本节概览

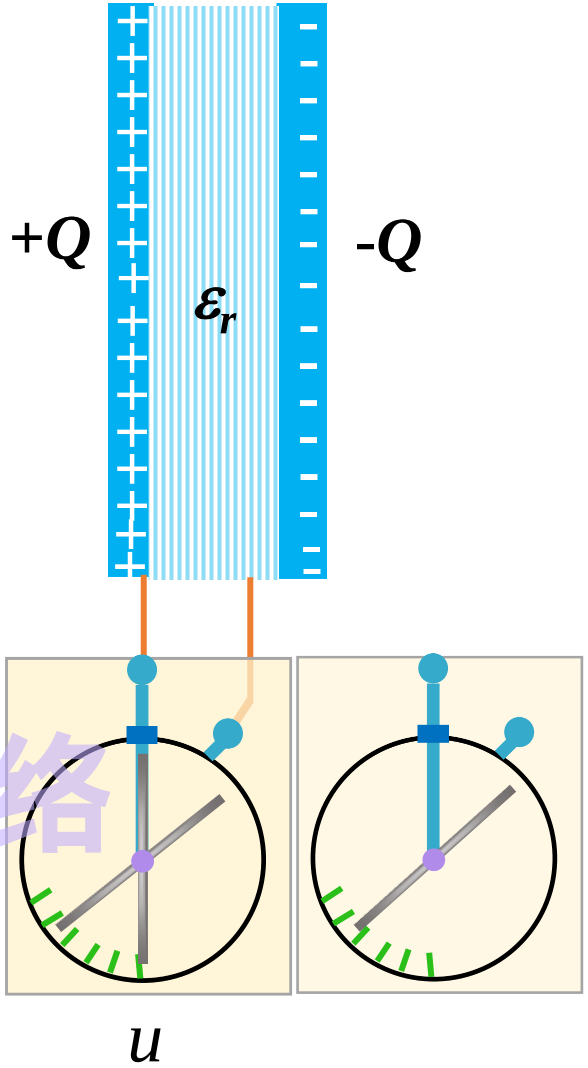
CONTENT

学习内容

- 电介质对电场的影响
- 介质中的高斯定理
- 本章小结

电介质对电场的影响

实验 将介质板插入带有一定电量的平行板电容器中，其电场强度和电势差的变化



$$u = \frac{u_0}{\varepsilon_r} \qquad \boxed{E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}}$$ ——介质中电场减弱

ε_r——电介质的相对介电常数

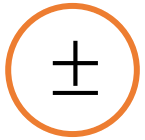
真空中的介电常数：$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}}$

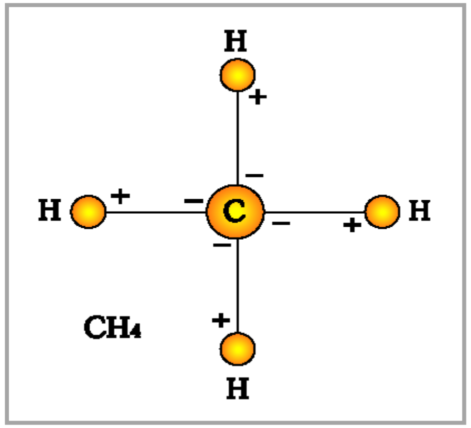
介质中的介电常数：$\varepsilon \geq \varepsilon_0$

