Relazioni

Proprietà di relazioni

- Relazione Totale: per tutti gli $a \in A$ esiste **ALMENO** un $b \in B$ tale che $(a, b) \in R$
- Relazione Surgettiva: per tutti i $b \in B$ esiste **ALMENO** un $a \in A$ tale che $(a, b) \in R$
- Relazione Univalente: per tutti gli $a \in A$ esiste **AL PIU'** un $b \in B$ tale che $(a, b) \in R$
- Relazione Iniettiva: per tutti i $b \in B$ esiste **ALMENO** un $a \in A$ tale che $(a, b) \in R$

Risultati di Dualità

- R è **totale** se e solo se $R^{op} : B \leftrightarrow A$ è **surgettiva** e viceversa
- R è **univalente** se e solo se $R^{op} : B \leftrightarrow A$ è **iniettiva** e viceversa

Teorema di caratterizzazione

Per tutti gli insiemi A e B, per tutte le relazioni $R : A \leftrightarrow B$

- R è **totale** se e solo se $Id_A \subseteq R; R^{op}$
- R è **surgettiva** se e solo se $Id_B \subseteq R^{op}; R$
- R è **univalente** se e solo se $R^{op}; R \subseteq Id_B$

- R è **iniettiva** se e solo se $R; R^{op} \subseteq Id_A$

Definizione di Funzione

Dati due insiemi A e B, una relazione $R : A \leftrightarrow B$ è **funzione** se è **totale** e **univalente**

$$\forall a \in A, \text{esiste esattamente un } b \in B \text{ tale che } (a, b) \in R$$

Una funzione la scriviamo $f : A \to B$ specificando che $f(a) = b$ con $a \in A, b \in B$

Composizione di funzioni

Per tutti gli insiemi A, B, C e tutte le funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$

$$f; g : A \to C$$

Chiusura per composizione

Per tutti gli insiemi A, B, C e tutte le relazioni $R : A \leftrightarrow B$ e $S : B \leftrightarrow C$ vale che:

- Se R e S sono **totali,** allora $R; S$ è totale
- Se R e S sono **univalenti,** allora $R; S$ è univalente
- Se R e S sono **surgettive,** allora $R; S$ è surgettiva
- Se R e S sono **iniettive,** allora $R; S$ è iniettiva

Funzioni parziali, iniettive e surgettive

- Le funzioni sono **totali** e **univalenti**

  $$f : A \to B$$

- Le funzioni surgettive sono anche **surgettive**

  $$f : A \to B, \forall b \in B \text{ esiste almeno un } a \in A$$

- Le funzioni iniettive sono anche **iniettive**

  $$f : A \to B, \forall x, y \in A, x \neq y \to f(x) \neq f(y)$$

- Le funzioni parziali sono solo **univalenti**

$$f : A \to B \text{ ma esistono } a \in A \text{ che non vanno in } B$$

Biiezioni

Dati due insiemi A e B, una relazione $R : A \leftrightarrow B$ è una **biiezione** se è **totale, univalente, surgettiva e iniettiva**

$$\forall a \in A \text{ esiste esattamente un } b \in B \text{ tale che } (a, b) \in R$$
$$\forall b \in B \text{ esiste esattamente un } a \in A \text{ tale che } (a, b) \in R$$

Per tutti gli insiemi A, B, C e biiezioni $i : A \to B, j : B \to C$ vale che:

- $id_A : A \to A$ è una biiezione
- $i; j$ è una biiezione
- i^{op} è una biiezione

R è una biiezione se e solo se $Id_A = R; R^{op}$ e $Id_b = R^{op}; R$

Data $R : A \leftrightarrow B$, una relazione $S : B \leftrightarrow A$ è **l'inversa** di R se $Id_A = R; S$ e $Id_B = S; R$

$R : A \leftrightarrow B$ è **invertibile** se esiste almeno una relazione inversa

R è biiettiva **solo se** è invertibile

Se esiste una biiezione $i : A \to B$ scriviamo $A \cong B$