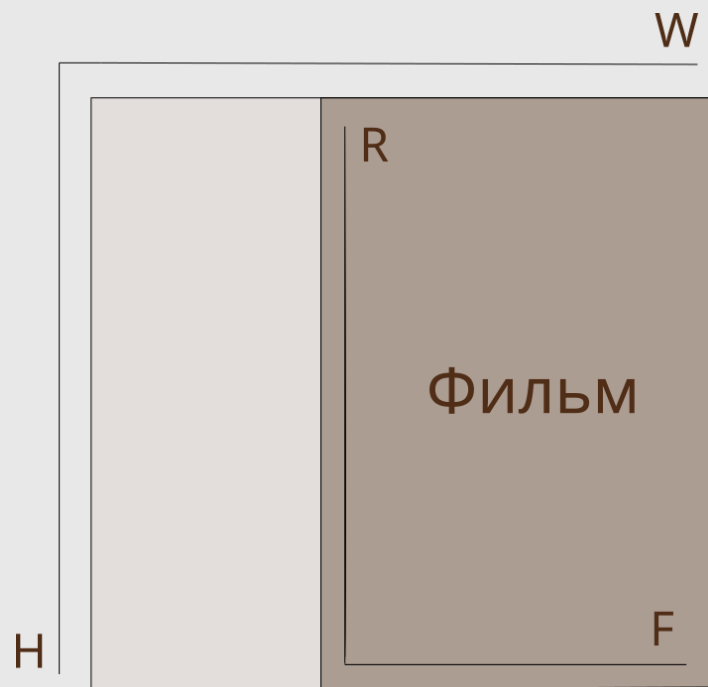


- $A : B = C : D$

Очевидно, что фильм может полностью уместиться на дисплее и занять его полностью.

Так как ответом требуется несократимая дробь вида  $p/q$ , нам подойдет  $0/1$ .

# Второй



◦  $A : B > C : D$

Понятно, что ширина дисплея в такой ситуации больше ширины фильма, хоть как-то уместенного на этом дисплее.

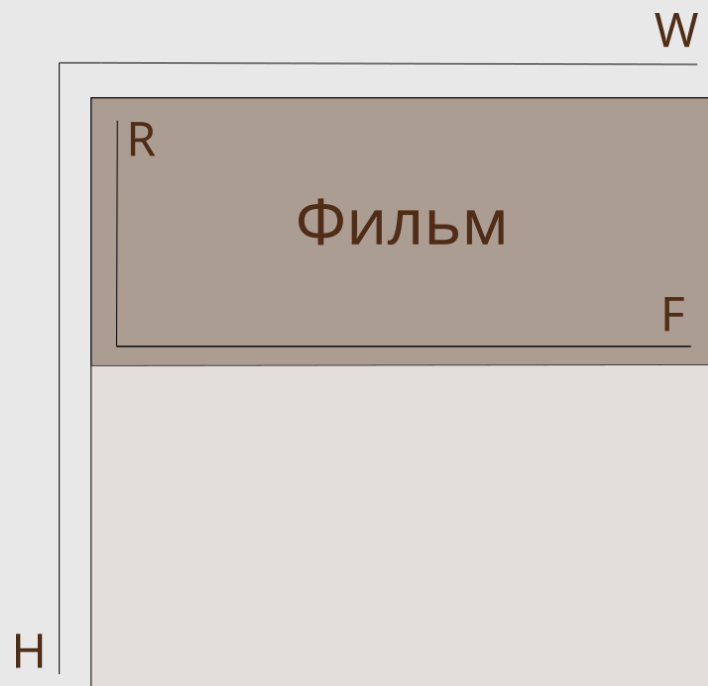
Чтобы занять им как можно больше места на экране, нужно расширить его до высоты самого экрана ( $R = H$ ).

Теперь свободную часть можно вычислить с помощью выражения:

$$\frac{W - F}{W} = \frac{\frac{HA}{B} - \frac{HC}{D}}{\frac{HA}{B}} = \frac{AD - CB}{AD} = p' / q',$$

где  $p' / q'$  — это потенциально сократимая дробь.

# Последний



◦  $A : B < C : D$

Видно, что ситуация обратная предыдущей: умещенное видео теперь меньше экрана по высоте.

Займем всю ширину экрана ( $F = W$ ).

Свободное пространство теперь можно найти с помощью выражения:

$$\frac{H - R}{H} = \frac{\frac{WB}{A} - \frac{WD}{C}}{\frac{WB}{A}} = \frac{BC - AD}{CB} = p' / q'$$

где  $p' / q'$  — это потенциально сократимая дробь.