介质中的相对介电常数：$\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \geq 1$

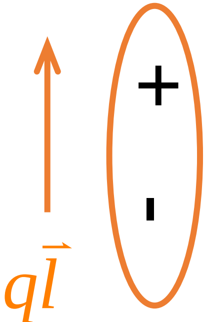
电介质分子的电结构特征

无极分子

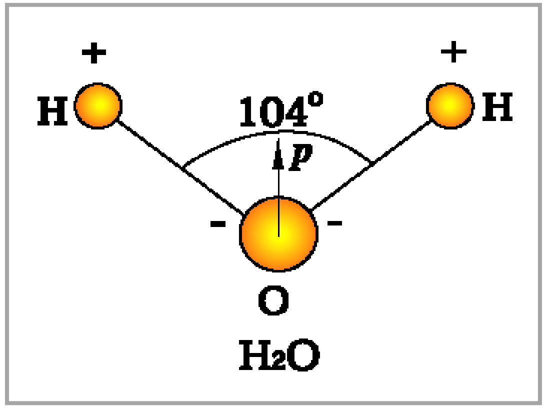




有极分子



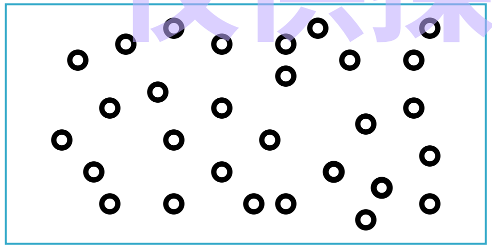
$\vec{P} = q\vec{l}$



电介质的极化

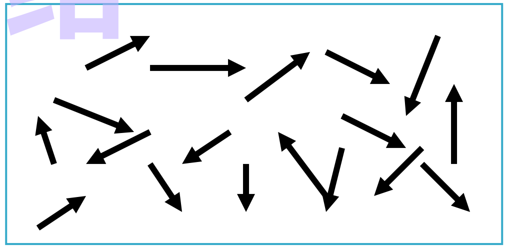
1. 无电场时（由于分子热运动而排列的杂乱无章）

无极分子



整体对外
不显电性

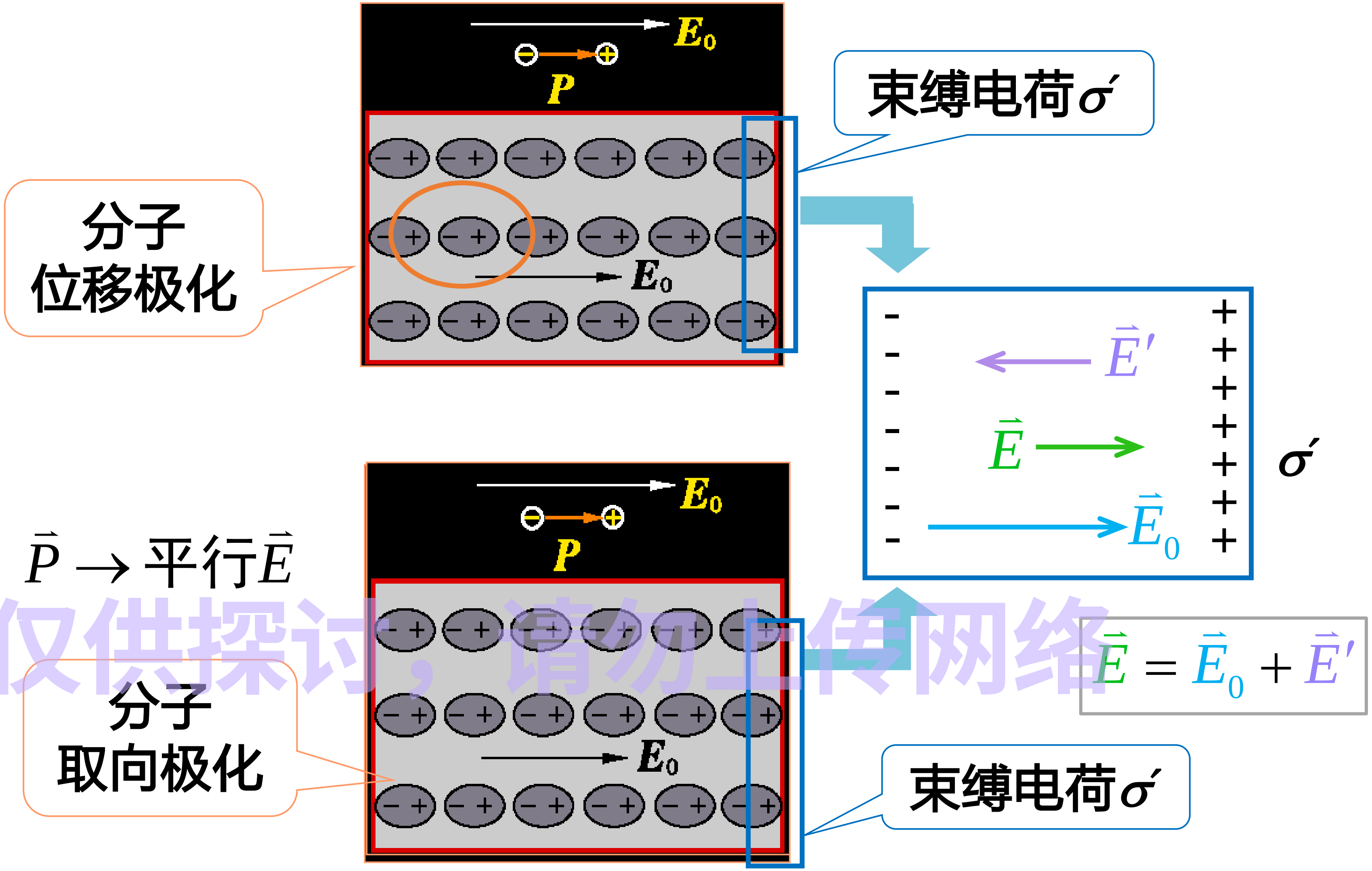
有极分子



2. 有外场时

- 无极分子

- 有极分子



总述

电场

（放在电场中的）
电介质

产生
附加电场

介质表面出现
极化电荷

- 介质中的电场 = 外电场 + 极化电场 $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$
- 撤去外场后，极化电荷消失，介质不显电性
- 不论何种电荷，产生电场的规律相同

(i) 导体进入电场→相互作用过程→达到平衡后 $\vec{E}_{内}=0$ → 外表面出现感应电荷；

介质进入电场→相互作用过程→达到平衡后 $\vec{E}_{内}\neq 0$ → 外表面出现极化电荷.

(ii) 感应电荷的出现，是导体中电子定向运动的结果；

极化电荷的出现，是由于介质被极化，分子偶极子转向，增大电距而引起的结果.

(iii) 自由电荷、感应电荷、极化电荷电性质相同，产生电场的规律完全一样.

(iv) 两种不同分子结构的电介质极化的微观机理不同，但宏观表现的极化现象一样，在静电场中不必分开讨论.

