

Prof. Darcy Chaves Silveira

Prof.^a Maria Sueli Gomes Saldanha

Prof.^a Laura de O. Ramalho Misiti

ARITMÉTICA

e Introdução à Álgebra

1.463 PROBLEMAS RESOLVIDOS E EXPLICADOS

Ensino Fundamental,
Ensino Médio
Vestibular e
Concursos

1^a edição
São Paulo
2012



© Copyright 2012.
Darcy Chaves Silveira
Maria Sueli Gomes Saldanha
Laura de O. Ramalho Misiti
Direitos cedidos à Ícone Editora Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Darcy Chaves

Aritmética e introdução à Álgebra: 1.463 problemas resolvidos e explicados: ensino fundamental, ensino médio, vestibular e concursos / Darcy Chaves Silveira, Maria Sueli Gomes Saldanha, Laura de O. Ramalho Misiti. – 1ª ed. – São Paulo: Ícone, 2012.

ISBN 978-85-274-1198-1

1. Matemática (Ensino Fundamental). 2. Matemática (Ensino Médio). 3. Matemática (Vestibular). 4. Matemática (Concursos). I. Saldanha, Maria Sueli Gomes. II. Misiti, Laura de O. Ramalho. III. Título.

CDD-378.1664

12-00796

-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática para vestibulares. 378.1664
2. Matemática: Ensino Fundamental. 372.7

Arte da capa

Isabella Cascaldi Neirouz

Design gráfico e diagramação

Richard Veiga

Revisão técnica

Darcy Chaves Silveira
Maria Sueli Gomes Saldanha
Laura de O. Ramalho Misiti

Proibida a reprodução total ou parcial desta obra, de qualquer forma ou meio eletrônico, mecânico, inclusive através de processos xerográficos, sem permissão expressa do editor (Lei nº 9.610/98).

Todos os direitos reservados à:

ÍCONE EDITORA LTDA.

Rua Anhanguera, 56 – Barra Funda
CEP 01135-000 – São Paulo – SP
Tels./Fax.: (011) 3392-7771
www.iconeeditora.com.br
iconevendas@iconeeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

O livro que ora lançamos no mercado editorial, com o nome de *ARITMÉTICA – 1.463 PROBLEMAS RESOLVIDOS E EXPLICADOS*, é o primeiro de uma coleção de quatro livros: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, todos com as mesmas características didáticas, ou seja, com problemas resolvidos e explicados em cada um dos quatro livros citados e abrangendo a quase totalidade dos assuntos de matemática ministrados no curso básico.

Assim, a clientela que este livro poderá atender são os alunos dos cursos Fundamental e Médio, os vestibulandos, os candidatos à concursos públicos, os estudantes das primeiras séries de cursos superiores (com a finalidade de recordar rapidamente conceitos e problemas já estudados anteriormente) e todos aqueles que, afastados há muito tempo da matemática, queiram reiniciar-se nesse campo de estudos.

Os exercícios e situações-problema apresentados estão todos resolvidos e explicados, de tal forma que o leitor ao refazê-los e encontrando a resposta correta terá um reforço positivo, que o incentivará à busca de algum erro cometido, o que lhe permitirá uma atitude reflexiva, dando-lhe a oportunidade do desenvolvimento do processo de construção do seu conhecimento.

Dedicação, persistência, compreensão das ideias básicas da matemática assim como a aplicação delas na resolução de problemas do mundo real levarão o aluno à independência pessoal na conquista do conhecimento, gerando a segurança necessária à superação de obstáculos e das etapas da vida.

A quase totalidade dos problemas é resolvida com os recursos exclusivos da Aritmética, no caso do presente livro. Em poucos desses problemas, recorremos à aplicação da Álgebra elementar de forma a conduzir o leitor a uma iniciação branda e aprazível nesta área da matemática.

Grande parte dos textos dos exercícios foi criada pelos autores, outros, adaptados, e ainda muitos deles, obtidos de livros de matemática e de listas de problemas aplicados nos exames vestibulares de inúmeras universidades do país e de concursos públicos, sendo, porém, sempre da lavra dos autores a sua resolução, usando a metodologia por estes adotada; resolução passo-a-passo, esmiuçadamente, às vezes cansativo para quem está habituado à matemática, mas inteligível e agradável para o leigo, que se sentirá feliz em conseguir aprender a resolver problemas de matemática, nos níveis apontados. Quando, porém, algum problema tenha sido resolvido por outrem, que não os autores, aquele será sempre citado nominalmente.

Tivemos o objetivo, ao elaborar este livro, de fazer da matemática a mais fácil das disciplinas, porém, longe está dos autores a pretensão de inovar em seu conteúdo.

Entendemos que a forma da apresentação da matéria de maneira clara e pormenorizada, informando a parte teórica, sumariamente, na medida em que tais problemas são resolvidos e em alguns casos, preliminarmente à sua solução, permite ao leitor estudar os exercícios e problemas prazerosamente, desenvolvendo a interpretação de textos e o raciocínio lógico, atributos básicos para um bom aprendizado.

