

# Geometrický přístup k externě vedeným kvantovým systémům

Bc. Jan Střeleček

vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Cejnar, Dr., DSc.

Ústav částicové a jaderné fyziky

16.5.2022



MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA  
Univerzita Karlova

# Geometrie problému

Které kvantové struktury je výhodné popisovat geometricky a proč to dělat?

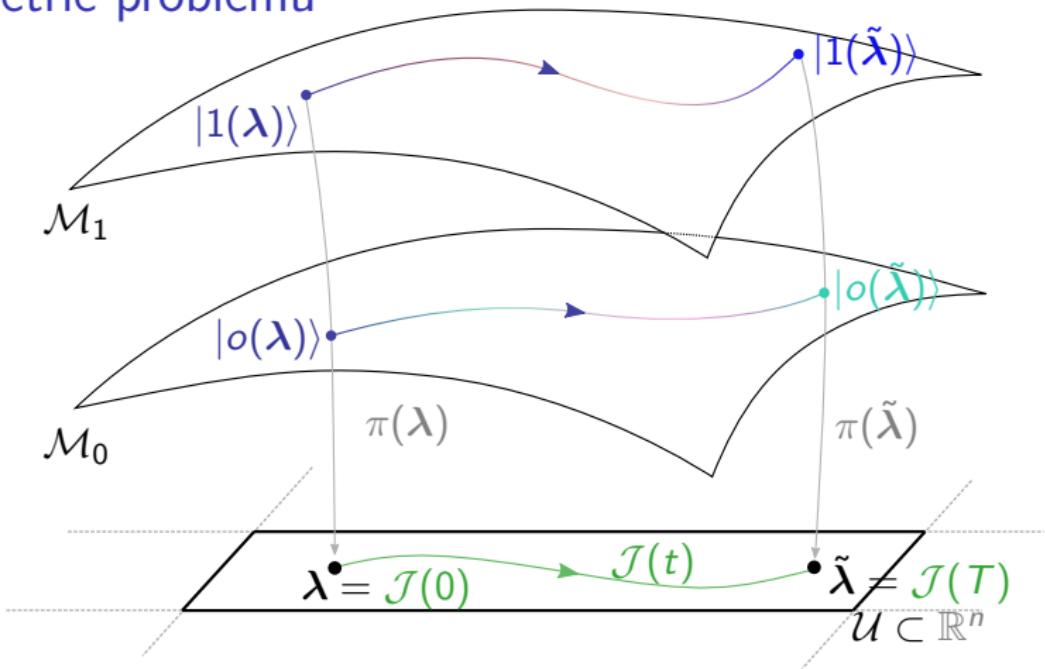
Hamiltonian s parametrem  $\hat{H}(\lambda)$  pro  $\lambda \in \mathbb{R}^n$

- ▶ změna  $\lambda$  řídí kvantový stav
- ▶ po měření stav kolabuje do vl. stavu pro aktuální parametr  $\lambda$

Využití

- ▶ kvantové počítače ( $\lambda$  je síla interakce mezi qubity)
- ▶ biologické struktury (např. fotosyntéza)

## Geometrie problému



Základní stavová varieta

$$\mathcal{M}_0 := \left\{ \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \bigcup_{\lambda \in \mathcal{U}} e^{i\varphi} |0(\lambda)\rangle \right\}. \quad (1)$$

# Geometrie stavových variet

## Metrický tensor na stavových varietách

$$g_{\mu\nu} : \mathbb{T}\mathcal{U} \times \mathbb{T}\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{jk} d\lambda^j d\lambda^k + \mathcal{O}(\lambda^3) \equiv ds^2 := 1 - \underbrace{|\langle o(\lambda + \delta\lambda) | o(\lambda) \rangle|^2}_{F(\lambda + \delta\lambda, \lambda)}. \quad (2)$$

Na k-té stavové varietě lze ukázat:

$$g_{\mu\nu}^{(k)} = \operatorname{Re} \sum_{j \neq k} \frac{\langle k | \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda^\mu} | j \rangle \langle j | \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda^\nu} | k \rangle}{(E_k - E_j)^2}. \quad (3)$$

