

# Geometrický přístup k externě vedeným kvantovým systémům

Bc. Jan Střeleček

vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Cejnar, Dr., DSc.

Ústav částicové a jaderné fyziky

16.5.2022



MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA  
Univerzita Karlova

# Geometrie problému

Které kvantové struktury je výhodné popisovat geometricky a proč to dělat?

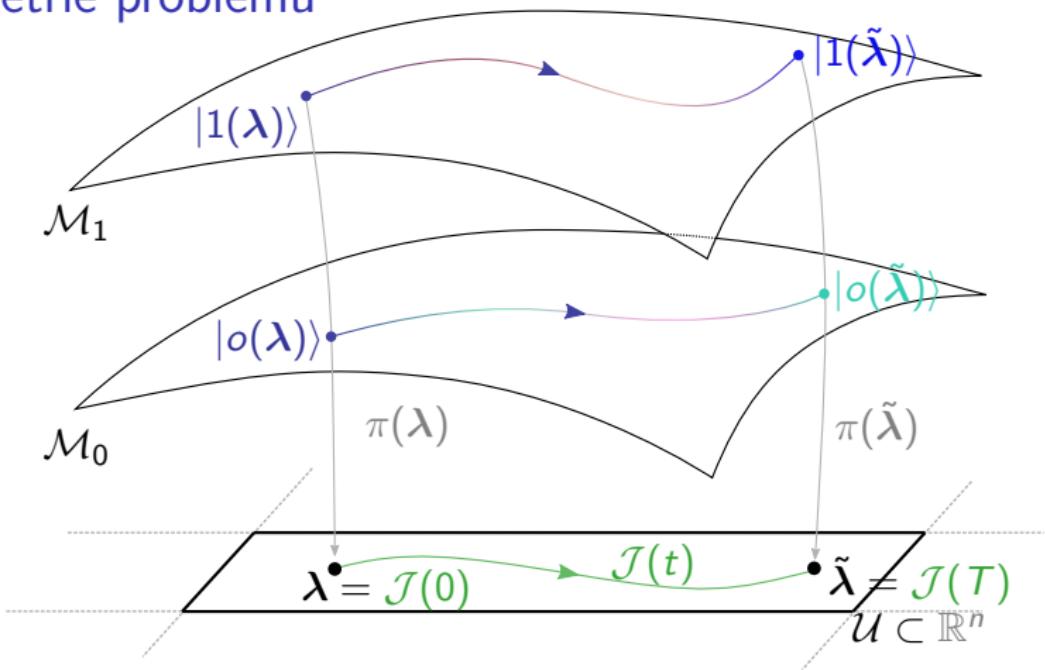
Hamiltonian s parametrem  $\hat{H}(\lambda)$  pro  $\lambda \in \mathbb{R}^n$

- ▶ změna  $\lambda$  řídí kvantový stav
- ▶ po měření stav kolabuje do vl. stavu pro aktuální parametr  $\lambda$

Využití

- ▶ kvantové počítače ( $\lambda$  je síla interakce mezi qubity)
- ▶ biologické struktury (např. fotosyntéza)

## Geometrie problému



Základní stavová varieta

$$\mathcal{M}_0 := \left\{ \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \bigcup_{\lambda \in \mathcal{U}} e^{i\varphi} |0(\lambda)\rangle \right\}. \quad (1)$$

# Geometrie stavových variet

## Metrický tensor na stavových varietách

$$g_{\mu\nu} : \mathbb{T}\mathcal{U} \times \mathbb{T}\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{jk} d\lambda^j d\lambda^k + \mathcal{O}(\lambda^3) \equiv ds^2 := 1 - \underbrace{|\langle o(\lambda + \delta\lambda) | o(\lambda) \rangle|^2}_{F(\lambda + \delta\lambda, \lambda)}. \quad (2)$$

Na k-té stavové varietě lze ukázat:

$$g_{\mu\nu}^{(k)} = \operatorname{Re} \sum_{j \neq k} \frac{\langle k | \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda^\mu} | j \rangle \langle j | \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda^\nu} | k \rangle}{(E_k - E_j)^2}. \quad (3)$$

