

Національний авіаційний університет  
Навчально-науковий Інститут  
інформаційно-діагностичних систем  
Кафедра прикладної математики

**Завдання для лабораторних  
робіт з дисципліни  
"Обчислювальна геометрія та  
комп'ютерна графіка  
для студентів спеціальності  
113 Прикладна математика**

Юрчук І.А.

Київ 2018

## ЗМІСТ

Пояснювальна записка	3
Модуль 1 "ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПРОЕКЦІЇ ТА ПЛО- СКІ КРИВІ"	
Лабораторна робота 1.1	4
Лабораторна робота 1.2	5
Лабораторна робота 1.3	7
Лабораторна робота 1.4	9
Домашнє завдання 1	10
Теоритичні питання до МКР №1	12
Література	14
Додаток 1.	15
Додаток 4.	16

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Метою викладання дисципліни є оволодіння студентами теоретичних основ комп'ютерних графічних технологій, надбання навичок просторового моделювання та створення на їх основі програмних засобів комп'ютерної графіки.

Дисципліна "Комп'ютерні графічні технології та просторове моделювання" входить в цикл "Математичне забезпечення обчислювальних систем" напряму підготовки 6.040301 "Прикладна математика" та викладається в п'ятому та шостому семестрах. Складається з чотирьох тематичних модулів та чотирьох домашніх завдань. Кожен модуль містить дві лабораторні роботи, що мають бути оформлені наступним чином:

1. Титульний лист.
2. Тема та мета роботи.
3. Завдання.
4. Короткі теоретичні відомості.
5. Хід роботи з розрахунками, програмними кодами та результатами роботи програм.
6. Висновки.

Домашні завдання (ДЗ) виконуються в п'ятому та шостому семестрах, відповідно до затверджених в установленому порядку методичних рекомендацій, з метою закріплення та поглиблення теоретичних знань та вмінь студентів і є важливим етапом у засвоєнні навчального матеріалу, що викладається у цих семестрах.

Метою домашнього завдання є подальше поглиблене вивчення студентом прийомів і методів, що викладаються на лекційних та лабораторних заняттях.

## Модуль 1 "Геометричні перетворення, проекції та плоскі криві"

### ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1.1

**Тема:** Побудова двовимірних геометричних об'єктів.

**Мета:** Вивчити афінні перетворення на площині та вміти застосовувати їх до геометричних конструкцій. Вміти реалізувати довільні рухи на площині як композицію повороту, масштабування, перенесення та дзеркального відображення.

**Завдання:**

1. Вивчити всі види афінних перетворень на площині та їх матричне представлення в однорідних координатах.

2. Створити програмне забезпечення для реалізації повороту, зсуву, непропорційного розтягу (стиску) та дзеркального відображення відносно прямої  $Ax + By + C = 0$  геометричного об'єкту  $G$ , де  $G$  визначений для кожного студента окремо згідно його варіанту (див. табл.1.), дотримуючись наступних вимог:

- значення параметрів  $A$ ,  $B$  та  $C$  задаються користувачем;
- розмір та координати вузлів об'єкту  $G$  автор програми визначає на свій розсуд, виходячи з параметрів монітору та естетичних міркувань (об'єкт має бути по центру, рухи над  $G$  в полі зору і т.д.).

Таблиця 1. Варіанти завдань до ЛР 1.1.

№	$G$	№	$G$
1	ламана, що складається з 6 відрізків	11	трикутник
2	рівнобедрений трикутник	12	квадрат
3	рівносторонній трикутник	13	прямокутник
4	прямокутний трикутник	14	паралелограм
5	трапеція	15	п'ятикутник
6	правильний п'ятикутник	16	ламана, що складається з 5 відрізків
7	шестикутник	17	правильний шестикутник
8	випуклий чотирикутник	18	ламана, що складається з 4 відрізків
9	ламана, що складається з 5 відрізків із самоперетинами	19	прямокутна трапеція
10	шестикутник	20	ламана, що складається з 6 відрізків із самоперетинами

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1.2

**Тема:** Побудова просторових геометричних об'єктів.

**Мета:** Вивчити афінні перетворення в просторі, паралельні і перспективні проєкції та вміти застосовувати їх до геометричних конструкцій.

**Завдання:**

1. Вивчити всі типи афінних перетворень, паралельних і перспективних проєкцій в просторі та їх матричне представлення в однорідних координатах.

