1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

$$\text{(a)} \begin{cases} 10x \equiv 14 \pmod{18} \\ 16x \equiv 8 \pmod{22} \\ 9x \equiv 24 \pmod{30} \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{15} \\ x \equiv 12 \pmod{20} \\ x \equiv 10 \pmod{24} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{15} \\ x \equiv 15 \pmod{18} \\ x \equiv 1 \pmod{20} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema(ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Per quei valori di k che rendono il sistema determinato, calcolare l'unica soluzione. Per quei valori di k che rendono il sistema indeterminato, determinare una rappresentazione parametrica dell'insieme delle soluzioni.

3. Calcolare l'ordine e l'inverso di [223] nel gruppo $\mathbb{Z}_{360}^*$.

4. Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & 3 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & 1-k & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali).

5. Sia $A_n \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matrice con tutti uno sulla prima riga, la prima colonna e la diagonale principale, e tutti zero altrove. Ad esempio per $n = 2, 3, 4, 5, ...$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Mostrare che $\det(A_n) = 2 - n$.

Esame trascritto in **LaTeX** da Lucian D. Crainic.