## Fidelita

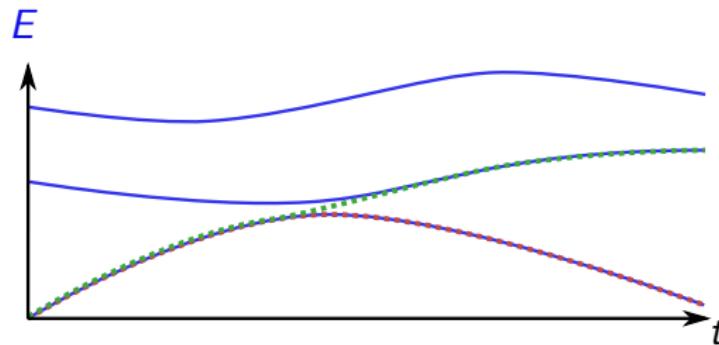
- ▶ pro čisté stavy:  $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto [0; 1]$ ,  $F(|\rho\rangle, |\sigma\rangle) = |\langle \rho | \sigma \rangle|^2$
- ▶ při drivingu na stavové varietě: pravděpodobnost neexcitace
- ▶ Infidelita  $\equiv F^* := 1 - F$

# Řízení kvantových systémů (state driving)

Jak výhodně (aniž by excitovaly) transportovat stavy?

Snaha dosáhnout co nejvyšší fidelity ( $F = 1$ )

- ▶ téměř adiabatický transport — pomalá změna parametru  $\lambda$
- ▶ variace trajektorie — malé  $\Delta E$  znamená snížení fidelity transportu
- ▶ counter-diabatické řízení — excitaci lze zamezit opravou Hamiltoniánu (teorie kalibračních polí)



# Dvouhlinový systém (toy model)

Poznatek #1: Fidelita se chová jako harmonický oscilátor.

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \Omega(t) & \Delta(t) \\ \Delta(t) & -\Omega(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{H}(t) |\psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle ; \quad |\psi(t)\rangle =: \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = |0(0)\rangle \quad (6)$$

## Řešení

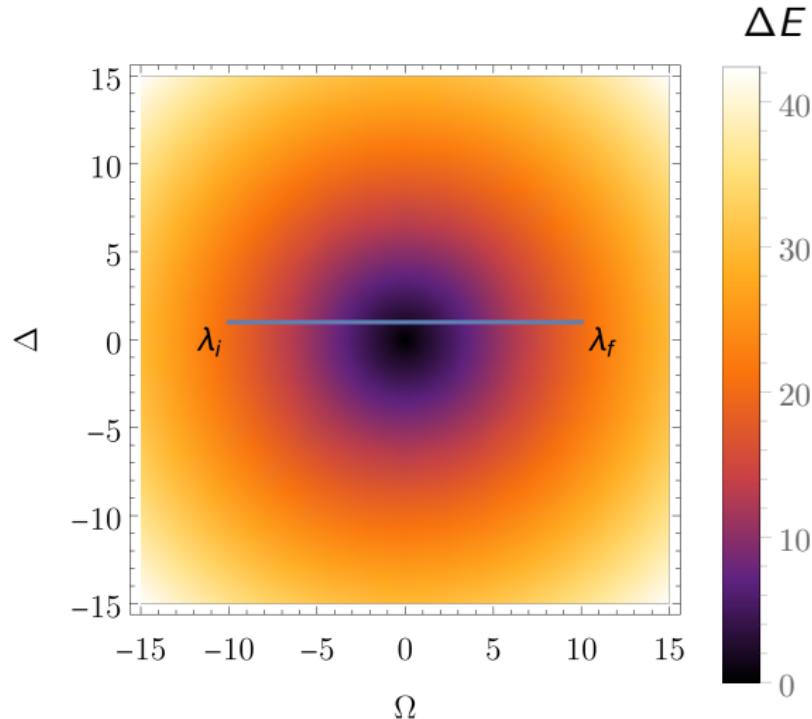
$$0 = \ddot{a}(t) + \gamma(t) \dot{a}(t) + \omega^2(t) a(t) \quad (7)$$

$$\gamma(t) := -\frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} \quad (8)$$

$$\omega^2(t) := i \left( \dot{\Omega}(t) - \frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} \Omega(t) \right) + \Delta^2(t) + \Omega^2(t) \quad (9)$$

