Algebra | Terzo Appello | 31 Marzo 2023

1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

$$\text{(a)}\ \begin{cases} 8x \equiv 12 \pmod{18} \\ 15x \equiv 12 \pmod{21} \\ 14x \equiv 10 \pmod{22} \end{cases}$$

$$\text{(b)}\ \begin{cases} x \equiv 15 \pmod{36} \\ x \equiv 21 \pmod{40} \\ x \equiv 11 \pmod{75} \end{cases}$$

$$\text{(c)}\ \begin{cases} x \equiv 23 \pmod{36} \\ x \equiv 11 \pmod{40} \\ x \equiv 41 \pmod{75} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema(ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} x + ay + 3z = 1 \\ y + az = 0 \\ x + y + z = b \\ 2x + ax + az = 2 \end{cases}$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Denotiamo con $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ il gruppo moltiplicativo degli interi invertiti modulo n.

   (a) stabilire se i gruppi $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ sono isomorfi tra loro.

   (b) stabilire se i gruppi $(\mathbb{Z}_{24}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_{30}^*, \cdot)$ sono isomorfi tra loro.

   Suggerimento: Calcolare l'ordine di ogni elemento nel gruppo.

4. Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali). In caso affermativo, determinare una matrice invertibile $B \in GL(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che

$$D = B^{-1}AB.$$

5. ???

Importante!

L'esercizio 5 non è stato scritto/salvato da nessun studente. Se hai una copia di questo esercizio, per favore inviala via email a crainic.lucian@gmail.com. Grazie!

Esame trascritto in LaTeX da Lucian D. Crainic.