AMIA TP N° 1 ①

2) Sea la matriz $A \in S$. Por lo tanto:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y:

$a_{11} + a_{12} = 0 \Rightarrow Tr = 0$

1) $S \neq 0$ y $0 \in S$ ya que su $Tr = 0$.

2) $A, B \in S$ entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$Tr(A+B) = a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} = \underbrace{a_{11} + a_{22}}_{0} + \underbrace{b_{11} + b_{22}}_{0} = 0$$

3) $A \in S$ y $k \in K$ entonces:

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

$$Tr(kA) = ka_{11} + ka_{22} = k\underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{0} = 0$$

$\therefore$ $S \subseteq V$ es un SEV.

3) Se puede demostrar que la unión de dos subespacios no es un SEV a partir de un ejemplo.
Sean $X, T \subseteq V$ dos subespacios de $V = \mathbb{R}^2$. Sea $X = \{\alpha \cdot (1,0), \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{\beta \cdot (0,1), \beta \in \mathbb{R}\}$.
Por ser X y T dos SEV, se cumple que $X \cup T = 0$.
Veamos la suma: Por ejemplo, si $x = (1,0) \in X$ y $t = (0,1) \in T$ entonces
$x + t = (1,0) + (0,1) = (1,1)$
Que claramente $\notin X \cup T$. Por lo tanto, $X \cup T$ no es un SEV.

4) i) a) No es un SEV de $\mathbb{R}^3$. Si $v \in A$ no se cumple $\alpha . v \in A$ para $\alpha < 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

b) No es un SEV de $\mathbb{R}^3$. Si $v \in B$ sólo se cumple $\alpha . v \in B$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$, como $\alpha \in \mathbb{R}$ no es un SEV.

c) Si es un SEV de $\mathbb{R}^3$.

ii)

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y - \frac{1}{2} z = 0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x &= 3/4\,\lambda \\ y &= 1/4\,\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \text{ Base} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimensión 1

5) Demostrar que $\langle x,y \rangle = x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2$ es un p.i. en $\mathbb{R}^2$.

1) $\langle x+z,y \rangle = (x_1+z_1)y_1 - [(x_1+z_1)y_2 + (x_2+z_2)y_1] + 2(x_2+z_2)y_2$

$\langle x+z,y \rangle = x_1y_1 + z_1y_1 - (x_1y_2 + z_1y_2 + x_2y_1 + z_2y_1) + 2x_2y_2 + 2z_2y_2$

$\langle x+z,y \rangle = \underbrace{x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2}_{\langle x,y \rangle} + \underbrace{z_1y_1 - (z_1y_2 + z_2y_1) + 2z_2y_2}_{\langle z,y \rangle}$

$\langle x+z,y \rangle = \langle x,y \rangle + \langle z,y \rangle$

2) $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha x_1y_1 - (\alpha x_1y_2 + \alpha x_2y_1) + 2\alpha x_2y_2$

$\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \underbrace{[x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2]}_{\langle x,y \rangle}$

$\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$

3) $\langle x,x \rangle = x_1x_1 - (x_1x_2 + x_2x_1) + 2x_2x_2$

$\langle x,x \rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 = (x_1-x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$

y:

$\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

6) Mostrar que $\langle p,q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ es un p.i. en $P_2(\mathbb{R})$.

1) $\langle p+r,q \rangle = (p+r)(-1)\cdot q(-1) + (p+r)(0)\cdot q(0) + (p+r)(1)\cdot q(1)$

$= (p(-1)+r(-1))\cdot q(-1) + (p(0)+r(0))\cdot q(0) + (p(1)+r(1))\cdot q(1)$

$= \underbrace{p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)}_{\langle p,q \rangle} + \underbrace{r(-1)q(-1) + r(0)q(0) + r(1)q(1)}_{\langle r,q \rangle}$

$\langle p+r,q \rangle = \langle p,q \rangle + \langle r,q \rangle$

2) $\langle \alpha . p , q \rangle = \alpha p(-1) q(-1) + \alpha p(0) q(0) + \alpha p(1) q(1)$

$= \alpha \left[p(-1) q(-1) + p(0) q(0) + p(1) q(1) \right]$

$\langle \alpha p , q \rangle = \alpha \cdot \langle p , q \rangle$

3) $\langle p , p \rangle = p(-1) p(-1) + p(0) p(0) + p(1) p(1) = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 \geqslant 0$

y

$\langle p , p \rangle = 0 \iff p = 0$

7) Demostrar que $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ define una norma en $\mathbb{R}^n$.