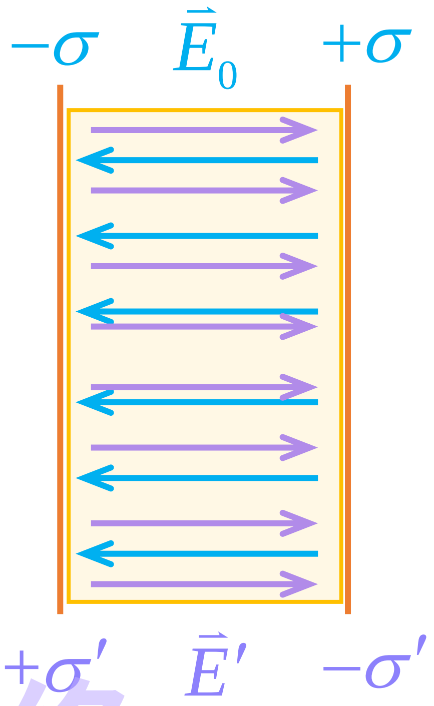
例 无限大平行板电场

加入介质前的外场：$E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

加入介质后的极化电场：$E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

介质中的总电场：$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}$$



由实验所得结论：$E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$　　$\sigma - \sigma' = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r}$　　$\sigma' = \sigma(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r})$

介质中的高斯定理

1. 电位移矢量 $\vec{D}$

- 定义 $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$ ——空间位置的单值函数

  单位：$\mathrm{C\cdot m^{-2}}$

- 图示法描写电场：$\vec{D}$ 线

  画法与电场线完全相同：

  始于正自由电荷，止于负自由电荷，不相交，不闭合

- $\vec{D}$ 的通量： $\Phi_D=\vec{D}\cdot\Delta\vec{S}$ （均匀） $\Phi_D=\iint\limits_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ （非均匀）

2. 介质中的高斯定理（通过特例推证）

通过闭合曲面的电位移通量等于该高斯面所包围的自由电荷的代数和，与极化电荷及高斯面外电荷无关.

