本节概览

CONTENT

学习内容

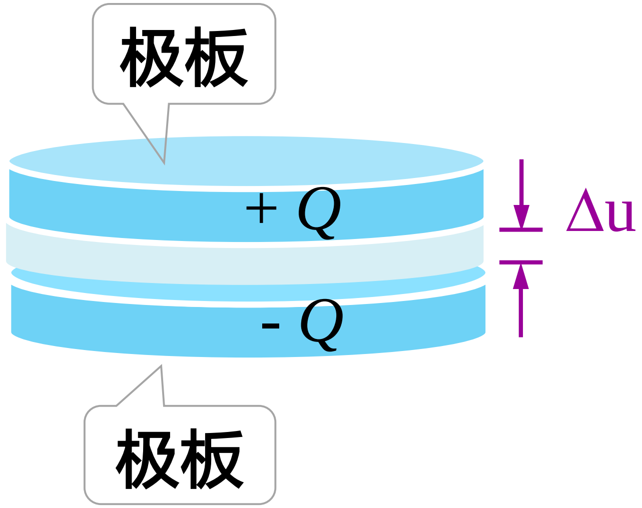
- 电容器及其电容
- 电容器的串并联
- 静电场的能量

电容器及其电容

1. 定义 **电容器：彼此绝缘且相距很近的导体组合**

2. 电容器的电容： $\boxed{C = \dfrac{Q}{\Delta u}}$

与Q无关，只与电容器两极板的形状、大小、相对位置以及两板间所充的电介质有关



3. 电容的计算

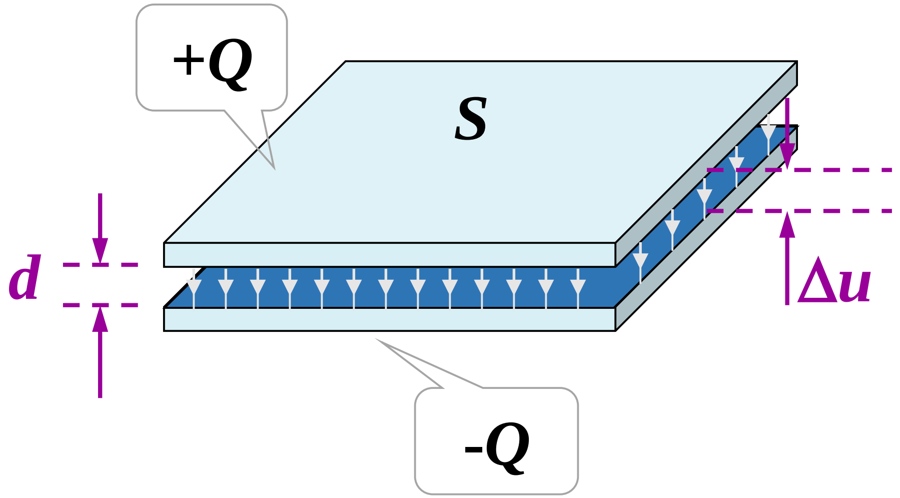
设 $Q \rightarrow \vec{E} \rightarrow \Delta u_{AB} \rightarrow C = \dfrac{Q}{\Delta u}$

4. 常见电容器的电容

(i) 平行平板电容器（$S >> d^2$）

设电容器带电Q，则在两个极板之间的场强为：

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)$$



两极板间电势差：$\Delta u = Ed = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}$

$$C = \frac{Q}{\Delta u} = \frac{\sigma S}{\sigma d / \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

