本节概览

CONTENT

学习内容

- 高斯定理：表述及证明
- 高斯定理的难点分析
- 高斯定理的应用解题

高斯定理

1. 表述

真空中的任何静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，在数值上等于该闭合曲面（称其为高斯面）内包围的电量的代数和乘以 $1/\varepsilon_0$

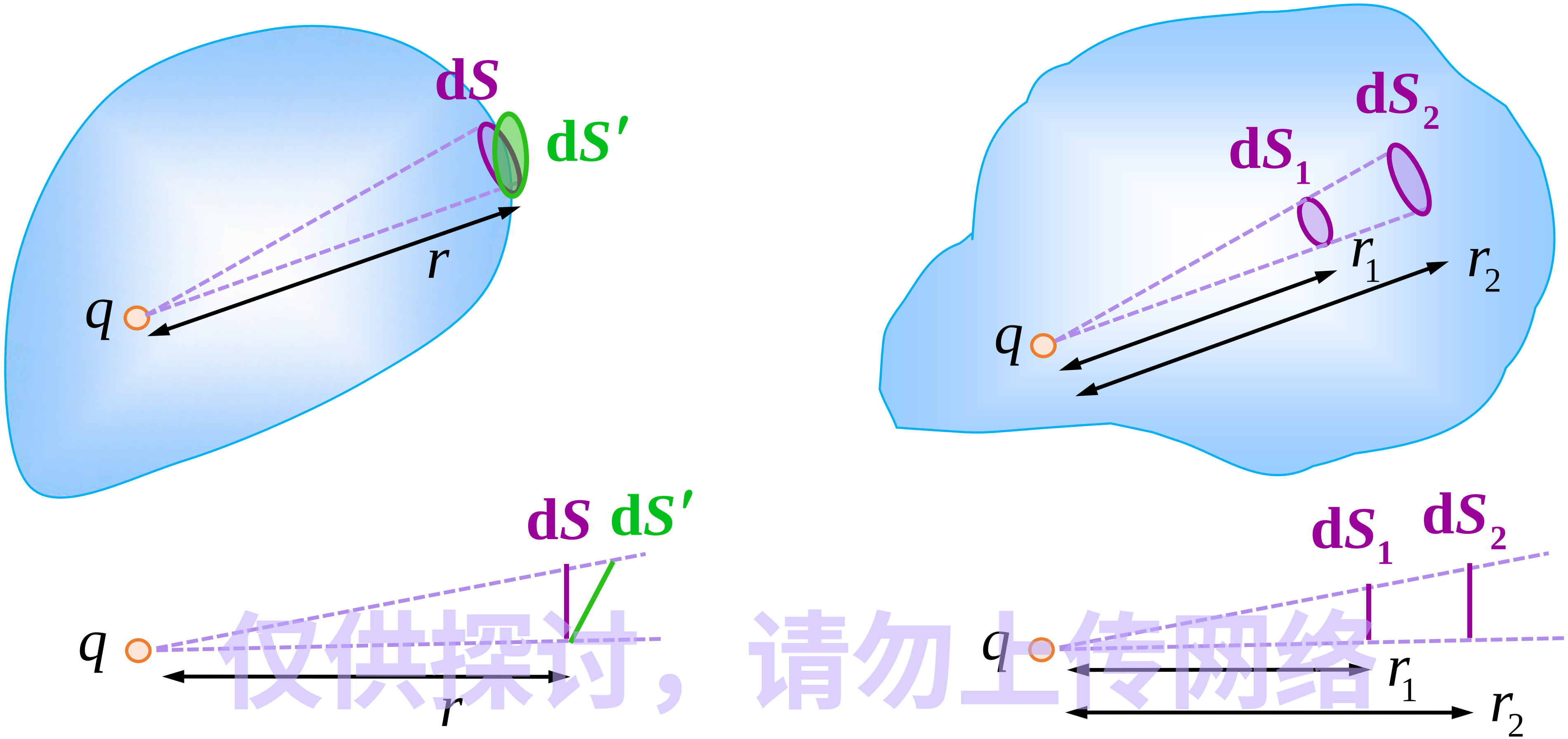
$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_{i内}$$

