

## Bezwzględna metoda lokalizacji robotów kołowych – trilateracja

Dariusz Pazderski

Opracowanie w ramach programu ERA Inżyniera

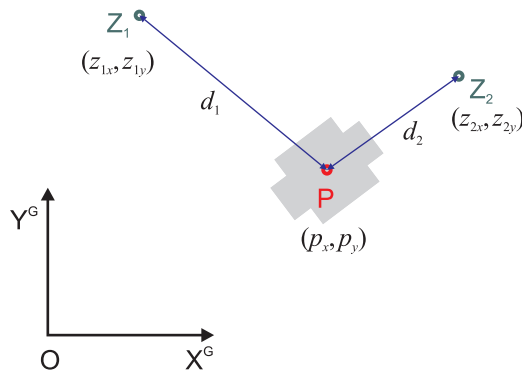
### 1 Opis podstaw metody

W pierwszej kolejności omówimy metodę *trilateracji* (łac.), która jest pozwala określić pozycję robota na podstawie pomiarów odległości od wybranych znaczników w przestrzeni. W zależności od wymiaru przestrzeni, w której porusza się pojazd oraz sposobu rozmieszczenia znaczników możemy mówić o trilateracji 2D lub 3D.

#### 1.1 Trilateracja 2D

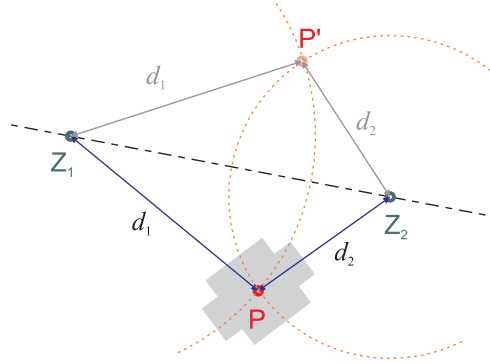
Przyjmujemy, że danymi wejściowymi są odległości (w sensie metryki euklidesowej) dwóch znaczników od wyróżnionego punktu obserwacji P związanego z układem ruchomym – por. rys. 1. Zakładamy, że współrzędne znacznika  $Z_i$ ,  $i = 1, 2$ , określone w układzie podstawowym opisuje wektor  $\mathbf{z}_i = [z_{ix} \ z_{iy}]^T \in \mathbb{R}^2$ , natomiast nieznane współrzędne punktu P wektor  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y]^T \in \mathbb{R}^2$ . Odwołując się do rys. 1 określamy odległość od  $i$ -tego znacznika:

$$d_i = \sqrt{(p_x - z_{ix})^2 + (p_y - z_{iy})^2} = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{z}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{z}_i)}.$$



Rysunek 1: Trilateracja planarna (2D)

Rozwiązanie problemu trilateracji 2D można postrzegać jako znalezienie punktu przecięcia dwóch okręgów, których środki znajdują się w punktach  $Z_1$  i  $Z_2$ . Na podstawie rys. 2 zauważamy, że ogólnym przypadkiem istnieją dwa rozwiązania. Tylko jeden ze znalezionych punktów opisuje współrzędne obiektu – drugi punkt  $P'$  umieszczony jest symetrycznie względem prostej przechodzącej przez znaczniki.



Rysunek 2: Metoda rozwiązania trilateracji 2D

Z formalnego punktu widzenia znalezienie punktów przecięcia dwóch okręgów można rozpatrywać jako rozwiązanie układu dwóch równań nieliniowych, opisujących okręgi:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{z}_1)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_1) = d_1^2, \quad (1)$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{z}_2)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_2) = d_2^2. \quad (2)$$

W celu rozwiązania tego układu równań odejmujemy stronami równania (1) i (2) otrzymując następujące równanie liniowe względem zmiennych  $x$  i  $y$ :

$$2\mathbf{p}^\top (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) + \mathbf{z}_1^\top \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^\top \mathbf{z}_2 = d_1^2 - d_2^2. \quad (3)$$