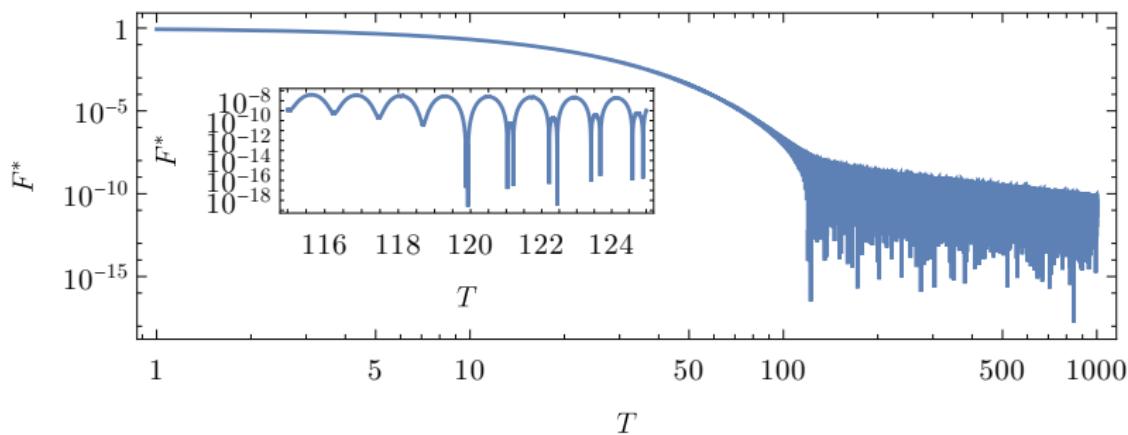
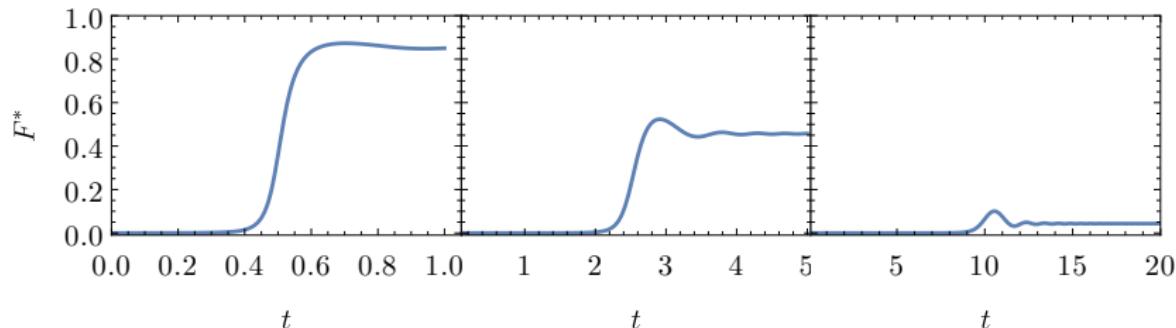
# Dvouhladinový systém (toy model)

Lineární driving



# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #2: přibližení energetických hladin tvoří kmity, existuje *kritický finální čas*



# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #3: Kritický finální čas je v bodě, kdy oscilace nabývají  $F^* = 0$

