

# Geometrický přístup k externě vedeným kvantovým systémům

Bc. Jan Střeleček

vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Cejnar, Dr., DSc.

Ústav částicové a jaderné fyziky

16.5.2022



MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA  
Univerzita Karlova

# Geometrie problému

Které kvantové struktury je výhodné popisovat geometricky a proč to dělat?

Hamiltonian s parametrem  $\hat{H}(\lambda)$  pro  $\lambda \in \mathbb{R}^n$

- ▶ změna  $\lambda$  řídí kvantový stav
- ▶ po měření stav kolabuje do vl. stavu pro aktuální parametr  $\lambda$

Stavová varieta

$$\mathcal{M}_s := \left\{ \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \bigcup_{\lambda \in \mathcal{U}} e^{i\varphi} |s(\lambda)\rangle \right\}. \quad (1)$$

# Geometrie problému

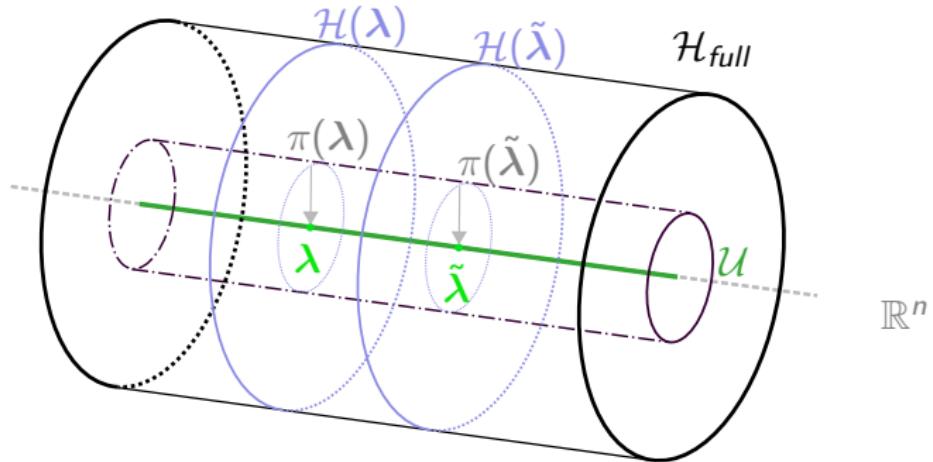
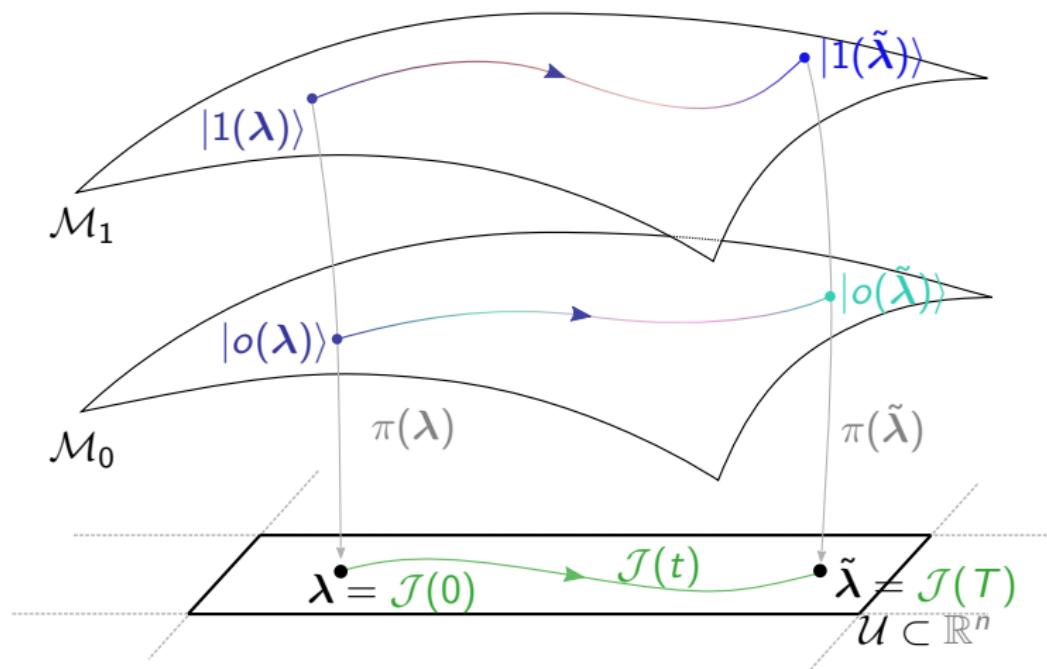


Figure: Base manifold  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ . For every point  $\lambda \in \mathcal{U}$  one Hilbert space  $\mathcal{H}(\lambda)$  is constructed as a fiber.