Po szczegółowym rozpisaniu równania (3) mamy:

$$2(z_{1x} - z_{2x})x + 2(z_{1y} - z_{2y})y + \|\mathbf{z}_1\|^2 - \|\mathbf{z}_2\|^2 = d_1^2 - d_2^2.$$

Następnie możemy rozpatrywać alternatywne przekształcenia

$$x = m_A y + n_A \text{ dla } z_{1x} - z_{2x} \neq 0, \quad (4)$$

lub

$$y = m_B x + n_B \text{ dla } z_{1y} - z_{2y} \neq 0, \quad (5)$$

gdzie

$$m_A = \frac{-2(z_{1y} - z_{2y})}{z_{1x} - z_{2x}}, \quad n_A = \frac{-\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2 + d_1^2 - d_2^2}{z_{1x} - z_{2x}},$$

$$m_B = \frac{-2(z_{1x} - z_{2x})}{z_{1y} - z_{2y}}, \quad n_B = \frac{-\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2 + d_1^2 - d_2^2}{z_{1y} - z_{2y}}.$$

Dalej możemy podstawić zależność (4) lub (5) do równań okręgów (1) lub (2) i następnie określić rozwiązanie równania kwadratowego odpowiednio względem zmiennej  $y$  lub  $x$ .

Należy podkreślić, że rozwiązaniem układu równań są współrzędne dwóch punktów  $P$  i  $P'$  (tylko w szczególnym przypadku punkty te będą się pokrywały). Z punktu widzenia zagadnienia lokalizacji *jedno z rozwiązań nie jest właściwe* i powinno być odrzucone na podstawie informacji posiadanej a priori lub obserwacji zmian położenia obiektu. Alternatywnie, można wykonać obliczenia w oparciu o inny układ znaczników (jeśli są dostępne).

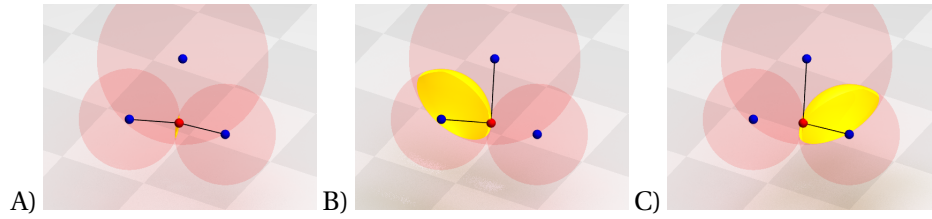
## 1.2 Trilateracja 3D

W przypadku, gdy interesują nas współrzędne opisujące pozycję obiektu w przestrzeni trójwymiarowej wymagana liczba znaczników ulega zwiększeniu o jeden względem przypadku planarnego. W tym przypadku zakłada się, że pozycja opisywana jest wektorem  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^\top \in \mathbb{R}^3$ , natomiast współrzędne względem układu podstawowego znaczników  $Z_1, Z_2$  i  $Z_3$  wynoszą:  $\mathbf{z}_i = [z_{ix} \ z_{iy} \ z_{iz}]^\top \in \mathbb{R}^3$ , gdzie  $i = 1, 2, 3$ .

Pomiar polega na określeniu odległości punktu P związanego z układem ruchomym od znaczników. Każda z odległości wynosi

$$d_i = \sqrt{(p_x - z_{ix})^2 + (p_y - z_{iy})^2 + (p_z - z_{iz})^2} = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{z}_i)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_i)}.$$

Interpretując problem geometrycznie można powiedzieć, że poszukujemy punktów przecięcia się trzech sfer, o środkach w punktach  $Z_1, Z_2$  i  $Z_3$  – rys. (3).



