

Problem plecakowy

AE – PROJEKT 2

Autor:

Mateusz Dryjański

Numer indeksu 304036

Spis treści

Opis zadania:	3
Założenia:	3
Przedmioty:	3
Badania:	4
Test 1:	4
Test 2:	5
Test 3:	6
Test 4:	7
Test 5:	8
Test 6:	9
Test 7:	10
Test 8:	11
Test 9:	12
Test 10:	13
Test 11:	14
Podsumowanie badań:	15
Kryteria doboru optymalnych parametrów:	15
Rozwiązanie problemu:	16
Ocena rozwiązania:	16
Wnioski:	18
Skrypty:	18

Opis zadania:

Stosując algorytm genetyczny znajdź rozwiązanie problemu plecakowego:

$$\max_x \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W$$
$$p_i > 0, \quad w_i > 0, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

Założenia:

- Liczba przedmiotów: $N = 32$
- Do generacji przedmiotów użyto skryptu skrypt1.m. Wygenerowana macierz przedstawiona jest w kolejnym akapicie
- Maksymalna waga plecaka: $W = 30\% * 15.8 = 4.74$
- Funkcją celu jest funkcja, która dla danego wektora binarnego (oznaczającego że dany przedmiot jest w plecaku lub nie) zwraca wartość wszystkich przedmiotów w plecaku, o ile ich łączna waga nie przekracza maksymalnej. W przeciwnym wypadku zwraca 0.
- Próba mutacji przeprowadzana jest NA KAŻDYM BICIE każdego osobnika z populacji
- Za osobnika zmutowanego uważamy osobnika z co najmniej jednym zmienionym bitem

Przedmioty:

LP.	Waga	Wartość	LP.	Waga	Wartość	LP.	Waga	Wartość	LP.	Waga	Wartość
1	0.4	22	9	0.6	49	17	0.1	10	25	0.7	24
2	0.5	99	10	0.8	81	18	0.6	88	26	0.8	63
3	0.9	36	11	0.3	97	19	0.5	83	27	0.6	14
4	0.2	95	12	0.2	81	20	0.4	30	28	0.3	24
5	0.7	87	13	0.9	67	21	0.2	33	29	0.3	72
6	0.2	99	14	0.4	12	22	0.6	3	30	0.8	71
7	0.6	19	15	0.1	94	23	0.3	30	31	0.5	52
8	0.5	65	16	0.7	58	24	0.1	17	32	1	79

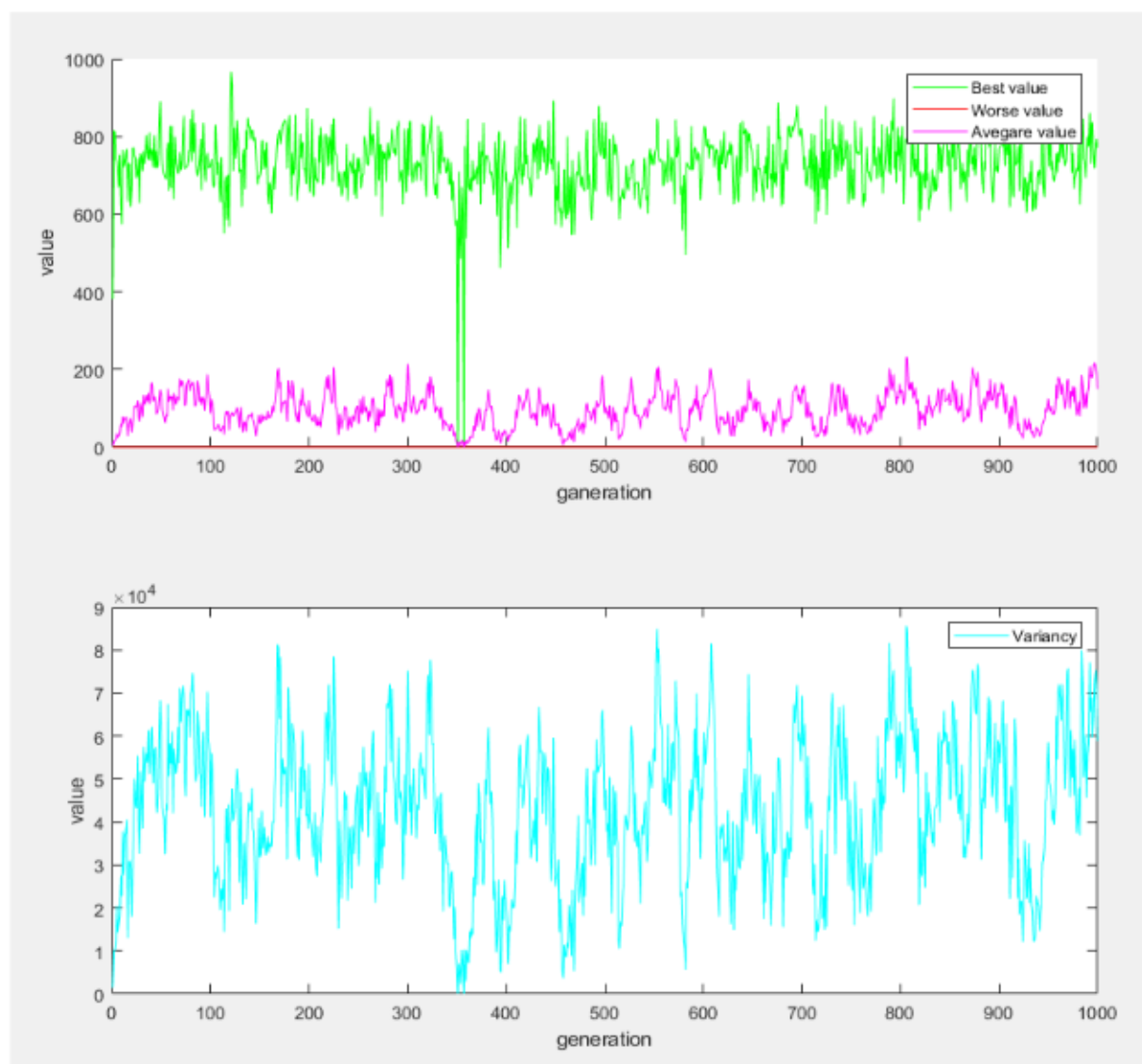
Tabela 1: Wagi i wartości poszczególnych przedmiotów

Badania:

Program został uruchomiony kilka razy dla różnych parametrów z następującymi efektami:

Test 1:

- Liczność populacji: 100
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.1
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.5
- Liczność potomków elitarnych: 0
- Liczba iteracji algorytmu: 1000