## Fidelita

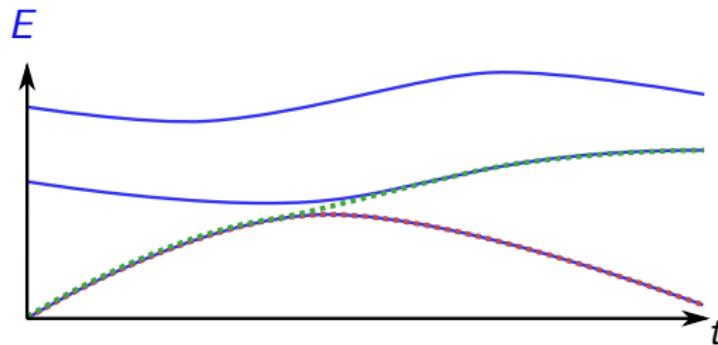
- ▶ pro čisté stavy:  $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto [0; 1]$ ,  $F(|\rho\rangle, |\sigma\rangle) = |\langle \rho | \sigma \rangle|^2$
- ▶ při drivingu na stavové varietě: pravděpodobnost neexcitace
- ▶ Infidelita  $\equiv F^* := 1 - F$

# Řízení kvantových systémů (state driving)

Jak výhodně (aniž by excitovaly) transportovat stavy?

Snaha dosáhnout co nejvyšší fidelity ( $F = 1$ )

- ▶ téměř adiabatický transport — pomalá změna parametru  $\lambda$
- ▶ variace trajektorie — malé  $\Delta E$  znamená snížení fidelity transportu
- ▶ counter-diabatické řízení — excitaci lze zamezit opravou Hamiltoniánu (teorie kalibračních polí)



# Dvouhlinový systém (toy model)

Poznatek #1: Fidelita se chová jako harmonický oscilátor.

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \Omega(t) & \Delta(t) \\ \Delta(t) & -\Omega(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{H}(t) |\psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle ; \quad |\psi(t)\rangle =: \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = |0(0)\rangle \quad (6)$$

## Řešení

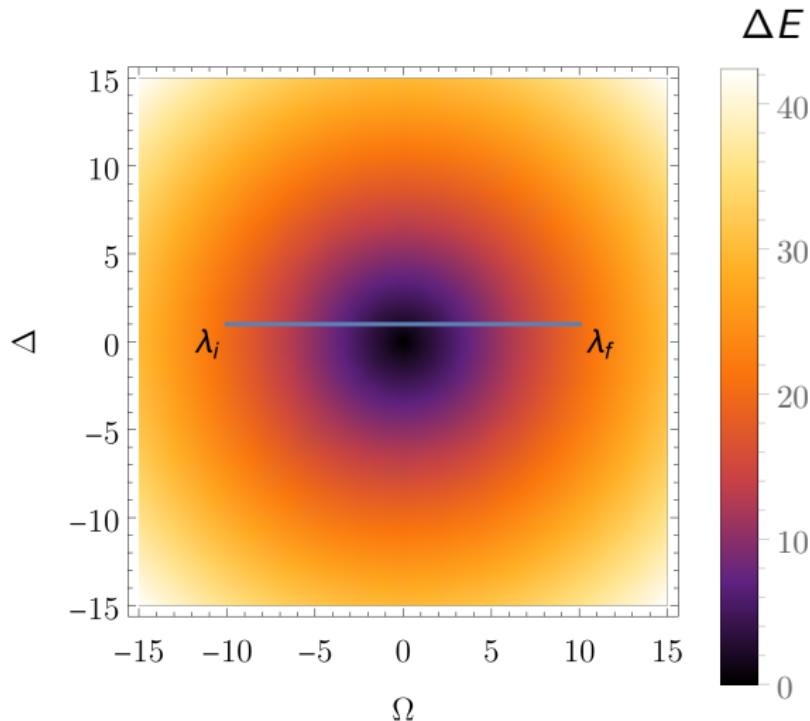
$$0 = \ddot{a}(t) + \gamma(t) \dot{a}(t) + \omega^2(t) a(t) \quad (7)$$

$$\gamma(t) := -\frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} \quad (8)$$

$$\omega^2(t) := i \left( \dot{\Omega}(t) - \frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} \Omega(t) \right) + \Delta^2(t) + \Omega^2(t) \quad (9)$$