# Geometrie problému



# Geometrie stavových variet

Metrický tensor na stavových varietách

$$g_{\mu\nu} : \mathbb{T}\mathcal{U} \times \mathbb{T}\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{jk} d\lambda^j d\lambda^k + \mathcal{O}(\lambda^3) \equiv ds^2 := 1 - \underbrace{|\langle o(\lambda + \delta\lambda) | o(\lambda) \rangle|^2}_{F(\lambda + \delta\lambda, \lambda)}. \quad (2)$$

Na k-té stavové varietě lze ukázat:

$$g_{\mu\nu}^{(k)} = \operatorname{Re} \sum_{j \neq k} \frac{\langle k | \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda^\mu} | j \rangle \langle j | \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda^\nu} | k \rangle}{(E_k - E_j)^2}. \quad (3)$$

## Fidelita

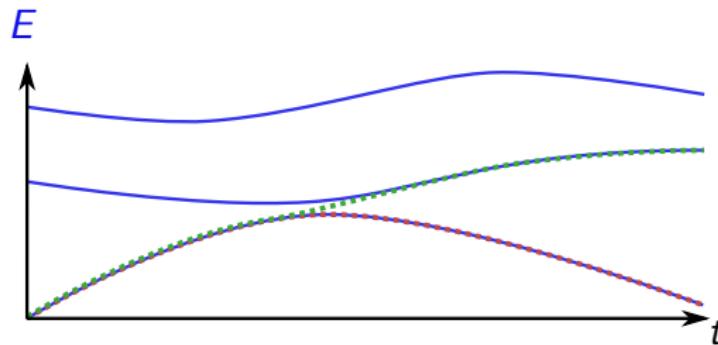
- ▶ pro čisté stavy:  $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto [0; 1]$ ,  $F(|\rho\rangle, |\sigma\rangle) = |\langle \rho | \sigma \rangle|^2$
- ▶ pravděpodobnost přechodu do nového stavu
- ▶ Infidelita  $\equiv F^* := 1 - F$

# Řízení kvantových systémů (state driving)

Jak výhodně (aniž by excitovaly) transportovat stavy?

Snaha dosáhnout co nejvyšší fidelity ( $F = 1$ )

- ▶ téměř adiabatický transport — pomalá změna parametru  $\lambda$
- ▶ variace trajektorie — malé  $\Delta E$  znamená snížení fidelity transportu
- ▶ counter-diabatické řízení — excitaci lze zamezit opravou Hamiltoniánu (teorie kalibračních polí)



# Dvouhlinový systém (toy model)

Jaké jevy lze při řízení parametrických Hamiltonianů pozorovat?

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \Omega(t) & \Delta(t) \\ \Delta(t) & -\Omega(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{H}(t) |\psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle ; \quad |\psi(t)\rangle =: \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = |0(0)\rangle \quad (6)$$

## Řešení

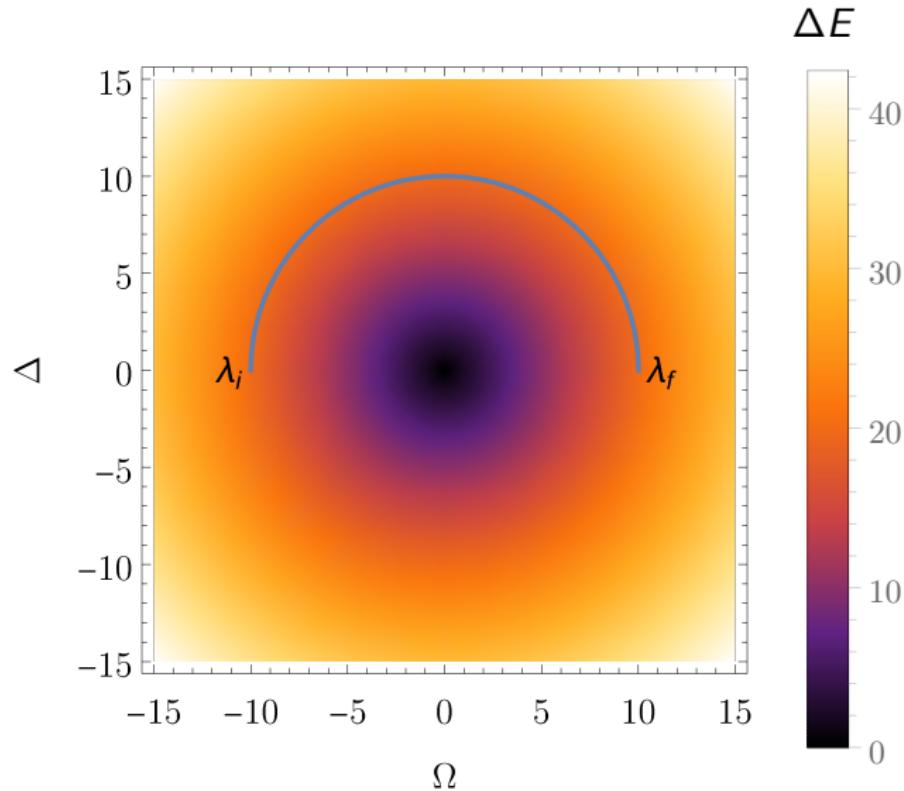
$$0 = \ddot{a}(t) + \gamma(t) \dot{a}(t) + \omega^2(t) a(t) \quad (7)$$