若两极板间充以介质 ε_r

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}}$$

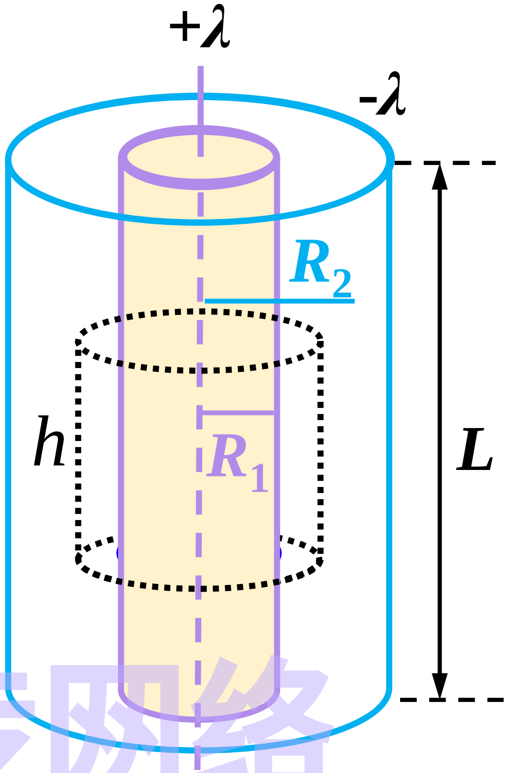
定义式中Q是一个导体板（极板）上所带的自由电荷，与束缚电荷无关

(ii) 圆柱形电容器（两同轴金属圆筒组成 $L >> R_2 - R_1$ ）

设带电，则有： $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

$$u = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\mathrm{d}r$$

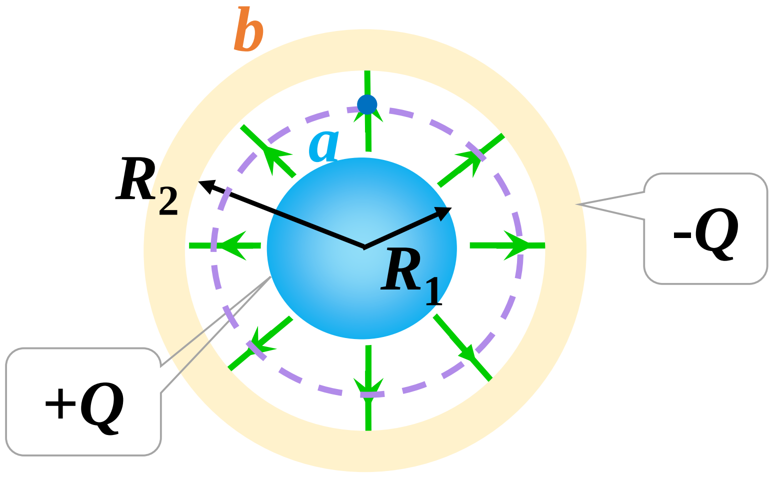
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \ln\frac{R_2}{R_1}$$



$$C = \frac{Q}{u} = \lambda L / (\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \ln\frac{R_2}{R_1}) = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(R_2 / R_1)}$$

(iii) 球形电容器（同心导体球体和球壳组成）

设带电，则有 $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$



$$u = \int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{u} = Q\Big/\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

孤立导体球的电容： $R_2 \to \infty$ $\quad C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1$ （另一极取在无穷远处）

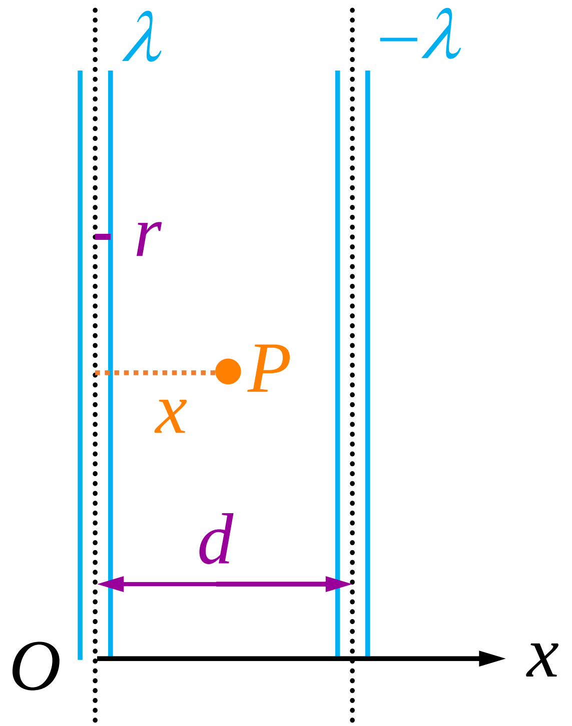
(iv) 分布电容（两条导线间）

两导线间同一平面内任一点 P 的电场强度为：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}$$

$$\Delta u=\int_r^{d-r}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{d-r}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-r}{r}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{d-r}=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-r}{r}$$



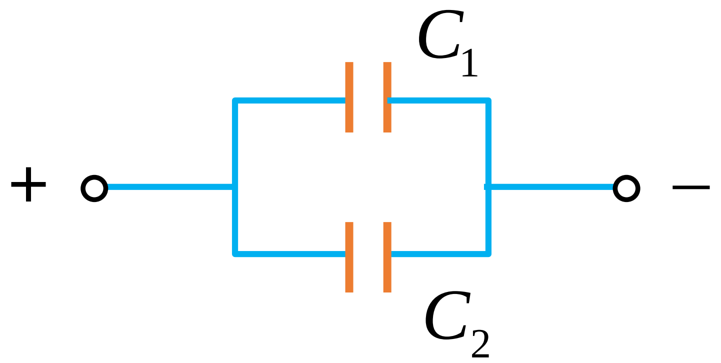
两长直导线单位长度的电容 $C=\dfrac{q}{\Delta u}=\dfrac{\lambda}{\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d}{r}}=\dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d}{r}}$