—— 高斯定理

思考

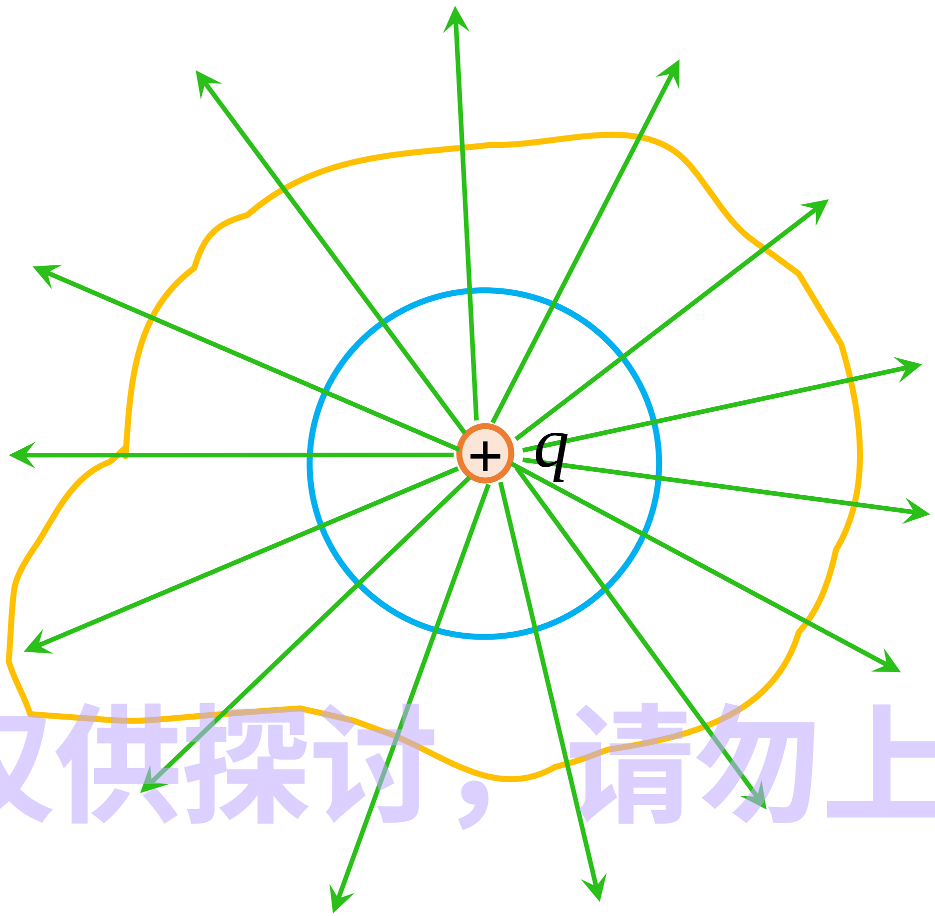
高斯面上的 $\vec{E}$ 与那些电荷有关？

哪些电荷对闭合曲面 S 的 Φ_e 有贡献？



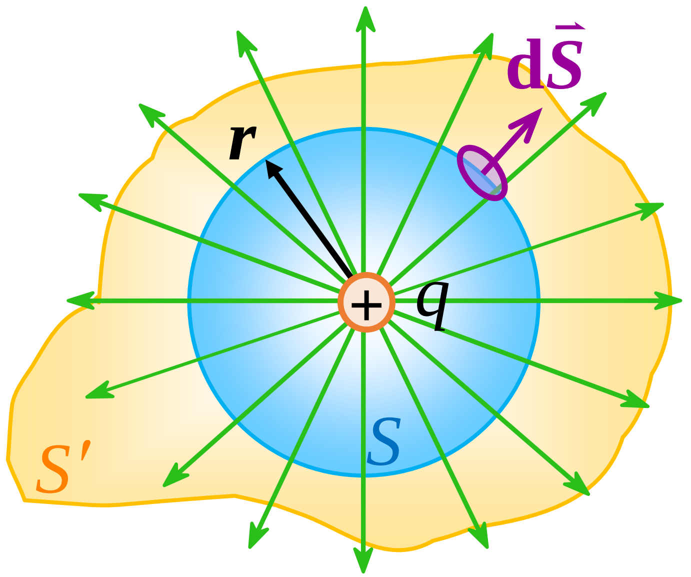
- 以 d*S*为底面，点电荷为顶点的圆锥，任意一截面的电通量相同

闭合曲面的通量积分特点



2. 推证

高斯定理的导出 $\begin{cases}\text{库仑定律}\\ \text{电场强度叠加原理}\end{cases}$



(1) 点电荷位于球面中心

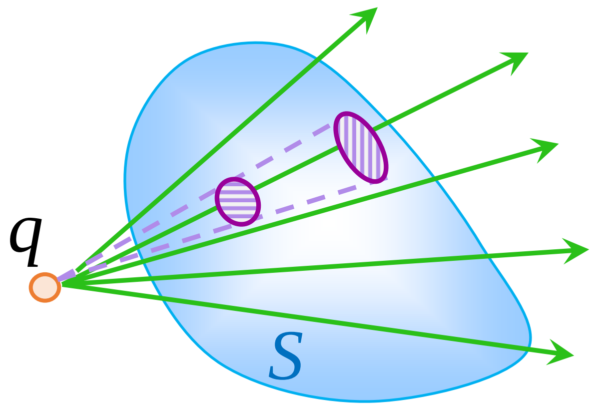
点电荷电场 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\Phi_e = \oiint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