Rysunek 3: Interpretacja geometryczna trilateracji 3D. W celu wizualizacji zamiast sfer zobrazowano kulę o promieniach wynikających ze zmierzonej odległości obiektu ruchomego (punkt czerwony) od znaczników (punkty niebieskie). Określono poszczególne przekroje (kolor żółty): A – przekrój kul 1 i 2, B – przekrój kul 2 i 3, C – przekrój kul 1 i 3

Formalnie polega to na rozwiązaniu następującego układu równań

$$(\mathbf{p} - \mathbf{z}_1)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_1) = d_1^2, \quad (6)$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{z}_2)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_2) = d_2^2, \quad (7)$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{z}_3)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_3) = d_3^2. \quad (8)$$

Procedura może być podobna do tej omówionej dla przypadku 2D. Mianowicie, odejmując od stronami równania (6) i (7) oraz (6) i (8) uzyskujemy układ dwóch równań liniowych i jednego równania drugiego stopnia

$$(\mathbf{p} - \mathbf{z}_1)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_1) = d_1^2, \quad (9)$$

$$\mathbf{p}^\top (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) = \frac{1}{2} (d_1^2 - d_2^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2 - \|\mathbf{z}_1\|^2), \quad (10)$$

$$\mathbf{p}^\top (\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1) = \frac{1}{2} (d_1^2 - d_3^2 + \|\mathbf{z}_3\|^2 - \|\mathbf{z}_1\|^2). \quad (11)$$

Dalej, równania (10) i (11) pozwalają określić liniowe zależności pomiędzy dwiema współrzędnymi w funkcji trzeciej współrzędnej. Przedstawiając zależności (10) i (11) w postaci wektorowej mamy

$$\begin{bmatrix} z_{2x} - z_{1x} & z_{2y} - z_{1y} & z_{2z} - z_{1z} \\ z_{3x} - z_{1x} & z_{3y} - z_{1y} & z_{3z} - z_{1z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_1^2 - d_2^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2 - \|\mathbf{z}_1\|^2 \\ d_1^2 - d_3^2 + \|\mathbf{z}_3\|^2 - \|\mathbf{z}_1\|^2 \end{bmatrix}.$$

Wybór właściwego podstawienia wymaga sprawdzenia warunków, które zachodzą pomiędzy współrzędnymi trzech znaczników. Dla ilustracji zagadnienia, zakładamy że parametrem jest zmienna  $z^1$ . W takim przypadku możemy znaleźć następującą zależność

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{2x} - z_{1x} & z_{2y} - z_{1y} \\ z_{3x} - z_{1x} & z_{3y} - z_{1y} \end{bmatrix}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} z_{2z} - z_{1z} \\ z_{3z} - z_{1z} \end{bmatrix} z + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_1^2 - d_2^2 + \|z_2\|^2 - \|z_1\|^2 \\ d_1^2 - d_3^2 + \|z_3\|^2 - \|z_1\|^2 \end{bmatrix} \right),$$

która jest dobrze zdefiniowana dla  $(z_{2x} - z_{1x})(z_{3y} - z_{1y}) - (z_{2y} - z_{1y})(z_{3x} - z_{1x}) \neq 0$ . W następnym kroku można możemy uwzględnić podane zależności liniowe w równaniu (9) i obliczyć wartość współrzędnej  $z$ . Należy podkreślić, że analogicznie jak dla trilateracji 2D również w tym przypadku wynik nie jest jednoznaczny – w ogólności znajduje się dwa punkty przecięcia sfer, z których jeden pozwala określić współrzędne lokalizowanego obiektu.