$$\gamma(t) := -\frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} \quad (8)$$

$$\omega^2(t) := i \left( \dot{\Omega}(t) - \frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} \Omega(t) \right) + \Delta^2(t) + \Omega^2(t) \quad (9)$$

# Dvouhladinový systém (toy model)

Geodetický driving



# Dvouhlinový systém (toy model)

Poznatek #1: Existují výjimečné finální časy, pro které je  $F = 1$

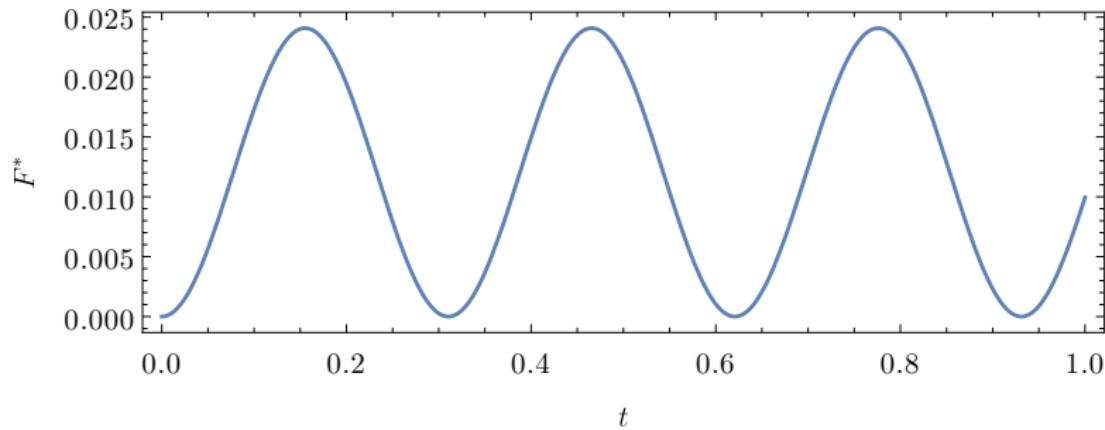
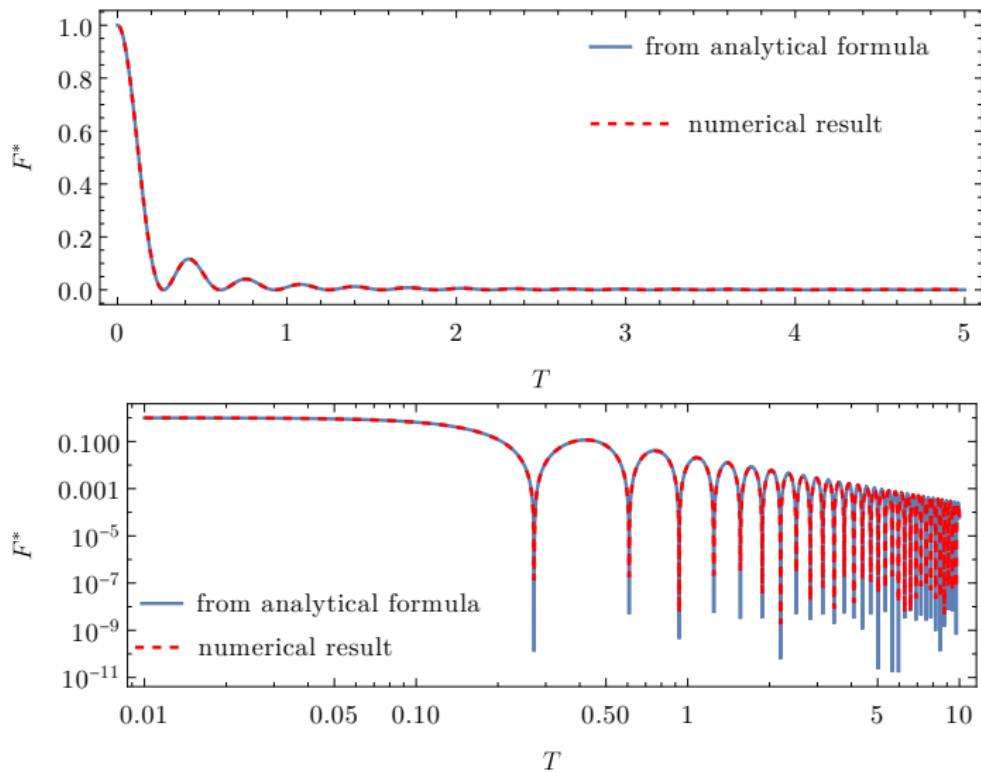


