向量组

- 线性表示
  - 向量B可用a1 ,a2,...as表示 — 方程组AX=B有解，即B可用A的列向量组线性表示 — 注意是列向量组
  - 向量组之间的线性表示
    - 向量组b1,b2,...bt可用a1,a2,...as表示
    - 与矩阵乘法密切相关，AB的列向量组可用A的列向量组线性表示，行向量组可用B的行向量组线性表示
    - 具有传递性
  - 两个向量组等价
    - 可互相表示
    - 具有传递性
- 线性相关性（刻画向量组的内在关系）
  - 概念
    - 意义 — 存在（不存在）内在的线性表示关系 — 向量组内是否存在向量可由其他向量线性表示
    - 定义 — 存在（不存在）不全为0的数组c1,c2,...cs,使得c1a1+...cs as=0 — 线性相关（无关）
    - 齐次方程组（a1,a2,...as)X=0有（没有）非零解
    - 两个角度的看待
  - 性质
    - 一个向量a（个数s=1）线性相关 — a=0
    - 两个向量相关 — 它们的分量对应成比例
    - 线性无关向量组的每个部分组都无关
    - 若向量的个数s等于维数n,则有：a1,a2,..an线性相关——|a1,a2,..an|=0
    - 当向量的个数s大于维数n时，a1,a2,...as一定线性相关
  - 与线性表示的关系
    - 如果a1,a2,...as线性无关，则：a1,a2,...as,B线性相（无）关——B（不）可用a1,a2,...as线性表示
    - 如果B可用a1,a2,...as线性表示，则：表示方法唯一——a1,a2,...as线性无关
- 向量组的秩和最大无关组（刻画向量组相关程度）
  - 概念 — 线性无关部分组包含向量个数的最大值
  - 用秩判断线性相关性 — a1,a2,...as无关——r(a1,a2,...as)=s — 线性无关则满秩
  - 用秩判断线性表示
    - B可用a1,a2,...as线性表示——r(a1,a2,...as,B)=r(a1,a2,...as) — 若r=s,则可被唯一线性表示，即a为极大无关组，线性无关
    - a1,a2,...as与b1,b2,...bt等价——r(a1,a2,...as)=r(a1,...as, b1....bt)=r(b1,b2,...bt) — 秩相等是向量组等价的必要条件，非充要条件，还要能互相表示才行
    - 若b1,b2,...bt可用a1,a2,...as线性表示，则r(b)<=r(a) — 推论：若t>s,则b1,b2,...bt线性相关
- 秩和最大无关组的计算
  - 当A经过初等行变换化为B时，AX=0与BX=0同解，则A的列向量组和B的列向量组有相同的线性关系 — 最大无关组相对应，秩相等
  - 计算秩及最大无关组的方法
    1. 把此向量作为列向量组构造矩阵（a1,a2,...as)
    2. 用初等行变换把它化为阶梯形矩阵B
       - B的非0行数即为r
       - B的各台角所在列号对应的部分组即为a1,a2,...as的一个最大无关组
    3. 继续作初等行变换化为简单阶梯形矩阵，则可将其他向量用极大无关组表示出来 — 基础解系
    - ! 注意：求矩阵最大无关组时不能作初等列变换！
- 秩的两个性质
  - r(a1,...as,B)
    - r(a1,...as),当B可用a1,a2...as线性表示
    - r(a1,...as)+1,当B不可用a1,...as线性表示
  - b1,b2,...bt可用a1,a2,...as线性表示——r(b1,...bt)<=r(a1,...as)
- 矩阵的秩
  - 定义 — r(A)=A的列（行）向量组的秩=A是非0子式阶数的最大值 — n阶矩阵满秩——r(A)=n——A的行（列）向量组无关——|A|不等于0——A可逆
  - 计算
    - 初等变换保持矩阵的秩不变
    - 阶梯形矩阵的秩=非0行数
    - 即可用初等（行或列均可）变换将其化为阶梯形矩阵，则此阶梯形矩阵的非0行数就是原矩阵的秩 — 秩，最大无关组，基础解系，对角化全都有
  - 性质
    - r(A的转置） =r(A)
    - 如果c不等于0，则r(cA)=r(A)
    - r(A+-B)<=r(A)+r(B)
    - r(AB)=Min{r(A),r(B)}
    - 如果A列满秩，则r(AB)=r(B);如果B行满秩，则r(AB)=r(A)
    - 如果AB=0，则r(A)+r(B)<=n,n为A的列数（B的行数）
    - 设A*为n阶矩阵A的伴随矩阵
      - r(A)=n — r(A*)=n
      - r(A)=n-1 — r(A*)=1