2. Реалізувати програмно алгоритми наступних рухів геометричного об'єкту  $GO$  (варіанти завдань наведені в табл. 2.):

- елементарні афінні перетворення у просторі (повороти навколо координатних осей, зсув, розтяг/стиск та дзеркальне відображення відносно координатних площин);

- перетворення, що вказане у варіанті завдання, як комбінація елементарних перетворень, значення параметрів якого задаються користувачем. Якщо на вказані параметри існують обмеження, що наведені в індивідуальному завданні студента, то користувача про це необхідно повідомити;

- перспективні перетворення, що вказані у варіанті, з можливістю введення їх параметрів користувачем.

3. Розмір та координати вузлів об'єкту  $GO$  автор програми визначає на свій розсуд, виходячи параметрів монітору та естетичних міркувань (об'єкт має бути по центру, рух  $GO$  в полі зору і т.д.);

**Зауваження:** Система координат  $Oxyz$  повина бути схематично зображена на моніторі. Початок системи має співпадати з центром вікна, в якому зображений геометричний об'єкт. Вісь  $Oz$  – глибина,  $Ox$  – ширина, а  $Oy$  – висота (правостороння система).

Таблиця 2. Варіанти завдань до ЛР 1.2.

№	$GO$	Рух	Проекція
1	куб зі зрізаним кутом	поворот на кут $\alpha$ відносно прямої, що задана точкою $A(x_0, y_0, z_0)$ та напрямним вектором $\vec{p}(l, m, n)$	триметрія та триточкова перспективна проєкція
2	тетраедр	поворот на кут $\alpha$ з кроком $\frac{\alpha}{n}$ відносно локальної осі, що проходить через висоту	диметрія (задана кутами), проєкція Кавальє та одноточкова перспективна проєкція
3	зрізаний тетраедр (зріз під кутом до основи)	обертання відносно рухомої осі, що паралельна $Ox$ та пересувається за законом $z = y$	ізометрія, довільна косокутна та двоточкова перспективна проєкції

№	GO	Рух	Проекція
4	правильний тетраедр*	поворот на кут $\alpha$ з кроком $\frac{\alpha}{n}$ відносно локальної осі, що проходить через центр	диметрія (задана кутами), довільна косокутна та двоточкова перспективна проекції
5	паралелепіпед	обертання відносно рухомої осі, що паралельна $Ox$ та пересувається за законом $z = y^2$	диметрія (задана відношеннями), довільна косокутна та двоточкова перспективна проекції
6	похила призма, в основі якої трикутник	обертання відносно рухомої осі, що паралельна $Oy$ та пересувається за законом $z = x$	ізометрія, проекція Кавальє та триточкова перспективна проекція
7	пряма призма, в основі якої ромб	поворот на кут $\alpha$ з кроком $\frac{\alpha}{n}$ відносно локальної осі, яка проходить через діагональ	диметрія (задана відношенням), кабінетна проекція та триточкова перспективна проекція
8	пряма призма, в основі якої трапеція	поворот на кут $\alpha$ відносно прямої, що задана точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$	триметрія, проекція Кавальє та двоточкова перспективна проекція
9	пряма призма зі зрізаним кутом, в основі якої квадрат	обертання відносно рухомої осі, що паралельна $Oy$ та пересувається за законом $z^2 + x^2 = R^2$	триметрія, кабінетна проекція та двоточкова перспективна проекція
10	октаедр*	поворот на кут $\alpha$ з кроком $\frac{\alpha}{n}$ відносно локальної осі, що проходить через центр	триметрія, довільна косокутна та одноточкова перспективна проекція
11	піраміда, в основі якої прямокутник	обертання відносно рухомої осі, що паралельна $Oy$ та пересувається за законом $z^2 = x$	ізометрія, кабінетна проекція та триточкова перспективна проекція
12	похила призма, в основі якої прямокутник	поворот на кут $\alpha$ з кроком $\frac{\alpha}{n}$ відносно локальної осі, що проходить через вершину	диметрія (задана відношеннями), проекція Кавальє та триточкова перспективна проекція
13	піраміда, в основі якої трапеція	обертання відносно рухомої осі, що паралельна $Oz$ та пересувається за законом $y^2 + x^2 = R^2$	стандартна диметрія (2 : 2 : 1), довільна косокутна та одноточкова перспективна проекції