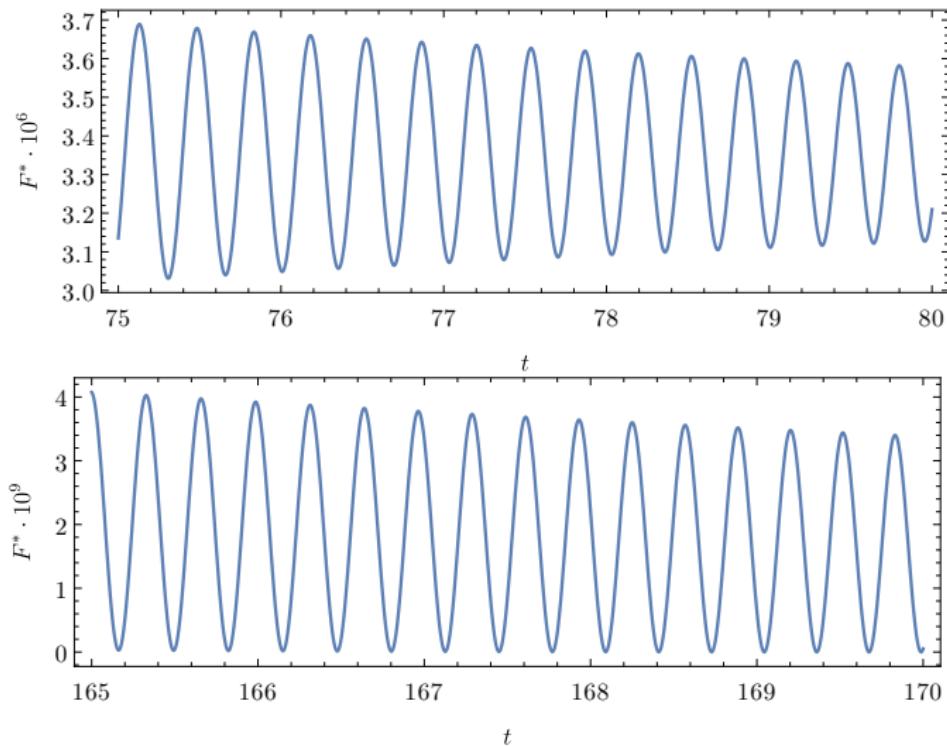


Figure:  $T = 80 < T_c$  (nahoře),  $T = 170 > T_c$  (dole)

# Dvouhladinový systém (toy model)

Poznatek #4: Landau-Zener a adiabatická perturbační teorie

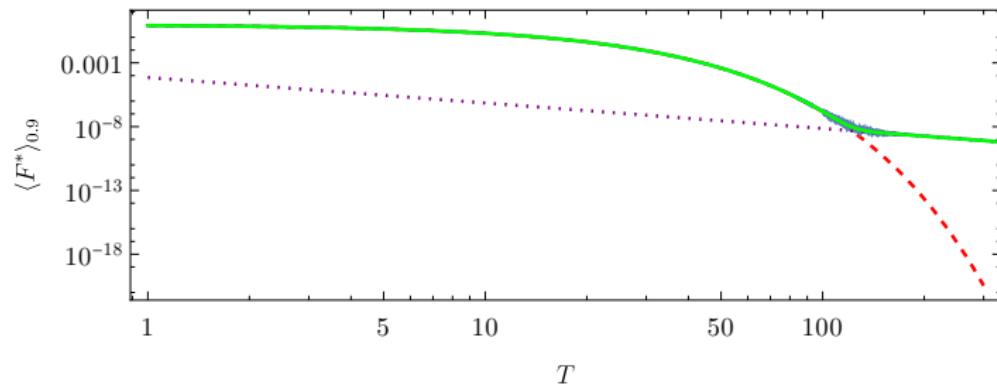


Figure: Zhlazená finální infidelita v závislosti na finálním čase, popsaná součtem of Landau-Zenerovy rovnice a adiabatickou perturbační teorií.

# Lipkin-Meshkov-Glick model

Jak vypadá řízení v mnohočásticovém, zcela propojeném systému qubitů?

$$\hat{H}(\lambda, \chi) = \hat{J}_3 + \lambda \hat{V}_1 + \chi \hat{V}_2 + \chi^2 \hat{V}_3, \quad (10)$$

pro

$$\hat{V}_1 := -\frac{1}{2j} \hat{J}_1^2 \quad (11)$$

$$\hat{V}_2 := -\frac{1}{2j} \left[ \hat{J}_1 (\hat{J}_3 + j \mathbb{1}) + (\hat{J}_3 + j \mathbb{1}) \hat{J}_1 \right] \quad (12)$$

$$\hat{V}_3 := -\frac{1}{2j} (\hat{J}_3 + j \mathbb{1})^2, \quad (13)$$

a operátor momentu hybnosti  $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)^T$ . Zvolíme  $j = N/2$ .