Quando dissemos que a teoria em cada caso foi tratada sumariamente, apenas como recordação, queremos dizer também que essa teoria por inteiro deve ser consultada pelo leitor nos livros didáticos de outros autores, conhecidos e adotados nas escolas de níveis Fundamental e Médio de nosso país; e que não deixem de consultar também os paradidáticos publicados e difundidos no ambiente escolar e fora deste.

Em virtude de ser este livro uma coletânea de exercícios e problemas resolvidos e explicados passo-a-passo, o leitor não necessita iniciá-lo pela primeira página, podendo dirigir-se diretamente ao assunto que lhe interessa, desde que, neste caso, obviamente, tenha já algum pequeno conhecimento de Aritmética elementar. Do contrário, deverá iniciá-lo pela 1^a página.

Conforme apontam o PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais – e o PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, procuramos desenvolver a habilidade de articular nomenclaturas, transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa; formular hipóteses, identificar dados e informações em situações-problema, desenvolvendo estratégias de solução, prever resultados, utilizar adequadamente as calculadoras e designações de grandezas e unidades de medidas incorporadas à linguagem cotidiana, constituindo um ferramental necessário à formação de um pensamento social e senso crítico necessários à realização de atividades e solução de problemas impostos pela vida moderna.

Evitamos, tanto quanto possível, expressões e símbolos incompreensíveis, no intuito de colocar o aluno, o leitor em geral, no centro do aprendizado ativo e interativo, posicionando os interessados na leitura desta modesta obra, não como pacientes do aprendizado, mas como agentes deste processo.

E assim, de acordo com essa orientação e tendo como objetivo precípua levar o aluno a aprender a aprender sozinho, só recorrendo ao professor em raras ocasiões, é que elaboramos este livro de problemas resolvidos e comentados, passo-a-passo, minuciosamente, de modo que a leitura e o aprendizado da matemática fundamental possam ser acompanhados pelos que por esta matéria estejam interessados, de forma agradável e prazerosa.

Procuramos elaborar um livro, que, por modesto que seja, não sirva apenas para a escola, mas especialmente para a vida.

Se conseguirmos pelo menos entusiasmar o leitor a ler este livro em partes ou na totalidade, consideraremos felizes e realizados.

Desejamos registrar nossos agradecimentos, antecipadamente, a todos os leitores que nos enviarem críticas construtivas e (ou) sugestões para que possamos aprimorar o texto de eventuais futuras edições.

Os autores

OS AUTORES

Prof. Darcy Chaves Silveira é engenheiro civil pela Universidade Mackenzie, fundador do Colégio Anchieta de São Bernardo do Campo, em 1965, do qual foi diretor geral e coordenador do ensino de matemática dos cursos fundamental e médio, até 2011.

Prof.ª Maria Sueli Gomes Saldanha é licenciada em Matemática pela Universidade São Paulo, Pós-Graduada em Matemática Educacional pela Universidade São Judas Tadeu e mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). É professora de matemática dos cursos fundamental, médio e superior.

Prof.ª Laura De O. Ramalho Misiti é bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) com mestrado em Ensino da Matemática pela mesma instituição. É professora de matemática dos cursos fundamental, médio e superior.

SUMÁRIO

UNIDADE 1 TEORIA DOS CONJUNTOS, 17

Capítulo 1. TEORIA DOS CONJUNTOS, 19

- Conceitos primitivos, 19
- Representação de conjuntos, 19
- Representação de um conjunto pelo diagrama de Venn-Euler, 20
- Conjunto unitário e conjunto vazio, 21
- Relação de pertinência, 21
- Relação de inclusão – subconjuntos, 21
- Igualdade de conjuntos, 24
- Determinação dos subconjuntos de um conjunto dado, 24
- Operações entre conjuntos, 26
- Diferença entre conjuntos, 42

UNIDADE 2 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO, 55

Capítulo 2. SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E NÃO DECIMAL, 57

- Classe, 58
- Valor absoluto e valor relativo do algarismo, 61
- Forma polinômica no sistema decimal, 63
- Sistema de numeração não decimal, 64
 - Sistema binário, 64
 - Sistema de numeração romana, 67

UNIDADE 3 CONJUNTOS NUMÉRICOS, 71

Capítulo 3. CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS OU NÚMEROS DE CONTAGEM, 73

- Operações com números naturais, 78
 - Adição, 78
 - Subtração, 86
 - Multiplicação, 89
 - Divisão exata, 96

- Divisão não exata, 100
- Expressões numéricas com adição, subtração, multiplicação e divisão, 103
- Potenciação de números naturais, 104
- Raiz quadrada de números naturais, 109

Capítulo 4. CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS, 113

- Números inteiros, 113
- Módulo de um número inteiro, 116
- Operações com números inteiros e propriedades, 116
 - Adição, 116
 - Multiplicação, 123
 - Divisão, 127
 - Potenciação, 129
- Subconjuntos do conjunto dos inteiros, 137

