1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

(a)
$$\begin{cases} 10x \equiv 14 \pmod{18} \\ 16x \equiv 8 \pmod{22} \\ 9x \equiv 24 \pmod{30} \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x \equiv 24 \pmod{30} \\ x \equiv 7 \pmod{15} \\ x \equiv 12 \pmod{20} \\ x \equiv 10 \pmod{24} \end{cases}$$
(c)
$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{15} \\ x \equiv 15 \pmod{18} \\ x \equiv 1 \pmod{20} \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{15} \\ x \equiv 15 \pmod{18} \\ x \equiv 1 \pmod{20} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema (ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} kx + y + z = 1\\ x + ky + z = k\\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Per quei valori di k che rendono il sistema determinato, calcolare l'unica soluzione. Per quei valori di k che rendono il sistema indeterminato, determinare una rappresentazione parametrica dell'insieme delle soluzioni.

- 3. Calcolare l'ordine e l'inverso di [223] nel gruppo \mathbb{Z}_{360}^* .
- 4. Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & 3 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & 1-k & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (sul campo \mathbb{R} dei numeri reali).

5. Sia $A_n \in Mat_{nxn}(\mathbb{R})$ la matrice con tutti uno sulla prima riga, la prima colonna e la diagonale principale, e tutti zero altrove. Ad esempio per n=2,3,4,5,...

$$A_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Mostrare che $det(A_n) = 2 - n$.

Esame trascritto in LATEX da Lucian D. Crainic.