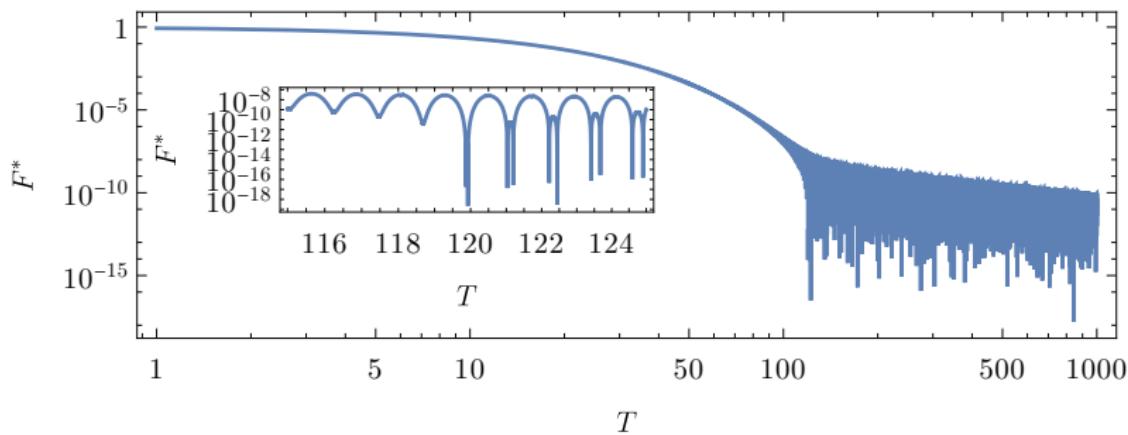
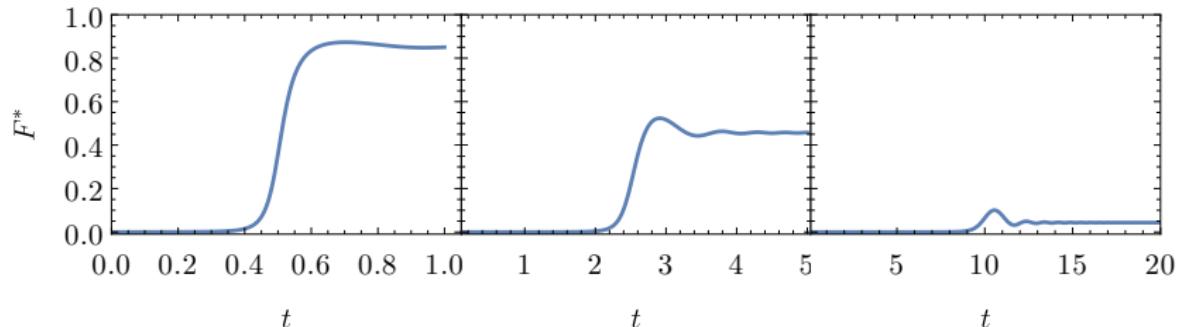
## Dvouhladinový systém (toy model)

## Lineární driving



# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #2: přibližení energetických hladin tvoří kmity, existuje *kritický finální čas*



# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #3: Kritický finální čas je v bodě, kdy oscilace nabývají  $F^* = 0$