Capítulo 5. MÚLTIPLOS E DIVISORES, 157

- Múltiplos, 157
- Divisores, 162
 - Os divisores naturais de um número, 163
 - Divisibilidade, 164
- Números primos e números compostos, 171
- Decomposição de um número natural em fatores primos, 173
- Determinação dos divisores de um número natural, 179
- Maximo divisor comum, 185
- Mínimo múltiplo comum, 195

Capítulo 6. CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS, 211

- Noções de frações, 211
 - Classificação, 216
 - Frações equivalentes, 217
 - Simplificação de frações, 218
 - Comparação de frações, 219
 - Redução de frações ao mesmo denominador, 220
- Adição e subtração de frações, 223
- Multiplicação de frações, 225
 - Frações inversas ou números recíprocos, 226
- Divisão de frações, 227
- Números decimais, 228
 - Propriedades de números decimais, 229
 - Transformação de números decimais em frações decimais, 229
 - Transformação de frações decimais em números decimais, 230
- Operações com números decimais, 231
- Dízimas periódicas, 241
 - Geratriz de uma dízima periódica, 242
 - Arredondamento, 247

- Notação científica, 247
- Números racionais, 248
 - Subconjuntos do conjunto dos números racionais, 249
 - Reta numérica racional, 249
- Operações com números racionais, 250
 - Adição algébrica, 250
 - Multiplicação, 252
 - Divisão, 255
 - Potenciação, 257
- Raiz exata, 261

Capítulo 7. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS, 289

- Números reais, 289
- Potência com expoente fracionário, 292
- Radicais, 293
 - Radical de índice par, 293
 - Radical de índice ímpar, 293
 - Propriedades dos radicais, 294
 - Simplificação de radicais, 297
 - Introdução de um fator no radical, 301
 - Redução de radicais ao mesmo índice, 302
- Operações com radicais, 304
 - Adição e subtração, 304
 - Multiplicação, 305
 - Divisão, 307
 - Potenciação, 309
 - Racionalização de denominadores irracionais, 311
- Operações e propriedades dos números reais, 317
 - Propriedades da adição e da multiplicação de números reais, 317
 - Subconjuntos do conjunto dos números reais, 318
- Operações com intervalos reais, 321
 - União, 321
 - Intersecção, 322
 - Diferença, 322
- Relembrando os conjuntos numéricos, 356

UNIDADE 4 SISTEMAS DE MEDIDAS, 359

Capítulo 8. UNIDADES DE MEDIDAS, 361

- Medidas de comprimento, 363
- Perímetro de um polígono, 367
- Medidas de superfície, 371
- Área de figuras planas, 372
- Medidas agrárias, 385

- Medidas de volume, 389
- Volume do cubo e do paralelepípedo, 391
- Medidas de capacidade, 393
- Medidas de massa, 400
- Medida de massa específica ou densidade, 404
- Medidas de tempo, 409
- Medidas de ângulos, 415
- Medidas de memória de um computador, 416
- Outras medidas, 417

UNIDADE 5 NOÇÕES DE ÁLGEBRA, 435

Capítulo 9. INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA, 437

- Igualdade, 437
- Equação, 438
- Resolução de uma equação do 1º grau com uma incógnita, 439
- Problemas do 1º grau com uma incógnita, 452

UNIDADE 6 MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA, 473

Capítulo 10. RAZÕES, PROPORÇÕES E MÉDIAS, 475

- Preliminares, 475
- Proporções, termos das proporções, 477
- Exercícios e problemas, 479
- Grandezas diretamente proporcionais, 486
- Grandezas inversamente proporcionais, 487
- Escala, 531
- Médias, 538
 - Média aritmética, 538
 - Média geométrica ou proporcional, 567
 - Média ponderada, 568
 - Média harmônica, 569
- Medidas agrárias, 571
- Divisão proporcional, 572
- Divisão diretamente proporcional e inversamente proporcional simultaneamente, 574
- Divisão inversamente proporcional, 575
- Regra de sociedade, 577

Capítulo 11. REGRA DE TRÊS, 581

- Regra de três simples – R/3, 581
- Regra de três composta, 607

Capítulo 12. PORCENTAGEM, 637

- Transformar frações em porcentagens, 637
- Transformar porcentagens em frações irreduzíveis, 638
- Índice de atualização de um valor, 648
- Porcentagem de porcentagem, 649

Capítulo 13. NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA, 721

- Capitalização simples – juros, taxa de juros, capitalização simples, 721
- Problemas de aplicação, 723
- Tabela de conversão de prazos, 725
- Operando com datas (com calculadora), 729
- Formulário para cálculo de operações financeiras, 743
- Capitalização composta, 746
- Cálculo do juro composto – dedução da fórmula, 748
- Breve lembrete sobre logaritmos, 752
- Logaritmos e antilogaritmos (com calculadora), 757
- Equivalência de taxas, 766
- Fórmula geral para o cálculo de taxas equivalentes, 769
- Descontos, 770
- Taxa média e prazo médio, 776
- Sequência de pagamentos em parcelas iguais, 778