# Lipkin-Meshkov-Glick model

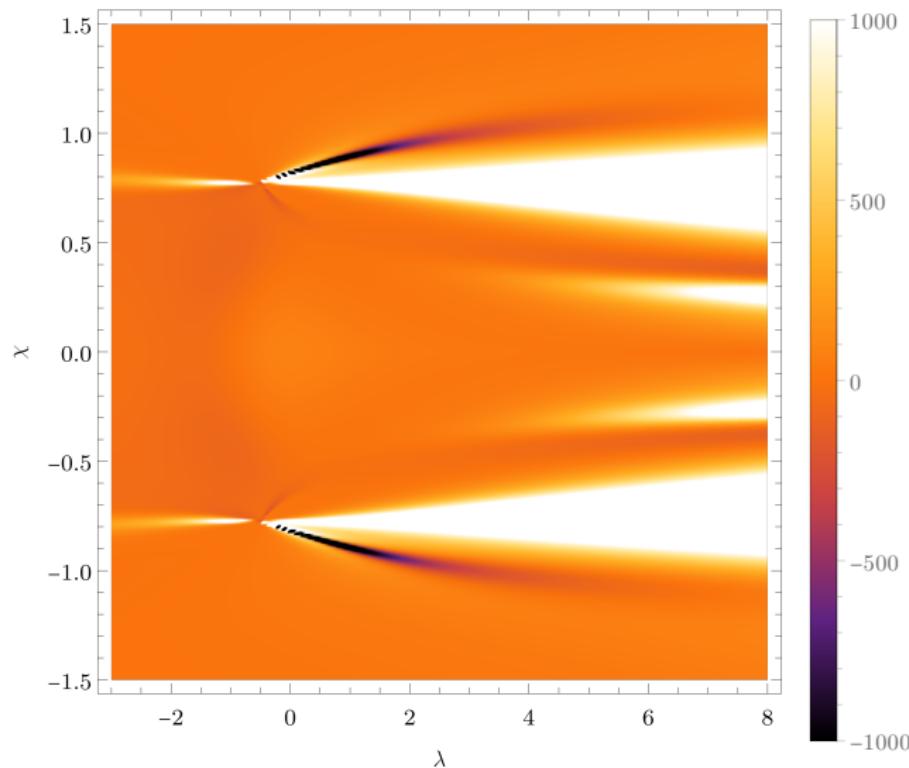


Figure: Ricciho křivost základní stavové variety pro  $N = 3$ .

