1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

(a)
$$\begin{cases} 12x \equiv 21 \pmod{33} \\ 25x \equiv 20 \pmod{35} \\ 21x \equiv 33 \pmod{39} \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{18} \\ x \equiv 17 \pmod{21} \\ x \equiv 23 \pmod{24} \end{cases}$$
(c)
$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{18} \\ x \equiv 13 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{24} \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{18} \\ x \equiv 13 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{24} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema (ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} x+y+az = 1\\ x+z = 0\\ x+y+a^3z = 3\\ x+y+z = b \end{cases}$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

si consideri l'applicazione lineare associata $L_A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4: v \to Av$

- (a) Determinare basi dei sottospazo $\ker(L_A)$ e $\operatorname{Im}(L_A) \subset \mathbb{R}$.
- (b) Determinare equazioni cartesiane del sottospazio $Im(L_A)$.
- 4. Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb R$ dei numeri reali). In caso affermativo, determinare una matrice invertibile $B \in GL(3,\mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che

$$D = B^{-1}AB.$$

5. Dati interi $m, n \ge 1$, sia d := MCD(m, n) il loro massimo comun divisore. Dati i polinomi p(x) := $x^{m} - 1 \in q(x) := x^{n} - 1$, mostrare che $MCD(p(x), q(x)) = x^{d} - 1$. (Suggerimento: mostrare prima che dati interi $a \ge b \ge 1$, se r è il resto della divisione di a per b, allora $x^r - 1$ è il resto della divisione di $x^a - 1$ per $x^b - 1$).

Esame trascritto in LATEX da Lucian D. Crainic.