(2) 点电荷在任意封闭曲面内

$$\Phi_e = \oiint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

(3) 点电荷在封闭曲面之外 $\Phi_e = \oiint_{S_3} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$



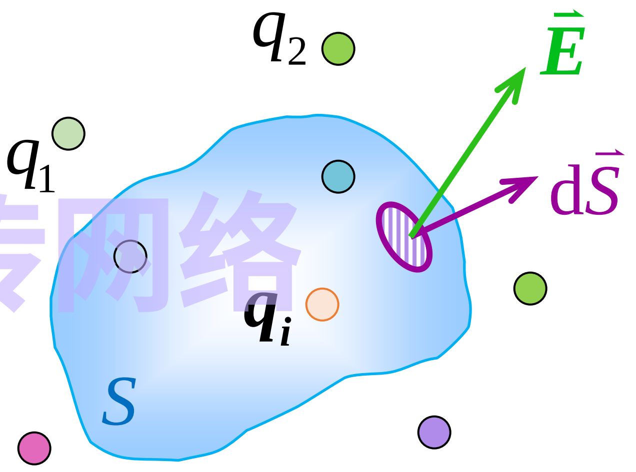
(4) 由多个点电荷产生的电场

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \sum_{i(\text{内})} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sum_{i(\text{外})} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\because \sum_{i(\text{外})} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\therefore \Phi_e = \sum_{i(\text{内})} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i\text{内}}$$



高斯定理

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_{i内} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV$$

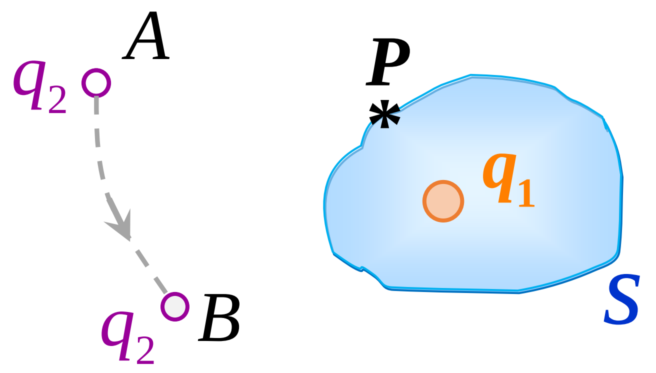
真空中的任何静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，在数值上等于该闭合曲面（高斯面）内包围的电量的代数和乘以 $1/\varepsilon_0$

结论

- 高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度
- 高斯面为封闭曲面
- 穿出高斯面的电场强度通量为正，穿入为负
- 仅高斯面内的电荷对高斯面的电场强度通量有贡献
- 静电场是有源场

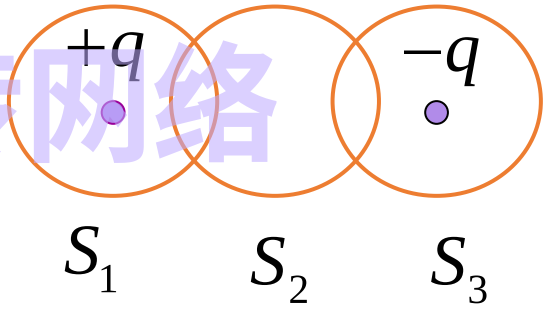
讨论

(i) 将q_2从A移到B，P点电场强度是否变化？穿过高斯面S的电通量是否变化？



(ii) 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面S_1、S_2、S_3，求通过各闭合面的电通量

$$\Phi_1 = \oiint_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\Phi_2 = 0 \qquad \Phi_3 = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$