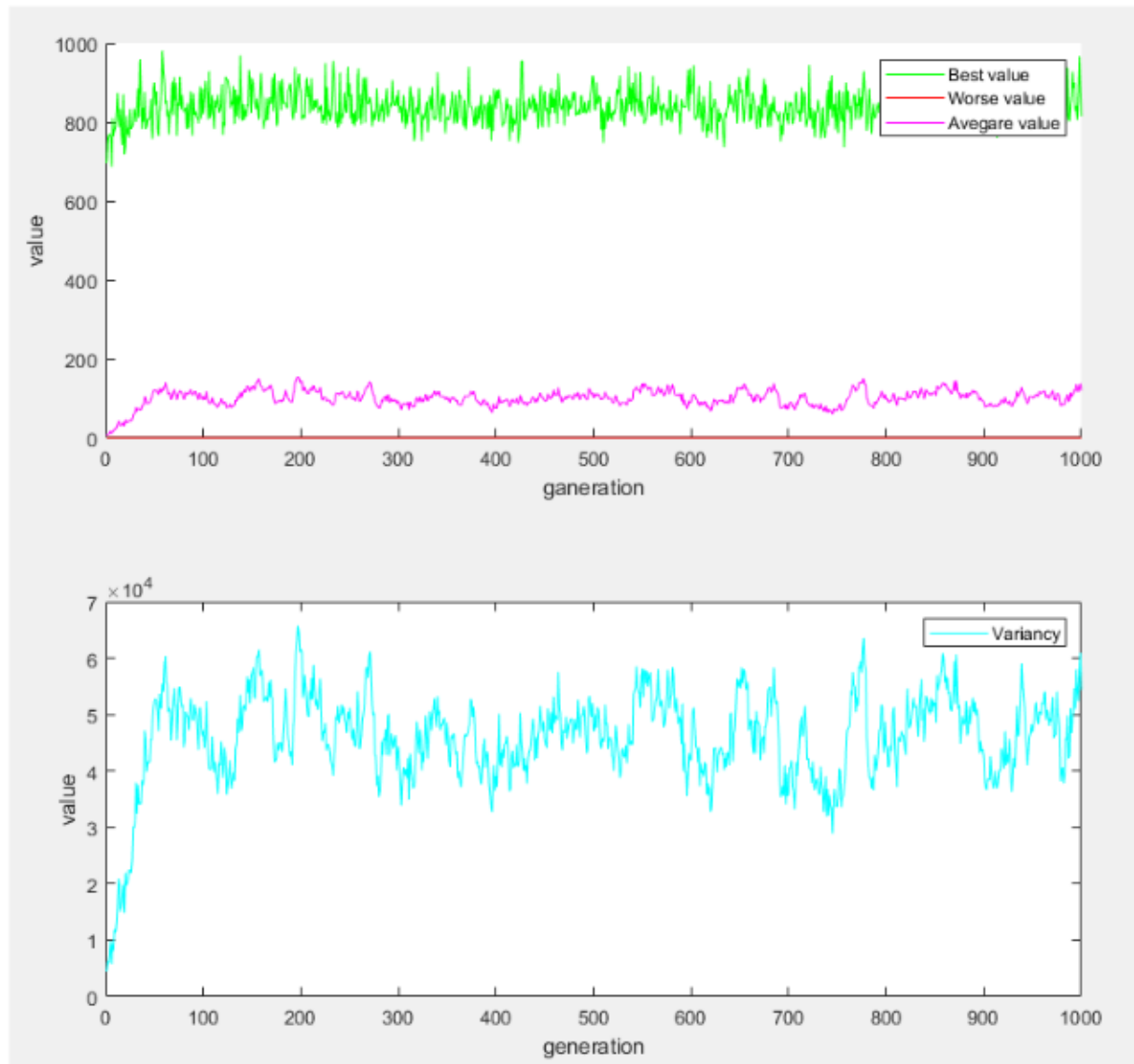
Wykres 1: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 1

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 966
- Czas rozwiązania: 0.706s

Test 2:

- Liczność populacji: 1000
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.1
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.5
- Liczność potomków elitarnych: 0
- Liczba iteracji algorytmu: 1000



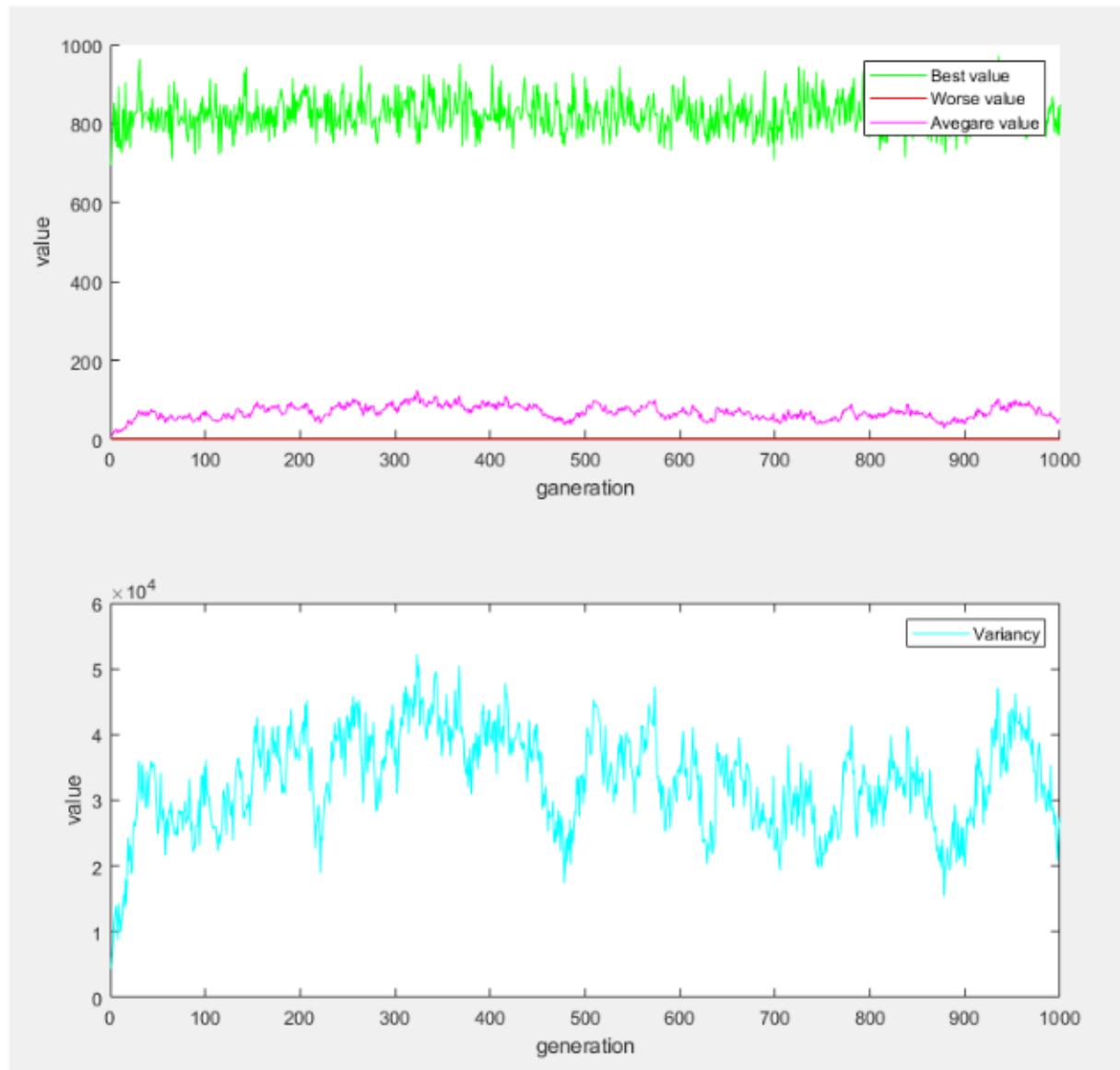
Wykres 2: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 2

