本节概览

CONTENT

学习内容

- 电场强度的分析和计算方法（续）
- 电场线
- 电通量

库仑定律的数学表达式

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}^{\,0} \quad \text{或} \quad \vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85\times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2\mathrm{N}}$$

ε_0为真空中的介电常数

电场强度 $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$ 点电荷电场 $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$

1. 原则：利用点电荷的电场公式和叠加原理

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}^{\,0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}}$$

$$\mathrm{d}q = \begin{cases} \lambda \mathrm{d}l & \text{（带电体为线分布）} \\ \sigma \mathrm{d}S & \text{（带电体为面分布）} \\ \rho \mathrm{d}V & \text{（带电体为体分布）} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0} \\ \displaystyle\int \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0} \\ \displaystyle\int \frac{\rho \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0} \end{cases}$$

电场强度的计算步骤

2. 矢量积分化成标量积分，用分量式表示

$$\begin{cases} E_x = \int \mathrm{d}E_x \\ E_y = \int \mathrm{d}E_y \\ E_z = \int \mathrm{d}E_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

3. 分析带电体的对称性，简化计算

4. 利用已知电场，化繁为简

均匀带电细圆环

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}}$$

均匀带电圆盘

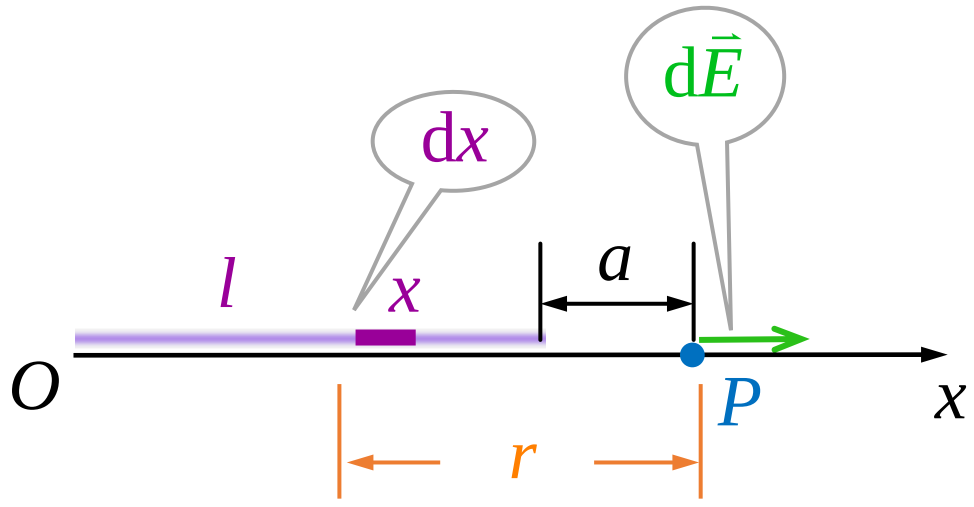
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}]\vec{i}}$$