Figure: Infidelita v čase pro finální čas  $T = 1$ , geodetický driving.

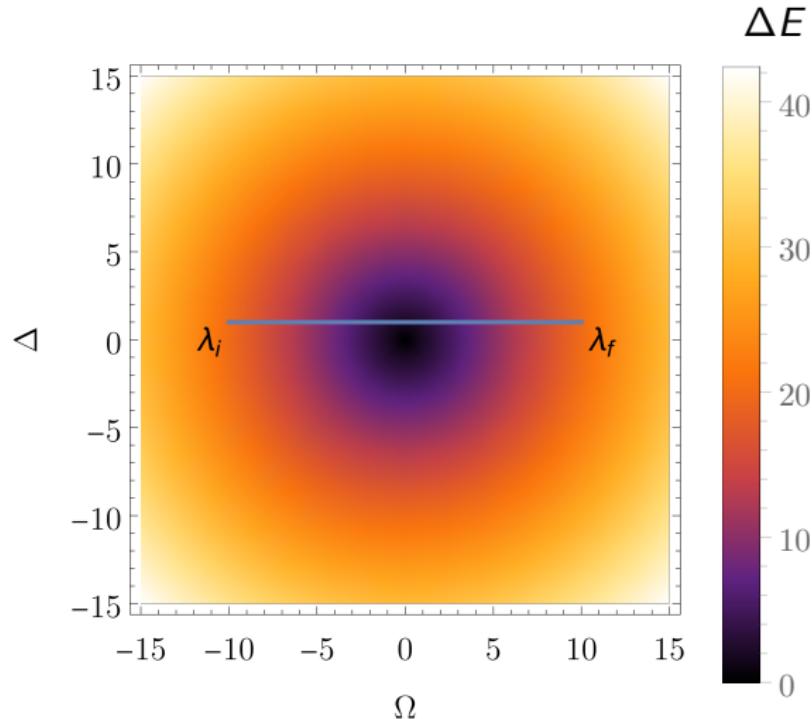
# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #1: Existují výjimečné finální časy, pro které je  $F = 1$