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 980
- Czas rozwiązania: 6.303s

Test 3:

- Liczność populacji: 1000
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.1
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 0
- Liczba iteracji algorytmu: 1000



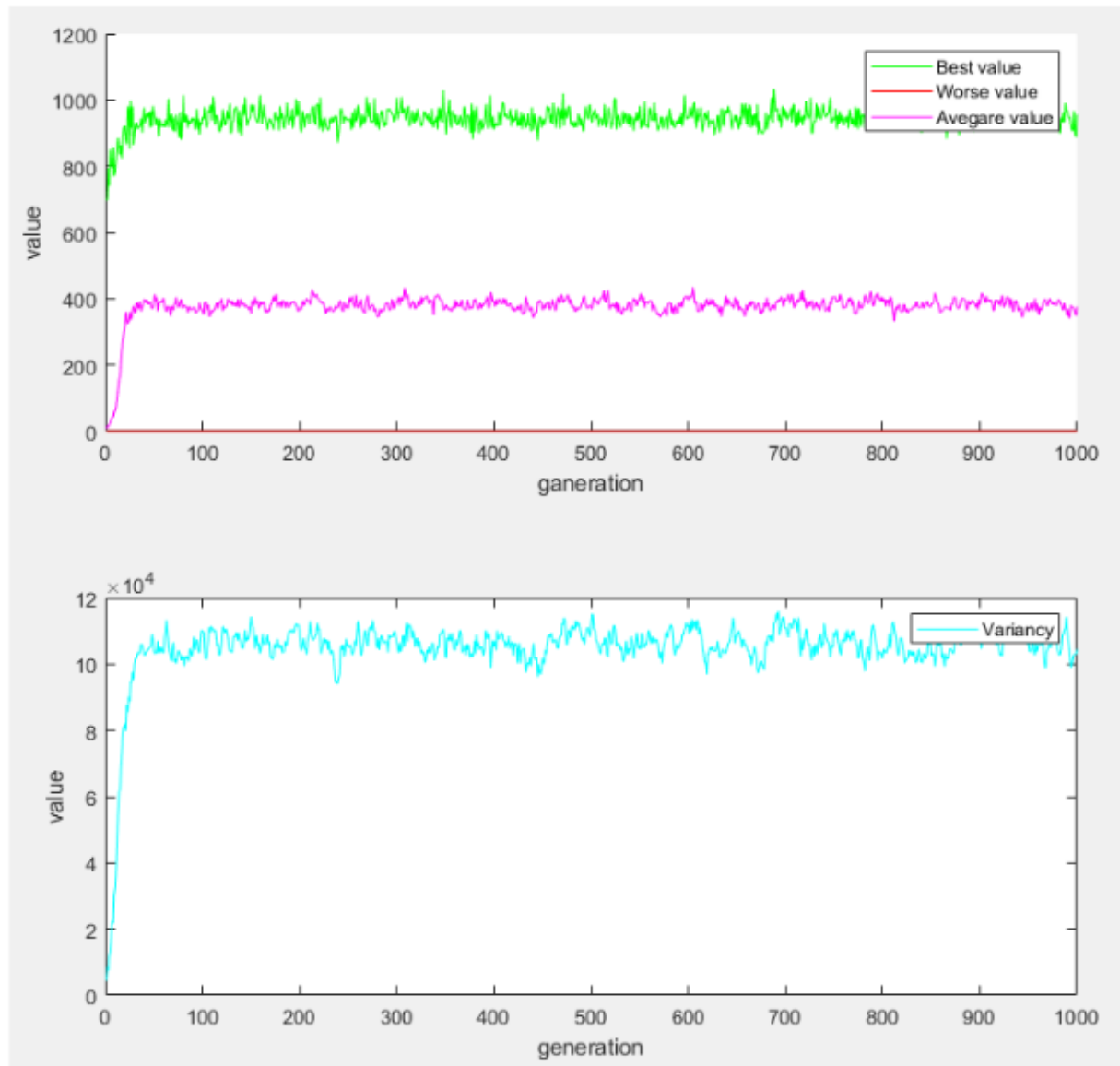
Wykres 3: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 3

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 972
- Czas rozwiązania: 6.888s

Test 4:

- Liczność populacji: 1000
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 0
- Liczba iteracji algorytmu: 1000