$d>>r$ ➡ $\Delta u=\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d}{r}$

电容器的并联、串联

1. 电容器的并联（提高电容量）

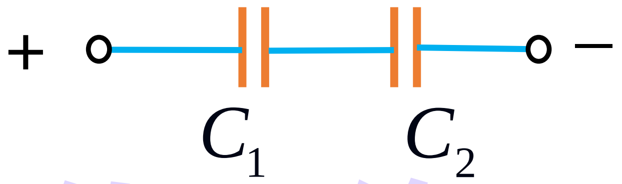
$$C=\frac{C_1U+C_2U}{U}\qquad \boxed{C=C_1+C_2}$$



结论：电容器并联，耐压能力不变，容电能力增强

2. 电容器的串联（提高耐压程度）

$$C=\frac{q}{U_1+U_2}=\frac{q}{q/C_1+q/C_2}$$



$$\boxed{\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$$

结论：电容器串联，容电能力减弱，耐压能力增强

- 电容器的应用

储能、振荡、滤波、移相、旁路、耦合等

- 电容器的分类

形状：平行板、柱形、球形电容器等

介质：空气、陶瓷、涤纶、云母、电解电容器等

用途：储能、振荡、滤波、移相、旁路、耦合电容器等

高压电容器(20kV 5~21μF)
（提高功率因数）

聚丙烯电容器
（单相电机起动和连续运转）

涤纶电容
(250V0.47μF)

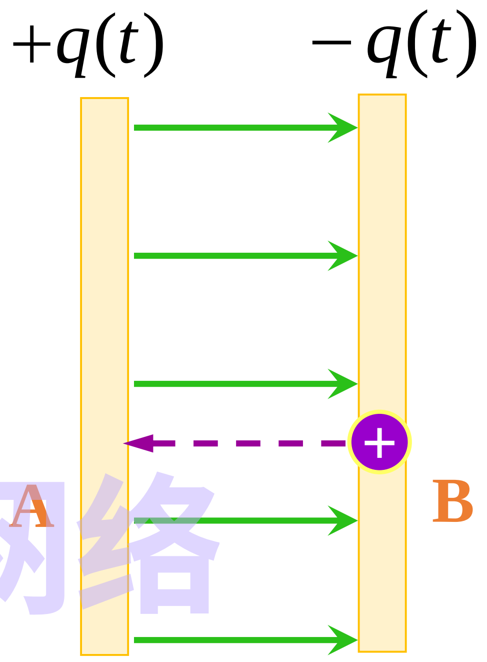
陶瓷电容器
(20000V1000pF)

电解电容器
(160V470 μ F)

任何带电系统都具有能量

以平行板电容器为例，来计算带电系统的能量

设在时间 t 内，从 B 板向 A 板迁移了电荷 $u(t)=\dfrac{q(t)}{C}$



再将 $\mathrm{d}q$ 从 B 板迁移到 A 板需做功：

$$\mathrm{d}A=u(t)\mathrm{d}q=\frac{q(t)}{C}\mathrm{d}q$$

极板上电量从 0 → Q 做的总功为：

$$A=\int \mathrm{d}A=\int_0^Q \frac{q(t)}{C}\mathrm{d}q=\frac{Q^2}{2C}$$

结论

$$W = A = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q = CU} W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

- 以平行板电容器为例进行推导，但结果适用于任何形状的电容器
- 具体问题中：
  - 若电容器电量Q保持不变（电源断开）

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

  - 若电容器两板间电压U保持不变（电源不断开）

$$W = \frac{1}{2}CU^2$$

电场的能量

忽略边缘效应，对平行板电容器有

$$U = Ed \qquad C = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad W = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$$

结论：带电系统的能量存储于电场中

能量密度 $\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$ **（适用于所有电场）**

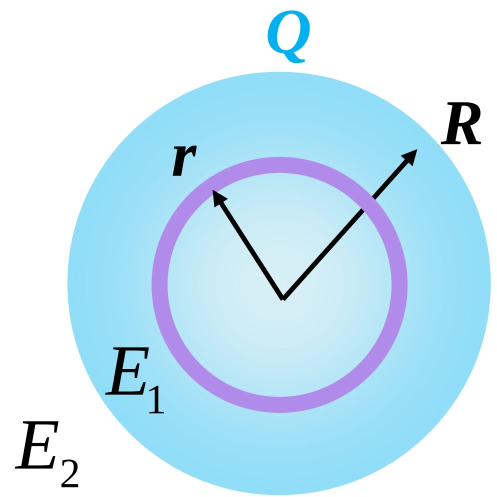
不均匀电场中 $\mathrm{d}W = w\mathrm{d}V$ $\boxed{W = \iiint_V \mathrm{d}W = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V}$

例 已知均匀带电的球体，半径为R，带电量为Q

求 从球心到无穷远处的电场能量

解

$$E_1=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0R^3}\qquad E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$



取体积元 $\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$

$$W_1=\int_0^R\frac{1}{2}\varepsilon_0E_1^{\,2}\cdot4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0R}$$

$$W_2=\int_R^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0E_2^{\,2}\cdot4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0R}\qquad W=W_1+W_2=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0R}$$

思考：R、Q相同的带电球面和带电球体， 哪个电场能量更大一些?