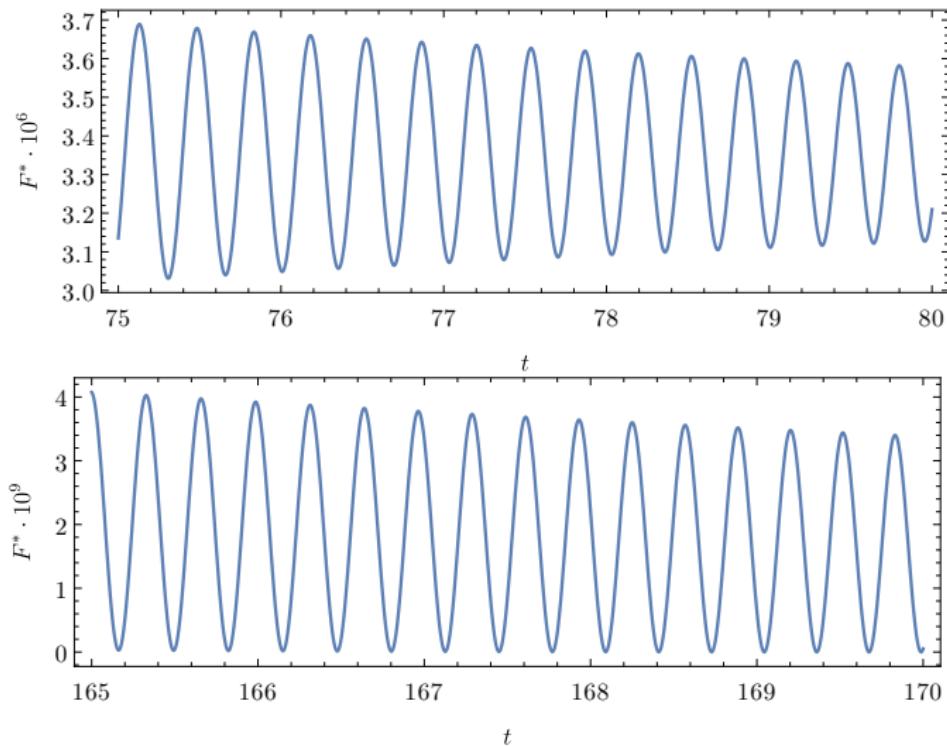


Figure:  $T = 80 < T_c$  (nahoře),  $T = 170 > T_c$  (dole)

# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #4: Landau-Zener a adiabatická perturbační teorie

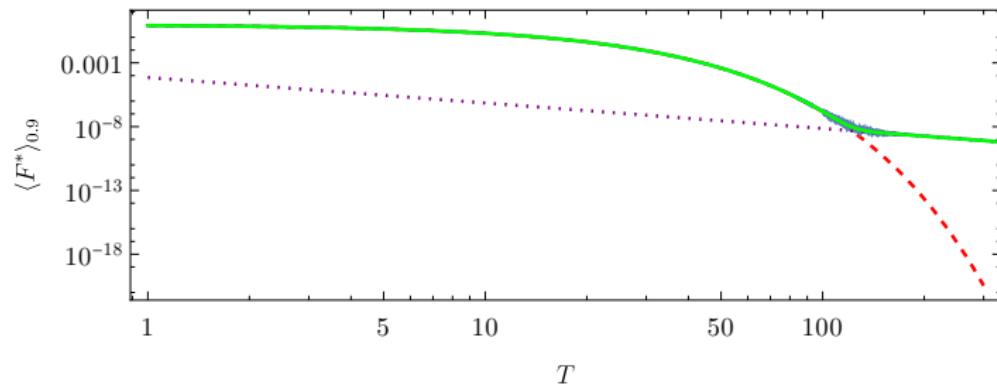


Figure: Zhlazená finální infidelita v závislosti na finálním čase, popsaná součtem of Landau-Zenerovy rovnice a adiabatickou perturbační teorií.

# Lipkin-Meshkov-Glick model

Jak vypadá řízení v mnohočásticovém, zcela propojeném systému qubitů?

$$\hat{H}(\lambda, \chi) = \hat{J}_3 + \lambda \hat{V}_1 + \chi \hat{V}_2 + \chi^2 \hat{V}_3, \quad (10)$$

pro

$$\hat{V}_1 := -\frac{1}{2j} \hat{J}_1^2 \quad (11)$$

$$\hat{V}_2 := -\frac{1}{2j} \left[ \hat{J}_1 (\hat{J}_3 + j \mathbb{1}) + (\hat{J}_3 + j \mathbb{1}) \hat{J}_1 \right] \quad (12)$$

$$\hat{V}_3 := -\frac{1}{2j} (\hat{J}_3 + j \mathbb{1})^2, \quad (13)$$

a operátor momentu hybnosti  $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)^T$ . Zvolíme  $j = N/2$ .