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i内}$$

—— 介质中的高斯定理

$\vec{D}$ ——由空间所有电荷（自由、束缚、S面内、S面外）共同决定；

$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$ ——仅由S面内自由电荷决定；

对比真空中的高斯定理 $$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_{i内}$$

例 平行板电容器，其中充有两种均匀电介质.

求 (1) 各电介质层中的场强 (2) 极板间电势差

解 作一个圆柱体高斯面S_1

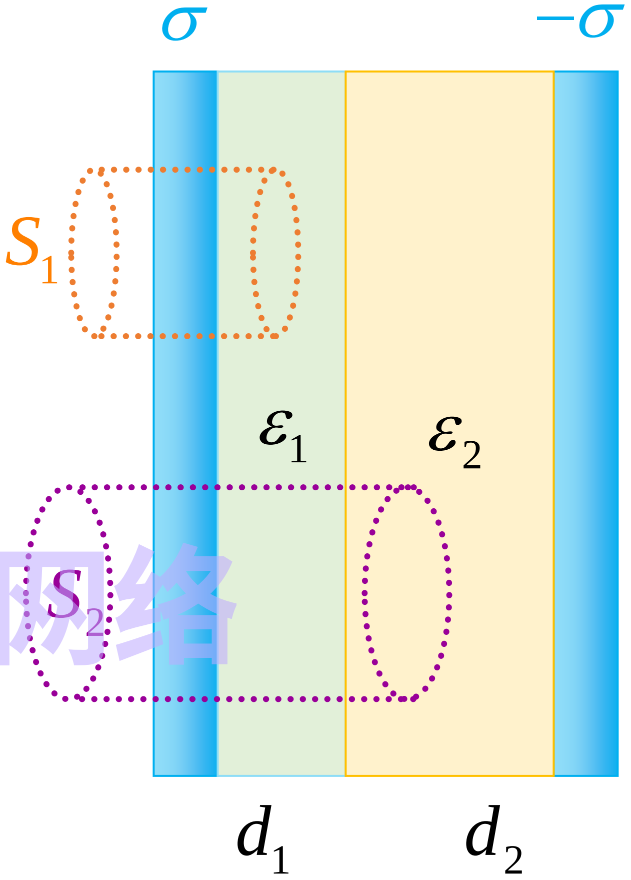
$$\oiint_{S_1} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i(S_1\text{内})$$

$$D_1\Delta S_1 = \sigma\Delta S_1 \qquad D_1 = \sigma$$

同理，作一个圆柱体高斯面S_2

$$\oiint_{S_2} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i(S_2\text{内}) \qquad D_2 = \sigma$$

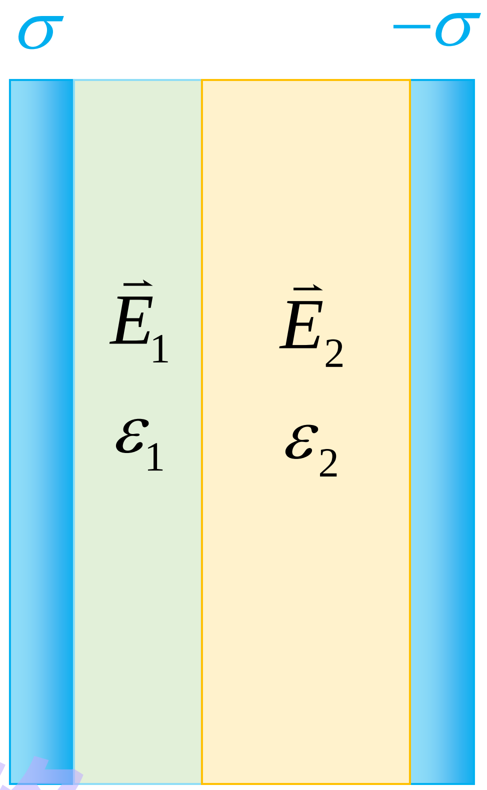
$$D_1 = D_2 \Rightarrow E_1 \neq E_2$$



$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$$

$$\Delta u = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{d_1} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} d_2$$