# Lipkin-Meshkov-Glick model

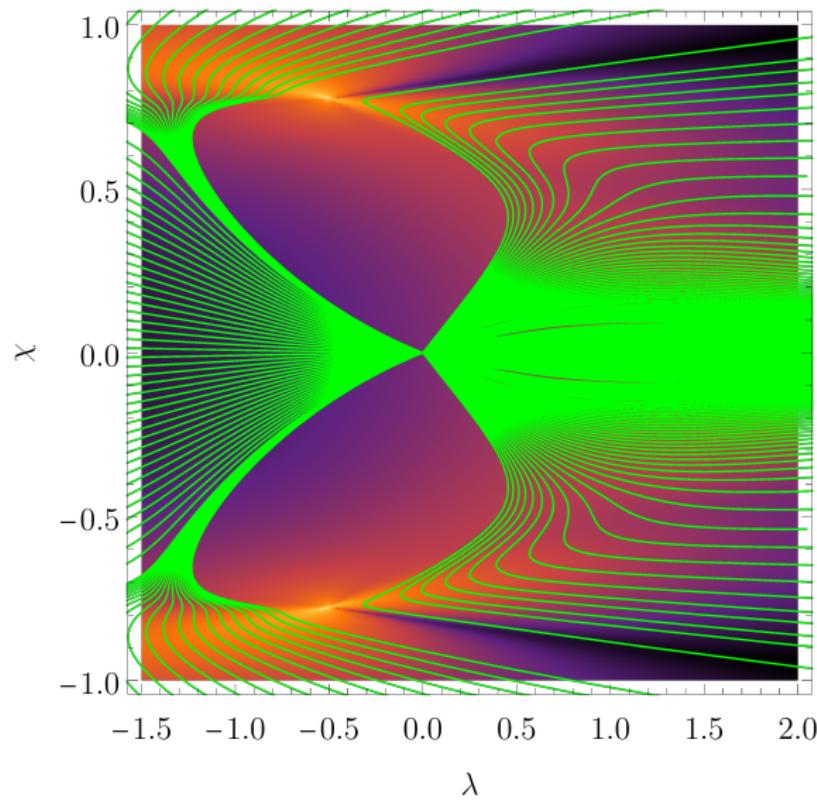


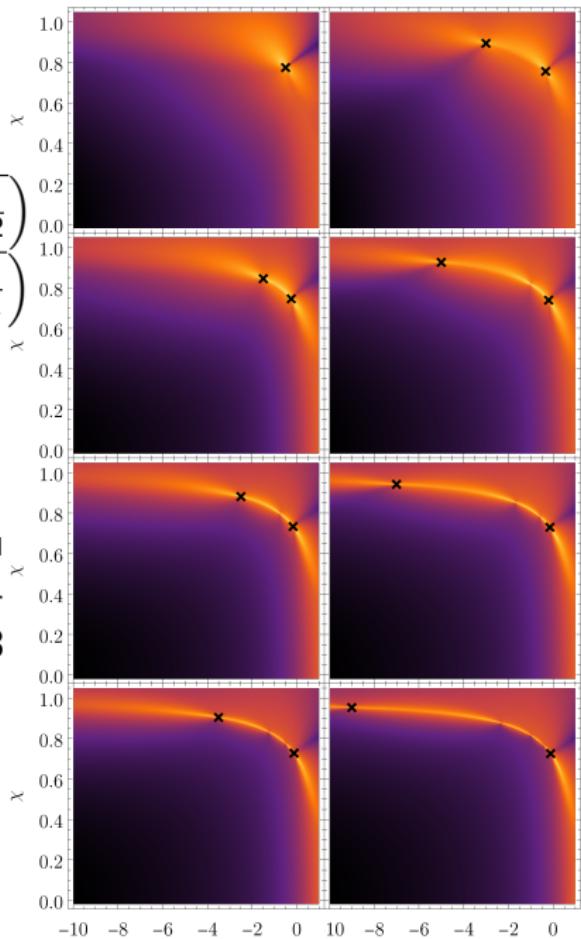
Figure: Geodetiky pro  $N = 3$  z bodu  $(\lambda_i; \chi_i) = (0; 0)$ . V pozadí  $\det g$ .

# Lipkin-Meshkov-Glick model

$$(\lambda_{l,r}; \pm \chi_{l,r}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{N}{2}; \sqrt{\frac{N}{N+2}}\right) \\ \left(1 - N; \sqrt{\frac{N}{N+1}}\right) \end{cases}$$

pro  $N \geq 3$   $\begin{cases} \text{liché} \\ \text{sudé} \end{cases}$

Figure: Degenerace vpravo jsou značeny mezi  $E_0$  a  $E_1$  pro dimenze 1,3,5,7 v prvním a 2,4,5,8 v druhém sloupci.



# Lipkin-Meshkov-Glick model

Zpomalování geodetik u singularit a jejich využití – transport pomocí quenchů.