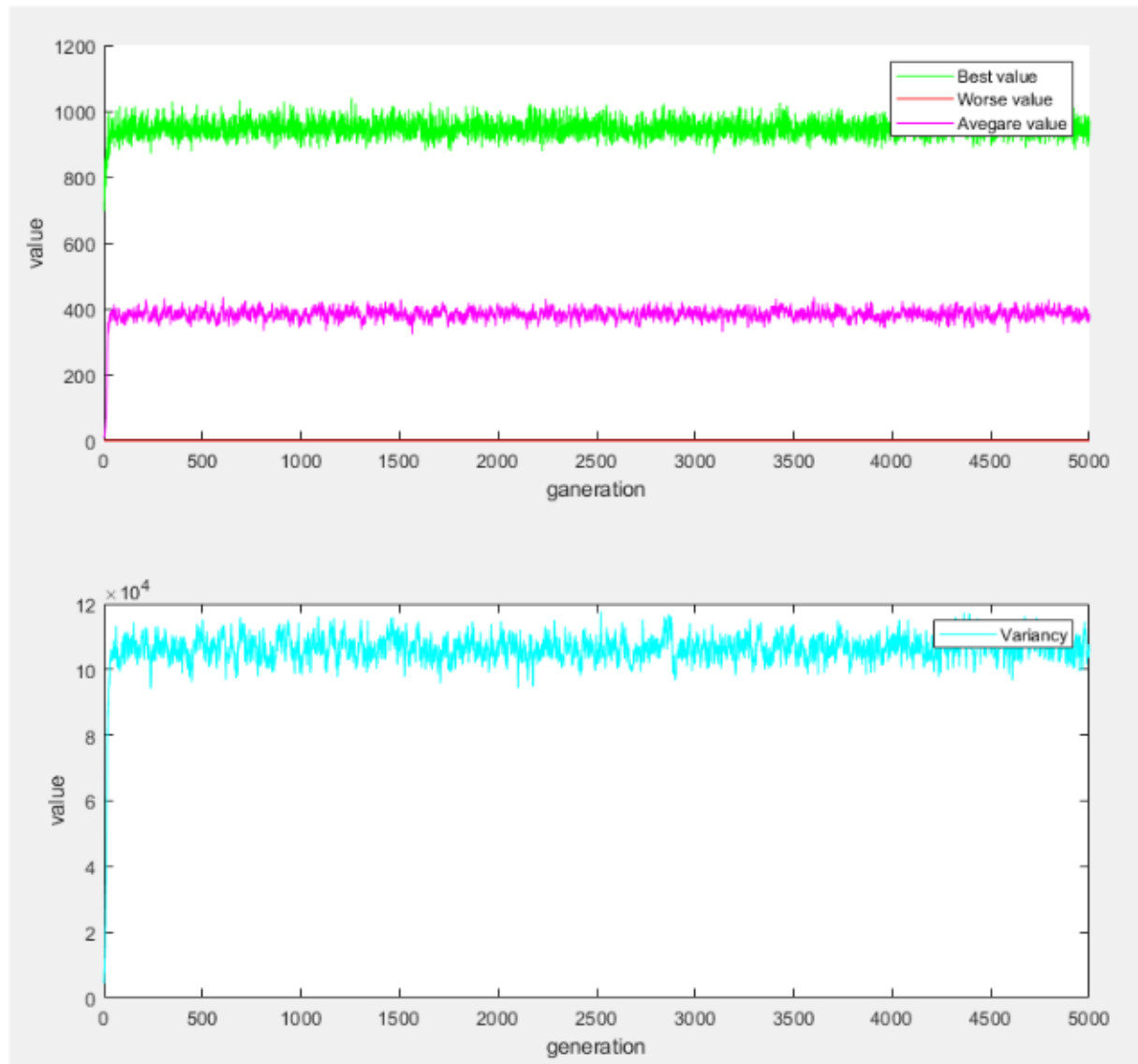
Wykres 4: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 4

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 1033
- Czas rozwiązania: 6.773s

Test 5:

- Liczność populacji: 1000
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 0
- Liczba iteracji algorytmu: 5000



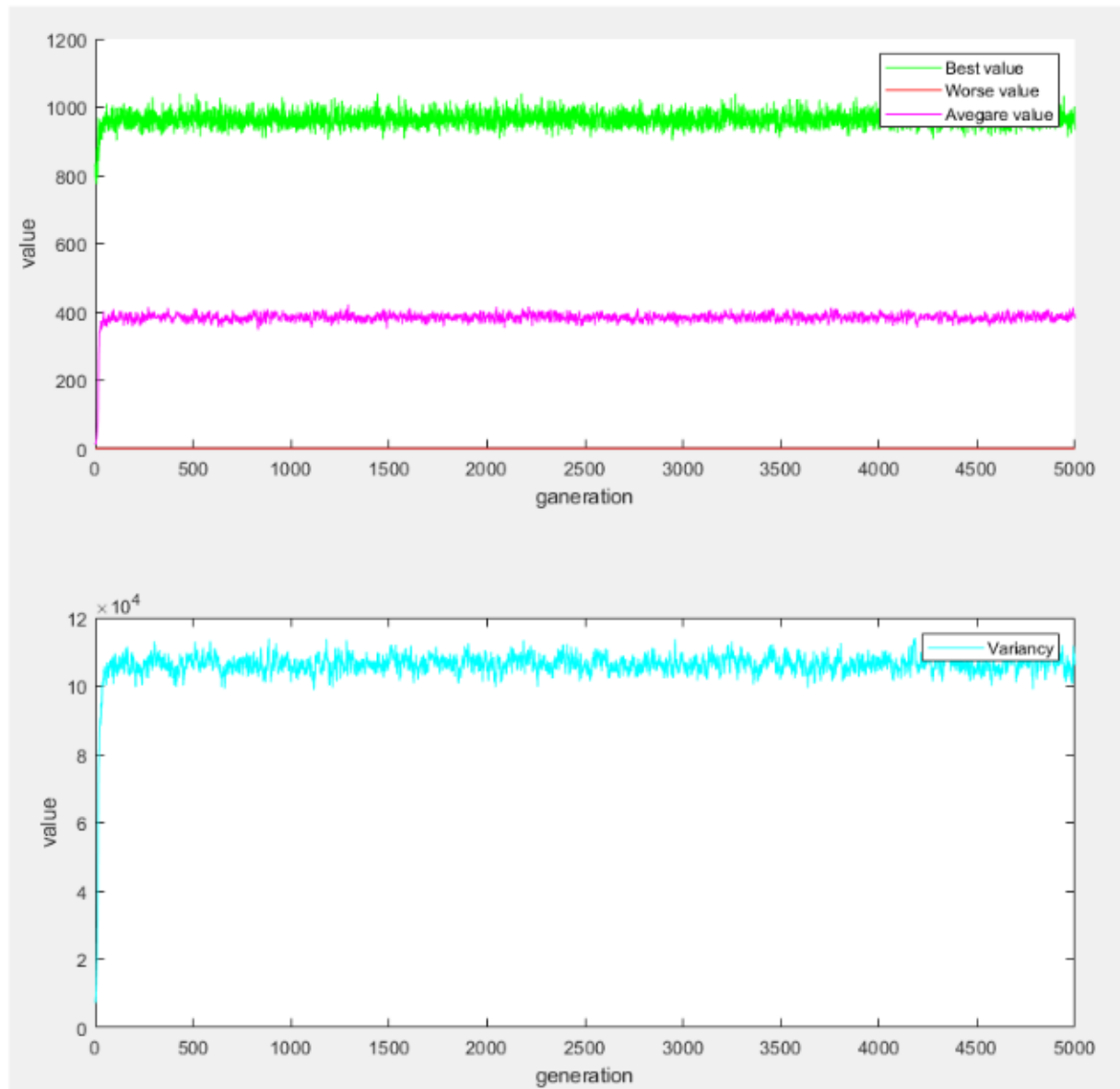
Wykres 5: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 5

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 1040
- Czas rozwiązania: 34.736s

Test 6:

- Liczność populacji: 2500
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 0
- Liczba iteracji algorytmu: 5000