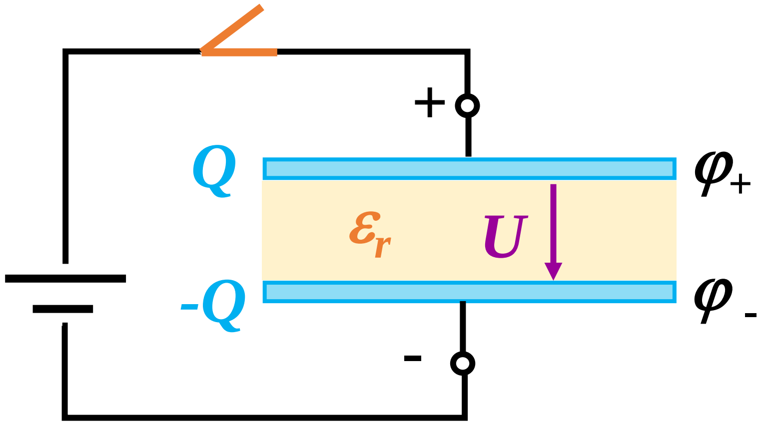


注意：各电介质层中的场强不同

对于对称分布的电场，从自由电荷q_0的对称分布

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i \xrightarrow{} \vec{D} \xrightarrow{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}} \vec{E} \xrightarrow{u_P = \int_P^{\text{"0"}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}} u$$

例 平行板电容器充电完毕后，(1) 断开电源 (2) 不断开电源，分别从真空状态然后加入介质后，C、电场强度、电势差、电位移矢量、自由电荷面密度、电场能量如何变化.



解 (1) 充电完毕后断开电源：

$$\boxed{W=\frac{Q^2}{2C}}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

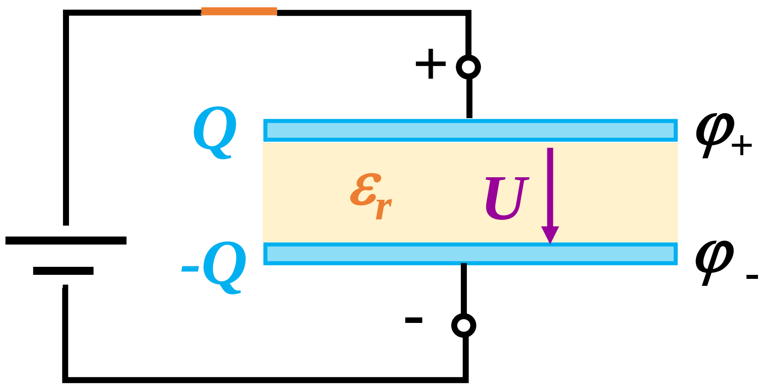
极板上的电量不会发生变化

设真空状态时各量分别为 C_0 $\boxed{\sigma_0}$ $\boxed{E_0}$ U_0 $\boxed{D_0}$ $\boxed{W_0}$

加入介质后为 $\varepsilon_r C_0$ σ_0 E_0/ε_r U_0/ε_r D_0 W_0/ε_r

(2) 充电完毕后不断开电源：

极板两端电压不变



$$W=\frac{Q^2}{2C}\boxed{=\frac{1}{2}CU^2}=\frac{1}{2}QU$$

设真空状态时各量分别为 C_0 $\boxed{\sigma_0}$ U_0 $\boxed{E_0}$ $\boxed{D_0}$ $\boxed{W_0}$

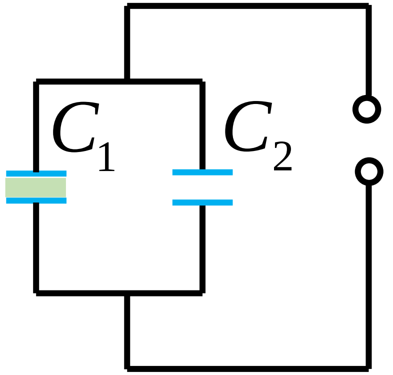
$C=Q/\Delta U$ $Q=C\Delta U$ E_0/ε_r ?