无限大均匀带电平面

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

例 长为 l 均匀带电直线，电荷线密度为 λ

求：图示P点的电场强度



解 在坐标 x 处取一小段线元dx

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$$

该点电荷在 P 点的场强方向如图所示

大小为 $$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (l+a-x)^2}$$

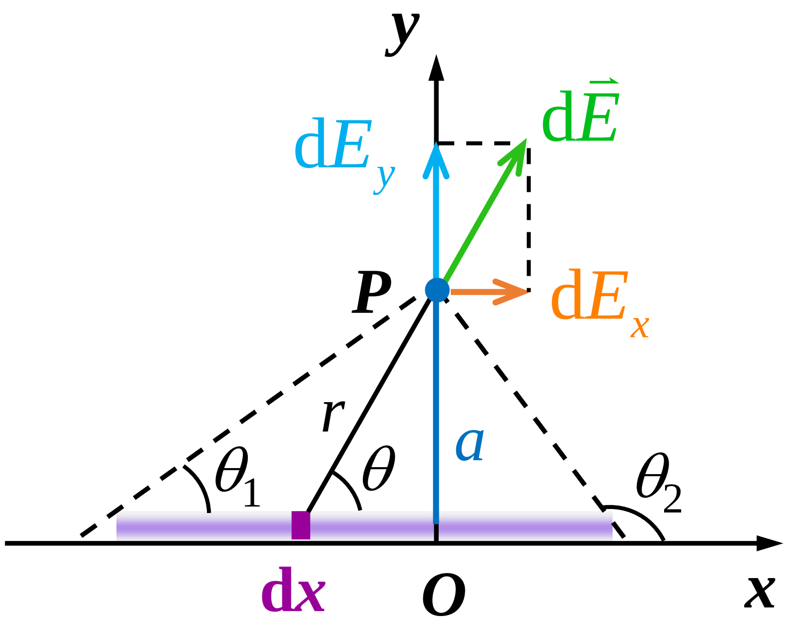
$\because$ 各电荷元在 P 点的场强方向一致 $\therefore$ 场强大小直接相加

$$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^l \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (l+a-x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right)$$

若*P*点与带电线不在同一直线上

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2}$$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta \qquad \mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\theta$$



统一变量 $x = a\tan(\theta - \frac{\pi}{2}) = -a\cot\theta$

$$\mathrm{d}x = a\csc^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2\csc^2\theta \qquad \mathrm{d}E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta \mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

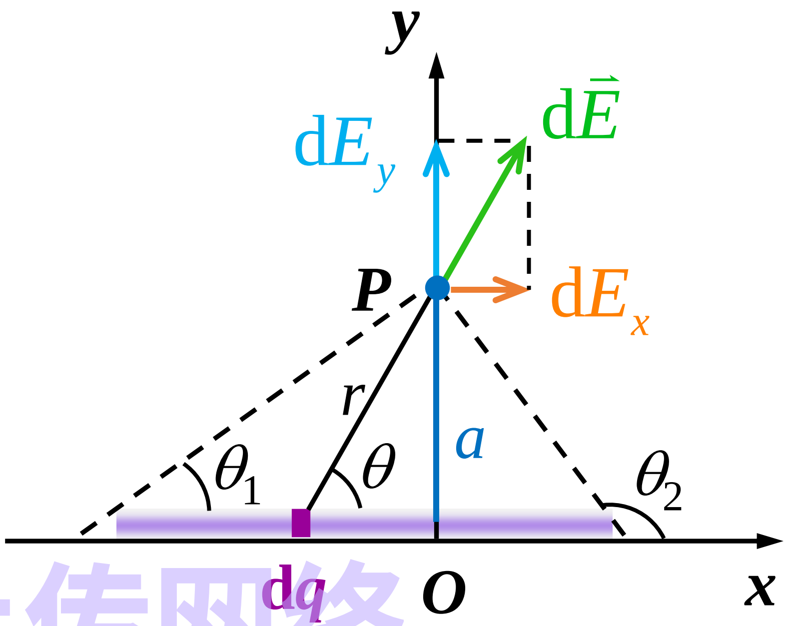
$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

计算得 $E_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$ $E_y = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

讨论

(i) 无限长均匀带电直线 ($l >> a$)

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ $\Rightarrow$ $E_x = 0$ $\boxed{E_y = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$



(ii) 半无限长均匀带电直线

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$ $\Rightarrow$ $E_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$ $E_y = \dfrac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$