№	GO	Рух	Проекція
14	гексаедр*	поворот на кут $\alpha$ з кроком $\frac{\alpha}{n}$ відносно локальної осі, що проходить через центр	стандартна диметрія (2 : 2 : 1), проекція Кавальє та триточкова перспективна проекції
15	піраміда, в основі якої квадрат, а її висота співпадає з ребром	обертання відносно рухомої осі, що паралельна Oz та пересувається за законом $y = 2x$	стандартна диметрія (2 : 2 : 1), кабінетна та триточкова перспективна проекції
16	правильна чотирикутна піраміда	поворот на кут $\alpha$ з кроком $\frac{\alpha}{n}$ відносно локальної осі, що проходить через діагональ грані	довільна косокутна та триточкова перспективна проекції
17	зрізана піраміда, в основі якої прямокутник (зріз під кутом до основи)	обертання відносно рухомої осі, що паралельна Oz та пересувається за законом $y = x^2 + a$	стандартна диметрія (2 : 1 : 2), довільна косокутна та одноточкова перспективна проекції
18	пряма призма зі зрізаним кутом, в основі якої прямокутник	поворот на кут $\alpha$ з кроком $\frac{\alpha}{n}$ відносно локальної осі, що проходить через діагональ грані	стандартна диметрія (1 : 2 : 2), проекція Кавальє та триточкова перспективна проекції
19	піраміда, в основі якої прямокутний трикутник, а ребро співпадає з висотою	обертання відносно рухомої осі, що паралельна Ox та пересувається за законом $z^2 + y^2 = R^2$	стандартна диметрія (2 : 1 : 2), кабінетна та триточкова перспективна проекції
20	піраміда, в основі якої прямокутна трапеція	поворот на кут $\alpha$ відносно прямої, що є лінією перетину двох площин	диметрія (задана кутами), кабінетна проекція та двоточкова перспективна проекція

*Примітка:* Алгоритм побудови геометричних об'єктів, так званих платонівських тіл, що позначені \*, можна знайти в [1, ст.68].

### ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1.3

**Тема:** Побудова плоских та просторових кривих.

**Мета:** Вивчити побудову інтерполяційних та згладжуючих кривих на площині і в просторі, та закріпити властивість інваріантності кривих Безьє відносно афінних перетворень на площині.

**Завдання:**

1. Вивчити побудову кубічного сплайна та кривої Безьє.

2. Реалізувати програмно алгоритм побудови геометричних об'єктів  $G_1$  та  $G_2$ , що задані на площині і в просторі, та забезпечити виконання афінних перетворень над ними (  $G_1$  та  $G_2$  визначені для кожного студента окремо згідно його варіанту в табл.3).

- об'єкт  $G_1$  побудувати за допомогою кривої Безьє;
- об'єкт  $G_2$  побудувати двома способами за допомогою підстановки значень параметра у рівняння та кубічного сплайну з можливістю задання як рівномірних та і не рівномірних вузлів;
- забезпечити реалістичне зображення кривих у просторі за допомогою композиції аксонометричної (диметрія чи ізометрія) та ортогональної проєкцій;
- у висновках надати аналіз отриманих побудов;
- значення параметрів афінних перетворень задаються користувачем;
- при неправильному введенні параметрів виводиться повідомлення про повторне введення (правильними є значення, при яких рух геометричного об'єкту повністю видно на екрані)
- побудовані об'єкти вивести на екран.

