

Introdução à Árvores

Estruturas de Dados I

Departamento de Computação

Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentos e Terminologia
- 3 Representações Gráficas
- 4 Árvores N-árias
- 5 Exercícios

Introdução

- **Estrutura de listas:** organização *linear* dos dados, onde sua propriedade básica é a relação sequencial mantida entre seus elementos
- **Estrutura de árvores:** organização dos dados de forma *não-linear* mantendo um relacionamento hierárquico entre seus elementos

Listas Lineares

TAluno
Nome
Curso
Departamento
....

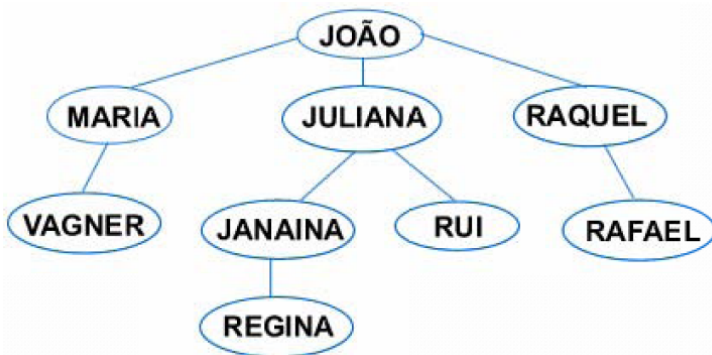
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	...	An
----	----	----	----	----	----	----	-----	----

- Complexidade de tempo para os problemas
 - Listar os alunos do departamento Dx? $O(n)$
 - Listar os alunos do curso Cx? $O(n)$
 - Idade média dos alunos do curso Cx? $O(n)$

Estrutura de árvore: exemplos

- Algumas situações onde é necessária uma representação baseada na relação hierárquica entre os elementos
 - Árvores genealógicas
 - Organização de um livro
 - Representação da estrutura organizacional de uma instituição

Estrutura de árvore: exemplo de árvore genealógica



Estrutura de árvore: exemplo de organização de um livro

1. Livro XYZ

1.1 Cap. 1

1.1.1 Seção 1

1.1.2 Seção 2

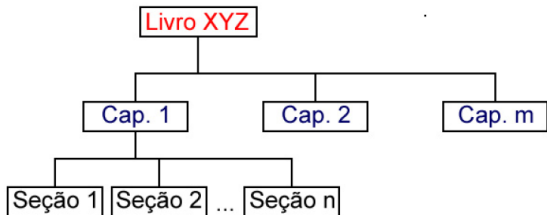
...

1.1.n Seção n

1.2 Cap. 2

..

1.m Cap. m



Justificativas/vantagens

- Observe que para extrair informações específicas de uma determinada ramificação da árvore não é necessário o percurso por toda a estrutura de informação, uma vez que o relacionamento entre os dados nos permite uma consulta seletiva em regiões específicas da árvore

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentos e Terminologia
- 3 Representações Gráficas
- 4 Árvores N-árias
- 5 Exercícios

Definição

- Uma **árvore enraizada** é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices tais que
 - $T = \emptyset$, a árvore é dita vazia
 - $T = \{r\} \cup \{T_1\} \cup \{T_2\} \cup \{T_3\} \cup \dots \cup \{T_n\}$
- Um nó especial da árvore, r , é chamado de raiz da árvore
- Os restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em $n \geq 1$ conjuntos disjuntos não vazios, $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, as subárvores de r , cada qual por sua vez uma árvore

Definição

- Assim para denotar uma árvore T usamos $T = \{r, T_1, T_2, T_3, \dots, T_n\}$, com r a raiz da árvore e T_v a subárvore T com raiz em v
- Note que a definição apresentada é recursiva!