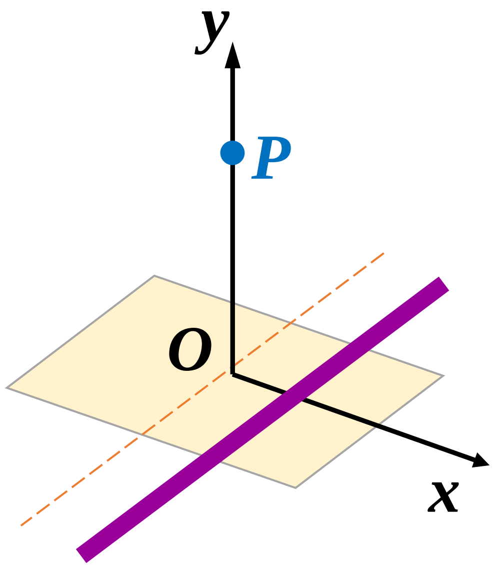
例 求面密度为 σ，宽为d，长无限的平板中心轴线上方a 处P点的电场强度

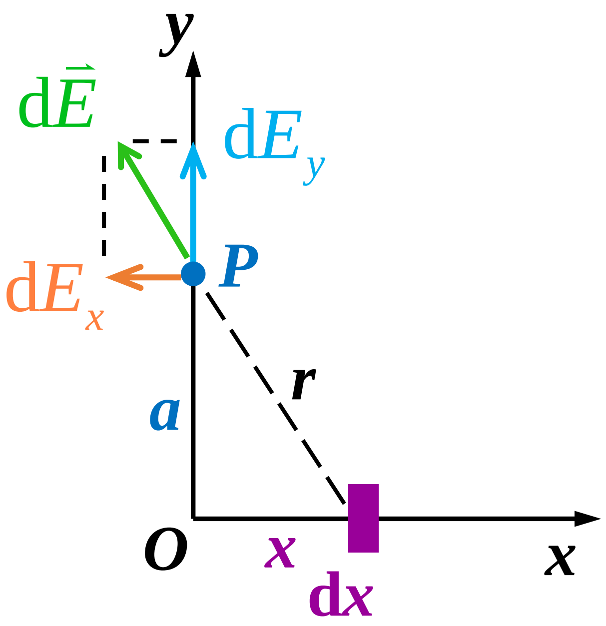
解 可看作无数无限长带电线的集合

在x处取宽为$\mathrm{d}x$的小窄条

$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma\cdot\mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0(a^2+x^2)^{1/2}}$$

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cdot(-\frac{x}{r})\qquad \mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\cdot\frac{a}{r}$$





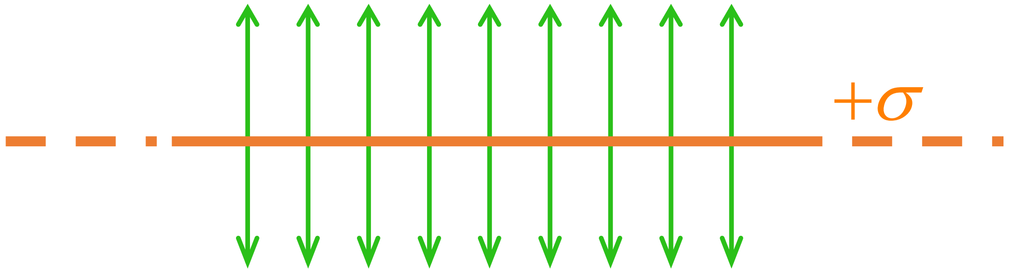
分析对称性可知， $E_x=0$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\frac{\sigma a}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-d/2}^{d/2}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}(\frac{d}{2a})$$

$$E = E_y = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\left(\frac{d}{2a}\right)$$