      - r(A)<n-1 — r(A*)=0
  - 矩阵的等价 — 两个矩阵如果可用初等变换互相转化，就称它们等价 — 充要条件：类型相同（即行、列数对应相等），并且秩相等
- 实向量的内积和正交矩阵
  - 内积
    - 定义 — $\alpha=(a_1,a_2,...a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,...b_n)^T$ — $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=\alpha^T\beta$
    - 性质
      - 正定性 — $(\alpha,\alpha)\geq 0$，and $(\alpha,\ \alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$
      - 对称性 — $(\alpha,\ \beta)=(\beta,\ \alpha)$
      - 双线性性质
        - $(\alpha_1,\ \beta_1+\beta_2)=(\alpha,\ \beta_1)+(\alpha,\ \beta_2);(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta)=(\alpha_1,\ \beta)+(\alpha_2,\ \beta)$
        - $(c\alpha_1,\beta)=c(\alpha,\beta)=(\alpha,c\beta)$
    - 实向量的长度
      - $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)},\|\alpha\|\geq 0 and \|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$
      - $\|c\alpha\|=|c|\|\alpha\|$
      - $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$,单位向量，$\alpha$的单位化
      - $(\alpha,\ \beta)=0$，则α，β正交 — 如果向量组中的每一个都是单位向量，且两两正交，则称它们是单位正交向量组 — 施密特正交化
  - 正交矩阵
    - 定义 — n 阶矩形Q称为正交矩阵，如果它是实矩阵，且有 — $QQ^T=E(Q^{-1}=Q^T)$
    - 定理 — Q 是正交矩阵
      - Q的列向量组是单位正交向量组
      - Q的行向量组是单位正交向量组
  - 施密特正交化 — 把线性无关向量组改造为单位正交向量组的方法 — 具体操作过程请自己看书！
- 向量空间（仅数一）
  - 加法和数乘封闭运算
  - 基，维数，坐标
    - 非0 子空间的秩为维数，记作dimV,称V的排了次序的极大无关组为V的基
    - 坐标
      - 定义 — $\eta_1,\eta_2,...\eta_s$是V的一个基，V的每一个元素α可用该基唯一线性表示：$\alpha=c_1\eta_1+c_2\eta_2+...+c_s\eta_s$，则系数$c_1,c_2,...c_s$为$\alpha$关于$\eta_1,...\eta_s$的坐标
      - 线性性质
        - 两个向量和的坐标等于它们坐标的和
        - 向量的数乘的坐标等于坐标乘此数
      - 意义 — V中的一个向量组a1,...at关于某个基的坐标为y1,...yt,则a1,...at和y1...yt有相同的线性关系 — 可以用坐标来判断向量组的相关性，计算秩和最大无关组等
  - 过渡矩阵，坐标变换公式 — x=Cy — 具体看书，不好表述
  - 规范正交基
    - 如果V的一个基n1,...nk是单位正交向量组，则称为规范正交基
    - 两个向量的内积等于在规范正交基下的它们坐标的内积
    - 两个规范正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵
- 应用与联系
  - AX=b有解 — b可用A的列向量组线性表示 — r(A|b)=r(A)
  - AX=B有解 — B的列向量组可用A的列向量组线性表示 — r(A|B)=r(A)
  - n 是AX=0的解 — n 可用AX=0的基础解系线性表示
  - AX=0只有0解 — A 列向量组线性无关 — A列满秩
  - AX=0的基础解系即其解集合的最大无关组

By得位移法得天下，Q:2675937472