高斯定理的应用 ——求解电荷具有某些对称分布的电场

解题步骤：

1. 对称性分析 （球对称、柱对称、面对称）

2. 根据对称性选择合适的高斯面

* 高斯面必须是闭合曲面

* 高斯面必须通过所求的点

* 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算

3.求出通过高斯面的通量Φ_e，计算高斯面包围的电荷电量的代数和

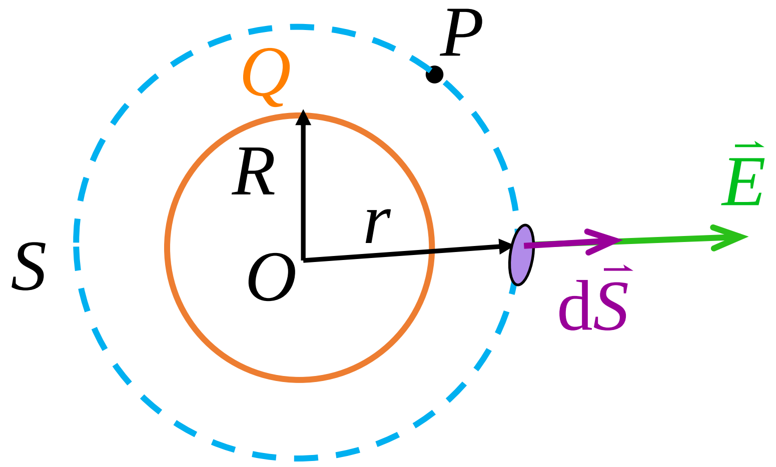
4. 应用高斯定理求解

例 均匀带电球面，总电量为Q，半径为R， 求：电场强度分布

解 根据电荷分布的对称性

选取合适的高斯面（闭合面）

取过场点、以球心 O为心的球面

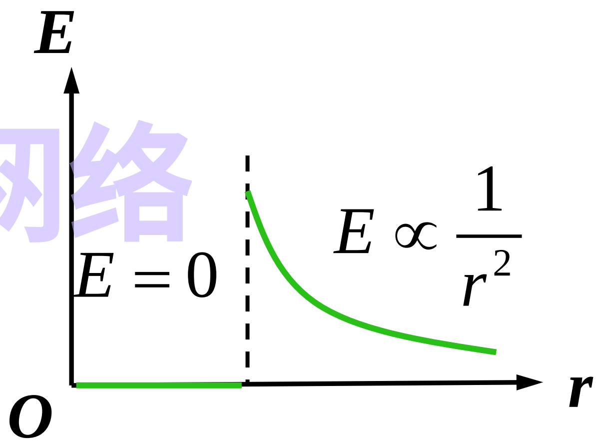


计算高斯面的电通量

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E\,dS = E\oiint_S dS = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

$r < R$ $\quad \sum_i q_i = 0$ $\qquad$ $r < R$, $\quad E = 0$

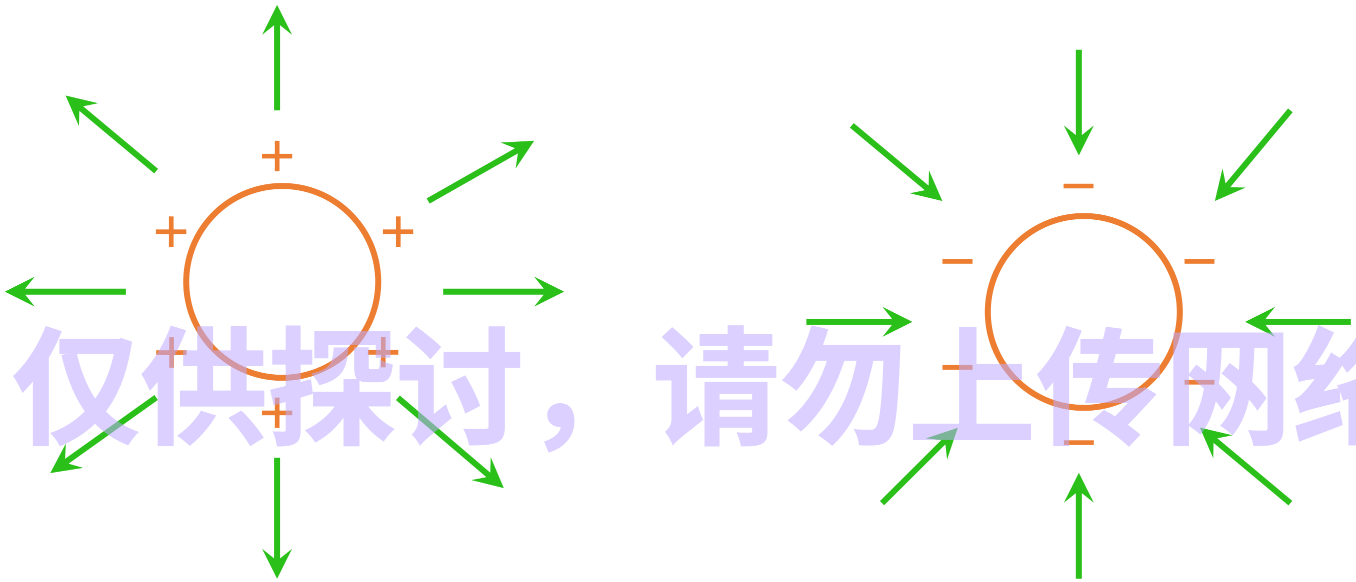
$r > R$ $\quad \sum_i q_i = Q$ $\qquad$ $r > R$ $\quad E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