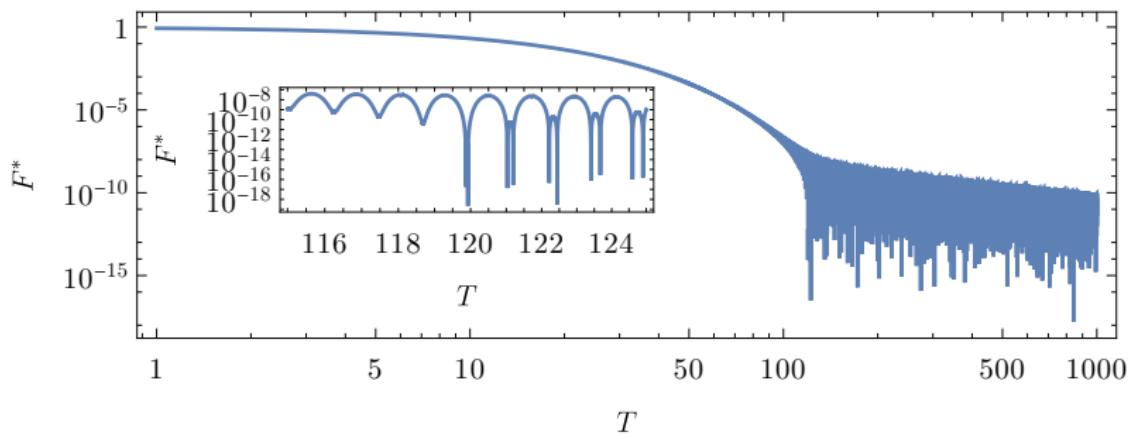
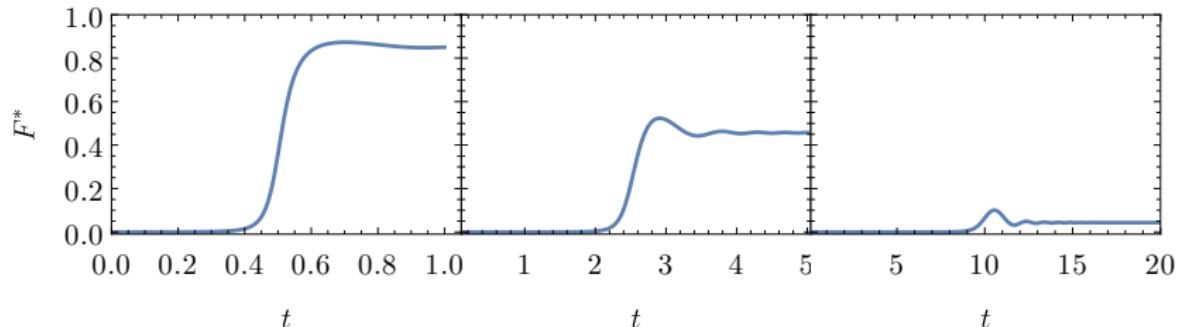
# Dvouhladinový systém (toy model)

Lineární driving



# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #2: přibližení energetických hladin tvoří kmity, existuje *kritický finální čas*



# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #3: Kritický finální čas je v bodě, kdy oscilace nabývají  $F^* = 0$

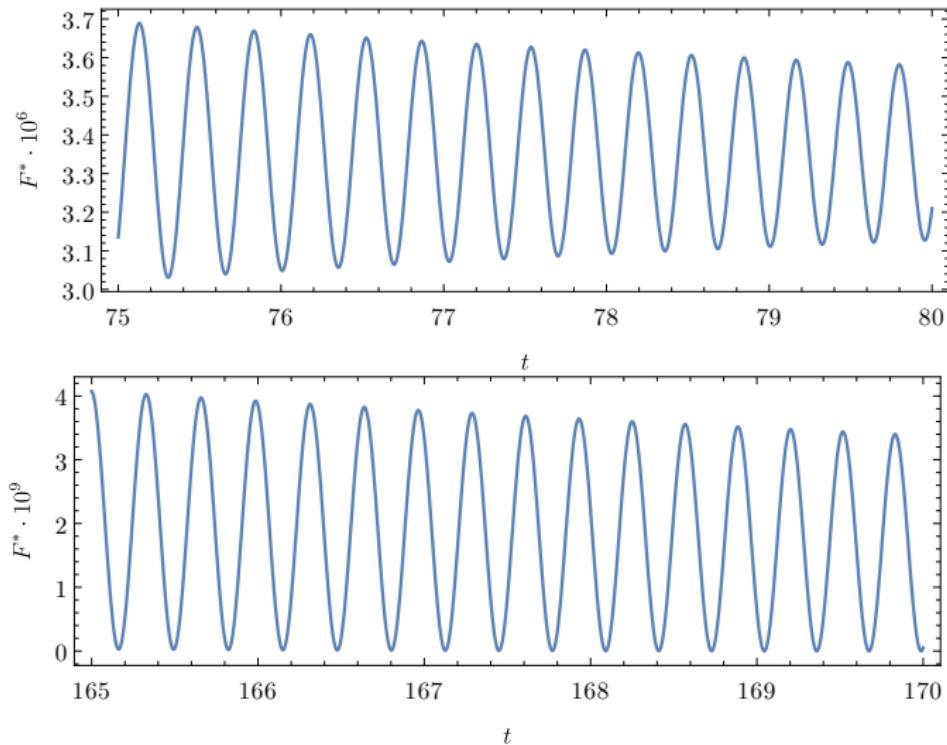


Figure:  $T = 80 < T_c$  (nahoře),  $T = 170 > T_c$  (dole)

# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #4: Landau-Zener a adiabatická perturbační teorie