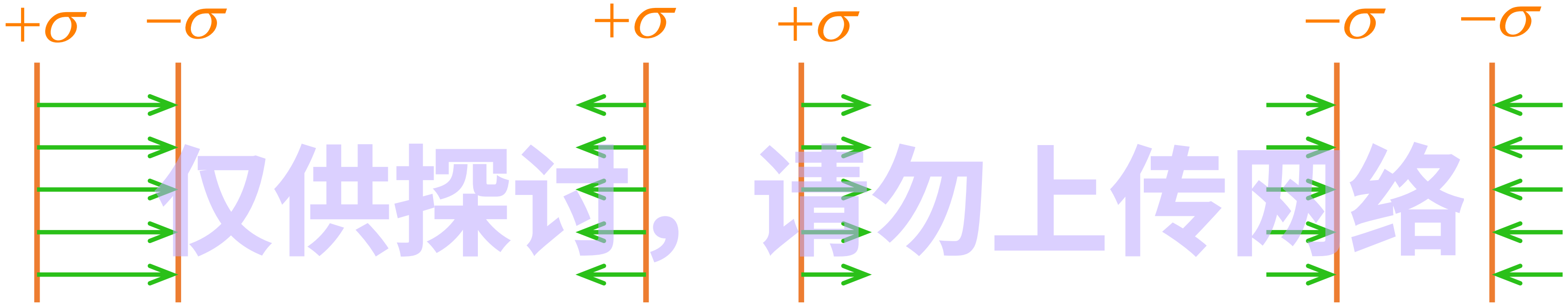
讨论

(i) 无限大均匀带电平面 ($d \to \infty$)



$$E = E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(ii) 两个无限大均匀带电平面（不考虑边缘效应）