## Lipkin-Meshkov-Glick model

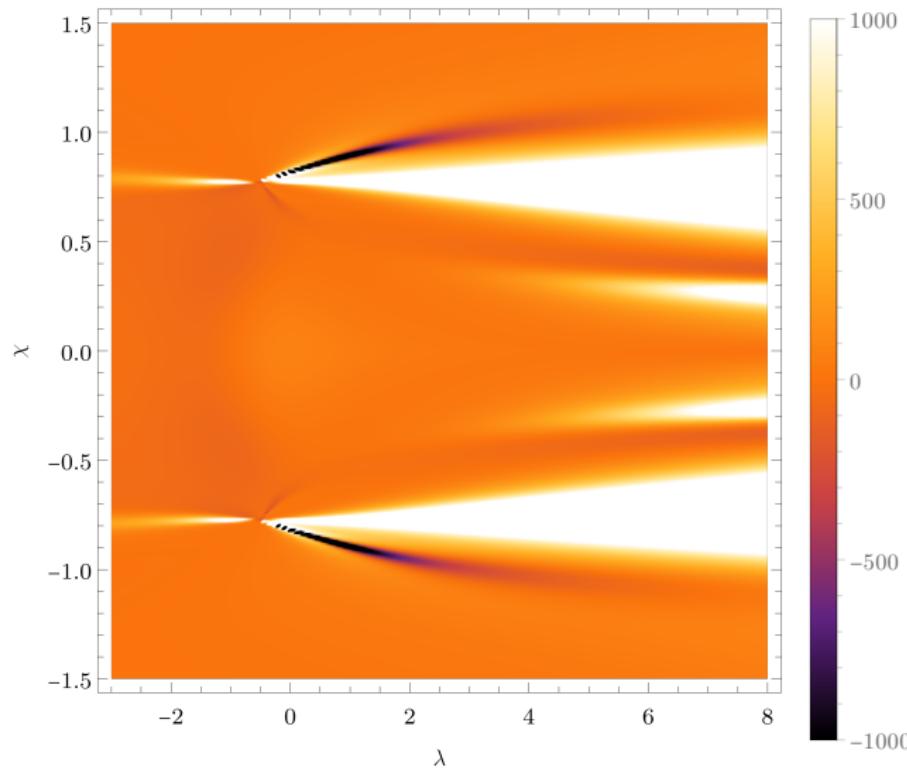


Figure: Ricciho křivost základní stavové variety pro  $N = 3$ .