UNIDADE 7 CONTAGEM, 783**Capítulo 14. OS PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA CONTAGEM, 785**

- Princípio aditivo, 785
- Princípio multiplicativo, 785

UNIDADE 8 RACIOCÍNIO LÓGICO, 817**Capítulo 15. NOÇÕES DE LÓGICA, 819**

- Noções de lógica matemática, 819
- Conectivos lógicos, 820
- Operações lógicas, 824
- Tabelas verdade, 826
- Proposições equivalentes, 834

UNIDADE 9 MISTURAS E LIGAS, 891**Capítulo 16. MISTURAS E LIGAS, 893**

- Densidade, 897

UNIDADE 10 CURIOSIDADES, 901

Capítulo 17. CURIOSIDADES DA MATEMÁTICA, 903

GLOSSÁRIO, 917

- Simbologia de conjuntos, 917
- Operadores matemáticos, 918
- Uma definição importante, 918
- A diferença entre número, numeral e algarismo, 918
- Unidades de medidas, 919
- Alfabeto grego, 919
- Números romanos, 920
- Sistema métrico decimal, 920
- Unidades unidimensionais, 920
- Unidades bidimensionais, 921
- Unidades tridimensionais, 921

BIBLIOGRAFIA, 923

UNIDADE

1

TEORIA DOS CONJUNTOS

1. TEORIA DOS CONJUNTOS

1. CONCEITOS PRIMITIVOS

O conceito de conjunto é primitivo, ou seja, não é definido. As vogais do nosso alfabeto: a, e, i, o, u as notas musicais: dó, ré, mi, fá, sol., lá, si, uma coleção de livros, uma coleção de figurinhas são exemplos de conjuntos.

Conjuntos, como usualmente são concebidos, tem elementos. Um elemento de um conjunto pode ser uma vogal, uma nota musical, um livro ou uma figurinha. É importante frisar que um conjunto pode ser elemento de algum outro conjunto.

Em geral indicaremos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C,... e os elementos por letras minúsculas a, b, c,...

2. REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Para representar um conjunto, usamos duas chaves, escrevendo entre elas uma propriedade característica de seus elementos ou escrevendo cada um de seus elementos.

Exemplos:

- $A = \{\text{vogais do alfabeto}\}$ ou $A = \{a, e, i, o, u\}$
- $B = \{\text{notas musicais}\}$ ou $B = \{\text{dó, ré, mi, fá, sol., lá, si}\}$

Obs.:

- Num conjunto não se deve repetir elementos iguais.
- Num conjunto, é permitido substituir elementos por reticências, desde que isto não prejudique a compreensão.

Exemplos:

- Conjunto dos números pares: $\{0, 2, 4, 6, \dots\} \rightarrow \text{conjunto infinito}$

1. Represente os seguintes conjuntos, escrevendo seus elementos entre chaves:

- a) A = conjunto dos números pares entre 9 e 15
- b) B = conjunto dos números ímpares entre 120 e 130
- c) C = conjunto dos meses do ano que começam pela letra m
- d) D = conjunto dos números ímpares

Resolução:

- a) A = {10, 12, 14}
- b) B = {121, 123, 125, 127, 129}
- c) C = {março, maio}
- d) D = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... } \longrightarrow conjunto infinito

2. Represente, por uma propriedade de seus elementos, os conjuntos:

- a) A = {primavera, verão, outono, inverno}
- b) B = {2, 4, 6, 8, 10, 12}
- c) C = {verde, amarelo, azul, branco}
- d) D = {a, b, c, d, e, f}

Resolução:

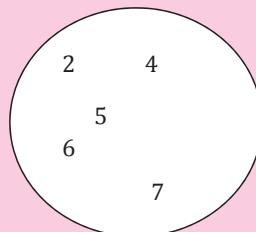
- a) A = {conjunto das estações do ano}
- b) B = {conjunto dos números pares entre 0 e 14}
- c) C = {conjunto das cores da bandeira brasileira}
- d) D = {conjunto das seis primeiras letras do nosso alfabeto}

3. REPRESENTAÇÃO DE UM CONJUNTO PELO DIAGRAMA DE VENN-EULER

O diagrama de Venn-Euler consiste em representar o conjunto através de um círculo de tal forma que seus elementos e somente eles estejam no círculo.

Exemplo:

Se $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, então:

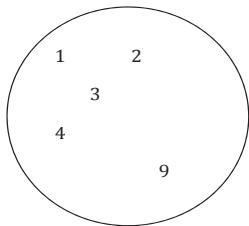


3. Represente por diagrama de Venn-Euler os conjuntos abaixo:

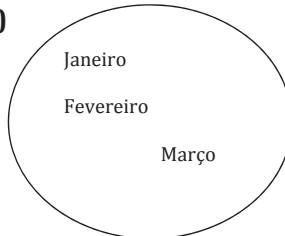
- a) A = conjunto dos algarismos do número 12 349
- b) B = conjunto dos meses do 1º trimestre do ano.