结论

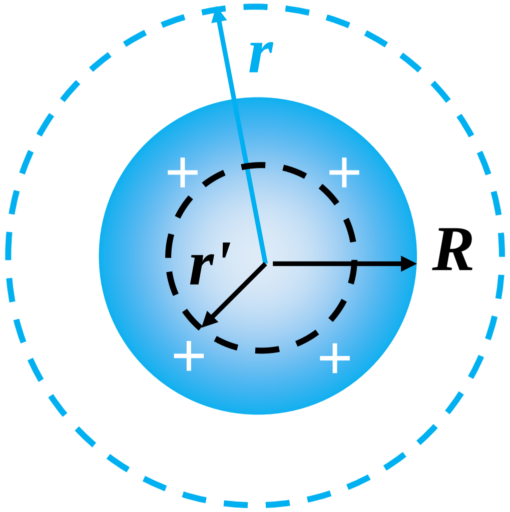
均匀带电球面的电场，在面内空间 $\vec{E}=0$

球面外部空间的 $\vec{E}$ 相当于全部电荷都集中在球心时所产生的电场（点电荷）



例 已知球体半径为R，带电量为q（电荷体密度为ρ）

求 均匀带电球体的电场强度分布



解 球外 $(r \geq R)$

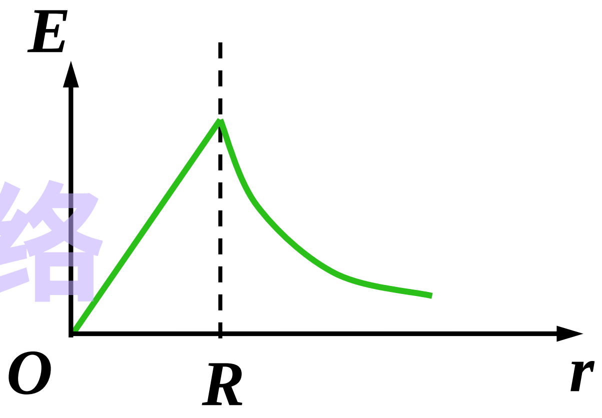
$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

球内 $(r < R)$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \cdot 4\pi r'^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}q' = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r'^3\rho$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$



电场分布曲线

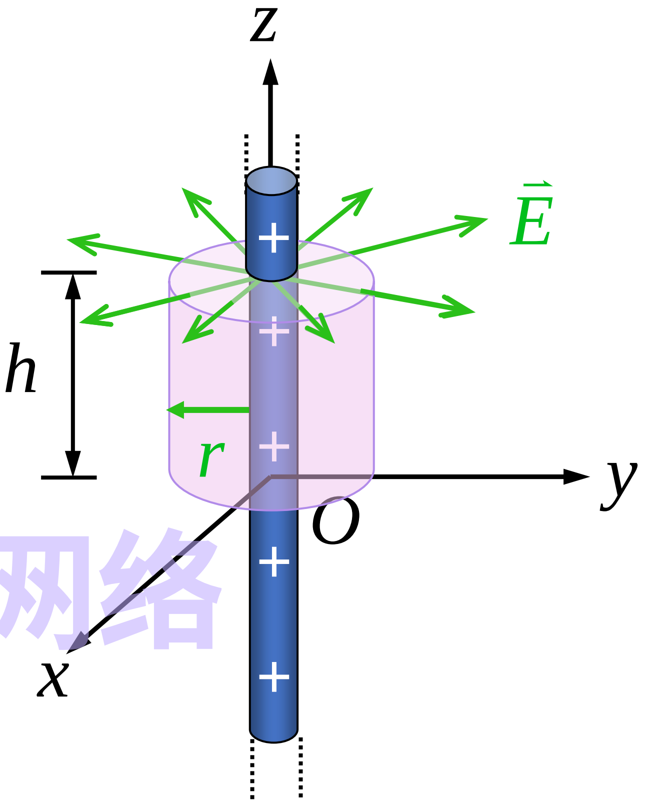
例 无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷（即电荷线密度）为λ，求距直线为r 处的电场强度.