# ***Приведение к ответу***

Мы получили дробь  $p'/q'$ , но мы знаем, что она может быть сократимой.

Найдем **НОД** числителя и знаменателя, чтобы на него сократить обе части.

Дробь после этого станет несократимой, ведь общих делителей у частей не осталось.

Для этого воспользуемся алгоритмом Евклида.

**Комментарий:** первая задача, в которой студенту выпадет возможность воспользоваться алгоритмом Евклида на практике. Является базовой задачей на этот алгоритм.

## ***Уровень В***

- Задачи более высоко уровня сложности.
- Требуется лучшего понимания материала курса.
- Алгоритм Евклида зачастую не самая сложная часть задач.



## **Пример задачи уровня В**

Алиса и Боб нашли мешок с апельсинами и яблоками. Алиса взяла себе апельсин, а Боб — яблоко. Чтобы процесс разделения оставшихся фруктов был интереснее, ребята решили поиграть в игру. Они выложили в ряд карточки и на каждой записали букву **A** или **B**.

Они стали убирать карточки по одной слева направо. Когда убиралась карточка с **A**, Алиса отдавала Бобу все свои фрукты и брала из мешка такой же набор фруктов. Таким образом количество апельсинов и яблок, имеющих у Алисы, не менялось. Если же на карточка была с **B**, то Боб поступал аналогично.

После того, как была убрана последняя карточка, все фрукты в мешке закончились.

Известно, сколько сначала в мешке апельсинов и яблок. Требуется найти любую последовательность карточек, которыми могли играть Алиса и Боб.

# Дополнительно

## Входные данные

Записанные через пробел целые  $X, Y$  ( $1 \leq X, Y \leq 10^{18}, X * Y > 1$ ) — изначальное количество апельсинов и яблок в мешке.

## Выходные данные

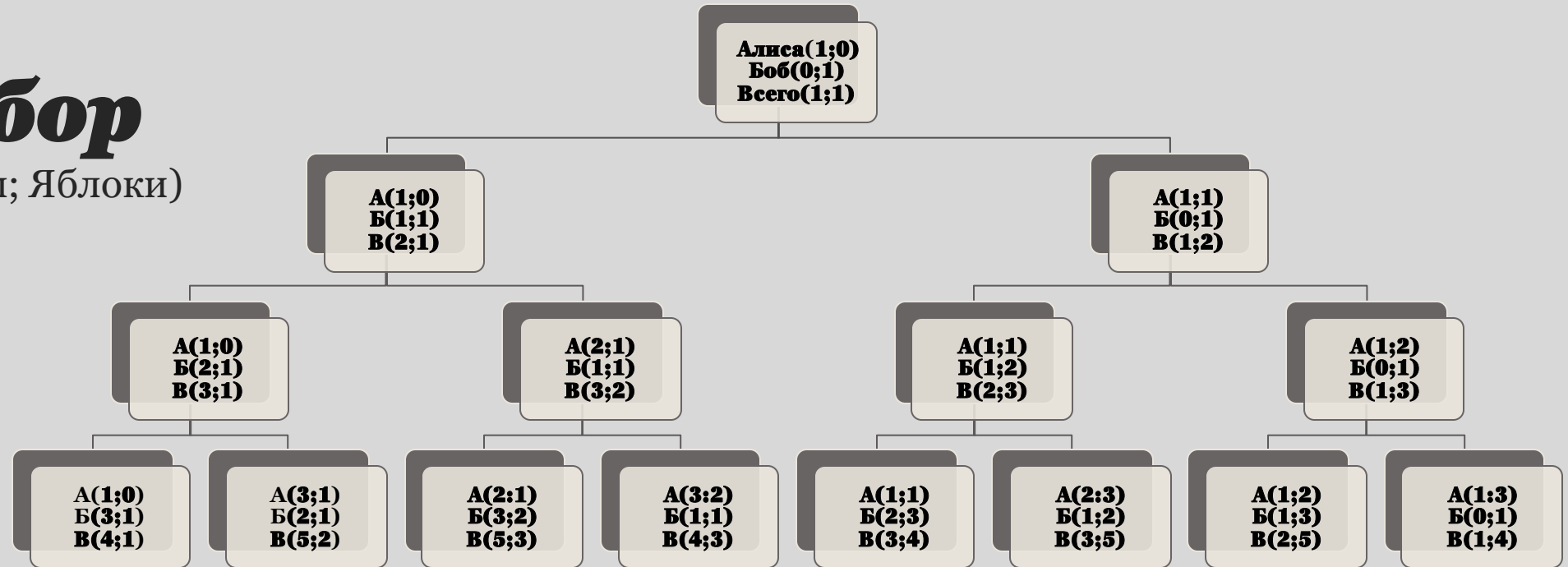
Последовательность карточек в виде строки из символов **A** и **B**, но нужно сжать строку, заменив отрезки одинаковых символов на количество повторений этого символа и его самого. Например, **ААВААВВ** нужно заменить на **2A1B2A3B**. Строка должна не превышать  $10^6$  символов.