Resolução:

a)



b)



4. CONJUNTO UNITÁRIO E CONJUNTO VAZIO

Conjunto Unitário: é aquele que só tem um elemento.

Exemplo:

- $A = \{\text{meses do ano que começam com f}\} \rightarrow A = \{\text{fevereiro}\}$

Conjunto Vazio: é aquele que não possui nenhum elemento.

É representado por \emptyset ou $\{\}$.

Exemplo:

- $B = \{\text{dias da semana que começam pela letra a}\} \rightarrow B = \{\}$

5. RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Para indicar que um elemento pertence a um conjunto, usamos o símbolo \in (lê-se pertence).

Exemplo:

Seja o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, queremos indicar que 6 pertence ao conjunto A, logo escrevemos:

$6 \in A$ (lê-se 6 pertence ao conjunto A)

Para indicar que um elemento não pertence a um conjunto, usamos o símbolo \notin (lê-se: não pertence).

Exemplo:

$11 \notin A$ (lê-se 11 não pertence ao conjunto A)

6. RELAÇÃO DE INCLUSÃO – SUBCONJUNTOS

Sejam A e B dois conjuntos. Se todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é subconjunto ou parte de B e indicamos por $A \subset B$.

... (lê-se: o conjunto A está contido no conjunto B)

Por outro lado, $A \not\subset B$ significa que A não é subconjunto de B (parte)

$A \not\subset B$ (lê-se: o conjunto A não está contido no conjunto B)

Exemplos:

1)

$$\{2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ ou } \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \supset \{2, 3, 4\}$$

A contido B ou B contém A

O conjunto A está contido no conjunto B

ou

O conjunto B contém o conjunto A

2)

$$\{5, 6, 8\} \not\subset \{5, 6, 7, 9, 10\} \text{ ou } \{5, 6, 7, 9, 10\} \not\supset \{5, 6, 8\}$$

A não está contido B ou B não contém A

O conjunto A não está contido no conjunto B

ou

O conjunto B não contém o conjunto A

4. Dizer se é verdadeira (V) ou falsa (F) as sentenças abaixo:

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ | f) $\{1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3, 5\}$ |
| b) $\{3\} \in \{1, 2, 3, 4\}$ | g) $3 \subset \{3, \{3\}\}$ |
| c) $\emptyset \in \{4, 5, 6\}$ | h) $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$ |
| d) $3 \in \{3, \{3\}\}$ | i) $\emptyset \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ |
| e) $\{3\} \in \{3, \{3\}\}$ | j) $\emptyset \in \{\emptyset, 1, 2\}$ |

Resolução:

- a) (V) → Justificativa: 3 é elemento do conjunto
- b) (F) → Justificativa: não é elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{3\}$ é subconjunto do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$
- c) (F) → Justificativa: \emptyset não é elemento do conjunto $\{4, 5, 6\}$
- d) (V) → Justificativa: 3 é elemento do conjunto $\{3, \{3\}\}$
- e) (V) → Justificativa: $\{3\}$ é elemento do conjunto $\{3, \{3\}\}$
- f) (V) → Justificativa: $\{1, 2\}$ é um subconjunto do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 5\}$
- g) (F) → Justificativa: pois, $\{3\}$ é um elemento do conjunto $\{3, \{3\}\}$
- h) (V) → Justificativa: pois, todo conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, inclusive dele próprio
- i) (F) → Justificativa: pois, o conjunto vazio é um subconjunto e não um elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- j) (V) → Justificativa: pois, o conjunto vazio é um elemento do conjunto $\{\emptyset, 1, 2\}$

7. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

NÚMEROS REAIS

Nos capítulos anteriores apresentamos os números naturais, os números inteiros, e os números fracionários, que podem ser expressos como uma razão de dois números inteiros, daí chamados de números racionais.

E que número é chamado de número real?

Todo número real ou é racional ou é irracional.

Se um número racional é qualquer número que pode ser representado pelo quociente de dois números inteiros, sendo o segundo diferente de zero, então, nessa divisão de números inteiros só podem ocorrer duas possibilidades, a divisão é exata ou não é exata.

Quando a divisão é exata, o quociente representa números inteiros, o denominador é divisor do numerador, por exemplo:

$$5 = \frac{10}{2}; \quad -3 = -\frac{15}{5}; \quad 9 = \frac{81}{9}; \quad 0 = \frac{0}{6}$$

Quando a divisão não é exata ou são decimais exatos, numerais com finitas casas decimais, por exemplo:

$$0,25 = \frac{25}{100}; \quad -3,2 = -\frac{32}{10} = \frac{-16}{5}$$

Ou, são decimais infinitos periódicos, numerais com infinitas casas decimais que se repetem, por exemplo:

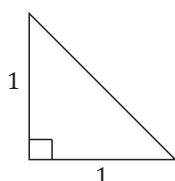
$$1,222\dots = \frac{11}{9}; \quad 0,4343\dots = \frac{43}{99}; \quad 2,1333\dots = \frac{192}{90}.$$

Então, um número que não pode ser representado pelo quociente de dois números inteiros, é chamado **número irracional**, cuja representação é decimal infinita e não periódica.