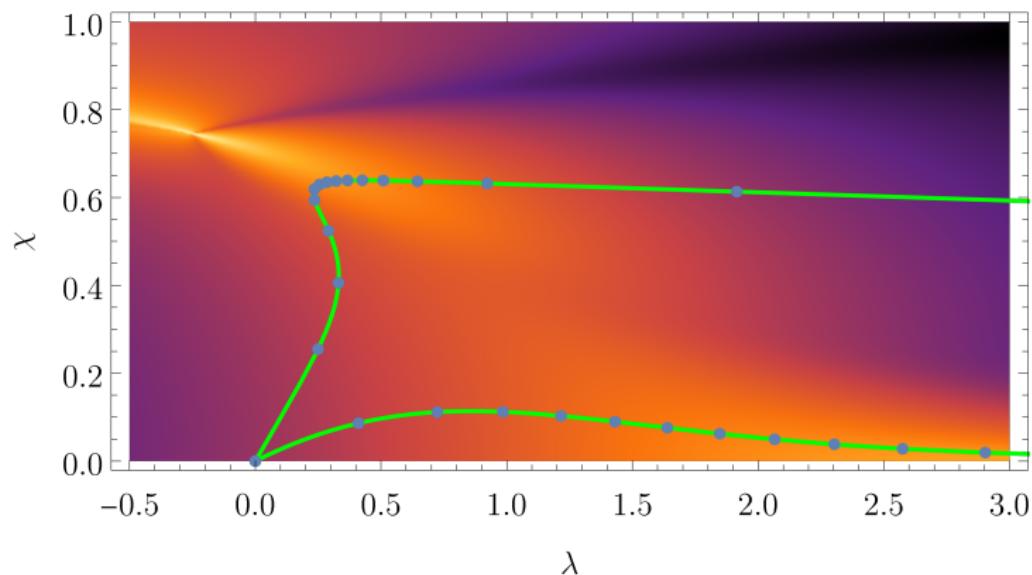


Figure: Dimenze  $N = 3$ , 2 různé geodetiky, časový rozdíl mezi vedlejšími body  $\Delta t = 0.5$ .

# Závěr

Co jsme se dozvěděli a kudy dál?

## Co jsme se dozvěděli

- ▶ Reformulace některých geometrických struktur v teorii
- ▶ prozkoumána fidelita lineárního a geodetického drivingu ve dvouhlinovém systému
  - ▶ vysvětlení oscilací a analytické vztahy pro geodetický a lineární driving
  - ▶ význačné body finálního času (někdy je  $F = 1$ , vysvětlení  $T_C$ )
  - ▶ approximativní metody (*Landau-Zener,adiabatická perturbační teorie*)
- ▶ Pro Lipkin-Meshkov-Glick model známe strukturu základní stavové variety
  - ▶ geometrické veličiny
  - ▶ geodetiky
  - ▶ body degenerace v závislosti na dimenzi

# Děkuji za pozornost

Nechť je zbytek Vašeho dne krásný...

Nejdůležitější odkazy zde:

**M. Kolodrubetz, P. Mehta, and A. Polkovnikov.** Geometry and non-adiabatic response in quantum and classical systems. Physics Reports, 697:1–87, 2017. ISSN 0370-1573.

**M. V. Berry.** Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proc. R. Soc. Lond. A, 392(1802):45–57, 1984. doi: 10.1098/rspa.1984.0023.

