1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

$$\text{(a)} \begin{cases} 8x \equiv 10 \pmod{18} \\ 9x \equiv 15 \pmod{24} \\ 21x \equiv 18 \pmod{33} \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x \equiv 19 \pmod{24} \\ x \equiv 13 \pmod{30} \\ x \equiv 25 \pmod{36} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x \equiv 21 \pmod{24} \\ x \equiv 3 \pmod{30} \\ x \equiv 9 \pmod{36} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema(ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 - b \\ (4a+1)x - y - (8a^2 - 1)z = b \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Calcolare l'ordine e l'inverso di [719] nel gruppo $\mathbb{Z}^*_{1155}$.

4. Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali).

5. Siano g e h elementi di un gruppo finito G tali che $gh = hg$. Detti $o(g), o(h), o(gh)$ rispettivamente gli ordini degli elementi g, h, gh nel gruppo G:

   (a) mostrare che $o(gh)$ divide $mcm(o(g), o(h))$;

   (b) mostrare che se $MCD(o(g), o(h)) = 1$ allora $o(gh) = o(g)o(h)$.

Esame trascritto in LaTeX da Lucian D. Crainic.