1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

$$\text{(a)} \begin{cases} 8x \equiv 12 \pmod{18} \\ 15x \equiv 12 \pmod{21} \\ 14x \equiv 10 \pmod{22} \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x \equiv 15 \pmod{36} \\ x \equiv 21 \pmod{40} \\ x \equiv 11 \pmod{75} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x \equiv 23 \pmod{36} \\ x \equiv 11 \pmod{40} \\ x \equiv 41 \pmod{75} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema(ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} x + ay + 3z = 1 \\ y + az = 0 \\ x + y + z = b \\ 2x + ay + az = 2 \end{cases}$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Denotiamo con $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ il gruppo moltiplicativo degli interi invertibili modulo n.
   (a) stabilire se i gruppi $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ sono isomorfi tra loro.
   (b) stabilire se i gruppi $(\mathbb{Z}_{24}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_{30}^*, \cdot)$ sono isomorfi tra loro.

   Suggerimento: Calcolare l'ordine di ogni elemento nel gruppo.

4. Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali). In caso affermativo, determinare una matrice invertibile $B \in GL(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che

$$D = B^{-1}AB.$$

5. Siano dati i polinomi $p_1(x), ..., p_n(x) \in \mathbb{K}[x]$ (con $\mathbb{K}$ un campo) a due a due co-primi tra loro, ovvero tali che $MCD(p_i(x), p_j(x)) = 1$ per ogni $i \neq j$. Denotando con $P(x) = p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$ il loro prodotto, siano $P_1(x), ..., P_n(x) \in \mathbb{K}[x]$ i polinomi definiti da

$P_1(x) := \frac{P(x)}{p_1(x)} = p_2(x)p_3(x)...p_n(x)$,

$$P_2(x) := \frac{P(x)}{p_2(x)} = p_1(x)p_3(x)...p_n(x),$$

$$..., \quad P_n(x) := \frac{P(x)}{p_n(x)} = p_1(x)p_2(x)...p_{n-1}(x),$$

   (a) Mostrare che $MCD(p_i(x), P_i(x)) = 1$ per ogni $i = 1, ..., n$.
   (b) Mostrare che $MCD(P_1(x), .., P_n(x)) = 1$.
   (c) Mostrare che dato un arbitrario $q(x) \in \mathbb{K}[x]$, esistono $q_1(x), ..., q_n(x) \in \mathbb{K}[x]$ tali che

$$q(x) = q_1(x)P_1(x) + q_2(x)P_2(x) + ... + q_n(x)P_n(x).$$

Esame trascritto in **LaTeX** da Lucian D. Crainic.