解 对称性分析：轴对称　　选取闭合的圆柱形高斯面

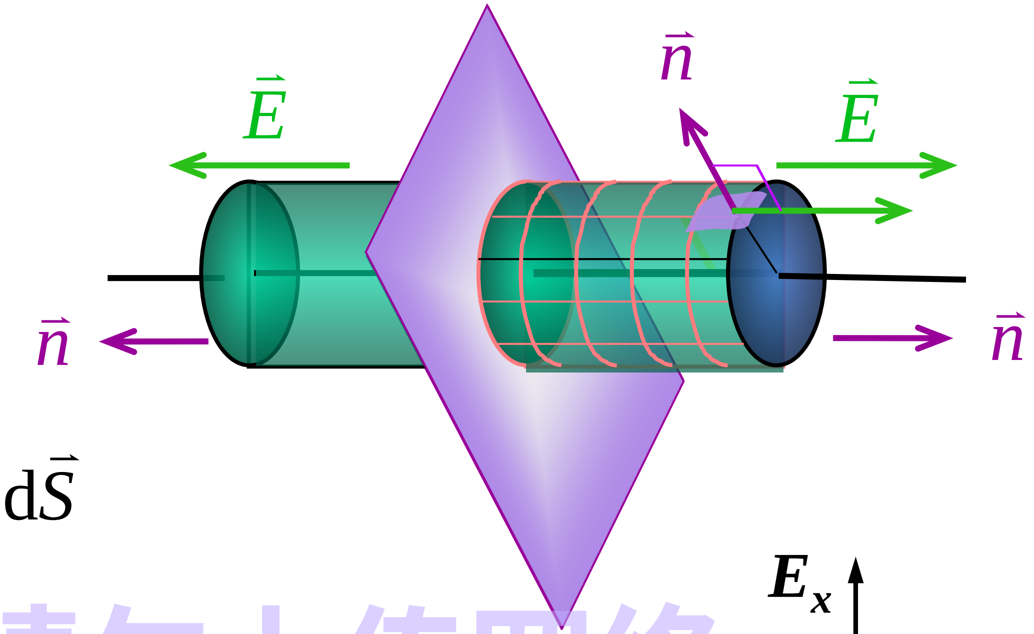
$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S(\text{侧})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S(\text{上})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S(\text{下})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \iint_{S(\text{侧})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + 0 + 0 = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



例 已知“无限大”均匀带电平面上电荷面密度为σ，求 电场强度分布



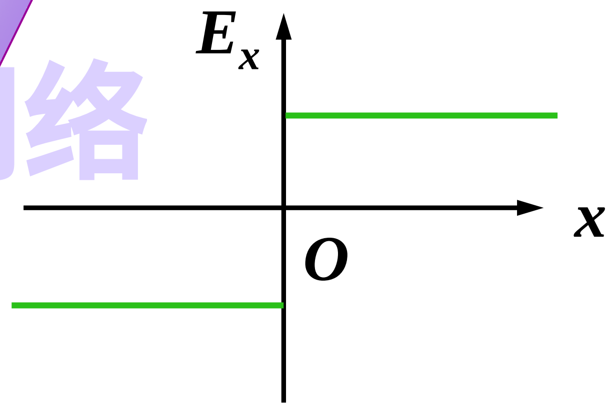
解 电场强度分布具有面对称性

选取一个圆柱形高斯面

$$\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{左底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{右底} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + ES + ES = 2ES$$



根据高斯定理有 $2ES = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$ $\qquad E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