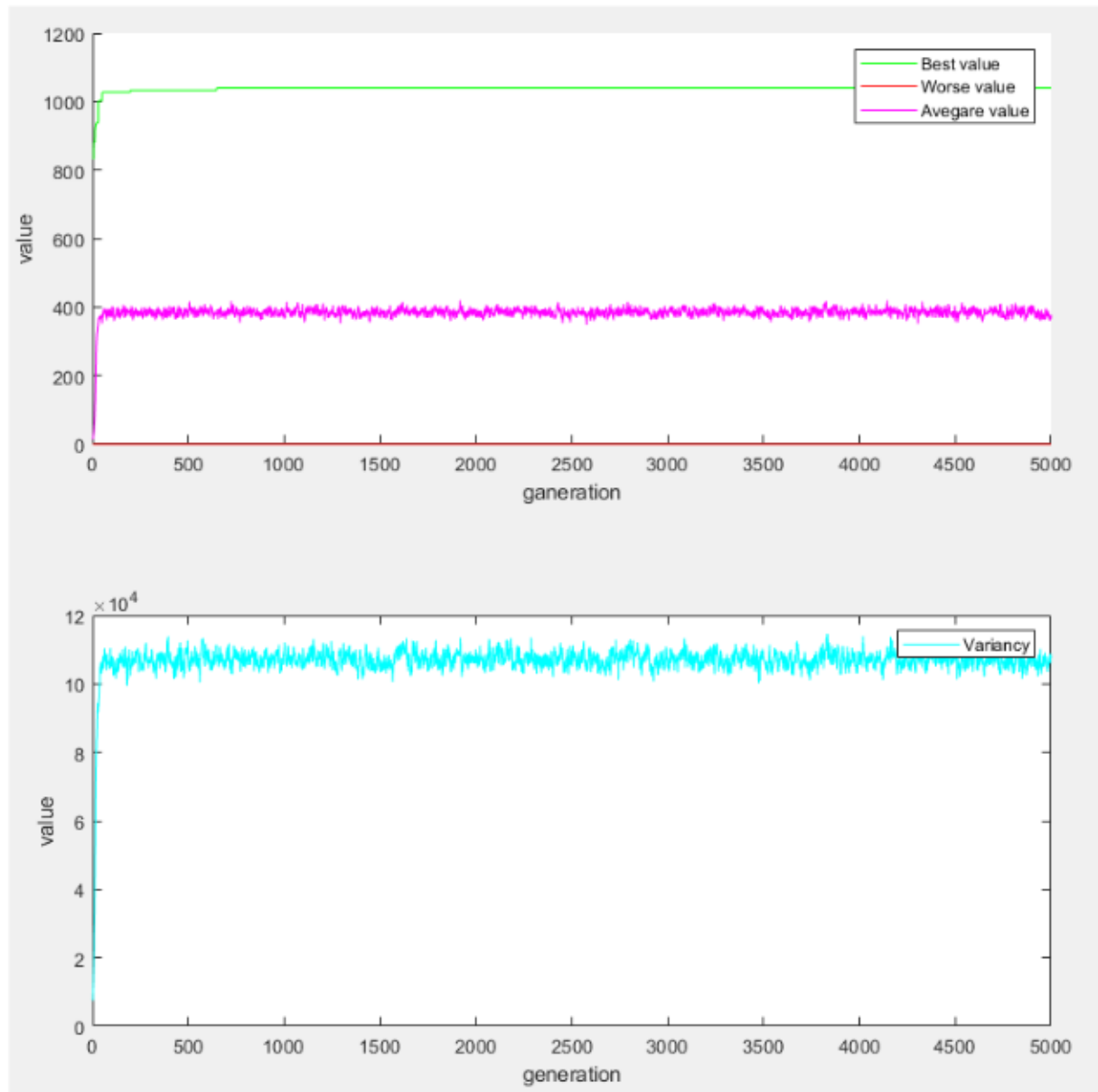
Wykres 6: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 6

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 1040
- Czas rozwiązania: 86.011s

Test 7:

- Liczność populacji: 2500
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 1
- Liczba iteracji algorytmu: 5000



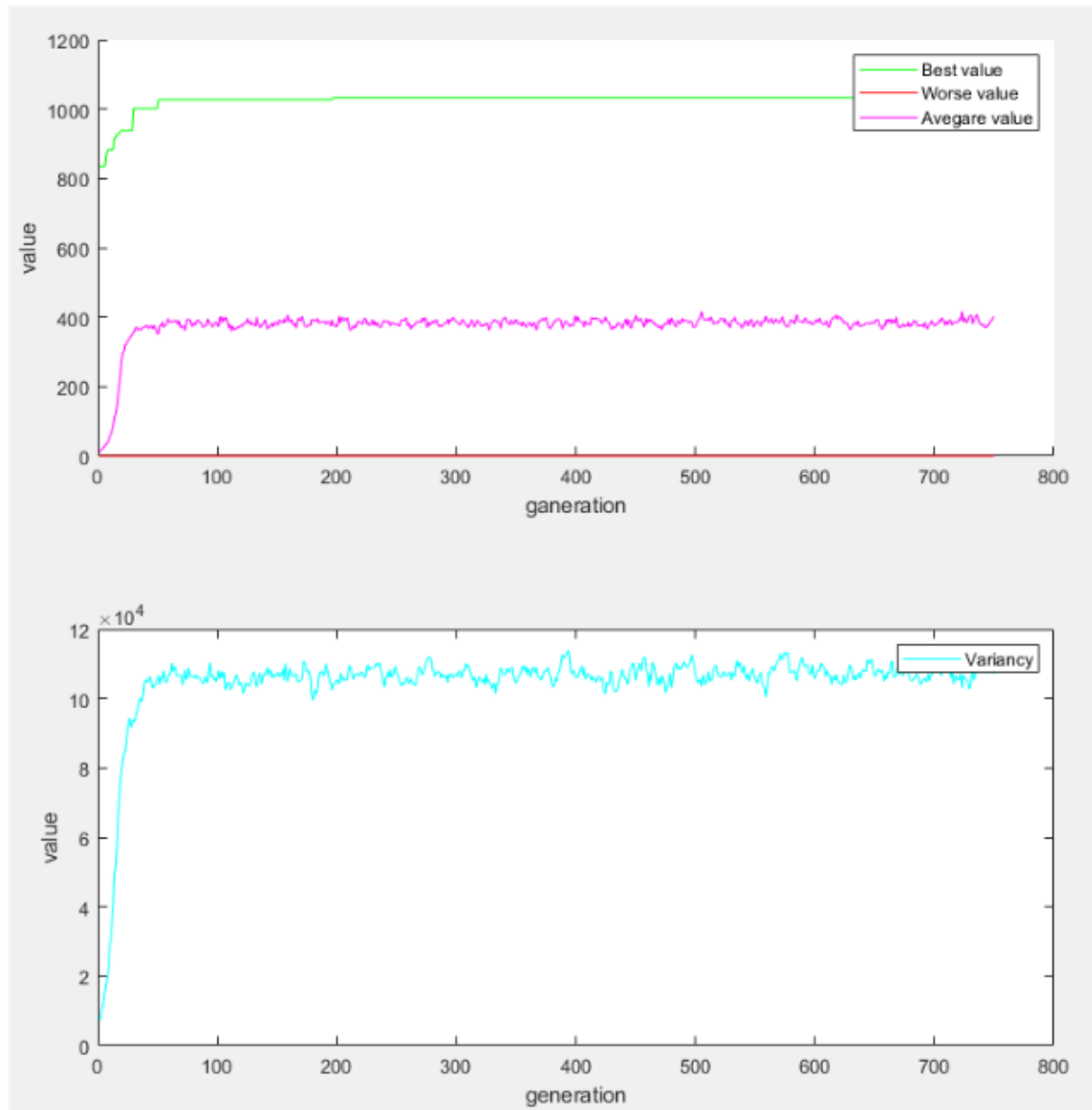
Wykres 7: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 7