1) Como $|x_i| > 0$, $\|x\|_p > 0$. Solo si $x = 0$ vale $\|x\|_p = 0$.

2) $\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^p |x_i|^p \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$

$= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \cdot \|x\|_p$

3) Para demostrar la desigualdad triangular uso la desigualdad de Hölder.

Sean p y $q \in \mathbb{N}$ tal que: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces vale la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

A partir de esta desigualdad se demuestra la desigualdad triangular.

Se puede escribir que:

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \leq |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

Aplico Hölder en ambos términos de la derecha:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Como $p=(p-1)q$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{\overbrace{1-\frac{1}{q}}^{=\frac{1}{p}}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Entonces:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

8) Mostrar que $\langle A,B\rangle = Tr(A^H B)$ es un p.i. en $(\mathbb{C})^{m\times m}$

1) $\langle A+C, B\rangle = Tr((A+C)^H . B)$

$= Tr((\overline{A+C})^T . B)$

$= Tr((\bar{A}+\bar{C})^T . B)$

$= Tr((\bar{A}^T+\bar{C}^T) . B)$

$= Tr((A^H+C^H) . B)$

$= Tr(A^H B + C^H B)$

$= Tr(A^H B) + Tr(C^H B)$

$\langle A+C, B\rangle = \langle A,B\rangle + \langle C,B\rangle$

Multiplicación por un escalar α:

$\langle \alpha A, B\rangle = Tr((\alpha A)^H B)$

$= Tr((\overline{\alpha A})^T B)$

$= Tr(\bar{\alpha}(\bar{A})^T B)$

$= \alpha\, Tr(A^H B)$

$\langle \alpha A, B\rangle = \alpha \langle A,B\rangle$

2) $< A, B > = Tr\left(A^H . B \right)$

$$= Tr\left(\left(A^H B \right)^T \right)$$

$$= Tr\left(B^T \left(A^H \right)^T \right)$$

$$= Tr\left(B^T \bar{A} \right)$$

$$= Tr\left(\overline{B^H A} \right)$$

$$< A, B > = \overline{< B, A >}$$

3) $< A, A > = Tr\left(A^H A \right) = Tr\left(\left(\bar{A} \right)^T . A \right)$

La traza puede escribirse como:

$$Tr\left(\left(\bar{A} \right)^T . A \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}} . a_{ki} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=i}^{n} |a_{ik}|^2$$

Por lo tanto, $< A, A > \geq 0$ y $< A, A > = 0 \iff A = 0$

1) a) Determinar si $(X,+)$ es un grupo.

Clausura respecto a la operación:

$A+B=C \quad \forall A,B \in X$

Hay que ver que $C \in X$.

$C^T = (A+B)^T = A^T + B^T = A^{-1} + B^{-1} \neq (A+B)^{-1} = C^{-1}$

No se cumple la clausura.

Tampoco se cumple el axioma de elemento neutro, ya que no existe una matriz $E \in X$ tal que $A+E=A$. La matriz que cumple lo anterior es la matriz nula, la cual no tiene inversa.

Se concluye que $(X,+)$ no es un grupo.

b) Determinar si $(X,\langle,\rangle)$ es un grupo. El p.i $\langle A,B\rangle = A\cdot B$.

Clausura:

$A.B=C \quad \forall A,B \in X$

$C^T = (A.B)^T = (B^T A^T) = (B^{-1}A^{-1}) = (A.B)^{-1} = C^{-1}$ (Se cumple)

Asociativa:

$A.(B.C) = (A.B).C$ (Se cumple)

Elemento neutro (E)

$A.E = A = E.A \Rightarrow E = I =$ identidad

$E^T = E^{-1} \Rightarrow E \in X$ (Se cumple)

Elemento inverso:

$A.A^{-1} = I$ como $A \in X$ entonces existe A^{-1}. (Se cumple)

Se demostró que $(X,\langle,\rangle)$ es un grupo.

Como $A.B \neq B.A$ entonces $(X,\langle,\rangle)$ no es un grupo conmutativo, por lo tanto, $(X,\langle,\rangle,\mathbb{R},\cdot)$ no es un EV.