电场线（电力线）

1. 规定

$$\left|\vec{E}\right| = E = \mathrm{d}N / \mathrm{d}S_{\perp}$$

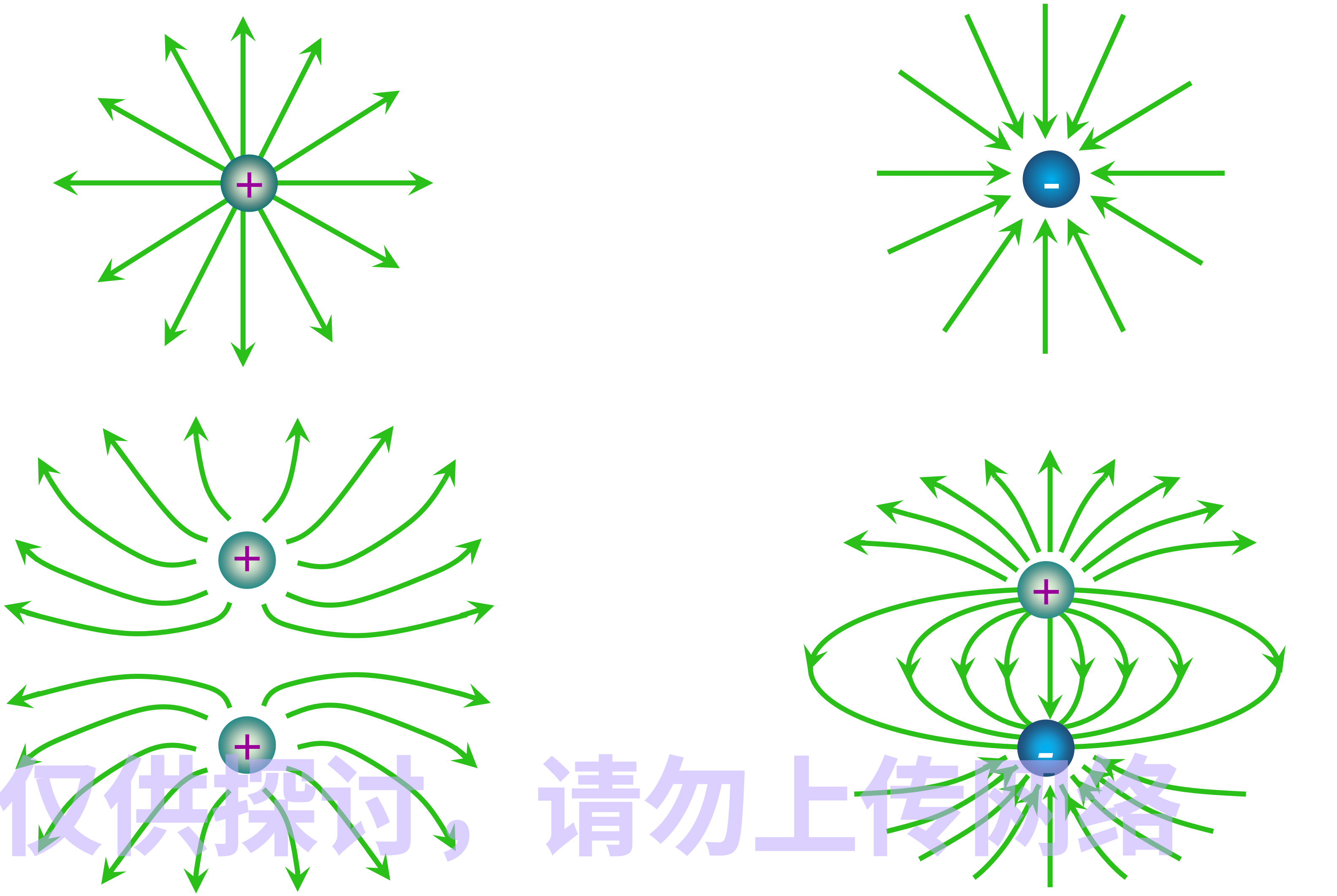
曲线上每一点切线方向为该点电场方向

通过垂直于电场方向单位面积电场线数为该点电场强度的大小

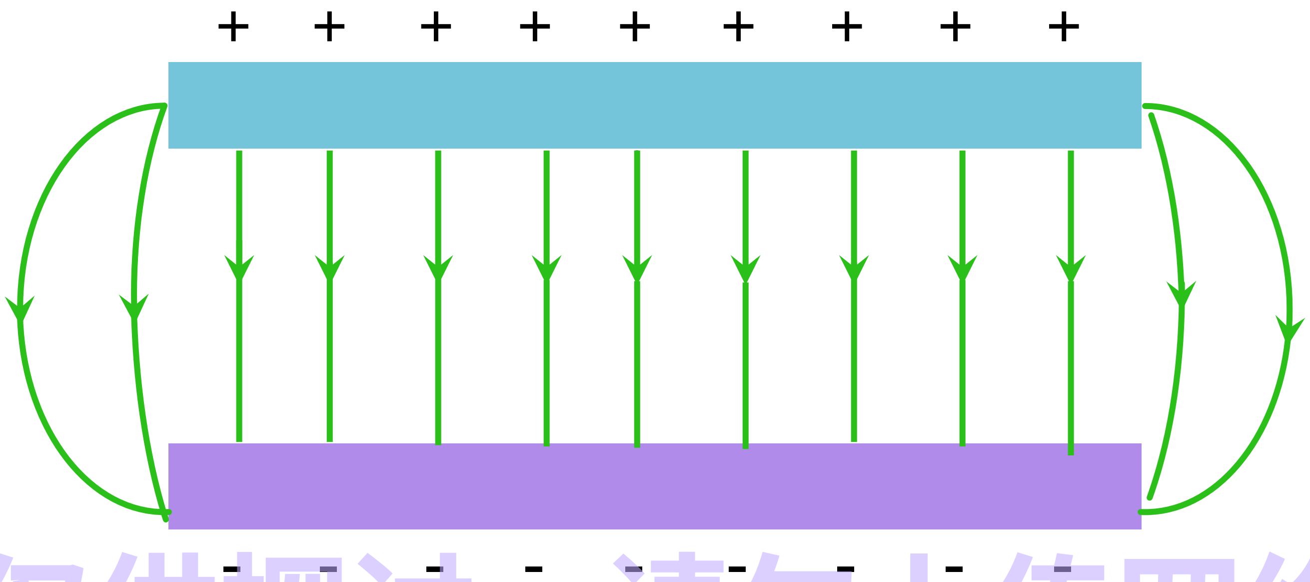
2. 电场线的性质

- ✓ 起始于正电荷（或无穷远处），终止于负电荷，不会在没有电荷处中断
- ✓ 不会形成闭合曲线，两条电场线不会相交
- ✓ 电场线一般不是电荷运动的轨迹
- ✓ 电场线密集处电场强，电场线稀疏处电场弱