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 1040
- Czas rozwiązania: 82.827s

Test 8:

- Liczność populacji: 2500
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 1
- Liczba iteracji algorytmu: 750



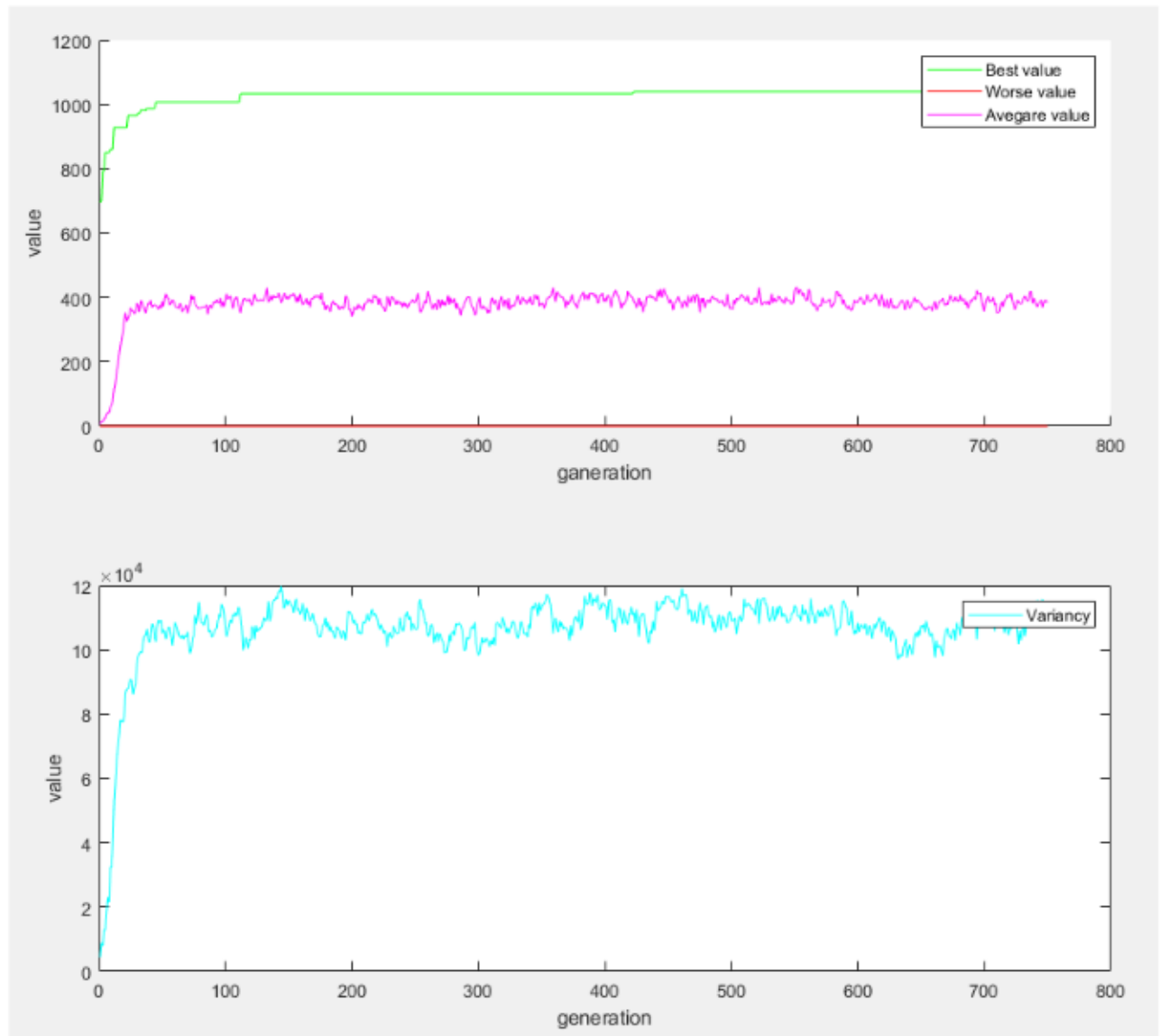
Wykres 8: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 8

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 1040
- Czas rozwiązania: 12.213s

Test 9:

- Liczność populacji: 1000
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 1
- Liczba iteracji algorytmu: 750