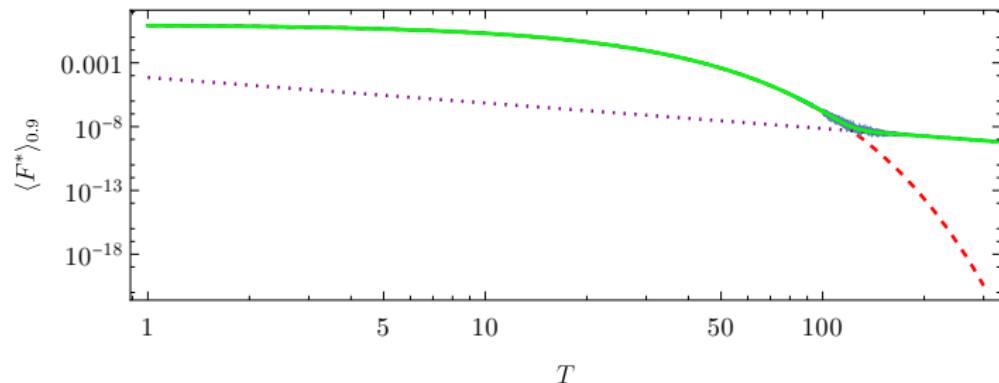


Figure: Zhlazená finální infidelita v závislosti na finálním čase, popsaná součtem of Landau-Zenerovy rovnice a adiabatickou perturbační teorií.

# Lipkin-Meshkov-Glick model

Jak vypadá řízení v mnohočásticovém, zcela propojeném systému qubitů?

$$\hat{H}(\lambda, \chi) = \hat{J}_3 + \lambda \hat{V}_1 + \chi \hat{V}_2 + \chi^2 \hat{V}_3, \quad (10)$$

pro

$$\hat{V}_1 := -\frac{1}{2j} \hat{J}_1^2 \quad (11)$$

$$\hat{V}_2 := -\frac{1}{2j} \left[ \hat{J}_1 (\hat{J}_3 + j \mathbb{1}) + (\hat{J}_3 + j \mathbb{1}) \hat{J}_1 \right] \quad (12)$$

$$\hat{V}_3 := -\frac{1}{2j} (\hat{J}_3 + j \mathbb{1})^2, \quad (13)$$

a operátor momentu hybnosti  $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)^T$ . Zvolíme  $j = N/2$ .

# Lipkin-Meshkov-Glick model

$N = 3$

Pentadiagonální maticová reprezentace (baze sférických harmonických funkcí  $|j, m\rangle$ ).

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda+6}{4} & -\frac{\chi}{2\sqrt{3}} & -\frac{\lambda}{2\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{\chi}{2\sqrt{3}} & \frac{(-7\lambda-4\chi^2-6)}{12} & -\chi & -\frac{\lambda}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\lambda}{2\sqrt{3}} & -\chi & \frac{(-7\lambda-16\chi^2+6)}{12} & -\frac{5\chi}{2\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{\lambda}{2\sqrt{3}} & -\frac{5\chi}{2\sqrt{3}} & -\frac{\lambda}{4} - 3\chi^2 + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Spektrum je degenerované, lze zapsat jako

$$E_0 = \left( G - F - \frac{\sqrt{D - E}}{2} \right), \quad E_1 = \left( G - F + \frac{\sqrt{D - E}}{2} \right) \quad (15)$$

$$E_2 = \left( G + F - \frac{\sqrt{D + E}}{2} \right), \quad E_3 = \left( G + F + \frac{\sqrt{D + E}}{2} \right) \quad (16)$$