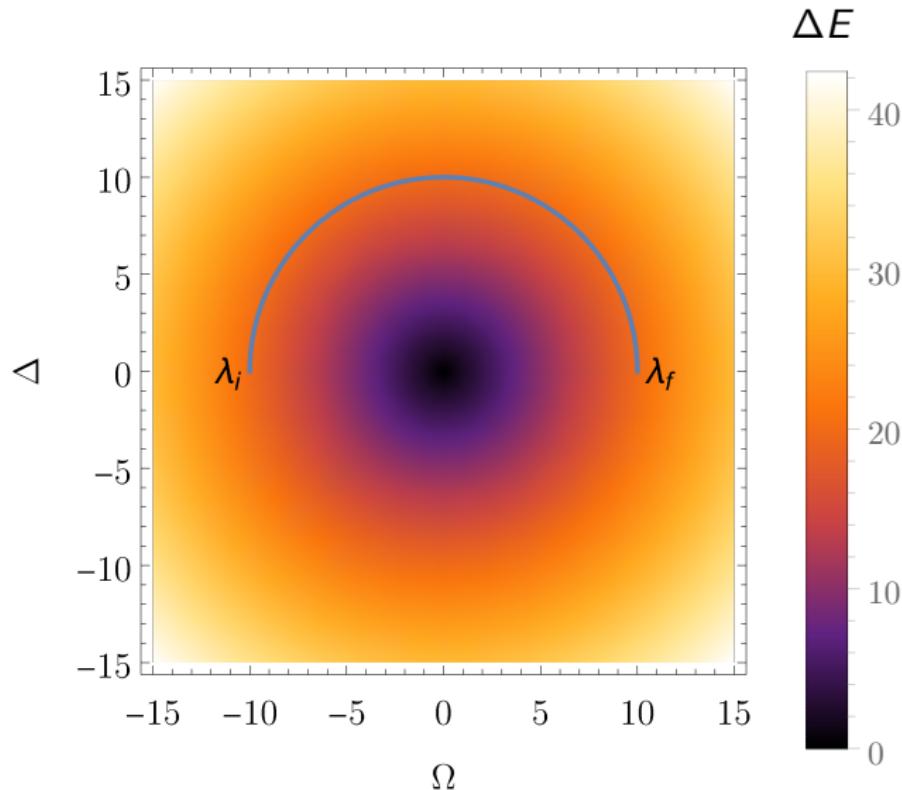
**M. V. Berry.** The quantum phase, five years after. A Shapere, F Wilczek. (World Scientific) 7–28, 1989. Geometric phases in physics, 7–28, Adv. Ser. Math. Phys., 5,.

**M. V. Berry.** Transitionless quantum driving. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 42(36), 2009. doi: 10.1088/1751-8113/42/36/ 365303.

... více brzy ve článcích spolu s Pavel Cejnar, Felipe Matus a Pavel Stránský.

# Otázka oponenta ohledně Dvouhladinového systému

Důkaz, že oblouk na obrázku je geodetikou



# Otázka oponenta ohledně Dvouhlinového systému

## Metrický tenzor

Od Hamiltonianu v souřadnicích  $(\Delta(t); \Omega(t))$

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \Omega(t) & \Delta(t) \\ \Delta(t) & -\Omega(t) \end{pmatrix} \quad (14)$$

přejdeme k polárním souřadnicím  $(r(t), \phi(t))$ , definovaným vztahy

$$\Delta(t) = r(t) \sin \phi(t), \quad \Omega(t) = r(t) \cos \phi(t). \quad (15)$$

V nich je metrický tenzor

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \text{Re} \frac{\langle 0 | \partial_\mu \hat{H} | 1 \rangle \langle 1 | \partial_\nu \hat{H} | 0 \rangle}{(E_1 - E_0)^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

# Otázka oponenta ohledně Dvouhlinového systému

## Metrický tenzor

Geodetickou rovnici pak splňují drivingy s  $\ddot{\theta} = 0$ , tedy

$$\theta(t) = \theta_i + (\theta_F - \theta_i) \frac{t}{T} \quad (17)$$

- ▶  $\theta_i$  je počáteční úhel v čase  $t = 0$
- ▶  $\theta_T$  je finální úhel v čase  $T$

$\Omega(t)$  lze volit libovolně, v rámci práce byl zvolen geodetický driving  
 $\Omega(t) = \text{konst.}$

Třída geodetik je ale mnohem širší...

# Otzávka oponenta ohledně Dvouhlinového systému

## Metrický tenzor

Zafixujme jednu souřadnici,  $(\Delta; \Omega(t))$ . Pak

$$g_{\Omega\Omega} = \frac{\Omega^2}{4(\Omega^2 + \Delta^2)^2}. \quad (18)$$

Z vlastnosti geodetiky  $g_{\Omega\Omega}\dot{\Omega}^2 = \text{konst.}$  plyní

$$\Omega(t) = \Delta \tan \left( a_i + (a_f - a_i) \frac{t}{T} \right); \quad a_{i,f} := \arctan \frac{\Omega_{i,f}}{\Delta} \quad (19)$$

$\Rightarrow$  existuje závislost  $\Omega(t)$ , že křivka lineární v parametrickém prostoru je geodetikou.