Если ответ существует, то существует и его сжатое представление, не превышающее  $10^6$  символов. Если ответов несколько, выведите любой из них. Если не существует ответа, выведите **Impossible**.

**Ограничения:** 1 секунда, 256 мегабайт.

# Разбор

(Апельсины; Яблоки)



В дереве описаны все возможные развития событий до 4-го хода. Если спускаться влево, то это поднятие карточки с **А**, аналогично с **В** вправо. Нас интересует количество **Всего** фруктов после каждого хода.

Видно, что с каждым спуском происходит обратный шаг алгоритма Евклида. Верхний листок дерева имеет **НОД** = 1, это значит, что и все листья имеют такой же **НОД**. Это следует из свойства:  $\text{НОД}(u, v) = \text{НОД}(u - v, v)$  при  $v \leq u$ .

# Алгоритм

Так как все листья имеют  $\text{НОД} = 1$ , то в мешке не могут лежать столько апельсинов и яблок, что их  $\text{НОД}$  был бы не равен  $1$ . В противном случае мы выводим **Impossible**.

Так как каждый спуск в дереве - это ход в игре, то количество ходов будет равно количеству шагов алгоритма Евклида, пока количества апельсинов и яблок не станут равными  $1$ .

Если в алгоритме вычитается из левого числа правое, то это Алиса передает свои фрукты. Если из правого левое, — Боб.

То есть сначала нам нужна будет проверка на  $\text{НОД} = 1$  с помощью обычного алгоритма Евклида, а потом запустится наша его модификация, которая будет считать подряд идущие вычитания.

# ***Подводный камень***

Вы знаете, что алгоритм Евклида, использующий только вычитание, медленнее такого же, но использующего деление.

Выбрав медленный, мы не уложимся во время, но, выбрав более быстрый, мы столкнемся с одной проблемой: наши числа могут поделиться нацело, тогда одно из них станет равным нулю, а мы возвращаемся к ситуации, когда у каждого по одному фрукту.

Это может возникнуть только тогда, когда делитель был равен **1** (потому что числа внутри пары взаимно простые). В таком случае мы будем отнимать **1** от результата деления (результат деления — это кол-во повторений символа подряд).

**Комментарий:** Специфика задачи требует глубокого анализа вариантов ее развития. Используется алгоритм Евклида. Поможет студенту лучше анализировать все возможные варианты развития событий, потому что требует умение составлять бинарное дерево.

# ***Итог по задачам***

По итогу мы подготовили базу задач, затрагивающую не только **НОД, Алгоритмы Евклида и Диофантовы уравнения**, но и **простые числа, бинарные деревья, НОК, числа Фибоначчи, китайскую теорему об остатках** и даже немного **физики**.

**Приоритетом** для нас было качество разборов задач, интересность задач и их полезность.

Всего в базе было полностью разобрано **17** задач из **18** отобранных.

## **Источники:**

- **4** придумано нами
- **2** взято с **acmp.ru**
- **12** взято с **codeforces.com**

# ***Итог по участникам***

## **Афанасьев Андрей:**

- Разобрал **7** задач, решил **12** из базы и **5** из конкурса
- Нашел или придумал **4** задачи
- Подготовил презентацию

## **Аругюнян Владимир:**

- Разобрал **6** задач, решил **12** из базы, и **6** из конкурса
- Нашел или придумал **5** задач

## **Кодуков Александр:**

- Разобрал **4** задачи, решил **14** из базы и **6** из конкурса
- Нашел или придумал **9** задач

На **контесте** нашей командой было решено **12** разных задач.



# ***КОНЕЦ***

Спасибо всем тем, кто написал на нас рецензии.

Нас очень обрадовало то, что они оказались положительными.

Выявленные вами явные проблемы были устранены, а те ваши пожелания, которые показались нам нужными, реализованы.

Еще раз спасибо.