## Lipkin-Meshkov-Glick model

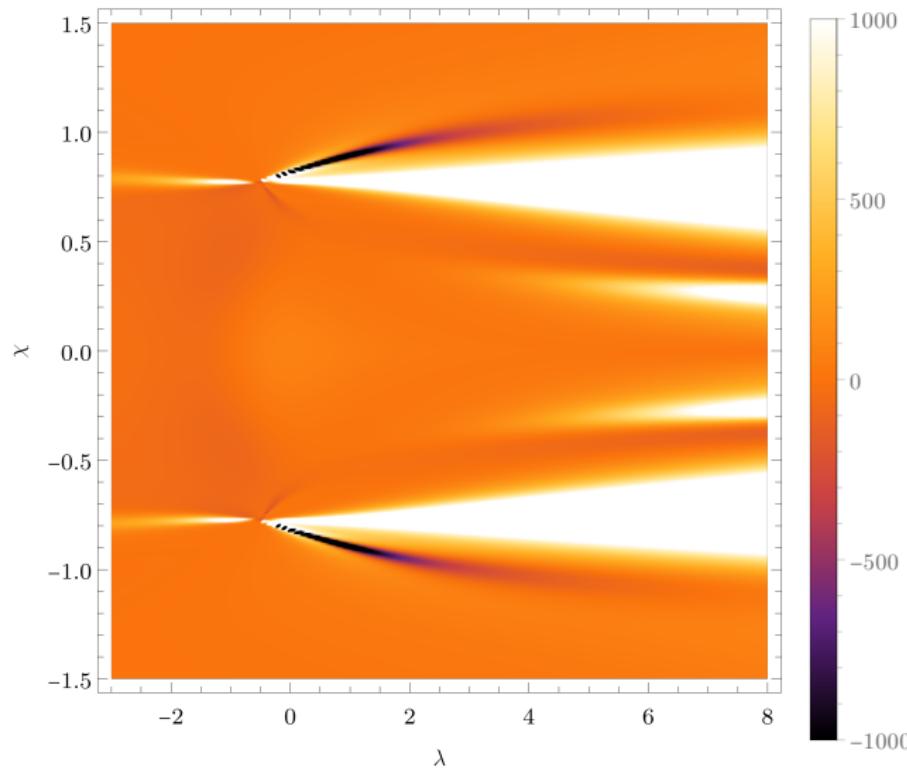


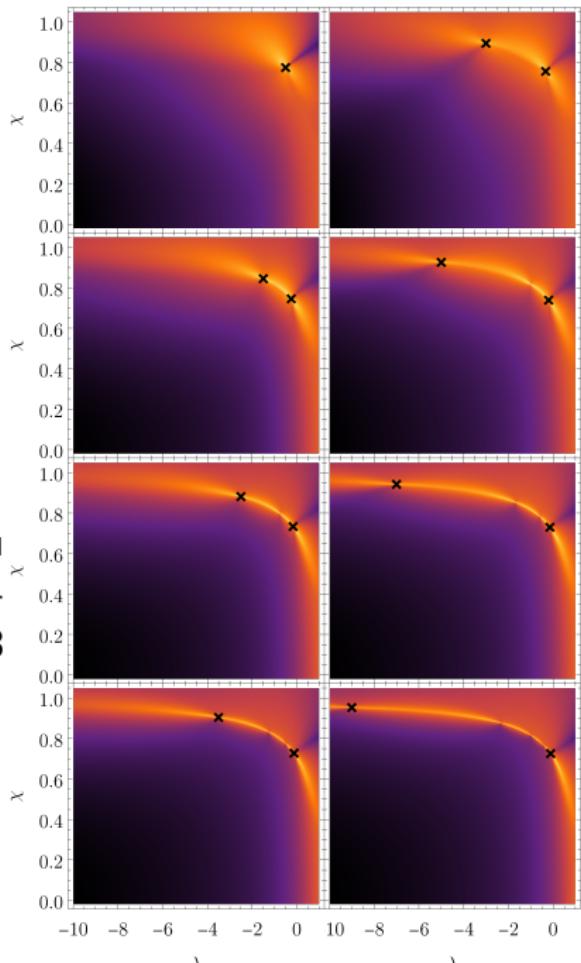
Figure: Ricciho křivost základní stavové variety pro  $N = 3$ .

## Lipkin-Meshkov-Glick model

$$(\lambda_I; \pm \chi_I) = \begin{cases} \left(1 - \frac{N}{2}; \sqrt{\frac{N}{N+2}}\right) \\ \left(1 - N; \sqrt{\frac{N}{N+1}}\right) \end{cases}$$

pro  $N \geq 3$  { liché  
sudé

**Figure:** Degenerace vpravo jsou značeny mezi  $E_0$  a  $E_1$  pro dimenze 1,3,5,7 v prvním a 2,4,5,8 v druhém sloupci.