## 2 Uogólnienie rozwiązania na przypadek większej liczby znaczników niż minimalna

Zastanówmy się teraz jak można postępować dysponując większą liczbą znaczników i większą liczbą niezależnych obserwacji niż wynika to z warunków określenia rozwiązania. Rozpatrzmy to zagadnienie dla przypadku 3D, zakładając że mierzymy odległości od  $m \geq 3$  znaczników  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ . Wówczas możemy rozważyć rozwiązanie układu  $m$  równań nieliniowych:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} - \mathbf{z}_1)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_1) &= d_1^2, \\ (\mathbf{p} - \mathbf{z}_2)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_2) &= d_2^2, \\ &\vdots \\ (\mathbf{p} - \mathbf{z}_m)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_m) &= d_m^2. \end{aligned} \tag{12}$$

W przypadku nominalnym, zakładając przypadek deterministyczny rozwiązanie tego układu nie daje nowej jakości, poza ewentualną eliminacją niejednoznaczności. Oznacza to, że w celu rozwiązania bezpośrednio korzystamy tylko z trzech wybranych równań i stosujemy algorytm obliczeniowy omówiony wcześniej.

W warunkach rzeczywistych model opisany równaniami nie jest spełniony. Mamy bowiem do czynienia z niepewnością wynikającą zarówno z błędów pomiaru jak i niedokładnością rozmieszczenia znaczników. W przypadku zaburzonym układ równań (12) będzie sprzeczny i formalnie nie będzie posiadał rozwiązania. Zamiast tego możemy mówić o rozwiązaniu przybliżonym, które polega na znalezieniu takiego wektora  $\mathbf{p}$ , który gwarantuje minimalizację pewnego wskaźnika jakości będącego miarą jakości estymacji nieznanego rozwiązania.

Aby rozwiązać to zagadnienie układ równań (12) zapiszemy w postaci następującej

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) := \begin{bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{z}_1)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_1) - d_1^2 \\ (\mathbf{p} - \mathbf{z}_2)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_2) - d_2^2 \\ \vdots \\ (\mathbf{p} - \mathbf{z}_m)^\top (\mathbf{p} - \mathbf{z}_m) - d_m^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Wskaźnikiem jakości dopasowania będzie funkcjonal

$$J(\mathbf{p}) := \mathbf{F}(\mathbf{p})^\top \mathbf{F}(\mathbf{p}). \tag{13}$$

<sup>1</sup> Podobne obliczenia można wykonać dla inaczej wybranych zmiennych niezależnych.

Minimalizację tego funkcjonału, a zatem minimalizację błędu kwadratowego, można zapewnić stosując iteracyjny numeryczny algorytm Newtona, zdefiniowany następująco:

$$\mathbf{p}(i) = \mathbf{p}(i-1) - k\mathbf{T}(\mathbf{p}(i-1))^{\#}\mathbf{F}(\mathbf{p}(i-1)), \quad (14)$$

gdzie  $k > 0$  jest pewnym współczynnikiem,  $\mathbf{p}(0)$  określa warunek początkowy,  $\mathbf{T}$  jest macierzą Jakobiego  $\mathbf{T}(\mathbf{p}(i-1)) := \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(i-1)} \in \mathbb{R}^{m \times 3}$ , symbol  $\#$  oznacza operator pseudoinwersji macierzy prostokątnej zdefiniowany zależnością

$$\mathbf{T}^{\#} := (\mathbf{T}^{\top} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{\top}.$$

W rozpatrywanym przypadku macierz Jakobiego  $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$  ma postać następującą

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{p} - \mathbf{z}_1)^{\top} \\ 2(\mathbf{p} - \mathbf{z}_2)^{\top} \\ \vdots \\ 2(\mathbf{p} - \mathbf{z}_m)^{\top} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 3}.$$

Liczba kroków (iteracji) algorytmu opisanego równaniem (13) nie jest jednoznacznie zdefiniowana. Zwykle przyjmuje się zakończenie iteracji, gdy w kolejnych krokach zmiany rozwiązania są odpowiednio małe. Należy przy tym podkreślić, że *zbieżność algorytmu jest gwarantowana lokalnie*, tj. w pewnym otoczeniu rozwiązania optymalnego (w sensie minimalizacji wskaźnika (13)), który z założenia jest nieznan. Algorytm jest wrażliwy na występowanie minimów lokalnych oraz może wykazywać brak stabilności. Ze względu na silną nieliniowość równania (12) wybór warunku początkowego  $\mathbf{p}(0)$  jest krytyczny. Dlatego można zaproponować obliczenie warunku początkowego na podstawie wyniku rozwiązania analitycznego uzyskanego dla trzech wybranych równań nieliniowych układu (12).