例 已知“无限长”均匀带电柱面，半径R，线密度为λ

求 电场强度分布

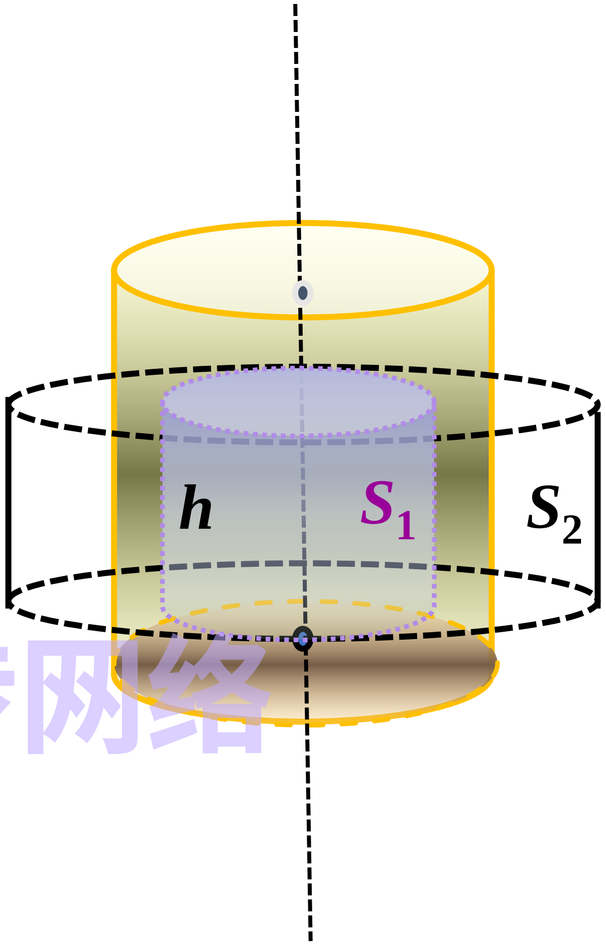
解 取圆柱面为高斯面，柱内$r<R$，取高斯面S_1

$$2\pi rhE = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q = 0$$

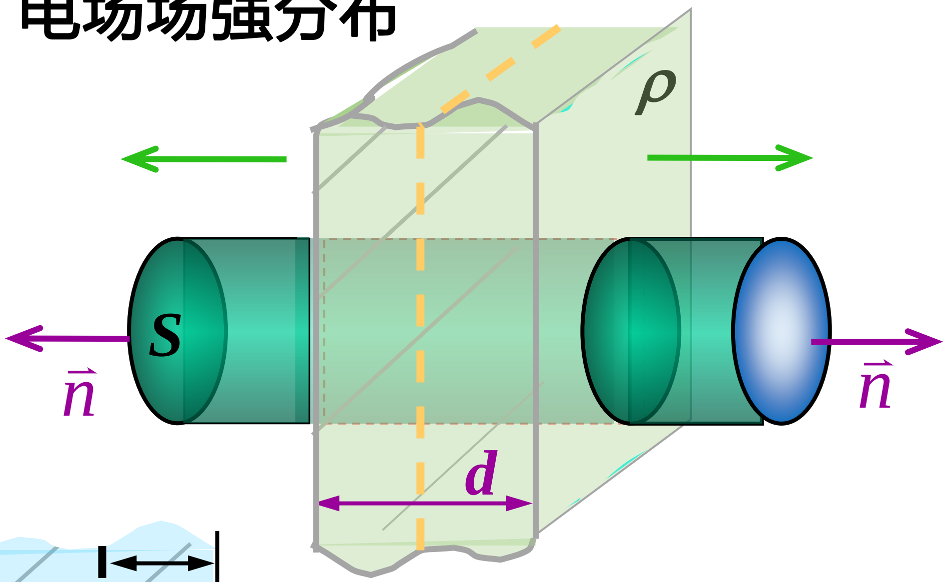
$$\therefore \vec{E}_1 = 0$$

柱外$r > R$，取高斯面S_2

$$2\pi rhE = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda h \qquad \therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



例 已知无限大板电荷体密度为ρ，厚度为d 求：电场场强分布



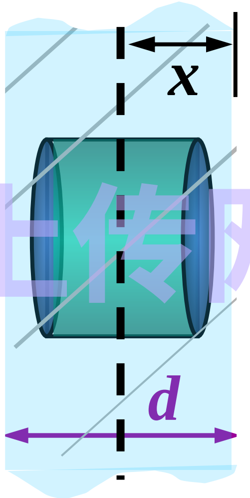
解 选取圆柱面为高斯面

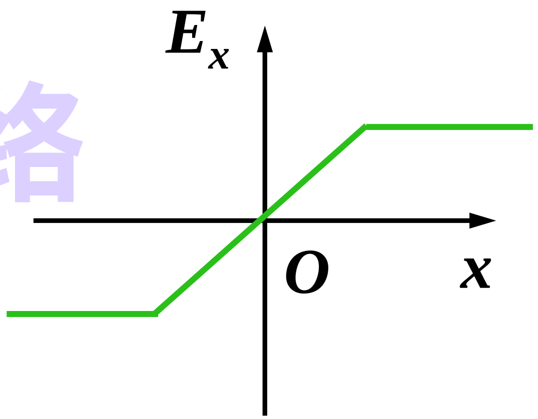
板外：$\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

$$= \iint_{侧} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{左底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{右底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= 2ES = \frac{\rho S d}{\varepsilon_0}$$