# Lipkin-Meshkov-Glick model

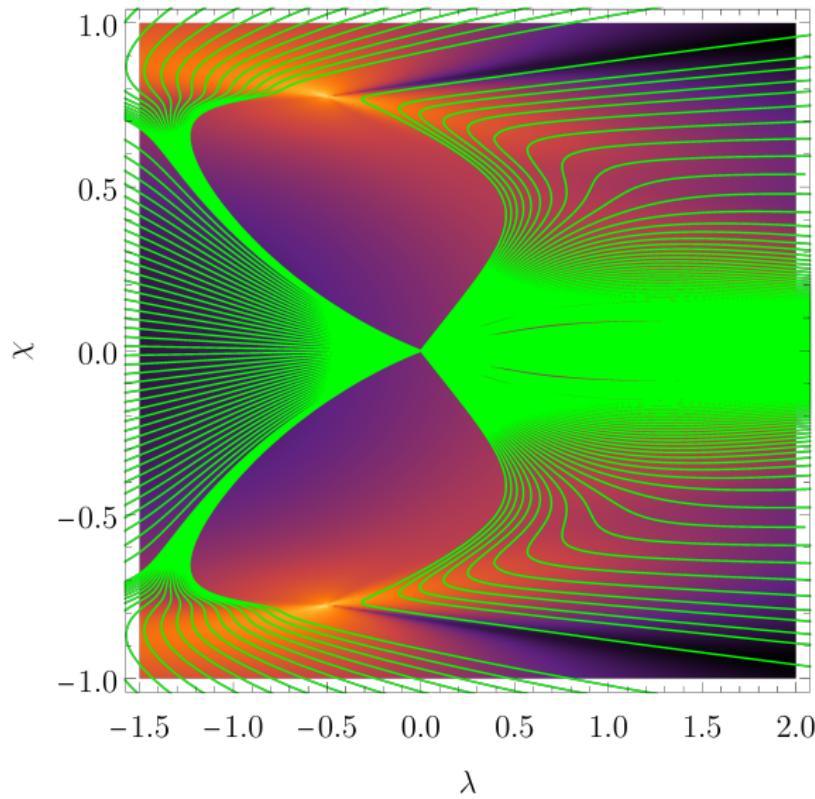


Figure: Geodetiky pro  $N = 3$  z bodu  $(\lambda_i; \chi_i) = (0; 0)$ . V pozadí  $\det g$ .

# Lipkin-Meshkov-Glick model

Transport pomocí quenchů.

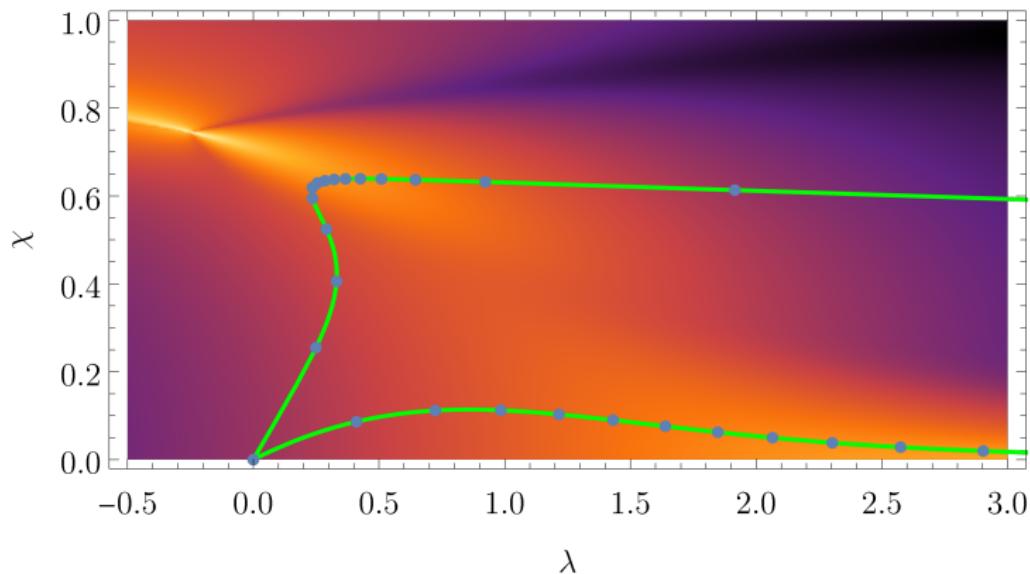


Figure: Dimenze  $N = 3$ , 2 různé geodetiky, časový rozdíl mezi vedlejšími body  $\Delta t = 0.5$ .

# Závěr

Co jsme se dozvěděli a kudy dál?

## Nové odpovědi

- ▶ přiblížení energetických hladin vede k oscilacím
- ▶ význačné finální časy s velkou fidelitou
- ▶ známe strukturu ground state manifoldu pro Lipkin-Meshkov-Glick model
- ▶ modelování pomocí Landau-Zenerovy formule a adiabatické perturbační teorie

## Nové otázky

- ▶ Nalezení trajektorie s maximální fidelitou
- ▶ korespondence fidelity s energetickou variancí
- ▶ dokázání diabolických bodů v Lipkin-Meshkov-Glick modelu

Děkuji za pozornost

Nechť je zbytek Vašeho dne krásný...