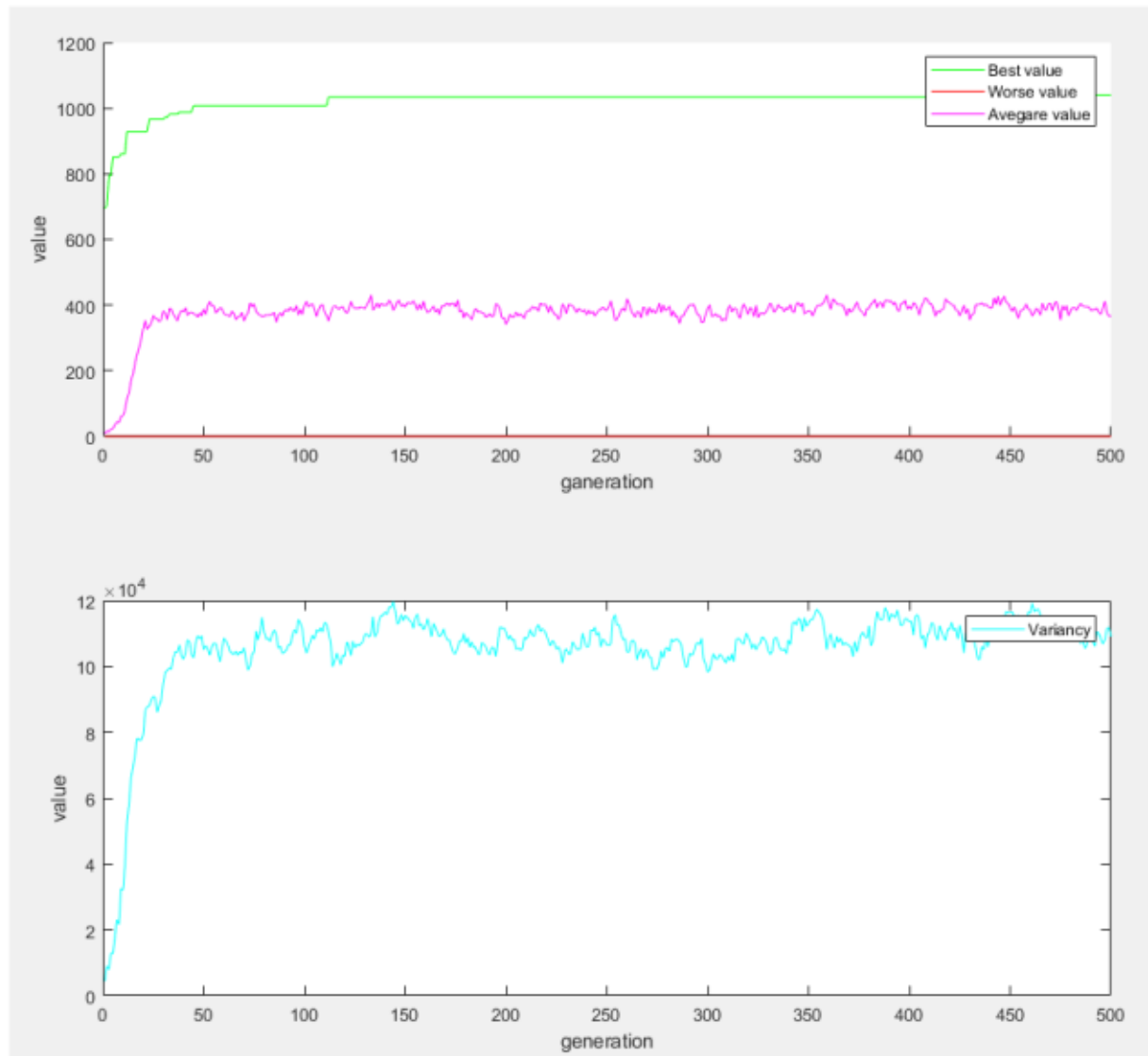
Wykres 9: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 9

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 1040
- Czas rozwiązania: 5.074s

Test 10:

- Liczność populacji: 1000
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 1
- Liczba iteracji algorytmu: 500



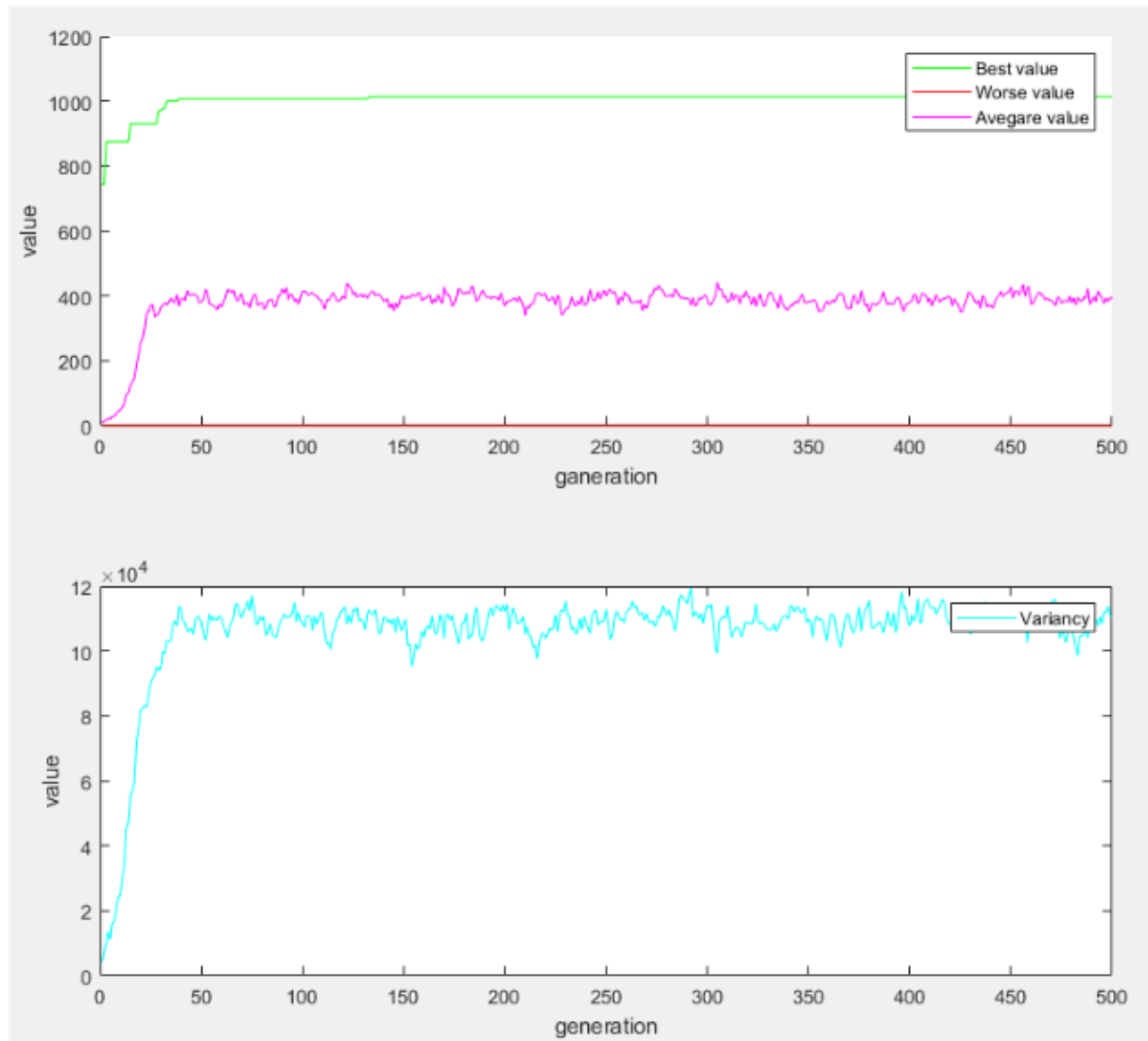
Wykres 10: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 10

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 1040
- Czas rozwiązania: 3.316s

Test 11:

- Liczność populacji: 750
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 1
- Liczba iteracji algorytmu: 500



Wykres 11: Metryki rozwiązania dla parametrów z Testu 11

Podsumowanie rozwiązania:

- Łączna wartość: 1014
- Czas rozwiązania: 2.473s

Podsumowanie badań:

Test	Populacja	P-stwo mutacji	P-stwo krzyżowania	Elita	Iteracje	Max wartość	Czas [s]
1	100	0.1	0.5	0	1000	966	0.706
2	1000	0.1	0.5	0	1000	980	6.303
3	1000	0.1	0.9	0	1000	972	6.888
4	1000	0.05	0.9	0	1000	1033	6.773
5	1000	0.05	0.9	0	5000	1040	34.736
6	2500	0.05	0.9	0	5000	1040	86.011
7	2500	0.05	0.9	1	5000	1040	82.827
8	2500	0.05	0.9	1	750	1040	12.213
9	1000	0.05	0.9	1	750	1040	5.074
10	1000	0.05	0.9	1	500	1040	3.316
11	750	0.05	0.9	1	500	1014	2.473

Tabela 2: Parametry i wyniki testów

Kryteria doboru optymalnych parametrów:

Optymalne wartości parametrów wybrane zostały na podstawie testów. Najpierw manipulowano wartościami liczności populacji oraz prawdopodobieństwa mutacji oraz krzyżowania w celu zwiększenia uzyskanej dopuszczalnej wartości plecaka. Zmniejszenie prawdopodobieństwa mutacji sprawiło, że zarówno wykres wariacji od numeru generacji oraz wykres najwyższej wartości funkcji celu od numer generacji stały się znacznie mniej „poszarpane”, co poskutkowało znaczną poprawą maksymalnej wartości funkcji celu i jeszcze większą poprawą wartości średniej. Kiedy to przestało dawać efekty zaczęto zwiększać liczbę iteracji algorytmu. Wtedy osiągnięto maksymalną wartość plecaka równą 1040 po czym dodano jednego potomka elitarnego. Na wykresach zauważono, że maksimum osiągnięte jest bardzo szybko, więc teraz z kolei zaczęto zmniejszać liczbę iteracji oraz licznosc populacji żeby zmniejszyć czas obliczeń. Kontynuowano te zmiany do momentu, gdy poza zmniejszaniem czasu, zmniejszały one również wartość plecaka. W tym momencie zakończono testy i określono optymalne wartości parametrów.

Rozwiązanie problemu:

Ostatecznie, najlepsze wyniki przy możliwie małej ilości obliczeń uzyskano przy następujących parametrach:

- Liczność populacji: 1000
- Prawdopodobieństwo mutacji: 0.05
- Prawdopodobieństwo krzyżowania: 0.9
- Liczność potomków elitarnych: 1
- Liczba iteracji algorytmu: 500

$X = \{0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}$

LP.	Waga	Wartość	LP.	Waga	Wartość	LP.	Waga	Wartość	LP.	Waga	Wartość
1	0.4	22	9	0.6	49	17	0.1	10	25	0.7	24
2	0.5	99	10	0.8	81	18	0.6	88	26	0.8	63
3	0.9	36	11	0.3	97	19	0.5	83	27	0.6	14
4	0.2	95	12	0.2	81	20	0.4	30	28	0.3	24
5	0.7	87	13	0.9	67	21	0.2	33	29	0.3	72
6	0.2	99	14	0.4	12	22	0.6	3	30	0.8	71
7	0.6	19	15	0.1	94	23	0.3	30	31	0.5	52
8	0.5	65	16	0.7	58	24	0.1	17	32	1	79

Tabela 3: Przedmioty wybrane przez algorytm

Podsumowanie rozwiązania:

- łączna wartość: $v = 1040$
- łączna waga: $w = 4.7 \leq W = 4.74$
- Liczność potomków skrzyżowanych: 450458
- Liczność potomków zmutowanych: 403330
- Czas wykonywania algorytmu: 3.316s

Ocena rozwiązania:

Najlepszym sposobem rozwiązania problemu plecakowego byłoby oczywiście sprawdzenie wszystkich możliwych opcji. Niestety przy 32 binarnych zmiennych decyzyjnych, wszystkich możliwych opcji jest aż $2^{32} = 4\,294\,967\,296$. Przeszukanie takiej przestrzeni byłoby dosyć męczące, zwłaszcza bez użycia komputera. Dlatego próbując „na kartce” rozwiązać takie zadanie, można posłużyć się sposobem zachłannym: obliczamy dla każdego przedmiotu stosunek wartości do wagi, a następnie wybieramy kolejno przedmioty o najwyższych wartościach tego stosunku (o ile ich waga jest w danym momencie dopuszczalna). Stosując taką strategię, można uzyskać następujący wynik:

LP.	Waga	Wartość	Wartość/Waga	LP.	Waga	Wartość	Wartość/Waga
15	0,1	94	940,00	17	0,1	10	100,00
6	0,2	99	495,00	30	0,8	71	88,75
4	0,2	95	475,00	16	0,7	58	82,86
12	0,2	81	405,00	9	0,6	49	81,67
11	0,3	97	323,33	28	0,3	24	80,00
29	0,3	72	240,00	32	1	79	79,00
2	0,5	99	198,00	26	0,8	63	78,75
24	0,1	17	170,00	20	0,4	30	75,00
19	0,5	83	166,00	13	0,9	67	74,44
21	0,2	33	165,00	1	0,4	22	55,00
18	0,6	88	146,67	3	0,9	36	40,00
8	0,5	65	130,00	25	0,7	24	34,29
5	0,7	87	124,29	7	0,6	19	31,67
31	0,5	52	104,00	14	0,4	12	30,00
10	0,8	81	101,25	27	0,6	14	23,33
23	0,3	30	100,00	22	0,6	3	5,00

Tabela 4: Przedmioty wybrane metodą zachłanną

Zauważmy, że jeżeli w taki sam sposób posortujemy Tabelę 3 otrzymamy dokładnie taki sam wynik:

LP.	Waga	Wartość	Wartość/Waga	LP.	Waga	Wartość	Wartość/Waga
15	0,1	94	940,00	17	0,1	10	100,00
6	0,2	99	495,00	30	0,8	71	88,75
4	0,2	95	475,00	16	0,7	58	82,86
12	0,2	81	405,00	9	0,6	49	81,67
11	0,3	97	323,33	28	0,3	24	80,00
29	0,3	72	240,00	32	1	79	79,00
2	0,5	99	198,00	26	0,8	63	78,75
24	0,1	17	170,00	20	0,4	30	75,00
19	0,5	83	166,00	13	0,9	67	74,44
21	0,2	33	165,00	1	0,4	22	55,00
18	0,6	88	146,67	3	0,9	36	40,00
8	0,5	65	130,00	25	0,7	24	34,29
5	0,7	87	124,29	7	0,6	19	31,67
31	0,5	52	104,00	14	0,4	12	30,00
10	0,8	81	101,25	27	0,6	14	23,33
23	0,3	30	100,00	22	0,6	3	5,00

Tabela 5: Przedmioty wybrane przez algorytm i posortowane względem stosunku wartości do wagi