$$E_{外} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$





板内：$2ES = \dfrac{\rho S\cdot 2x}{\varepsilon_0}$

$$E_{内} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

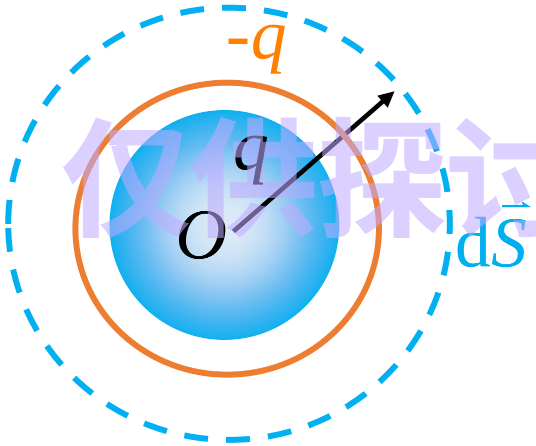
例 判断下列说法的正确性

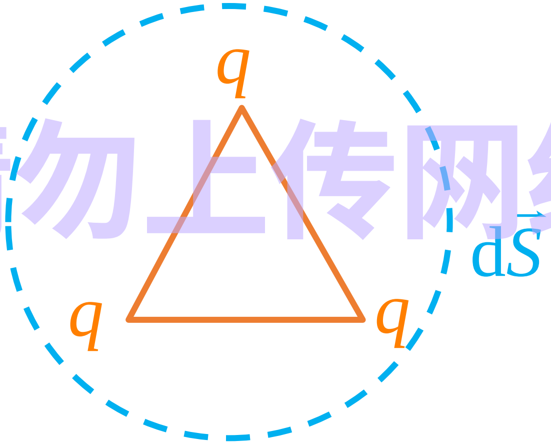
1. 高斯定理的成立条件是电场具有对称性

2. 静电场任意闭合曲面S，若 $\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$ 则S面场强处处为0

3. 若闭合曲面S的各点场强为0，则S面内必定无电荷

4. 下图三个相等点电荷构成等边三角形，以等边三角形中心为球心做球面S，则可以用高斯定理求S面的各点场强





归纳高斯定理解题方法

1. 对称性分析；（球对称、柱对称、面对称）

2. 根据对称性选择合适的高斯面

* 高斯面必须是闭合曲面
* 高斯面必须通过所求的点
* 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算

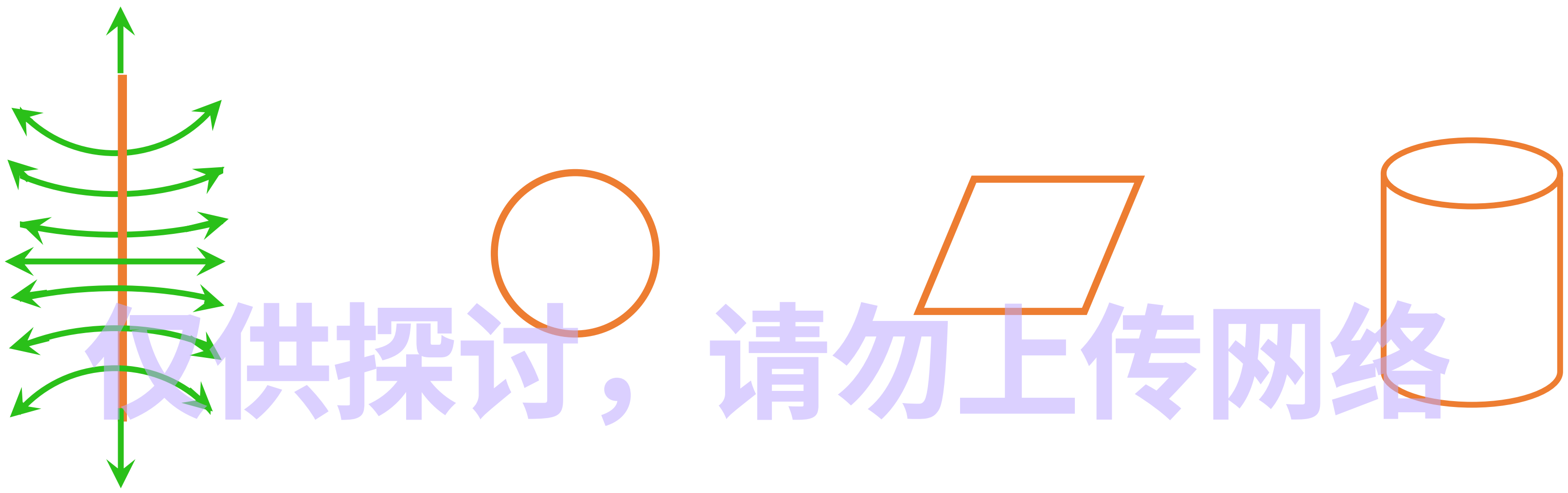
3. 求出通过高斯面的通量Φ_e，计算高斯面包围的电荷电量的代数和

4. 应用高斯定理求解

注意

一些有限大小的带电体的电场具有对称性，但是无法找出一个高斯面S，使 E 可以从积分号内提出，此类问题只能用积分法求解.

如：



带电线段　　圆环　　小平面　　圆柱

可以用高斯定理求出简单的对称分布电场，比较复杂的电场可看作简单电场的叠加

如：无限大带电平面

$$E_{P_1} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \qquad E_{P_2} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \qquad E_P = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}$$

本节回顾

CONTENT

学习内容

- ✓ 高斯定理：表述及证明
- ✓ 高斯定理的难点分析
- ✓ 高斯定理的应用解题

课下任务

- □ 作业册“静电场的高斯定理；习题课（一）”
- □ 录播视频：“静电场习题课（一）”