# Lipkin-Meshkov-Glick model

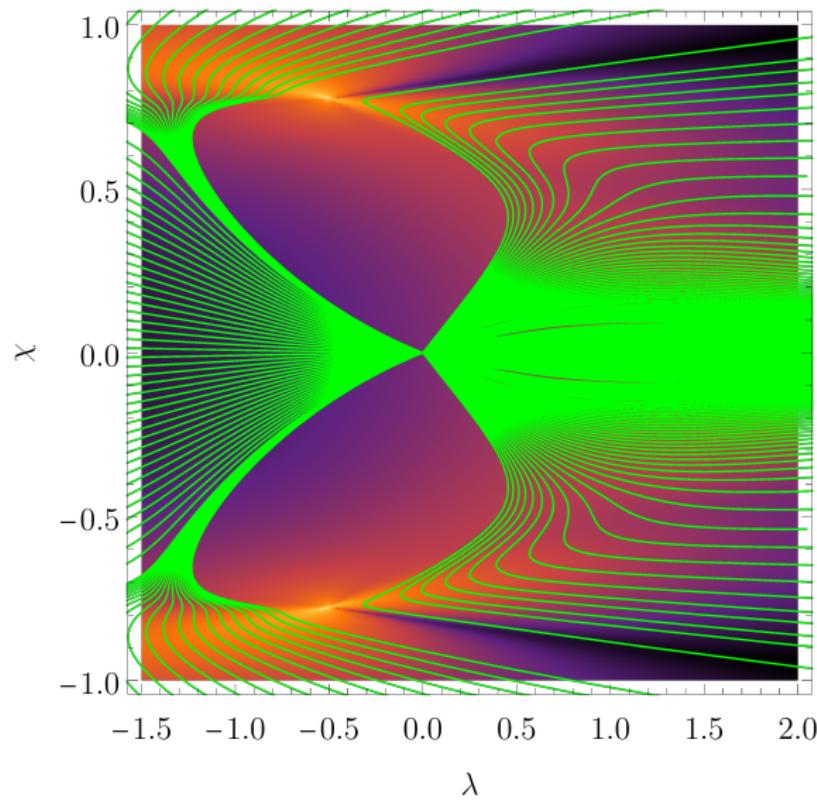


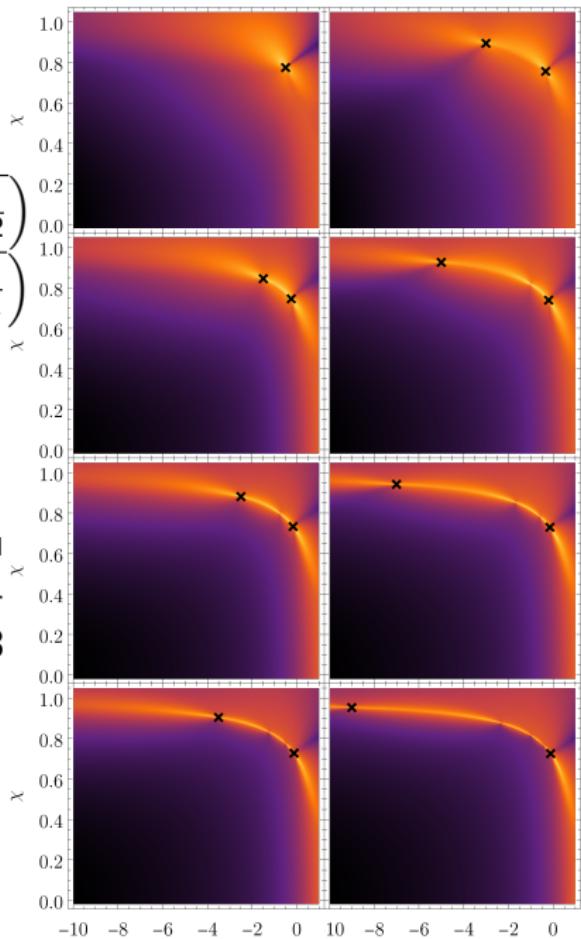
Figure: Geodetiky pro  $N = 3$  z bodu  $(\lambda_i; \chi_i) = (0; 0)$ . V pozadí  $\det g$ .

# Lipkin-Meshkov-Glick model

$$(\lambda_{l,r}; \pm \chi_{l,r}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{N}{2}; \sqrt{\frac{N}{N+2}}\right) \\ \left(1 - N; \sqrt{\frac{N}{N+1}}\right) \end{cases}$$

pro  $N \geq 3$   $\begin{cases} \text{liché} \\ \text{sudé} \end{cases}$

Figure: Degenerace vpravo jsou značeny mezi  $E_0$  a  $E_1$  pro dimenze 1,3,5,7 v prvním a 2,4,5,8 v druhém sloupci.



# Lipkin-Meshkov-Glick model

Zpomalování geodetik u singularit a jejich využití – transport pomocí quenchů.

