《数值分析》实验报告

天津大学

第四章计算实习题 1

学　　院 计算机科学与技术

专　　业 计算机科学与技术

年　　级 2012 级

姓　　名 王雨滕

学　　号 3012216083

2015 年 5 月 2 日

1. 实验内容

用不同数值方法计算积分 $\int_0^1 \sqrt{x}\ln x dx = -\frac{4}{9}$

(1)取不同的步长 h．分别用复合梯形及复合辛普森求积计算积分，给出误差中关于 h 的函数，并与积分精确值比较两个公式的精度，是否存在一个最小的 h，使得精度不能再被改善?

(2)用龙贝格求积计算完成问题(1).

(3)用自适应辛普森积分，使其精度达到 10^{-4}.

2. 实验原理

✧ 数学模型和实现方法

(1) 复合梯形公式： $Tn=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(xk)]$

复合辛普森公式：

$$Sn=\frac{h}{6}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(xk)]+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x+1/2)];$$

以上两种算法都是将 a-b 之间分成多个小区间（n）,则 h=(b-a)/n,xk=a+kh, xk+1/2=a+(k+1/2)h,利用梯形求积根据两公式便可。

(2) 龙贝格公式：在指定区间内将步长依次二分过程中用一下公式：

1、$Sn=\frac{4}{3}T2n-\frac{1}{3}Tn$

2、$Cn=\frac{16}{15}S2n-\frac{1}{15}Sn$

3、$Rn=\frac{64}{63}C2n-\frac{1}{63}Cn$

$$T_m^{(k)}=\frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}^{(k+1)}-\frac{1}{4^m-1}T_{m-1}^{(k)},\quad k=1,2,\ldots$$

