

Задача

Рассмотрим таблицу G размером n на m такую, что $G(i, j) = \text{НОД}(i, j)$ для всех $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$.

Вам дана последовательность натуральных чисел $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Будем говорить, что она встречается в G , если она совпадает с подряд идущими элементами в некоторой строке начиная с некоторой позиции. Более формально, должны существовать такие числа $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m - k + 1$, что $G(i, j + t - 1) = a_t$ для всех $1 \leq t \leq k$.

Определите, встречается ли последовательность A в таблице G .

Дополнительные условия

Входные данные

Три целых n , m и k ($1 \leq n, m \leq 10^{12}$; $1 \leq k \leq 10^3$), записанные через пробел, в первой строке. Во второй строке через пробел записаны k целых a_1, a_2, \dots, a_k ($1 \leq a_i \leq 10^{12}$).

Выходные данные

Выведите единственное **YES**, если данная последовательность встречается в G , и **NO** в противном случае.

Ограничения: 1 секунда, 256 мегабайт.

Так выглядит таблица 7 на 10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1

Разбор

Если A встречается в G , то она должна встречаться в строке $i = \text{LCM}(A[1], \dots, A[k])$. Понятно, что теоретически она может встречаться только в строках, номера которых кратны i , так как номер строки должен делиться на каждое число из A .

Рассмотрим некоторую строку с номером $t = i * x$ ($x > 1$). Строки i и t отличаются только в таких элементах j , что t и j делятся на некоторое простое число p^q , на которое не делится i (соответственно $G(t, j)$ делится на p^q). Но ни одно число из A на такое p^q делиться не может, потому что тогда бы и i делилось на p^q .

Соответственно, если A находится в строке t , то она не может содержать индекса j . Раз она может содержать только те индексы, где элементы в строках i и t совпадают, достаточно проверять лишь i -ую строку. Отсюда ясно, что если $i > n$, то ответ задачи **NO**.

Теперь про позицию в строке

Искомый правый j индекс должен удовлетворять систему линейных уравнений:

$$j = 0 \bmod A[1]$$

$$j + 1 = 0 \bmod A[2]$$

...

$$j + h - 1 = 0 \bmod A[h + 1]$$

...

$$j + k - 1 = 0 \bmod A[k]$$

Иными словами, $j + h$ должно делиться на $A[h + 1]$ для каждого $h = \{1, \dots, k\}$, потому что правый индекс каждого числа из A должен делиться на само это число.

Понятно, что если $j + k > m$, то ответом будет **NO**.

Алгоритм

Рассмотрим как можно найти решение системы и проверить её решаемость, используя Китайскую теорему об остатках.

Для этого можно использовать метод, который для данных пар R_1, M_1 и R_2, M_2 находит минимальное число U такое, что $U = R_1 \bmod M_1$ и $U = R_2 \bmod M_2$, или определяет что его не существует. Пусть $U = R_1 + M_1 * x$, тогда мы имеем $R_1 + M_1 * x = R_2 \bmod M_2$.

Это можно представить в виде Диофантового уравнения $M_1 * x + M_2 * y = R_2 - R_1$, решение которого происходит с помощью расширенного алгоритма Евклида. Наименьший неотрицательный x , если таковой существует, даёт нам искомое $U = R_1 + M_1 * x$. Теперь этот метод можно использовать, чтобы найти минимальное решение U_0 , удовлетворяющее первые два уравнения.

Теперь можно считать, что у нас новая система из $k - 1$ уравнений, которая отличается от прошлой тем, что у нее вместо двух первых уравнений новое $j = U_0 \bmod \text{LCM}(A[1], A[2])$, и повторить эту же процедуру снова. Используя этот метод $k - 1$ раз, мы получим итоговое решение для всей системы.

КТО и необходимое условие

Частное решение для всей системы уравнений $X_u = X_{1u} + \dots + X_{ku}$. (в нашем случае это U_0)

Решение однородной системы $X_o = \text{НОК}(A[1], \dots, A[k])$.

$X = X_u + X_o$. Решение существует только тогда, когда все модули попарно взаимно просты.

Необходимое условие для решение Диофантового уравнения $M_1 * x + M_2 * y = R_2 - R_1$:

$R_2 - R_1 = 0 \bmod \text{НОД}(M_1, M_2)$. Это очевидно, ведь:

$[\text{НОД}(M_1, M_2) = d]$, тогда $(M_1 / d) * x + (M_2 / d) * y = (R_2 - R_1) / d$. Правая часть должна быть целой. Если это условие не выполняется, то ответ **NO**.

Разбор

Вы уже догадались, что нужно использовать цикл.

Представим, что первое уравнение из системы это $j = U_0 \bmod LCM(A[1])$, тогда понятно, что $X_0 = LCM(A[1]) = A[1]$ и $U_0 = 0$.

Тогда, если взять любое уравнение из системы, из них получится Диофантово уравнение:
 $X_0 * x + A[h] * y = 1 - h - U_0$.

Новое частное решение, подходящее для взятых нами двух уравнений, получится из выражения:

$$U_0 = U_0 + \{ [x * (1 - h - U_0) / \text{НОД}(X_0, A[h])] \% [A[h] / \text{НОД}(X_0, A[h])] \} * X_0.$$

Новое однородное решение будет получаться из выражения

$$X_0 = X_0 / \text{НОД}(X_0, A[h]) * A[h], \text{ так как } \text{НОД}(V, L) * \text{НОК}(V, L) = V * L.$$

Ответ

В конце мы получим два числа X_o и U_o , которые являются i и j индексами первого элемента в A . Но U_o потенциально может быть равным 0 , потому что остаток от деления может быть нулевым, а индексация в таблице начинается с 1 . В таком случае к U_o нужно прибавить X_o .

Осталось проверить совпадает ли A с той последовательностью в таблице. Если не совпадает, то ответ **NO**, иначе **YES**.