Warto także podkreślić nad innymi wariantami opisanej metody obliczeniowej. W wielu przypadkach wiarygodność pomiaru odległości od różnych znaczników może być różna. W efekcie można osłabiać wpływ informacji niepewnej poprzez stosowanie ważenia we wskaźniku jakości. Wówczas wskaźnik  $J$  można zdefiniować następująco

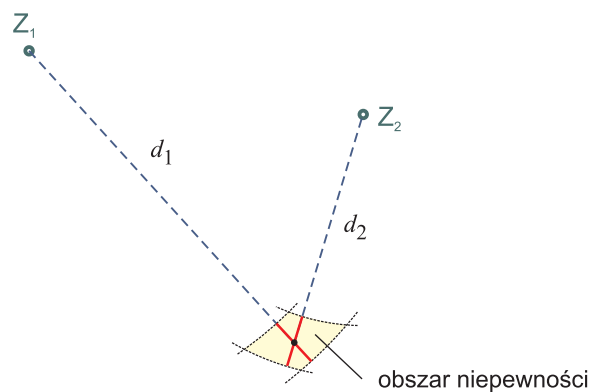
$$J := \mathbf{F}(\mathbf{p})^{\top} \mathbf{Q} \mathbf{F}(\mathbf{p}),$$

gdzie  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  jest dodatnio określoną i symetryczną macierzą wag (np. macierzą diagonalną, która zawiera odwrotności wariancji pomiaru odległości od kolejnych znaczników). Dla tak wybranej definicji w algorytmie opisanym równaniem (14) wykorzystuje się zmodyfikowany się operator pseudoinwersji zdefiniowany zależnością:

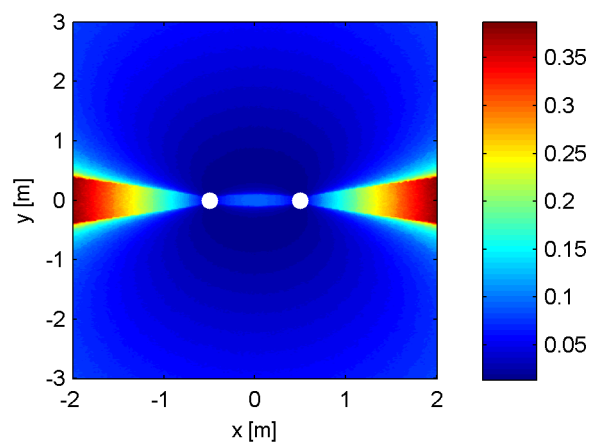
$$\mathbf{T}^{\#} := (\mathbf{T}^{\top} \mathbf{Q} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{\top} \mathbf{Q}.$$

### 3 Błędy w metodzie trilateracji

Podstawowe źródła błędów trilateracji związane są z niepewnością pomiaru odległości od znacznika (wynikającą z dokładności dalmierzy) niepewność położenia znacznika (związana m.in. z dokładnością jego wykrycia przez układy sensoryczne oraz brakiem dokładnej znajomości geometrii rozmieszczenia tych znaczników). Pole niepewności pozycji zilustrowane na rys. 4 zależy od wzajemnego położenia znaczników względem robota. W przypadku dysponowania większą liczbą znaczników można rozważyć, które z nich należy wybrać dla bieżącego ustawienia robota aby zagwarantować najmniejszy błąd pomiaru pozycji.



Rysunek 4: Obszar niepewności dla trilateracji jako wynik błędu pomiaru odległości



Rysunek 5: Rozkład maksymalnych błędów pomiaru pozycji dla założonej konfiguracji znaczników i niepewności pomiaru odległości  $\pm 0,01\text{m}$