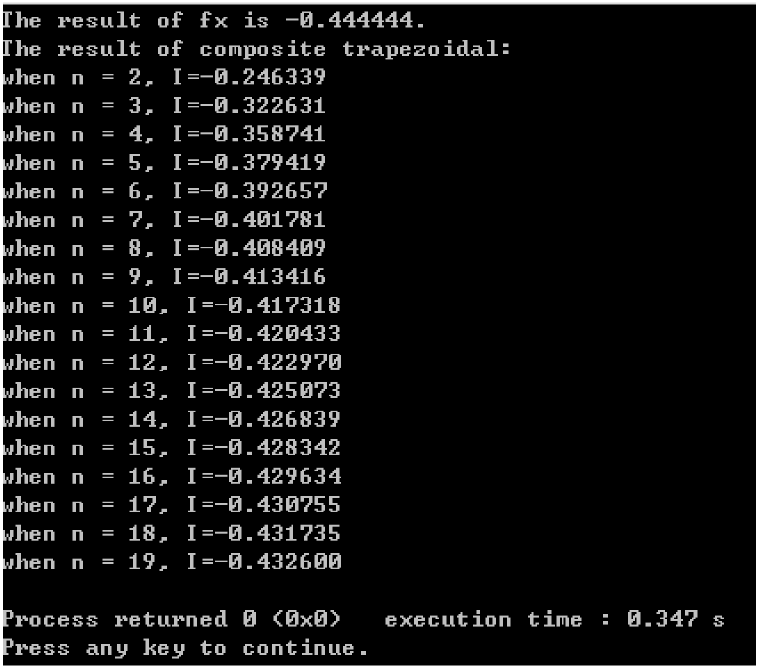
从而实现算法。

3. 实验环境

软件：Codeblocks13.12
程序语言：C++　　程序请见于同文件夹下附件

4. 实验结果及分析

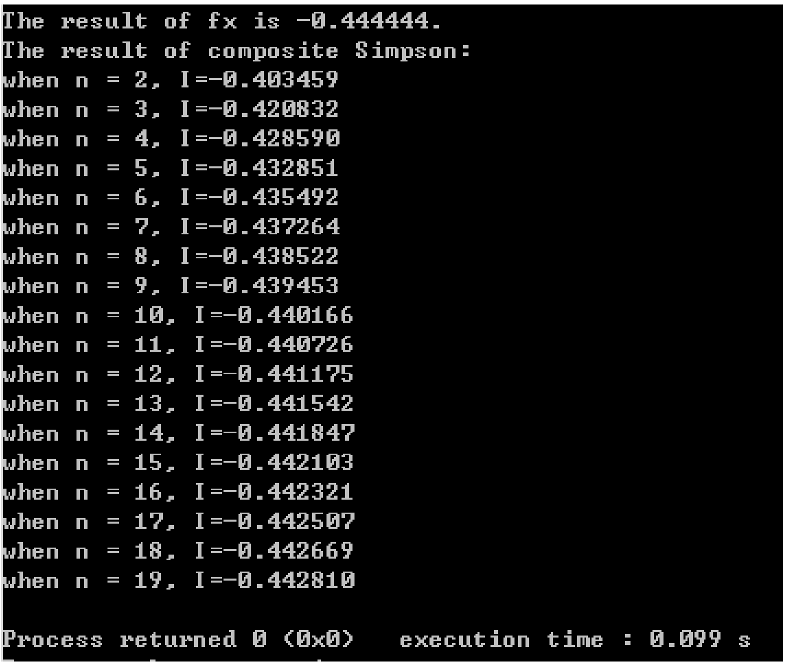
1) 实验结果数据



```
The result of fx is -0.444444.
The result of composite trapezoidal:
when n = 2, I=-0.246339
when n = 3, I=-0.322631
when n = 4, I=-0.358741
when n = 5, I=-0.379419
when n = 6, I=-0.392657
when n = 7, I=-0.401781
when n = 8, I=-0.408409
when n = 9, I=-0.413416
when n = 10, I=-0.417318
when n = 11, I=-0.420433
when n = 12, I=-0.422970
when n = 13, I=-0.425073
when n = 14, I=-0.426839
when n = 15, I=-0.428342
when n = 16, I=-0.429634
when n = 17, I=-0.430755
when n = 18, I=-0.431735
when n = 19, I=-0.432600

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.347 s
Press any key to continue.
```

图 1: 复合梯形公式结果



```
The result of fx is -0.444444.
The result of composite Simpson:
when n = 2, I=-0.403459
when n = 3, I=-0.420832
when n = 4, I=-0.428590
when n = 5, I=-0.432851
when n = 6, I=-0.435492
when n = 7, I=-0.437264
when n = 8, I=-0.438522
when n = 9, I=-0.439453
when n = 10, I=-0.440166
when n = 11, I=-0.440726
when n = 12, I=-0.441175
when n = 13, I=-0.441542
when n = 14, I=-0.441847
when n = 15, I=-0.442103
when n = 16, I=-0.442321
when n = 17, I=-0.442507
when n = 18, I=-0.442669
when n = 19, I=-0.442810

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.099 s
```

图 2: 复合辛普森公式结果

份数n	步长h	梯形	辛普森	序号	步长	龙贝格	精确值
1	1	-0.0025	-0.3276	1	1	-0.0025	-0.4444
2	0.5	-0.2463	-0.3962	2	1/2	-0.3149	-0.4444
5	0.2	-0.3794	-0.4300	3	1/4	-0.3890	-0.4444
10	0.1	-0.4173	-0.4387	4	1/8	-0.4190	-0.4444
20	0.05	-0.4334	-0.4422	5	1/16	-0.4325	-0.4444
30	1/30	-0.4379	-0.4432	6	1/32	-0.4388	-0.4444
40	1/40	-0.4400	-0.4436	7	1/64	-0.4417	-0.4444
50	1/50	-0.4411	-0.4438	8	1/128	-0.4431	-0.4444
80	1/80	-0.4427	-0.4441	9	1/256	-0.4438	-0.4444
100	0.01	-0.4431	-0.4442	10	1/512	-0.4441	-0.4444
500	1/500	-0.4443	-0.4444	11	1/1024	-0.4444	-0.4444
1000	1/1000	-0.4444	-0.4444	12	1/2048	-0.4444	-0.4444

图 3：各种积分结果对比

2) 结果分析

由图 1、图 2 可知复合辛普森法求积分精度明显比复合梯形法求积的精度要高，且当步长取不同值时，即 n 越大、h 越小时，积分精度越高。实验结果说明不存在一个最小的 h,使得精度不能再被改善。又两个相应的关于 h 的误差（余项）

$Rn(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$

$Rn(f)=-\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4f^{(4)}(\eta)$

其中 η 属于 a 到 b。可知 h 愈小，余项愈小，从而积分精度越高。

但用龙贝格算法会比它们更加快速地逼近精确值，大大地提高计算速度和精度。

自适应计分法是一种经济快速的求积分方法，能自动的在函数变化剧烈的地方增多点，而在被积函数变化平缓的地方减少点，是一种不均匀区间的积分方法。

5. 实验总结

通过本次实验，更加深刻的理解和掌握了各种方法进行积分的基本过程，并通过不同情况下的对比，了解到不同积分公式的优缺点，以便自己在以后使用时能够更加合理的选择。

虽然用 c++做出来的效果比起 matlab 差了很多，但是自己通过编程实现积分内部细节，已经对每种积分的数学方法有了更深的理解。

每次动手编程实现并掌握知识的过程都是一次更深入学习的实践机会，应该好好珍惜。