1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

$$\text{(a)} \begin{cases} 12x \equiv 21 \pmod{33} \\ 25x \equiv 20 \pmod{35} \\ 21x \equiv 33 \pmod{39} \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{18} \\ x \equiv 17 \pmod{21} \\ x \equiv 23 \pmod{24} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{18} \\ x \equiv 13 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{24} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema(ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + a^3 z = 3 \\ x + y + z = b \end{cases}$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

si consideri l'applicazione lineare associata $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : v \to Av$

(a) Determinare basi dei sottospazio $\ker(L_A)$ e $\mathrm{Im}(L_A) \subset \mathbb{R}$.

(b) Determinare equazioni cartesiane del sottospazio $\mathrm{Im}(L_A)$.

4. Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali). In caso affermativo, determinare una matrice invertibile $B \in GL(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che

$$D = B^{-1}AB.$$

5. Dati interi $m, n \geq 1$, sia $d := MCD(m, n)$ il loro massimo comun divisore. Dati i polinomi $p(x) := x^m - 1$ e $q(x) := x^n - 1$, mostrare che $MCD(p(x), q(x)) = x^d - 1$.
(**Suggerimento:** mostrare prima che dati interi $a \geq b \geq 1$, se r è il resto della divisione di a per b, allora $x^r - 1$ è il resto della divisione di $x^a - 1$ per $x^b - 1$).

Esame trascritto in **LaTeX** da Lucian D. Crainic.