几种电荷分布的电场线图



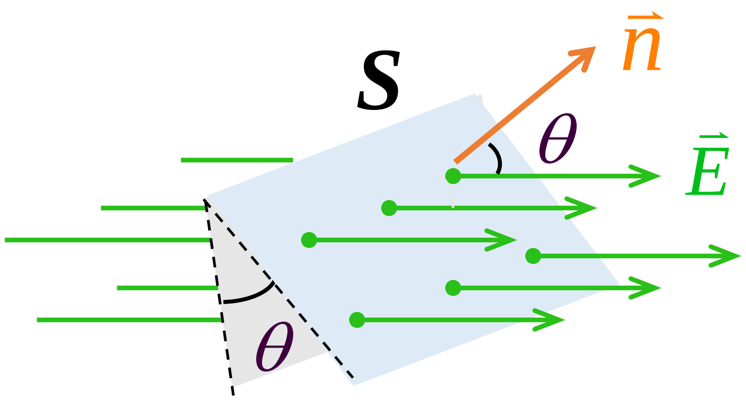
带电平行板电容器的电场

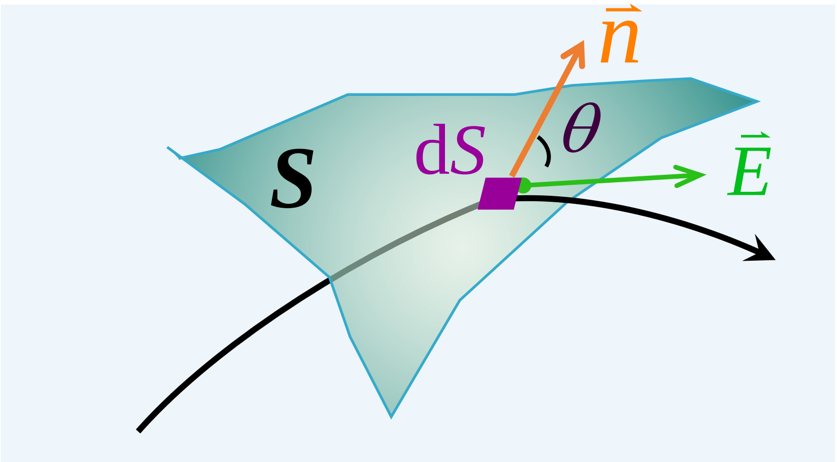


电通量

穿过某一有向曲面的电场线条数，用Φ_e表示

电通量的计算公式





$$\Phi_e = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

$$\Phi_e = \iint_S \mathrm{d}\Phi_e = \iint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

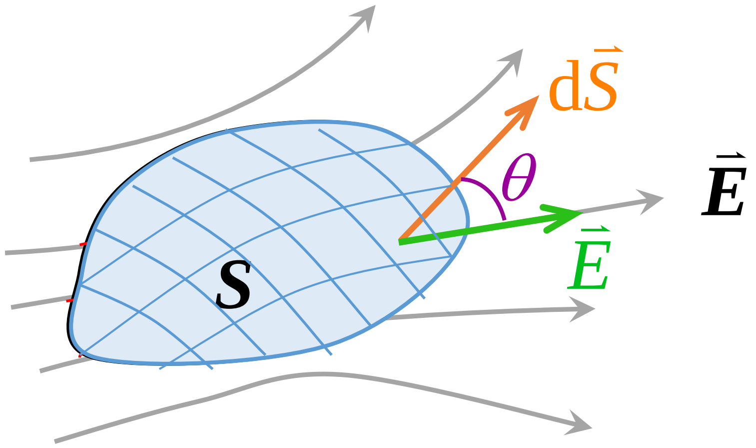
均匀电场，S法线方向与电场强度方向成θ角

电场不均匀，S为任意曲面

讨论

(i) 电通量是标量，有正负之分

- $\theta<90^0$，通量为正；
- $\theta=90^0$，通量为零；
- $\theta>90^0$，通量为负；



(ii) 闭合曲面的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Phi_e=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\Phi_e=\oiint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_S E\cos\theta\mathrm{d}S}$$

规定：法线的正方向为指向闭合曲面的外侧

本节回顾

CONTENT

学习内容

- ✓ 电场强度的分析和计算方法（续）
- ✓ 电场线
- ✓ 电通量

课下任务

- 作业册“电场强度的计算 电通量”