1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

$$\text{(a)} \begin{cases} 20x \equiv 24 \pmod{28} \\ 21x \equiv 27 \pmod{30} \\ 12x \equiv 18 \pmod{39} \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x \equiv 9 \pmod{28} \\ x \equiv 37 \pmod{42} \\ x \equiv 13 \pmod{72} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x \equiv 9 \pmod{28} \\ x \equiv 23 \pmod{42} \\ x \equiv 35 \pmod{72} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema(ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} (b-1)x + (a-1)y + (1-a)z = 1-b \\ (a-b)x + ay - bz = 0 \\ 2x + (1-a)y + (a+b)z = 1+a \end{cases}$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Date le seguenti permutazioni nel gruppo simmetrico S_9:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 1 & 7 & 4 & 9 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 9 & 1 & 8 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il prodotto $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$ nel gruppo S_9.

(b) Calcolare il segno e l'ordine di σ_1,σ_2 e σ_3.

(c) Per ogni $1 \le i < j \le 3$, stabilire se σ_i e σ_j sono coniugate tra loro, e in caso affermativo esibire $\alpha \in S_9$ tale che $\sigma_j = \alpha\sigma_i\alpha^{-1}$.

4. Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali).

5. Sia $A_n \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matrice con tutti uno sulla prima riga, la prima colonna e la diagonale principale, e tutti zero altrove. Ad esempio per $n = 2, 3, 4, 5, ...$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, ...$$

(a) Mostrare che il polinomio caratteristico di A_n è $p_{A_n}(x) = (x+1)^{n-1}(x-n+1)$.

(b) Stabilire se A_n è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali).

Esame trascritto in LaTeX da Lucian D. Crainic.

The End.