加入介质后为 $\varepsilon_r C_0$ $\varepsilon_r\sigma_0$ U_0 E_0 $\varepsilon_r D_0$ $\varepsilon_r W_0$

例 (1) 两相同电容器并联，充电后与电源断开

(2) 两相同电容器串联，与电源连接

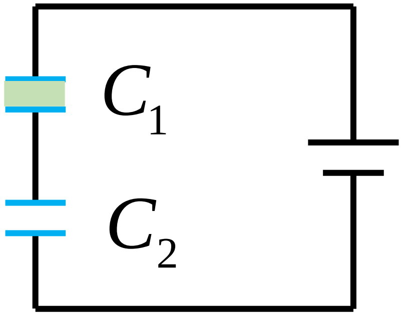
判断：将介质ε_r充入C_1，则C_2的 Q_2、U_2、W_2 怎么变化



解 (1) （Q_2 U_2 W_2）都减小 ↓

u 相同 ⟹ $\dfrac{Q_1}{\varepsilon_r C}=\dfrac{Q_2}{C}$　　可得：$Q_1=\dfrac{\varepsilon_r Q}{\varepsilon_r+1}$　$Q_2=\dfrac{Q}{\varepsilon_r+1}$

Q 守恒 ⟹ $Q_1+Q_2=Q$



(2) （Q_2 U_2 W_2）都增大 ↑

u 不变 ⟹ $U_1+U_2=U$

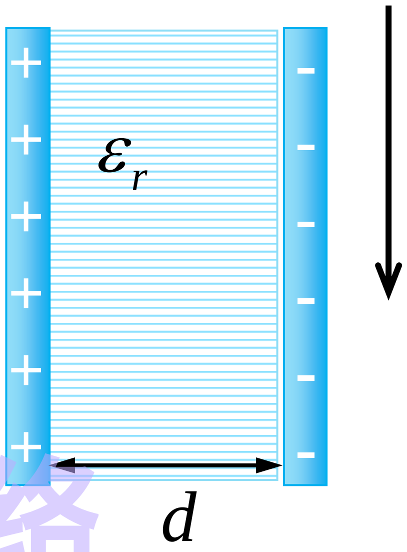
Q 相等 ⟹ $CU_2=\varepsilon_r CU_1$

可得：$U_2=\dfrac{\varepsilon_r U}{\varepsilon_r+1}$　$Q_2=\dfrac{\varepsilon_r CU}{\varepsilon_r+1}$

例 平行板电容器S、d、ε_0，接在电源上维持U不变，将一个d、ε_r的介质板插入两板之间，则介质板插入前后电场力做的功是多少?

解 插入前，电容器内电场的能量为

$$W_0=\frac{1}{2}C_0U^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{d}U^2$$



插入后，电容器内电场的能量为

$$W_0=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}U^2$$

电场的能量的增量为 $\Delta W=W-W_0{}^2=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d}(\varepsilon_r-1)$

$$\Delta W = W - W_0^{\,2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d}(\varepsilon_r - 1) \qquad \cancel{A = -\Delta W = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d}(\varepsilon_r - 1)} < 1$$