Vejamos alguns exemplos: $0,05532467\dots$; $2,34334434\dots$; $\pi = 3,14159265358\dots$; $1,41421356\dots$.

O número irracional $1,41421356\dots$ pode ser representado pelo radical $\sqrt{2}$.

Por volta de 530 a.C. Pitágoras, filósofo, matemático e mestre dos pitagóricos, demonstrou que para qualquer triângulo retângulo, (triângulo com ângulo reto) o quadrado da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos dois catetos, traçando figuras na areia ou com auxílio de cordas. Nesse processo de demonstração, construindo um triângulo cujos catetos mediam uma unidade, concluiu que não era possível descobrir um segmento unitário que coubesse um número inteiro de vezes em cada cateto e na hipotenusa. O número irracional $\sqrt{2}$ surgiu dessa situação, apesar dos gregos não conhecerem o radical $\sqrt{}$, diziam o número que multiplicado por si mesmo é 2.



Os catetos medem 1 e a hipotenusa mede a .

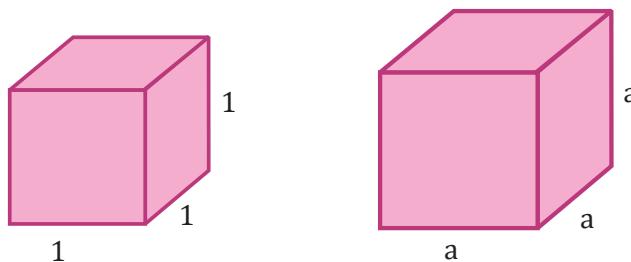
$$a^2 = 1^2 + 1^2$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

A partir da descoberta do $\sqrt{2}$, foram descobertos muitos outros irracionais. Entre eles, no século V a.C., os atenienses para combaterem uma epidemia de peste, conforme instruções do oráculo de Apolo, deveriam duplicar o altar que tinha a forma de um cubo, mas duplicaram os lados fazendo com que o volume fosse multiplicado por 8.

Para duplicar o volume de um cubo de arestas 1 cm, por exemplo, descobrimos pela resolução de uma equação que a medida do lado do cubo duplicado é $\sqrt[3]{2}$, observe:



O volume do cubo de 1 cm de aresta é dado por $V_1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^3$

Para determinar o lado do cubo cujo volume deve ser duplicado, temos que $V_2 = 2V_1$

Sendo $V_2 = a \cdot a \cdot a = a^3$ e $V_2 = 2V_1$, então:

$a^3 = 2 \cdot (1^3) = 2$, daí $a^3 = 2$ e o único valor que elevado ao cubo resulta 2 é o número irracional $\sqrt[3]{2}$.

Mais alguns radicais que representam irracionais:

$$\sqrt{5} = 2,2360679\dots; \sqrt{6} = 2,4494897\dots; \sqrt[3]{4} = 1,58740\dots; \sqrt[4]{7} = 1,62657\dots; \sqrt[5]{10} = 1,58487\dots$$

(lembremos que, por exemplo, na expressão $\sqrt[3]{4}$, 3 é o índice do radical e 4 é o radicando).

Nem toda raiz ou radical representa um número irracional, como por exemplo:

$$\sqrt{9} = 3; \sqrt[3]{8} = 2; \sqrt[4]{81} = 3; -\sqrt[5]{32} = -2; \sqrt{0,36} = 0,6; \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}; \text{são números racionais.}$$

Portanto, o conjunto formado pelos números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros, $b \neq 0$ é chamado **conjunto dos números irracionais** que representamos pelo símbolo \mathbb{I} .

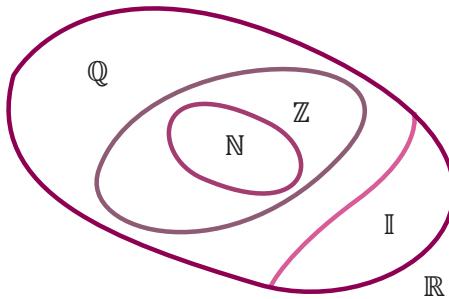
Observe que todos os números grafados nessa página, e ainda todos os que apareceram nos capítulos anteriores, são chamados de **número reais**.

O **conjunto dos números reais** é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais e é representado pelo símbolo \mathbb{R} .