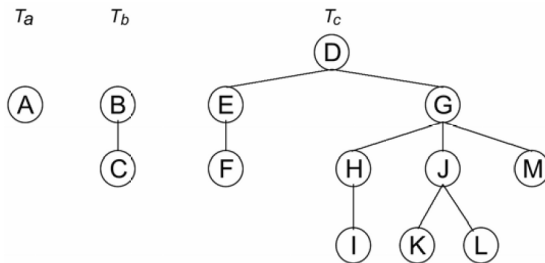
Representação Aninhada

- Uma sequência S de $2n$ chaves, com n "{" e n "}" é dita aninhada quando, em cada subsequência de S , iniciada na posição 1 e com extremidade $i < 2n$, o número de "{" é maior do que o de "}"
- Por exemplo, a sequência {{{}}} é aninhada, mas a sequência {{{}}{} não
- Uma sequência desse tipo pode ser usada para representar uma árvore
 - As sequências de chaves representam as relações entre os nós da árvore – o rótulo de cada nó é inserido imediatamente a direita da "{" correspondente

Representação Aninhada

Exemplo

- $T_a = \{A\}$
- $T_b = \{B, \{C\}\}$
- $T_c = \{D, \{E, \{F\}\}, \{G, \{H, \{I\}\}, \{J, \{K\}, \{L\}\}, \{M\}\}$



Representação Aninhada

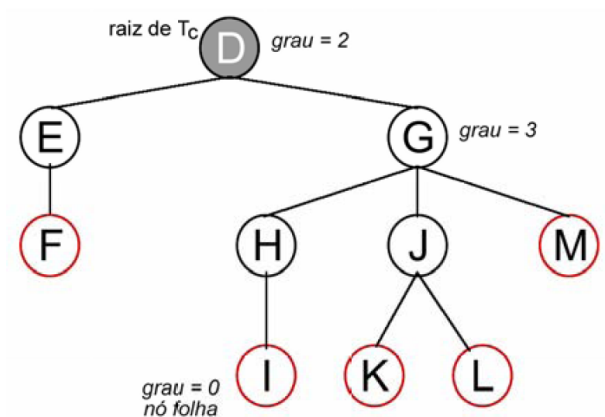
Exercícios

- $T_d = \{2, \{1\}, \{3\}\}$
- $T_e = \{4, \{2, \{1\}, \{3\}\}, \{6, \{5\}, \{7\}\}\}$
- $T_f = \{Joao, \{Daniel, \{Andres\}, \{Fernanda\}\}, \{Maria, \{Marcos\}, \{Rafael\}\}\}$

Terminologias

- Considerando a árvore T_c e a definição dada de árvores anteriormente vejamos algumas terminologias básicas
 - O **grau de um nó** é o número de sub-árvores relacionadas aquele nó. Por exemplo: em T_c o grau do nó D é 2, de G é 3 e dos nós K, L, I, F e M é 0 (zero)
 - Nós com **grau igual a zero** não possuem sub-árvores, portanto são chamados **nós folhas ou terminais**
 - Se cada nó de uma árvore possui um grau máximo e todos os demais nós possuem o mesmo grau máximo, podemos definir este grau como o **grau da árvore**

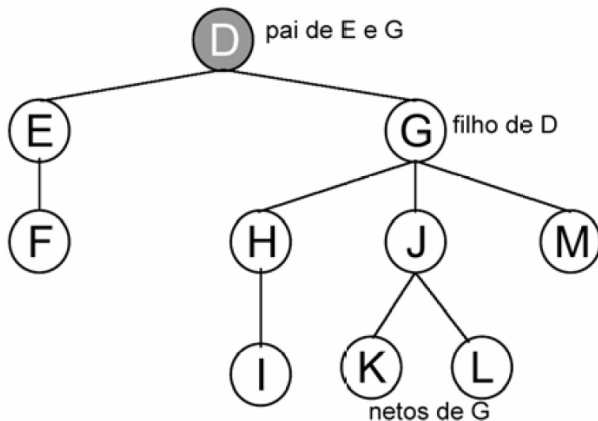
Terminologias



Terminologias

- Para identificar os nós na estrutura, usamos denominações da relação hierárquica existente em uma árvore genealógica
 - Cada raiz r_i da sub-árvore T_i é chamada **filho** de r . O termo **neto** é usado de forma análoga
 - O nó raiz r da árvore T é o **pai** de todas as raízes r_i das sub-árvores T_i . O termo **avô** é definido de forma análoga
 - Duas raízes r_i e r_j das sub-árvores T_i e T_j de T são ditas **irmãs**

