

# A simple algorithm for Lempel-Ziv factorization

\*

19 maja 2022

Faktoryzacja Lempel-Ziv’a dla słowa  $w$  jest takim rozkładem  $u_0u_1\dots u_k = w$ , że każde  $u_i$ , za wyjątkiem możliwie ostatniego, jest albo najdłuższym prefiksem  $u_iu_{i+1}\dots u_k$  i występuje jako podślowo w  $u_0u_1\dots u_i$ , ale nie tylko jako sufix, albo jest pojedynczym symbolem, gdy takiego prefiksu nie ma.

Authorzy proponują algorytm pozwalający obliczać faktoryzację w czasie liniowym i pamięci  $o(n)$ . Jeszcze poprzedni wynik tych samych autorów osiągał liniowy czas i pamięć, natomiast różnica pomiędzy dużym  $O(n)$  tamtego algorytmu, i małym  $o(n)$  dzisiejszego, jest na tyle istotna, że nowy algorytm został opublikowany.

Algorytm ten, tak jak i poprzedni, korzysta z tablicy Longest Previous Factor. Aby zrozumieć co to jest, weźmy taki najdłuższy czynnik słowa  $w[1..i]$ , równy  $m$ . Wtedy  $m$  musi być najdłuższym podśłowem słowa  $w[1..i + |m| - 1]$ , i to jego długość będzie występować w tej tablicy, na pozycji  $i$ -tej.

Gdy posiadamy tablicę LPF, wyznaczanie faktoryzacji nie jest trudne. Łatwo zauważyć, że “najdłuższy poprzedni czynnik”, to dokładnie taki czynnik jakiego potrzebujemy do faktoryzacji. Wystarczy zatem przejść po tablicy LPF zwracając kolejne czynniki, pomijając przy tym czynniki pośrednie, występujące pomiędzy tymi z faktoryzacji, oraz zamieniając wszystkie zera na jedyńki w tablicy LPF, ponieważ faktoryzacja nie zawiera słów pustych.

**Algorithm 1** jest implementacją powyższej logiki.

Pozostaje wyznaczenie LPF. Do tego korzystamy z tablic SA, i LCP – z uporządkowanej tablicy sufixów i tablicy najdłuższych prefiksów między nimi. Nie będziemy projektować algorytmów do policzenia tych dwóch tablic, gdyż wiele takich istnieje, i skupimy się na tym, jak z SA i LCP dostać LPF.

Do policzenia tablicy SA proponowano jest użyć którykolwiek z wcześniej znalezionych liniowych algorytmów, w tym z

1. “Simple linear work suffix array construction” autorów J. Kärkkäinen i P. Sanders,

---

**Algorithm 1** lempel\_ziv\_factorization

---

**Require:** LPF, n**Ensure:** LZLZ  $\leftarrow$  []pos  $\leftarrow$  1**while** pos  $\leq$  n **do**

push(max(1, LPF[pos]), LZ)

    pos  $\leftarrow$  pos + max(1, LPF[pos])**end while**

---

2. “Linear-time longest-common-prefix computation in suffix arrays and its applications” autorów T. Kasai, G. Lee, H. Arimura i S. Arikawa,
3. i “Constructing suffix arrays in linear time” autorów D.K. Kim, J.S. Sim, H. Park i K.Park,

pamięciowa złożoność których jest usprawniona w pracy “Space efficient linear time construction of suffix arrays” autorstwa P. Ko i S. Aluru.

W przypadku LCP, algorytm z pracy “Two space-saving tricks for linear-time LCP computation” autora G. Manzini, też jest wystarczająco dobry, aby nie wpłynąć na złożoność algorytmu LPF.