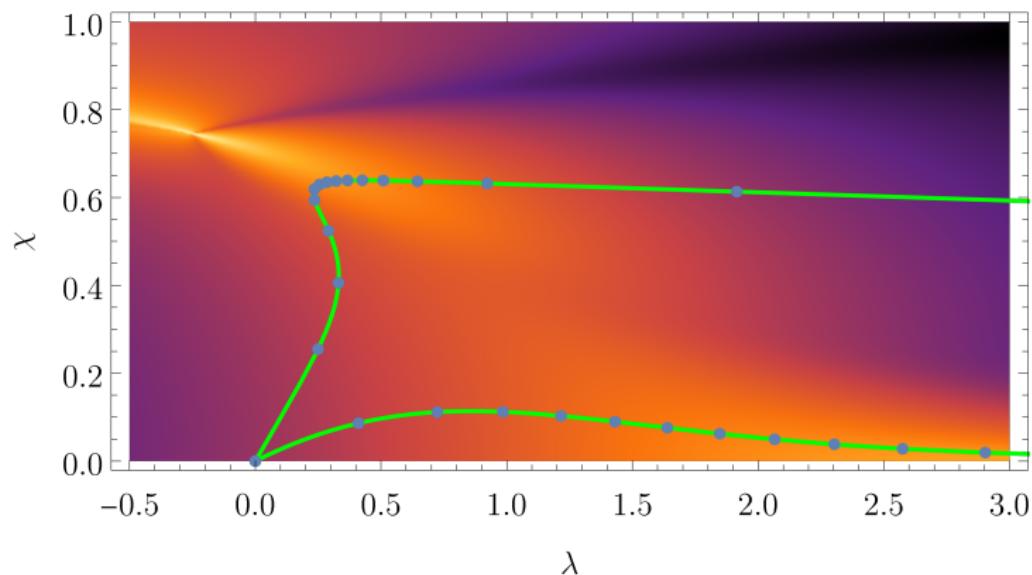


Figure: Dimenze  $N = 3$ , 2 různé geodetiky, časový rozdíl mezi vedlejšími body  $\Delta t = 0.5$ .

# Závěr

Co jsme se dozvěděli a kudy dál?

## Co jsme se dozvěděli

- ▶ Reformulace některých geometrických struktur v teorii
- ▶ prozkoumána fidelita lineárního a geodetického drivingu ve dvouhlinovém systému
  - ▶ vysvětlení oscilací a analytické vztahy pro geodetický a lineární driving
  - ▶ význačné body finálního času (někdy je  $F = 1$ , vysvětlení  $T_C$ )
  - ▶ approximativní metody (*Landau-Zener,adiabatická perturbační teorie*)
- ▶ Pro Lipkin-Meshkov-Glick model známe strukturu základní stavové variety
  - ▶ geometrické veličiny
  - ▶ geodetiky
  - ▶ body degenerace v závislosti na dimenzi

# Děkuji za pozornost

Nechť je zbytek Vašeho dne krásný...

Nejdůležitější odkazy zde:

**M. Kolodrubetz, P. Mehta, and A. Polkovnikov.** Geometry and non-adiabatic response in quantum and classical systems. Physics Reports, 697:1–87, 2017. ISSN 0370-1573.

**M. V. Berry.** Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proc. R. Soc. Lond. A, 392(1802):45–57, 1984. doi: 10.1098/rspa.1984.0023.

**M. V. Berry.** The quantum phase, five years after. A Shapere, F Wilczek. (World Scientific) 7–28, 1989. Geometric phases in physics, 7–28, Adv. Ser. Math. Phys., 5,.

**M. V. Berry.** Transitionless quantum driving. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 42(36), 2009. doi: 10.1088/1751-8113/42/36/ 365303.