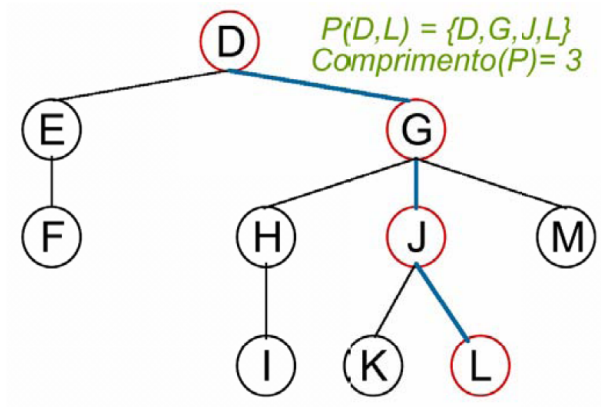
Terminologias



Definição

- Outras definições importantes são obtidas a partir da distância de um nó em relação aos outros nós da árvore
 - **Caminho:** sequência não vazia de nós, $P = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$, onde o i -ésimo nó r_i da sequência é pai de r_{i+1}
 - **Comprimento:** tomando a definição de caminho, o comprimento de um caminho P é igual a $k - 1$

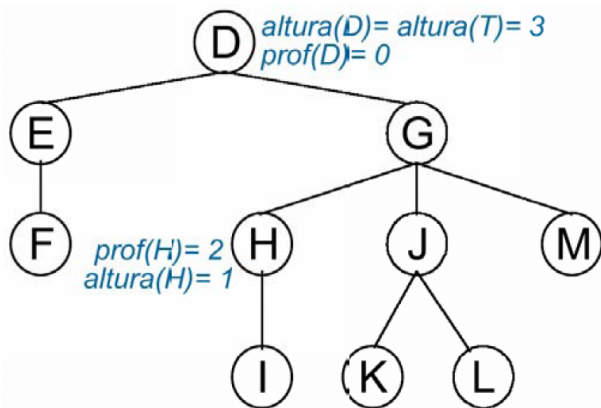
Definição



Terminologia

- **Altura de um nó:** a altura de um nó r_i é o comprimento do caminho mais longo do nó r_i a uma folha
 - As folhas têm altura 0 (zero)
 - **Altura de uma árvore:** é igual a altura da raiz r de T
-
- **Profundidade:** a profundidade de um nó r_i de uma árvore T é o comprimento do único caminho em T entre a raiz r e o nó r_i
 - A raiz está no nível 0 (zero)
 - A maior profundidade de um nó, é a altura da árvore
 - **Nível:** um conjunto de nós com a mesma profundidade é denominado nível da árvore

Terminologia



Terminologia

- **Ascendência e descendência:** considerando dois nós r_i e r_j , o nó r_i é uma ancestral de r_j se existe um caminho em T de r_i a r_j , tal que, o comprimento de P entre r_i e r_j seja diferente de 0 (zero)
 - De forma análoga se define o descendente de um nó

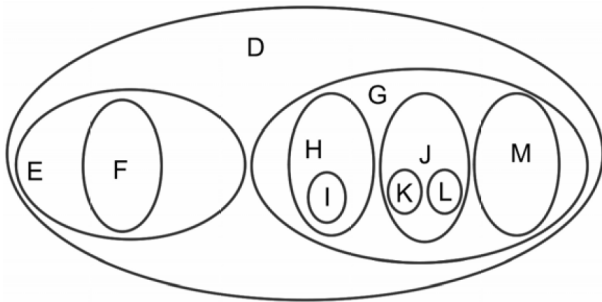
Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentos e Terminologia
- 3 Representações Gráficas**
- 4 Árvores N-árias
- 5 Exercícios