Portanto, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

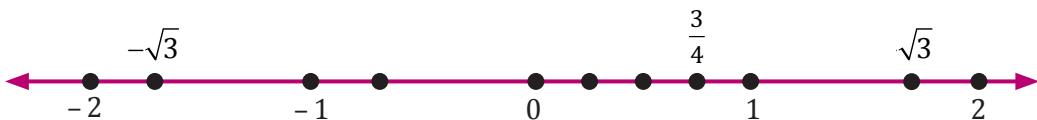
Como todo número real ou é racional ou é irracional, então não há elemento comum ao conjunto dos racionais e ao conjunto dos irracionais, ou seja, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$

Podemos representar todos os conjuntos numéricos estudados no seguinte diagrama:



Os números reais são representados graficamente na reta numerada, considerando que a cada ponto da reta corresponde apenas um número real e vice-versa, tornando a reta totalmente contínua.

Representamos, na reta numerada seguinte, apenas alguns números reais:



Vamos resolver alguns exercícios de aplicação:

-
1. (UFPR) Uma das instruções de um exame vestibular afirmava que cada teste que compunha a prova apresentava cinco alternativas, das quais apenas uma correta. Passados alguns dias da prova, foi divulgado que um dos testes havia sido anulado. O teste anulado apresentava as seguintes alternativas:

- a) x é um número natural
- b) x é um número inteiro
- c) x é um número racional
- d) x é um número irracional
- e) x é um número real

Explique por que o teste foi anulado.

Solução:

No início deste capítulo lembramos a definição de número racional, e apresentamos as definições de número irracional e real. Todo número natural é um número inteiro, é um número racional e também um número real. Logo se a resposta fosse um número natural, poderiam ser assinaladas as alternativas “a”, “b”, “c” ou “e”. Ainda, se fosse um número inteiro, poderiam ser assinaladas as alternativas “b”, “c” ou “e”.

Para a resposta em que o número fosse racional, poderiam ser assinaladas as alternativas “c” ou “e”. E, finalmente, se fosse um número irracional, seriam corretas as alternativas “d” e “e”.

-
- 2.** (UF-Viçosa) Assinale a alternativa INCORRETA. Dados os conjuntos:

$$\begin{aligned}A &= \{x/x \text{ é um número real}\} \\B &= \{x/x \text{ é um número racional}\} \\C &= \{x/x \text{ é um número primo}\}\end{aligned}$$

Então:

- a) $C \subset B$
- b) $5 \in (B \cap C)$
- c) $B \subset A$
- d) $6 \in (A \cap B \cap C)$
- e) $7 \in (A \cap C)$

Solução:

Vamos analisar uma a uma as alternativas.

A alternativa “a” é correta pois todos os números primos são números racionais.

A alternativa “b” é correta pois 5 é um número primo e racional(inteiro), portanto pertence à intersecção dos dois conjuntos.

A alternativa “c” é correta pois todo número racional é real.

A alternativa “d” é INCORRETA pois 6 não é primo, não é elemento do conjunto C e portanto não pode estar na intersecção dos conjuntos A,B e C.

A alternativa “e” é correta pois 7 é primo e um número real (inteiro), portanto pertence à intersecção.

Portanto, alternativa “d”.

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO

Considerando que um número real é um número racional ou um número irracional, podemos definir potência com expoente fracionário:

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt[2]{4} = 2 \text{ (real racional)};$$

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \text{ (real irracional)};$$

$$\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \text{ (real racional);}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt[5]{\frac{9}{25}} \text{ (real irracional)}$$

Toda potência de um número real de expoente fracionário pode ser representada por um radical, sendo o numerador a potência do radicando e o denominador, o índice do radical, ou seja, $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$, sendo $a \geq 0$, p inteiro e n natural não nulo.

Vamos, agora, apresentar um estudo dos radicais.

RADICais

RADICAL DE ÍNDICE PAR

Observamos que $\sqrt{4} = 2$, pois $(2)^2 = 4$

$\sqrt{4} = -2$, pois $(-2)^2 = 4$

Como o resultado de uma operação matemática deve ser único, convenciona-se que $\sqrt{4} = 2$ e que $-\sqrt{4} = -2$, que representam números reais racionais.

Os radicais $\sqrt[4]{16} = 2$ (pois $2^4 = 16$) e $\sqrt[6]{64} = 2$ (pois $2^6 = 64$), também são reais racionais.

Por outro lado, $\sqrt{-4}$ não é um número real pois, não existe um número real tal que elevado a um expoente par (no caso expoente 2) resulte em um número negativo, o -4 . O mesmo acontece para qualquer radical com radicando negativo cujo índice seja par, por exemplo, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$ que não representam números reais.

Os radicais $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{30}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[6]{4}$, são irracionais que representam números reais.

RADICAL DE ÍNDICE IMPAR

Observamos que $\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$, e

$\sqrt[3]{-8} = -2$ pois $(-2)^3 = -8$

O radical $\sqrt[5]{-243} = -3$, pois $(-3)^5 = -243$

Os radicais $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-8}$ e $\sqrt[5]{-243}$ que expressam as raízes 2, -2 e -3 , são números reais racionais.

Os radicais $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{-15}$, $\sqrt[5]{24}$ são números reais irracionais.

11. REGRA DE TRÊS

REGRA DE TRÊS SIMPLES – R/3

A Regra de Três é um procedimento prático que se emprega para achar uma grandeza desconhecida, dadas outras grandesas conhecidas.

