1. Risolvere (se possibile) i seguenti sistemi di congruenze:

$$\text{(a)} \begin{cases} 8x \equiv 2 \pmod{18} \\ 9x \equiv 12 \pmod{21} \\ 14x \equiv 10 \pmod{22} \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{18} \\ x \equiv 3 \pmod{20} \\ x \equiv 11 \pmod{24} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{18} \\ x \equiv 13 \pmod{20} \\ x \equiv 19 \pmod{24} \end{cases}$$

2. Discutere il comportamento del sistema(ovvero, se è determinato, indeterminato o incompatibile)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + az = 5 \\ 3x - 4y + 5z = b \end{cases}$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Date le seguenti permutazioni nel gruppo simmetrico S_9:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 6 & 9 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 9 & 3 & 7 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare il prodotto $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$ nel gruppo S_9.
   (b) Calcolare il segno e l'ordine di σ_1,σ_2 e σ_3.
   (c) Per ogni $1 \leq i < j \leq 3$, stabilire se σ_i e σ_j sono coniugate tra loro, e in caso affermativo esibire $\alpha \in S_9$ tale che $\sigma_j = \alpha\sigma_i\alpha^{-1}$.

4. Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali). In caso affermativo, determinare una matrice invertibile $B \in GL(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che

$$D = B^{-1}AB.$$

5. Si consideri la matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ con tutte le entrate uguali a 1,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare gli autovalori di A.

(b) Stabilire se A è diagonalizzabile, e in caso affermativo, determinare una matrice invertibile $B \in GL(n, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ tali che

$$D = B^{-1}AB.$$

Esame trascritto in **LaTeX** da Lucian D. Crainic.