例 一个单芯电缆线，电缆芯半径为 r_1，外铅制表皮内径 r_2 中间充满介质 ε_r，当电缆内芯和外皮间电压为 Δu 时，

求 长度为 l 的一段电缆内储存的电场能量是多少?

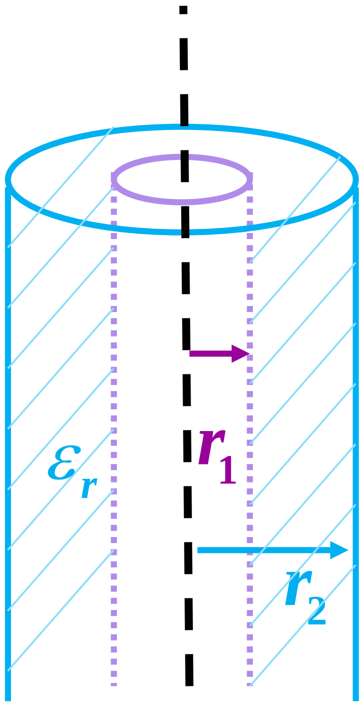
解 利用能量密度进行求解

设内芯、外皮分别带电线密度 $\pm\lambda$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

$$\Delta u=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\Delta u}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$



$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\qquad \mathrm{d}W=w\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot l$$

$$W=\int \mathrm{d}W=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{2}\varepsilon\Big(\frac{1}{2\pi\varepsilon r}\cdot\frac{2\pi\varepsilon\Delta u}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\Big)^2\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot l=\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\Delta u^2$$

本节回顾

CONTENT

学习内容

- ✓ 电容器及其电容
- ✓ 电容器的串并联
- ✓ 静电场的能量

课下任务

- 作业册“电容，电场能量”

静电场的基本规律

1. 电荷守恒　　自然界最普遍的规律之一

2. 库仑定律

$$\vec{F} = k\frac{qq_0}{r^2}\vec{r}^{\,0} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$$

——真空中静止点电荷之间的受力规律

3. 叠加原理

电场强度：

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{r}_i^{\,0} = \int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$$

电势：

$$U = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4. 高斯定理　电荷与电场之间的定量关系

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{i内}$$

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

- 静电场是有源场
- 可用于求解某些对称分布的电场

5. 环路定理　电场力做功与路径的关系

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$ → 静电场是无旋场

→ 静电场是保守场 → 电势

描述静电场的基本量 $\vec{E}$ u

1. 定义

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$u=\int_P^{"0"}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{W}{q_0}$$

q_0：检验电荷　　积分沿任意路径

2. 二者关系

积分 $$u=\int_P^{"0"}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

微分 $$\vec{E}=-\mathrm{grad}(u)$$

3. $\vec{E}$ 的计算

a. 点电荷电场＋叠加原理

$$\vec{E}=\int_Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$$

b. 高斯定理

c. 典型电场＋叠加原理

（球面、无限长线、柱面、板）

d. 已知电势——微分关系

4. *u* 的计算

$$u=\int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

a. 点电荷电势＋叠加原理

b. 定义式（已知电场 $\vec{E}$ 分布）

c. 典型电势＋叠加原理（如：球面电势）

静电场中的导体 （导体与静电场相互作用后的静电场）

- 静电平衡的条件：内部电场强度处处为零，表面任意一点的电场强度方向垂直于导体表面（导体是个等势体，导体表面是个等势面）
- 确定电荷分布：
  - ✓ 电荷守恒 ✓ 静电平衡 ✓ 叠加原理 ✓ 高斯定理
- 根据电荷分布求解电场强度和电势

电容　电容器

孤立导体 $C=\dfrac{Q}{u}$　　电容器 $C=\dfrac{Q}{\Delta u}$

电容器两极板间的电压

相对于无穷远处的电势

➢计算方法：假设带电Q ➡ 求E ➡ 求u 或Δu ➡ $C=\dfrac{Q}{\Delta u}$

电场的能量

能量密度：$\boxed{w_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2}$

能量：$\boxed{W=\iiint_V w_e \mathrm{d}V=\iiint_V \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V}$　V：电场存在的体积空间

功能关系：

静电力做功，电场能量减少；

外力做功，电场能量增加