1. Cinco sacos de fertilizante agrícola custam R\$ 400,00. Quanto se deve pagar por 18 sacos desse fertilizante?

Solução:

O enunciado do problema menciona “sacos” e “reais”. Então, devemos colocar essas 2 grandesas, como indicado a seguir e sob essas grandesas colocar os valores correspondentes, indicados no problema.

Sacos	R\$
5	400
18	x

Observar que o valor “x” é a incógnita do problema, ou seja, é o valor que queremos descobrir.

Agora, precisamos verificar se a regra de três é direta ou inversa.

Uma regra de três é direta quando, no caso, o aumento do número de sacos corresponde a um aumento do valor em dinheiro. Portanto é direta. Na apresentação supra, temos 2 colunas; a dos sacos e a coluna do dinheiro.

Monta-se, agora, uma proporção, começando-se com a coluna que contém a incógnita e seguindo o sentido das setas:

$$\frac{400}{x} = \frac{5}{18} \rightarrow 5x = 400 \cdot 18 \rightarrow x = \frac{400 \cdot 18}{5} = 1440,00$$

Resposta: deve-se pagar R\$ 1 440,00 pelos 18 sacos de fertilizantes.

Importante: por que as setas estão colocadas no mesmo sentido, de cima para baixo? Porque verificou-se que havendo aumento na quantidade de sacos, haverá também aumento na coluna do pagamento. Por isso é que é uma regra de três direta.

- 2.** Se 5 kg de arroz, no supermercado, custam R\$ 12,00 quanto custarão 28 kg de arroz?

a) Disposição dos dados:

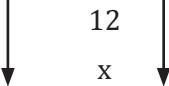
Kg	R\$
5	12
28	x

b) Verifique, em primeiro lugar, se a regra de três é direta ou inversa.

► Observe que, aumentando-se o peso do arroz, aumenta-se também o valor a pagar.

Portanto, a Regra de Três supra é direta e as setas são colocadas, ambas, no mesmo sentido.

Kg	R\$
5	12
28	x



c) Então, seguindo a orientação das setas, montar a proporção:

$$\frac{12}{x} = \frac{5}{28} \rightarrow 5x = 12 \cdot 28 \rightarrow x = \frac{12 \cdot 28}{5} \rightarrow x = R\$ 67,20$$

Resposta: 28 kg de arroz custarão R\$ 67,20.

- 3.** Quinze (15) operários fazem um certo serviço em nove (9) dias. Quantos operários serão necessários para fazer esse mesmo serviço em cinco (5) dias?

Solução:

a) Disposição das grandezas.

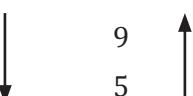
Operários	Dias
15	9
x	5

b) Verificar se a Regra de Três supra é direta ou inversa.

► Observe que, se queremos que o mesmo serviço esteja pronto em um número menor de dias (5), teremos que aumentar o número de operários. Então diminui-se o número de dias e aumenta-se o número de operários. Portanto, a regra de três supra, é inversa.

Assim, as posições das setas têm sentidos opostos, como abaixo:

Operários	Dias
15	9
x	5



c) Montagem das proporções, seguindo o sentido das setas:

$$\frac{15}{x} = \frac{5}{9} \rightarrow 5x = 9 \cdot 15 \rightarrow x = \frac{9 \cdot 15}{5} \rightarrow x = 27 \text{ operários}$$

Resposta: Serão necessários 27 operários.

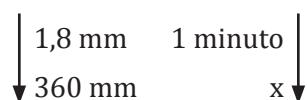
4. Se uma vela de 36 cm de altura diminui 1,8 mm por minuto, quanto tempo levará para se consumir?

Solução:

Fácil observar que a regra de três é direta, pois se o **consumo da vela aumenta**, o **tempo necessário para consumi-la também aumenta**. REGRA DE TRÊS DIRETA.

► A **grandezas envolvidas no problema devem estar sempre na mesma unidade**.

$$36 \text{ cm} = 360 \text{ mm}$$



$$\frac{1}{x} = \frac{1,8}{360} \rightarrow x = \frac{360}{1,8} = 200 \text{ min} = 3 \text{h } 20\text{min}$$

Resposta: A vela levará 3h 20min para se consumir.

5. Duas rodas dentadas, que estão engrenadas uma na outra, têm respectivamente, 108 e 24 dentes. Quantas voltas dará a menor enquanto a maior dá 10 voltas?

Solução: Sabendo-se, pelo texto, que:

roda maior = 108 dentes

roda menor = 24 dentes

a) Disposição das grandezas:

dentes voltas

(maior) 108 10

(menor) 24 x

b) Verificar se a regra de três é direta ou inversa.

► Observe que enquanto na “coluna dos dentes” a grandeza diminui, na “coluna das voltas” a grandeza aumentará. Então, a regra de três supra é inversa e as posições das setas tem sentidos opostos, como abaixo:

