本节概览

CONTENT

学习内容

- 静电力的做功特点
- 静电力环流定理
- 电势能
- 电势、电势叠加原理

静电力做功特点

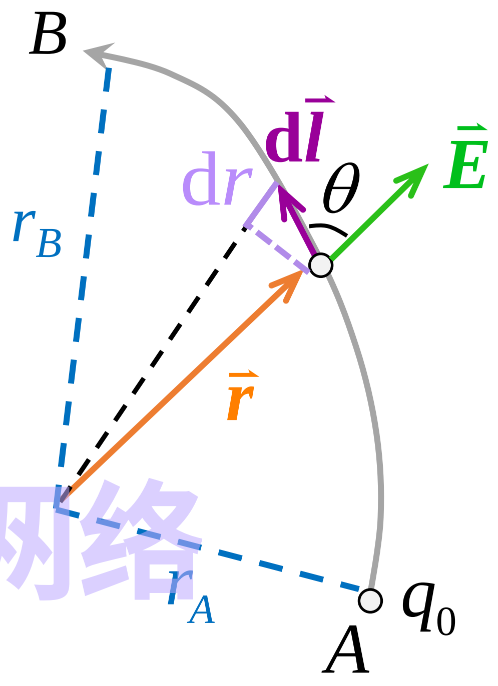
1. 点电荷的电场

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}l\cos\theta = r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$A = \int\mathrm{d}A = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$



结论 A仅与q_0的始末位置有关，与路径无关

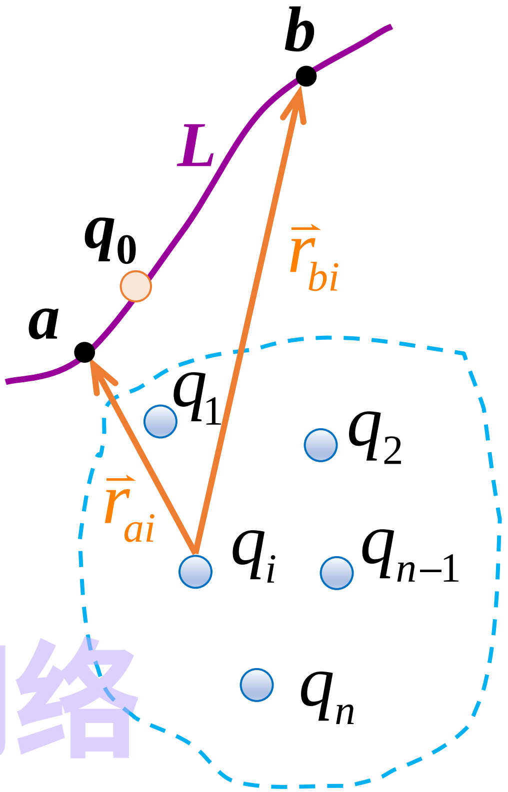
2. 任意带电体的电场

电荷系q_1、q_2、…的电场中，移动 q_0，有

$$A_{ab}=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0(\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i)\cdot d\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_i\frac{q_iq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}}\right)$$



结论

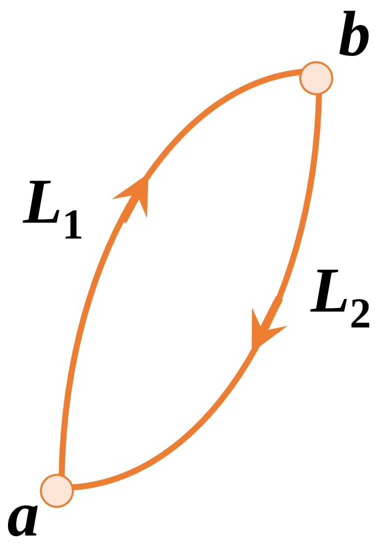
- 电场力作功只与始末位置有关，与路径无关
- 静电力是保守力，静电场是保守场

静电场环流定理

任意静电场中，单位正电荷（检验电荷）沿闭合路径运动一周，静电力所做的功为：

$$A=\oint_L q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{a(L_1)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{b(L_2)}^{a} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int_{a(L_1)}^{b}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}-q_0\int_{a(L_2)}^{b}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$



即 $\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$ ——静电场的安培环路定理

- **在静电场中：场强沿任意闭合路径的线积分恒等于零**
- **在静电场中：电荷沿任意闭合路径运动一周，静电力做功为零**

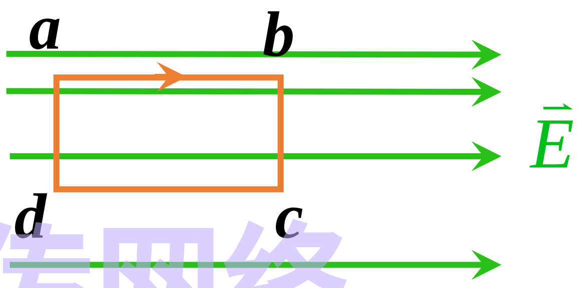
思考 电场线平行但不均匀分布，是否是静电场的电场线?

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_a^b E_1 \mathrm{d}l + \int_c^d (-E_2)\mathrm{d}l$$

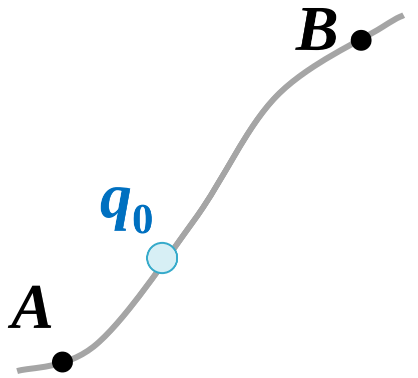
$$= E_1\overline{ab} - E_2\overline{cd}$$

$$\neq 0$$



不是静电场

电势能



任何力做功都会引起能量的变化

$$A_{A\to B} = \int_{AB} q_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\Delta E_P = W_A - W_B$$

即：q_0在电场中AB两点电势能之差等于把 q_0自A点移至B点过程中静电力做的功.

$A>0 \quad W_B < W_A$ $\qquad$ $A<0 \quad W_B > W_A$

令 $\quad W_B = 0 \qquad W_A = \int_A^{参考点} q_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

即：电荷在电场中某点的电势能，在数值上等于把该电荷从该点移动到电势能零参考点时，静电力做的功.

说明

(i) 电势能应属于q_0和产生电场的源电荷系统共有.

(ii) 电荷在某点电势能的值与零点选取有关，而两点的差值与零点选取无关.

即：电势能是相对的，电势能差是绝对的

(iii) 选势能零点原则：

- 当（源）电荷分布在有限范围内时（有限大小带电体），势能零点一般选在无穷远处
- 无限大带电体，一般任选一点为势能零点
- 实际应用中取大地、仪器外壳接地等为势能零点

电势

- 电势定义

单位正电荷在该点具有的电势能

$$u_a = \frac{W_a}{q_0} \Leftrightarrow u_a = \frac{A_{a\text{"0"}}}{q_0} = \int_a^{\text{"0"}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

单位正电荷自该点→“势能零点”过程中电场力做的功

零参考点的选取

同一问题中，电势零参考点需同电势能零参考点一致

电势是标量，其正负不是由源电荷决定，而由积分式确定

负电荷电场中电势不一定为负； 正电荷电场中电势不一定为正

- **电势和电势能的区别**

u_P ——描写电场中*P*点性质的物理量，是场点的单值函数

W_P ——进入场中的电荷*q*在*P*点具有的势能，属于*q*和电场系统共有

二者关系： $W_P = qu_P$

源电荷场中*q*所在点处的电势，不包括*q*的电场

- **电势差**

$$u_{ab} = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0} = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

单位正电荷自*a*→*b* 过程中电场力做的功

说明

$$u_{ab}=\frac{W_a}{q_0}-\frac{W_b}{q_0}=\frac{A_{ab}}{q_0}=\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

(i) u_{ab} 等于单位正电荷从 $a\rightarrow b$ 电场力作的功

或等于 $\vec{E}$ 从 $a\rightarrow b$ 的线积分（沿任意路径）

(ii) u_{ab} 与势能零点的选取无关

(iii) $+q$ 在电场中从 $a\rightarrow b$，电场力做功：

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=W_a-W_b=q(u_a-u_b)$$

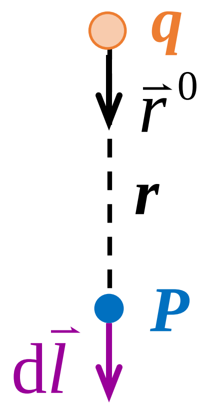
$A>0$ 电场力做正功，q从高电势点$\rightarrow$低电势点

$A<0$ 电场力做负功，q从低电势点$\rightarrow$高电势点

电势的叠加原理

1. 点电荷的电势（取无穷远处为参考点）

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$



$$u_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$（球对称）

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\,\vec{r}^{\,0}$$

2. 任意带电体的电势

由 $u = \int_P^{"0"} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ $\quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ 得：

$$u = \int_P^{"0"} \left(\sum_i \vec{E}_i\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \int_P^{"0"} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i u_i$$

——电势叠加原理

注意 同一问题中，电势零点必须是共同的

- 对点电荷系： $u=\sum\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$ $\qquad u_\infty=0$

- 对连续电荷分布： $u=\int_Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\qquad u_\infty=0$

电势的计算

方法一： 已知电荷分布，根据电势叠加原理 $\boxed{u=\int \mathrm{d}u=\int_Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

方法二： 已知场强分布，根据电势定义 $\boxed{u_P=\int_P^{"0"}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$

例 均匀带电圆环半径为R，电荷线密度为λ （或圆环带电量q）

求：圆环轴线上一点的电势

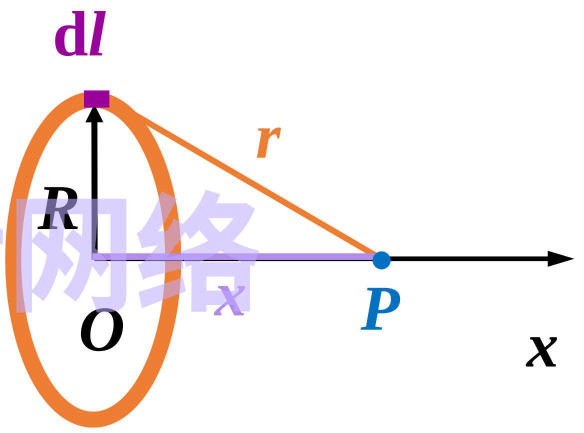
解 取无限远处为势能零参考点， 建立如图坐标系，选取弧线元 dl

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$$

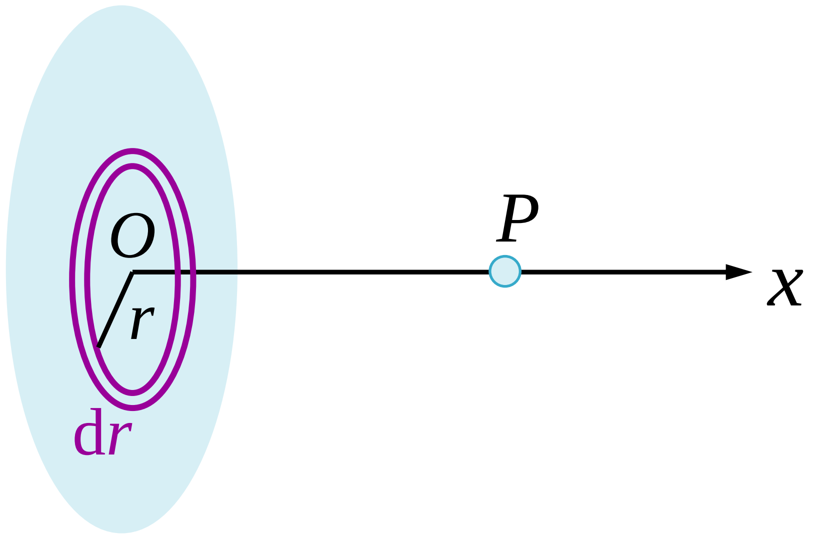
$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$u_P = \int \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$= \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$



例 均匀带电圆盘 R,σ ，求中心轴线任一点的电势



解 在 r 处取宽为 $\mathrm{d}r$ 的带电圆环 $\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\cdot \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}u=\frac{\sigma\cdot 2\pi r\cdot \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{1/2}}$$

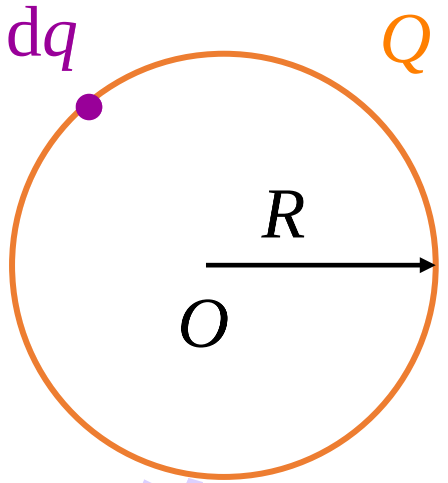
$$u=\int_0^R\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+x^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

$x=0$ 处：$u_o=\dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$ $x>>R$ 处：$u=\dfrac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$ 可视为点电荷

例 计算电量为 Q 的带电球面球心O点的电势

解 在球面上任取一电荷元dq

则电荷元在球心的电势为 $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$



由电势叠加原理

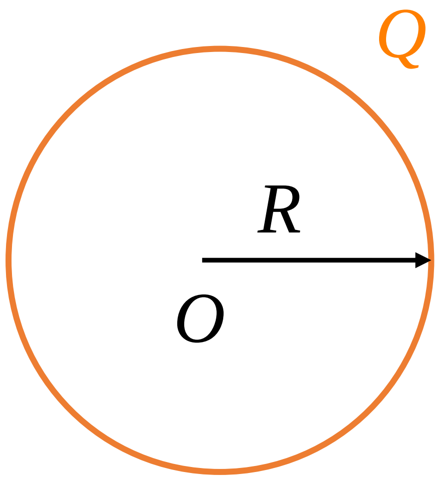
球面上电荷在球心的总电势为

$$u=\int_Q \mathrm{d}u=\int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

变换此问题：求整个空间电势的分布?

已知电场强度的分布：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0} & r>R\\[2ex] 0 & r<R\end{cases}$$



$\because$ **带电球面为有限大小的带电体** $\therefore$ **令** $u_\infty=0$

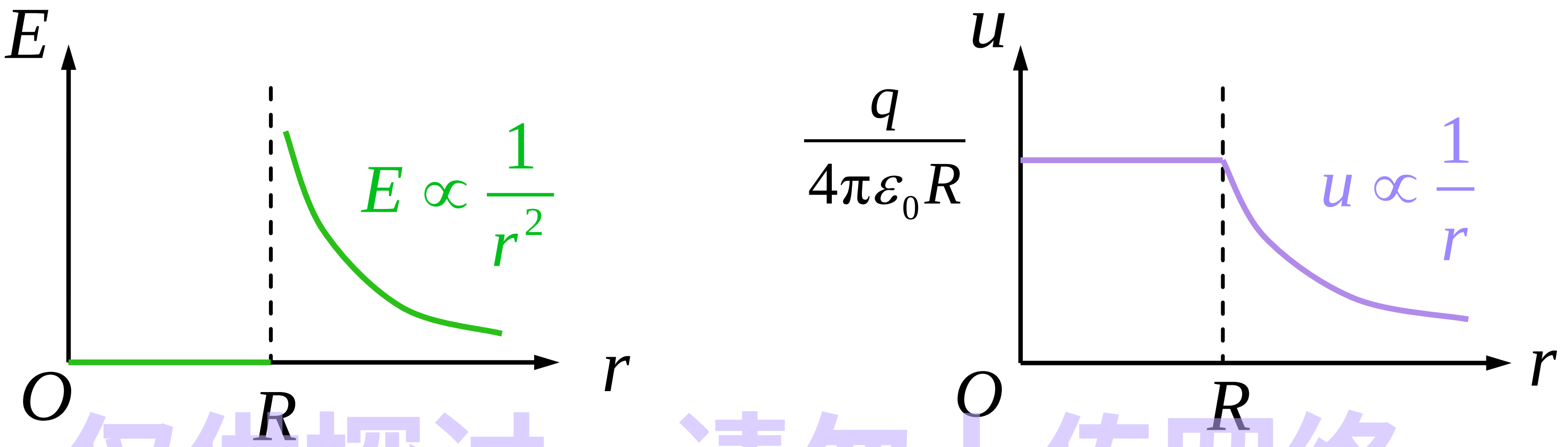
$r>R$ **处** $\quad u_P=\int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^\infty \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$r<R$ **处** $\quad u_P=\int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_p^R \vec{E}_{内}\cdot d\vec{l}+\int_R^\infty \vec{E}_{外}\cdot d\vec{l}=0+\int_R^\infty \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$r=R$ **处** $\quad u_P=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

结论 均匀带电球面是个等势体.球面内部和球面处电势均为 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

球外电势的分布同点电荷电势分布



两同心球面组合，求空间电势分布?

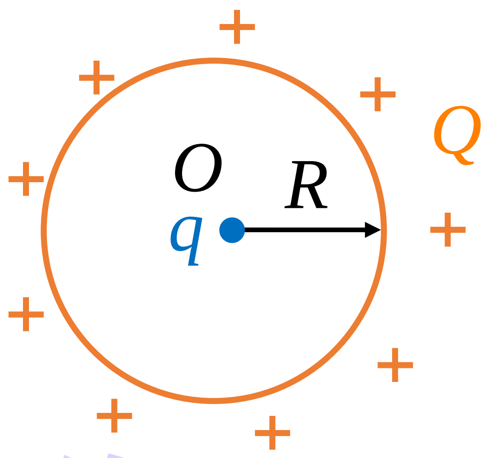
根据上面的结论，采用电势叠加原理，也可以用电势定义求解

例 带电球面 R,Q 中心有一点电荷 q，求 $\vec{E}(r),u(r)$

解

$$\vec{E}=\begin{cases} r<R & E_1=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ r>R & E_2=\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

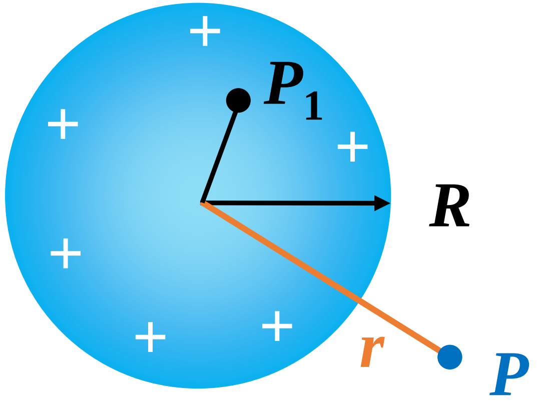
$$u=\begin{cases} r<R & u_1=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ r>R & u_2=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ r=R & u_3=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$



例 半径为R，带电量为q 的均匀带电球体，求 带电球体的电势分布

解 由高斯定理

$$\begin{cases} r < R & E_1 = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \\ r \geq R & E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$



对球外一点P $$u_{外} = \int_P^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

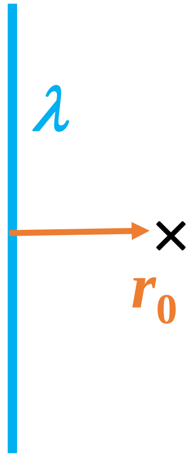
对球内一点P_1 $$u_{内} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} E_2 \mathrm{d}r = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$$

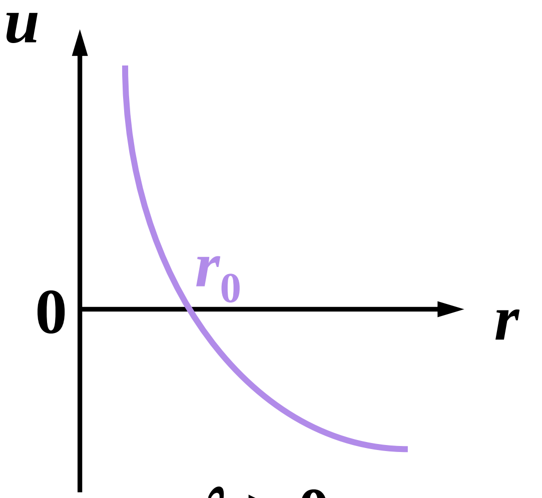
例 无限长均匀带电直线（线密度为λ），求图中距离直线为 r 处位置的电势

解 无限长均匀带电直线的场强为

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r}^{\,0}$$

选 $u_{r_0}=0$





$\lambda>0$

$$u=\int_r^{r_0}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{r_0}\frac{\lambda\vec{r}^{\,0}\cdot d\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}=\int_r^{r_0}\frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

本节回顾

CONTENT

学习内容

- ✓ 静电力的做功特点
- ✓ 静电力环流定理
- ✓ 电势能
- ✓ 电势、电势叠加原理

课下任务

- □ 作业册“电势及电势和电场强度的关系”