Задача

Последовательностью Фибоначчи называется последовательность чисел
$\mathbf{F_0 = 0, F_1 = 1, \ldots, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \; (k > 1)}$.

На вход поступают индексы **i** и **j** двух чисел Фибоначчи $\mathbf{F_i}$ и $\mathbf{F_j}$.

Требуется найти наибольший общий делитель двух чисел Фибоначчи $\mathbf{F_i}$ и $\mathbf{F_j}$.

Условия

Входные данные:

На вход поступают два целых числа – индексы **i** и **j ($1 \le i, j \le 10^6$)** двух чисел Фибоначчи **F_i** и **F_j**.

Выходные данные:

Требуется вывести остаток от деления **НОД** чисел **F_i** и **F_j** на **10^9**.

Пример

Входные данные:

1. 5 10
2. 2 4

Выходные данные:

1. 5
2. 1

Разбор

Для достаточно простого решения данной задачи требуется знание одного из свойств чисел Фибоначчи: наибольший общий делитель двух чисел Фибоначчи равен числу Фибоначчи с индексом, равным наибольшему общему делителю индексов:

$$\mathbf{НОД(F_i, F_j) = F_{НОД(i,\, j)}}.$$

Тогда всё решение будет заключаться в том, чтобы найти нужное число Фибоначчи $\mathbf{F_g}$, где $\mathbf{g = НОД(i, j)}$.

Из условий задачи можно получить максимальное значение индекса $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{g_{max} = НОД(10^6, 10^6) = 10^6}$$

Разбор

Очевидно, что $\mathbf{F_{g.max}}$ будет достаточно большим и не поместится в стандартный тип данных в некоторых языках программирования. И так как нужно вывести остаток от деления $\mathbf{F_g}$ на $\mathbf{10^9}$, тогда при расчете чисел Фибоначчи будем записывать не сами числа, а остаток от деления их на $\mathbf{10^9}$:

$$\mathbf{F_k = (F_{k-1} + F_{k-2}) \bmod m \ \ (\text{при } k > 1,\ m = 10^9)}$$

Покажем, что так делать возможно, пусть

$$\mathbf{F_{k-1} = q_1 m + r_1,\ \ F_{k-2} = q_2 m + r_2\ (0 \le q_1, q_2;\ \ 0 \le r_1, r_2 \le m - 1).}$$

Тогда $\mathbf{F_k = (F_{k-1} + F_{k-2}) \bmod m = (q_1 m + r_1 + q_2 m + r_2) \bmod m =}$

$\mathbf{= ((q_1 + q_2)\, m + r_1 + r_2) \bmod m = (r_1 + r_2) \bmod m}$.

Разбор

Предположим, что изначально

$$\mathbf{F_{k-1} = (q_1 m + r_1) \bmod m = r_1 \bmod m,}$$

$$\mathbf{F_{k-2} = (q_2 m + r_2) \bmod m = r_2 \bmod m,}$$

Тогда

$$\mathbf{F_k = (F_{k-1} + F_{k-2}) \bmod m = (r_1 + r_2) \bmod m,}$$

То есть наше предположение, что $\mathbf{F_k = (F_{k-1} + F_{k-2}) \bmod m}$ **(при $\mathbf{k > 1}$)** было верно.

Посчитав $\mathbf{F_g}$ **($\mathbf{g}$ = НОД($\mathbf{i, j}$))** таким способом, получим ответ.