**Варіанти завдань:**

Таблиця 3. Варіанти завдань до ЛР 1.3

№	$G_1 \in R^2$	$G_2 \in R^3$
1	заєць	$x(t) = 5 \cos 4t, y(t) = 5 \sin 4t, z = 10t$
2	гусак	$x(t) = e^t \cos t, y(t) = e^t \sin t, z = e^t$
3	орел	$x(t) = \cos t^2, y(t) = \sin t^2, z = 2t$
4	ворона	$x(t) = 2(t - \sin t), y(t) = 2(1 - \cos t), z = 8 \cos \frac{t}{2}$
5	риба	$x(t) = 1 - \cos 2t, y(t) = \sin 2t, z = 2 \cos t$
6	дельфін	$x(t) = 5(1 + \cos t), y(t) = 5 \sin t, z = 10 \sin \frac{t}{2}$
7	пінгвін	$x(t) = \cos^3 t, y(t) = \sin^3 t, z = \cos 2t$
8	пес	$x(t) = 5 \operatorname{ch} t, y(t) = 5 \operatorname{sh} t, z = 5t$
9	черепаха	$x(t) = 3 \cos t, y(t) = 3 \sin t, z = t^2$
10	носоріг	$x(t) = 8 \sin \frac{t}{4}, y(t) = 4 \sin t, z = 4(1 + \cos t)$
№	$G_1 \in R^2$	$G_2 \in R^3$
11	ведмідь	$x(t) = 6 \cos 3t, y(t) = -6 \sin 3t, z = 5t$
12	лебідь	$x(t) = 2e^{3t} \cos t, y(t) = 2e^{3t} \sin t, z = 4e^{3t}$
13	фламінго	$x(t) = 2 \cos t^2, y(t) = 6t, z = 2 \sin t^2$
14	папуга	$x(t) = 3(t - \sin t), y(t) = 3(1 - \cos t), z = 12 \cos \frac{t}{2}$
15	краб	$x(t) = \sin 4t, y(t) = 1 - \cos 4t, z = 4 \cos t$
16	акула	$x(t) = 3(1 + \cos t), y(t) = 6 \sin \frac{t}{2}, z = 3 \sin t$
17	тюлень	$x(t) = \cos^5 t, y(t) = \sin^5 t, z = \cos 4t$
18	кіт	$x(t) = 2t, y(t) = 2 \operatorname{sh} t, z = 2 \operatorname{ch} t$
19	крокодил	$x(t) = 3 \cos t, y(t) = 3 \sin t, z = t^2$
20	бегемот	$x(t) = 3(1 + \cos t), y(t) = 3 \sin t, z = 6 \sin \frac{t}{4}$



### ТЕОРИТИЧНІ ПИТАННЯ ДО МКР №1

1. Чи утворюють афінні перетворення, задані в декартових координатах, лінійний простір? Відповідь обґрунтуйте.
2. Афінні перетворення простору  $\mathbb{R}^2$  в декартових координатах та його властивості.
3. Матричні форми запису афінних перетворень простору  $\mathbb{R}^2$  в декартових координатах.
4. Однорідні координати в просторі  $\mathbb{R}^2$ .
5. Чи утворюють афінні перетворення простору  $\mathbb{R}^2$ , задані в однорідних координатах, лінійний простір? Відповідь обґрунтуйте.
6. Афінні перетворення простору  $\mathbb{R}^2$  в однорідних координатах та його властивості.
7. Матричні форми запису афінних перетворень простору  $\mathbb{R}^2$  в однорідних координатах.
8. Методи знаходження матриць складних перетворень.
9. Афінні перетворення простору  $\mathbb{R}^3$  в декартових координатах та його властивості.
10. Матричні форми запису афінних перетворень простору  $\mathbb{R}^3$  в декартових координатах.
11. Однорідні координати в просторі  $\mathbb{R}^3$ .
12. Чи утворюють афінні перетворення простору  $\mathbb{R}^3$ , задані в однорідних координатах, лінійний простір? Відповідь обґрунтуйте.
13. Афінні перетворення простору  $\mathbb{R}^3$  в однорідних координатах та його властивості.
14. Матричні форми запису афінних перетворень простору  $\mathbb{R}^2$  в однорідних координатах.
15. Ортографічні проекція. Матрична форма запису.
16. Аксонометрична проекція. Триметрія.
17. Поняття диметрії та ізометрії.
18. Косокутна проекція.
19. Перспективна проекція. Одноточкова перспективна проекція.
20. Двоточкова та триточкова перспективні проекції.
21. Задачі інтерполяції та згладжування на площині;
22. Інтерполяційний многочлен Лагранжа;
23. Інтерполяційний кубічний сплайн та його крайові умови;
24. Алгоритм побудови кубічного сплайну;
25. Сплайнові криві;
26. Криві Безьє;
27. Властивості поліномів Бернштейна;
28. Властивості кривих Безьє;
29. Геометричний алгоритм для кривої Безьє;

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Шикин Е.В., Боресков А.В.* Компьютерная графика. Динамика, реалистические изображения. - М.:Диалог-МИФИ, 1995

## Додаток 1.

#### Додаток 4.