思路：~~若电场力做的功＝电场的能量增量的负值?~~

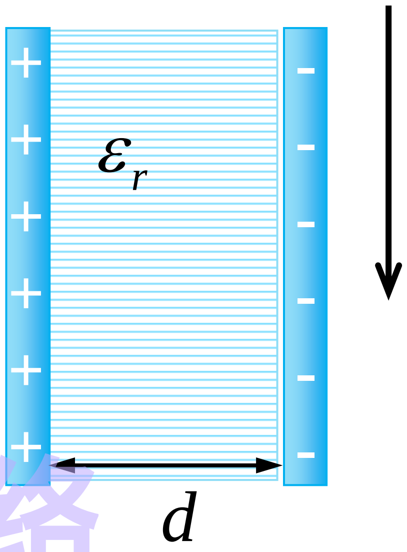
正解：根据功能关系，分析电容器系统

$$A_{外} - A_{内} = \Delta W$$

电容器电场能量的增量

电源对电容器做的功

电容器内电场力吸引介质板而极化做的功



加入介质后，电压不变，电容增加，因此Q增加

$$\Delta Q = C_2 U - C_1 U = \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} - \frac{\varepsilon_0 S}{d}\right) U \Rightarrow A_{外} = \Delta Q \cdot U = \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} - \frac{\varepsilon_0 S}{d}\right) U^2$$

静电场的基本规律

1. 电荷守恒 自然界最普遍的规律之一

2. 库仑定律

$$\boxed{\vec{F} = k\frac{qq_0}{r^2}\vec{r}^{\,0} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}}$$

——真空中静止点电荷之间的受力规律

3. 叠加原理

电场强度：

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{r}_i^{\,0} = \int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}}$$

电势：

$$\boxed{U = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

4. 高斯定理　电荷与电场之间的定量关系

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{i内}$$

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

- 静电场是有源场
- 可用于求解某些对称分布的电场

5. 环路定理　电场力做功与路径的关系

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$ → 静电场是无旋场

→ 静电场是保守场 → 电势

描述静电场的基本量 $\vec{E}$ u

1. 定义

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$u=\int_P^{"0"}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{W}{q_0}$$

q_0：检验电荷　　积分沿任意路径

2. 二者关系

积分 $u=\int_P^{"0"}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

微分 $\vec{E}=-\mathrm{grad}(u)$

3. $\vec{E}$ 的计算

a. 点电荷电场＋叠加原理

$$\vec{E}=\int_Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$$

b. 高斯定理

c. 典型电场＋叠加原理

（球面、无限长线、柱面、板）

d. 已知电势——微分关系

4. u 的计算

$$u = \int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

a. 点电荷电势 + 叠加原理

b. 定义式（已知电场 $\vec{E}$ 分布）

c. 典型电势 + 叠加原理（如：球面电势）

静电场中的导体 （导体与静电场相互作用后的静电场）

- 静电平衡的条件：内部电场强度处处为零，表面任意一点的电场强度方向垂直于导体表面（导体是个等势体，导体表面是个等势面）
- 确定电荷分布：

✓ 电荷守恒 ✓ 静电平衡 ✓ 叠加原理 ✓ 高斯定理

- 根据电荷分布求解电场强度和电势

电介质

- 介质内部场 $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$ 由极化电荷确定
- 电位移矢量 $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$
- 介质中的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_i q_{0i,内}$$

通过闭合曲面的电位移通量等于高斯面所包围的自由电荷的代数和，与极化电荷及高斯面外电荷无关

- 求解某些对称分布的场

自由电荷分布 $\xrightarrow{\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_i q_{0i,内}}$ $\vec{D}$ $\xrightarrow{\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}}$ $\vec{E}$ $\xrightarrow{u=\int_P^{"0"}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$ u

电容 电容器

孤立导体 $C=\dfrac{Q}{u}$ 电容器 $C=\dfrac{Q}{\Delta u}$ 电容器两极板间的电压

相对于无穷远处的电势

➢计算方法：假设带电Q ⟶ 求E ⟶ 求u 或Δu ⟶ $C=\dfrac{Q}{\Delta u}$

电场的能量

能量密度：$\boxed{w_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2}$

能量：$\boxed{W=\iiint_V w_e \mathrm{d}V=\iiint_V \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V}$

功能关系：

静电力做功，电场能量减少；

外力做功，电场能量增加

V：电场存在的体积空间

本节回顾

CONTENT

学习内容

- ✓ 电介质对电场的影响
- ✓ 介质中的高斯定理
- ✓ 本章小结

课下任务

- □ 作业册“电介质；习题课（二）”

西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

THANKS

https://space.bilibili.com/414621270/video