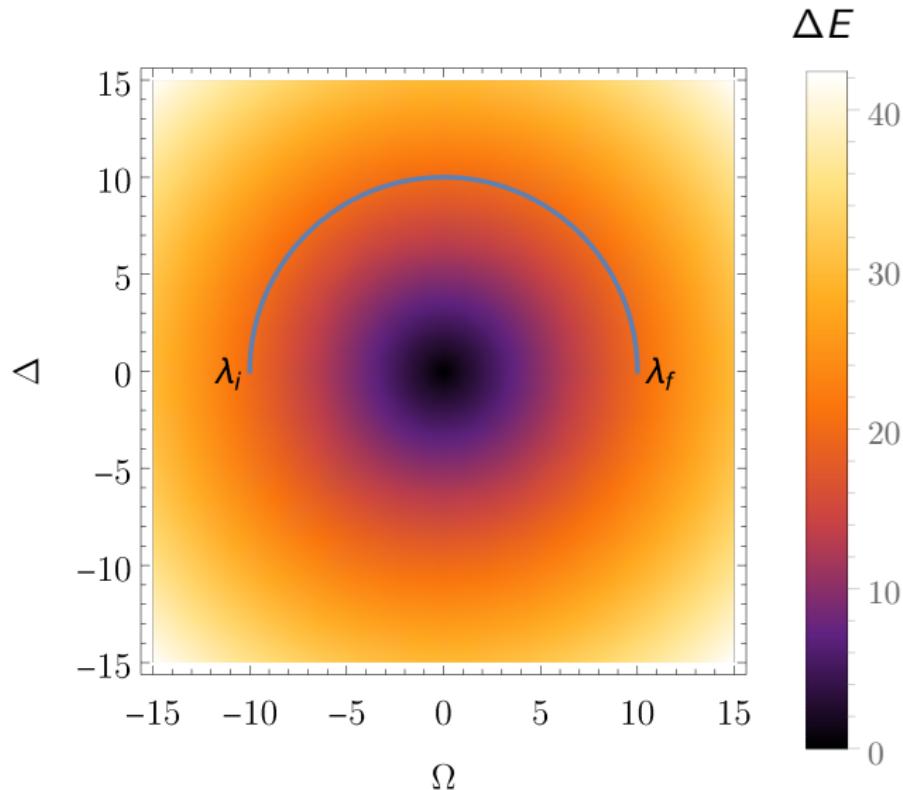
... více brzy ve článcích spolu s Pavel Cejnar, Felipe Matus a Pavel Stránský.

## Otázka oponenta

V diskusi dvouhlinového modelu mimo jiné diskutujete vedení po geodetice, ale nediskutujete geometrii variety základního stavu, neuvádíte metrický tensor ani nedokazujete, že zvolená trajektorie je skutečně geodetika. Bylo by možné tyto informace doplnit?

# Otázka oponenta ohledně Dvouhladinového systému

Důkaz, že oblouk na obrázku je geodetikou



# Otzáka oponenta ohledně Dvouhlinového systému

## Metrický tenzor

Od Hamiltonianu v souřadnicích  $(\Delta(t); \Omega(t))$

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \Omega(t) & \Delta(t) \\ \Delta(t) & -\Omega(t) \end{pmatrix} \quad (14)$$

přejdeme k polárním souřadnicím  $(r(t), \phi(t))$ , definovaným vztahy

$$\Delta(t) = r(t) \sin \phi(t), \quad \Omega(t) = r(t) \cos \phi(t). \quad (15)$$

V nich je metrický tenzor

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \text{Re} \frac{\langle 0 | \partial_\mu \hat{H} | 1 \rangle \langle 1 | \partial_\nu \hat{H} | 0 \rangle}{(E_1 - E_0)^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

# Otázka oponenta ohledně Dvouhlinového systému

## Metrický tenzor

Geodetickou rovnici pak splňují drivingy s  $\ddot{\theta} = 0$ , tedy

$$\theta(t) = \theta_i + (\theta_F - \theta_i) \frac{t}{T} \quad (17)$$

- ▶  $\theta_i$  je počáteční úhel v čase  $t = 0$
- ▶  $\theta_T$  je finální úhel v čase  $T$

$r(t)$  lze volit libovolně, v rámci práce byl zvolen geodetický driving  
 $r(t) = \text{konst.}$

Třída geodetik je ale mnohem širší...

# Otzávka oponenta ohledně Dvouhlinového systému

## Metrický tenzor

Zafixujme jednu souřadnici,  $(\Delta; \Omega(t))$ . Pak

$$g_{\Omega\Omega} = \frac{\Omega^2}{4(\Omega^2 + \Delta^2)^2}. \quad (18)$$

Z vlastnosti geodetiky  $g_{\Omega\Omega}\dot{\Omega}^2 = \text{konst.}$  plyní

$$\Omega(t) = \Delta \tan \left( a_i + (a_f - a_i) \frac{t}{T} \right); \quad a_{i,f} := \arctan \frac{\Omega_{i,f}}{\Delta} \quad (19)$$

$\Rightarrow$  existuje závislost  $\Omega(t)$ , že křivka lineární v parametrickém prostoru je geodetikou.