Wprowadzenie do Metod Numerycznych
Zajęcia nr 6

Michał Bernardelli

22 marca 2011

Do zapamiętania: rozkład QR, ortogonalizacja Grama-Schmidta, odbicie Householdera.

1 Rozkład QR metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta

Rozkład QR można uzyskać stosując ortogonalizację Grama-Schmidta do wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będących kolumnami macierzy A. Otrzymamy wówczas układ wektorów $q_1, q_2, \ldots, q_n$ taki, że $(q_i,\, q_j) = 0$ dla $i \neq j$. Algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta (niepoprawny numerycznie) ma postać:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1, \\ q_k &= a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(a_k,\, q_j)}{(q_j,\, q_j)} q_j \text{ dla } 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Wektory q_j są kolumnami macierzy Q, zaś elementy macierzy trójkątnej górnej R to r_{ij}, przy czym na diagonali są jedynki. W wyniku działania tego algorytmu dostajemy tylko wektory ortogonalne, a nie ortonormalne, zatem LZNK przyjmie postać

$$Rx = (Q^T Q)^{-1} Q^T b.$$

Aby uzyskać wektory ortonormalne wystarczy je znormalizować, uzyskując macierze $\widetilde{Q}$ i $\widetilde{R}$ postaci:

$$\begin{aligned} \widetilde{Q} &= \left(\frac{q_1}{\|q_1\|}, \frac{q_2}{\|q_2\|}, \ldots, \frac{q_n}{\|q_n\|} \right), \\ \widetilde{R} &= CR, \\ C &= \begin{pmatrix} \|q_1\| & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \|q_n\| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zadanie 1
Wykonać rozkład QR metodą odbić Householdera macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Transformacja pierwszej kolumny:

$$a = [2,\ 2,\ 2,\ 0]^T \xrightarrow{H_1} \alpha_1 e$$

$$\|a\|_2^2 = 12, \qquad \|a\|_2 = 2\sqrt{3}, \qquad \gamma = 12 + 4\sqrt{3}, \qquad u = [2+2\sqrt{3},\ 2,\ 2,\ 0]^T$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= H^{(1)} = I - \gamma^{-1} u u^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12+4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} [2+2\sqrt{3},\ 2,\ 2,\ 0] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12+4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 16+8\sqrt{3} & 4+4\sqrt{3} & 4+4\sqrt{3} & 0 \\ 4+4\sqrt{3} & 4 & 4 & 0 \\ 4+4\sqrt{3} & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$A^{(2)} = H_1 A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -2-2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2-2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformacja drugiej kolumny:

$$a = [-2-2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ 4]^T \xrightarrow{H^{(2)}} \alpha_2 e$$

$$\|a\|_2^2 = 48, \qquad \|a\|_2 = 4\sqrt{3}, \qquad \gamma = 8(9+\sqrt{3}), \qquad u = [-2-6\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ 4]^T$$

$$\begin{aligned}
H^{(2)} &= I - \gamma^{-1} u u^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8(9+\sqrt{3})} \begin{bmatrix} -2-6\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \\ 4 \end{bmatrix} [-2-6\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ 4] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8(9+\sqrt{3})} \begin{pmatrix} 8(14+3\sqrt{3}) & 8(4-\sqrt{3}) & -8(1+3\sqrt{3}) \\ 8(4-\sqrt{3}) & 8(2-\sqrt{3}) & 8(1-\sqrt{3}) \\ -8(1+3\sqrt{3}) & 8(1-\sqrt{3}) & 16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (9+\sqrt{3})/6 & (3-\sqrt{3})/6 & -\sqrt{3}/3 \\ (3-\sqrt{3})/6 & (21-11\sqrt{3})/78 & (6-5\sqrt{3})/39 \\ -\sqrt{3}/3 & (6-5\sqrt{3})/39 & (9-\sqrt{3})/39 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{3}}{6} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{57+11\sqrt{3}}{78} & \frac{-6+5\sqrt{3}}{39} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-6+5\sqrt{3}}{39} & \frac{30+\sqrt{3}}{39} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A^{(3)} &= H_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3-\sqrt{3}}{6} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{57+11\sqrt{3}}{78} & \frac{-6+5\sqrt{3}}{39} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-6+5\sqrt{3}}{39} & \frac{30+\sqrt{3}}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -2-2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2-2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 4\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{12+3\sqrt{3}}{13} \\ 0 & 0 & \frac{18-2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Transformacja trzeciej kolumny:

$$
a = \left[\frac{12+3\sqrt{3}}{13}, \; \frac{18-2\sqrt{3}}{13} \right]^T \xrightarrow{H^{(3)}} \alpha_3 e
$$

$$
\|a\|_2^2 = 3, \qquad \|a\|_2 = \sqrt{3}, \qquad \gamma = \frac{12(4+\sqrt{3})}{13}, \qquad u = \left[\frac{12+16\sqrt{3}}{13}, \; \frac{18-2\sqrt{3}}{13} \right]^T
$$

$$
\begin{aligned}
H^{(3)} &= I - \gamma^{-1} u u^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{13}{12(4+\sqrt{3})} \begin{bmatrix} \frac{12+16\sqrt{3}}{13} \\ \frac{18-2\sqrt{3}}{13} \end{bmatrix} \left[\frac{12+16\sqrt{3}}{13}, \; \frac{18-2\sqrt{3}}{13} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{13}{12(4+\sqrt{3})} \begin{pmatrix} \frac{16(57+24\sqrt{3})}{169} & \frac{8(15+33\sqrt{3})}{169} \\ \frac{8(15+33\sqrt{3})}{169} & \frac{8(42-9\sqrt{3})}{169} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{16+4\sqrt{3}}{13} & \frac{-2+6\sqrt{3}}{13} \\ \frac{-2+6\sqrt{3}}{13} & \frac{10-4\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-3-4\sqrt{3}}{13} & \frac{2-6\sqrt{3}}{13} \\ \frac{2-6\sqrt{3}}{13} & \frac{3+4\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R &= H_3 A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3-4\sqrt{3}}{13} & \frac{2-6\sqrt{3}}{13} \\ 0 & 0 & \frac{2-6\sqrt{3}}{13} & \frac{3+4\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 4\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{12+3\sqrt{3}}{13} \\ 0 & 0 & \frac{18-2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 4\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Macierz Householdera:

$$H = H_3 H_2 H_1 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3-4\sqrt{3}}{13} & \frac{2-6\sqrt{3}}{13} \\ 0 & 0 & \frac{2-6\sqrt{3}}{13} & \frac{3+4\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3-\sqrt{3}}{6} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{57+11\sqrt{3}}{78} & \frac{-6+5\sqrt{3}}{39} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-6+5\sqrt{3}}{39} & \frac{30+\sqrt{3}}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = H^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$QR = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 4\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Zadanie 2

Na płaszczyźnie dane są punkty: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$. *Wyznaczyć krzywą o równaniu* $px^2 + qy^2 = 1$ *najlepiej (w sensie najmniejszych kwadratów) przybliżającą dane punkty. Rozwiązać zadanie:*

1. *rozwiązując układ* $A^T Ax = A^T b$*,*
2. *stosując metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta,*
3. *(*) stosując metodę odbić Householdera,*
4. *(*) stosując metodę obrotów Givensa.*

Podać koszt każdej z powyższych metod rozwiązywania liniowego zadania najmniejszych kwadratów.

Zadanie 3

Dana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 9 & 13 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zapisać ją w formatach:

1. *współrzędnych wierszowo-kolumnowych,*
2. *CRS (***C**ompressed **R**ow **S**torage*),*
3. *CCS (***C**ompressed **C**olumn **S**torage*).*

Zadanie 4 (do domu)
Zapisać mnożenie macierzy A przez wektor x, gdy macierz jest rozrzedzona i zapisana w formacie:

1. *współrzędnych wierszowo-kolumnowych,*
2. *CRS (***C**ompressed **R**ow **S**torage*),*
3. *CCS (***C**ompressed **C**olumn **S**torage*).*

Podać koszt algorytmów.