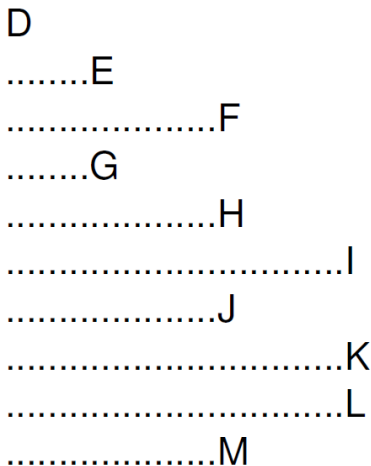
Representações gráficas para árvores

- A estrutura de árvore pode ser representada graficamente de diversas maneiras, dentre elas temos
 - conjuntos aninhados
 - identificação
 - grafos, sendo esta última a mais utilizada

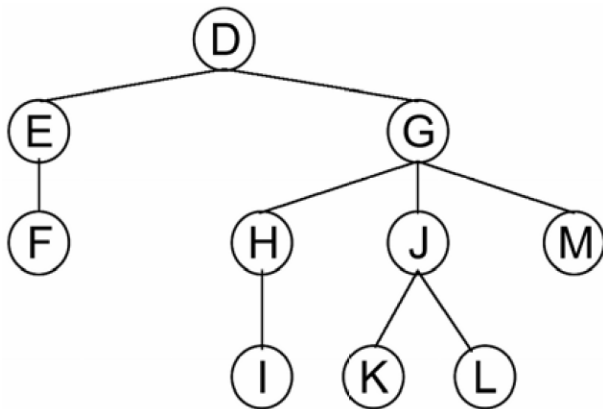
Representação em conjuntos aninhados



Representação com indentação



Representação utilizando grafos



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentos e Terminologia
- 3 Representações Gráficas
- 4 Árvores N-árias**
- 5 Exercícios

Árvores N-árias

- Uma árvore N-ária T é um conjunto finito de nós com as seguintes propriedades
 - O conjunto é vazio, $T = \emptyset$
 - O conjunto consiste de um nó especial r , que é a raiz de T , e os restantes podem ser sempre divididos em n subconjuntos disjuntos, as i -ésimas subárvores de r , $1 \leq i \leq n$, as quais também são árvores N-árias
- A i -ésima subárvore de um nó v de T , se existir, é denominada i -ésimo filho de v

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentos e Terminologia
- 3 Representações Gráficas
- 4 Árvores N-árias
- 5 Exercícios**

Exercícios

- 1 Considere a seguinte árvore:

$$T_e = \{a, \{b, \{c, \{d\}\}, \{e, \{f\}, \{g\}\}\}, \{h, \{i\}\}\}$$

- Obtenha as representações por conjunto, indentação e grafos
 - Encontre o grau, altura e profundidade de cada nó
 - Encontre todos os caminhos possíveis a partir da raiz com seus respectivos comprimentos árvore binária
- 2 Partindo da definição de árvores n-árias, encontre a definição para árvores binárias

Leitura Complementar

1. *Perfect binary tree*

<http://xlinux.nist.gov/dads//HTML/perfectBinaryTree.html>

2. *Binary tree*

<http://xlinux.nist.gov/dads//HTML/binarytree.html>

3. *Trees*

http://www.gamedev.net/page/resources/_/technical/general-programming/...trees-part-1-r1374

Créditos: aula baseada nos tópicos de aula e slides criados pelo prof. Fernando Vieira Paulovich, publicamente disponíveis em: [http://wiki.icmc.usp.br/index.php/Scs-202\(paulovich\)](http://wiki.icmc.usp.br/index.php/Scs-202(paulovich))