1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

(a) 
$$\begin{cases} 12x \equiv 21 \pmod{33} \\ 25x \equiv 20 \pmod{35} \\ 21x \equiv 33 \pmod{39} \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{18} \\ x \equiv 17 \pmod{21} \\ x \equiv 23 \pmod{24} \end{cases}$$
(c) 
$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{18} \\ x \equiv 13 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{24} \end{cases}$$

(c) 
$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{18} \\ x \equiv 13 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{24} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema (ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} x+y+az = 1\\ x+z = 0\\ x+y+a^3z = 3\\ x+y+z = b \end{cases}$$

al variare dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$ .

3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

si consideri l'applicazione lineare associata  $L_A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4: v \to Av$ 

- (a) Determinare basi dei sottospazio  $\ker(L_A)$  e  $\operatorname{Im}(L_A) \subset \mathbb{R}$ .
- (b) Determinare equazioni cartesiane del sottospazio  $Im(L_A)$ .
- 4. Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (sul campo  $\mathbb{R}$  dei numeri reali). In caso affermativo, determinare una matrice invertibile  $B \in GL(3,\mathbb{R})$  e una matrice diagonale  $D \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$  tali che

$$D = B^{-1}AB$$
.

5. Dati interi  $m,n\geq 1$ , sia d:=MCD(m,n) il loro massimo comun divisore. Dati i polinomi p(x):= $x^{m} - 1 \in q(x) := x^{n} - 1$ , mostrare che  $MCD(p(x), q(x)) = x^{d} - 1$ . (Suggerimento: mostrare prima che dati interi  $a \ge b \ge 1$ , se r è il resto della divisione di a per b, allora  $x^r - 1$  è il resto della divisione di  $x^a - 1$  per  $x^{\overline{b}} - \overline{1}$ ).

Esame trascritto in **I**<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X da Lucian D. Crainic.