Grafi

Un grafo orientato è una relazione $E : V \leftrightarrow V$ su un insieme finito di V.

- V insieme di **nodi** e vertici
- E insieme di **archi** o lati

Grafo G ($G^{'}, G_1, G_2, \dots$) e $G = (V, E)$

- $n = |V|$ grado di V
- $m = |E|$ grado di E

Vicinato e grado dei nodi

- Vicinato in uscita di$x x \in V x N^{+}(x) = \{y \mid (x, y) \in E\}$
- Vicinato in ingresso di $x \in V$

  $$N^{+}(x) = \{y \mid (y, x) \in E\}$$

- Grado di uscita di x

$d_x^+ = |N^+(x)|$

- Grado di ingresso di x

$d_x^- = |N^-(x)|$

Proprietà dei grafi

- $E : V \leftrightarrow V$ è **totale** se e solo se per ogni nodo $x \in V$ vale $d_x^+ \geq 1$
- $E : V \leftrightarrow V$ è **univalente** se e solo se per ogni nodo $x \in V$ vale $d_x^+ \leq 1$
- $E : V \leftrightarrow V$ è **surgettiva** se e solo se per ogni nodo $x \in V$ vale $d_x^- \geq 1$
- $E : V \leftrightarrow V$ è **iniettiva** se e solo se per ogni nodo $x \in V$ vale $d_x^- \geq 1$

	$\forall x \in V.\ d_x^+ \cdots$	$\forall x \in V.\ d_x^- \cdots$
$\cdots \geq 1$	TOTALE	SURGETTIVA
$\cdots \leq 1$	UNIVALENTE	INIETTIVA

Hand-shaking Lemma per grafi orientati

Per ogni grafo orientato $G = (V, E)$ vale che

$$\sum_{x \in V} d_x^- = \sum_{x \in V} d_x^+ = |E|$$

Dimostrazione: *Intuitivamente,* preso un arco arbitrario $(i, j) \in E$ questo contribuisce per una unità sia a d_i^+ che d_j^-. Quindi sommando tutti i gradi di uscita si ottiene esattamente $|E|$, e lo stesso sommando i gradi di uscita.

Grafi etichettati e pesati

E' un grafo con una funzione $L : (V \cup E) \rightarrow D$ dove D è un insieme di pesi o etichette.

Cammini, walk, trail e path

Un cammino è una sequenza di nodi collegati da archi nella stessa direzione.

Un ciclo è un cammino che si chiude.

- Un **walk** è una sequenza di nodi $P = v_0, \ldots, v_k$ tale che $\forall i \in k, (v_i, v_{i+1}) \in E$
  Gli estremi di
  P sono v_0 e v_k
- Un **trail** è un path che non attraversa due volte lo stesso arco
- Un **path** è un walk o trail che non attraversa due volte lo stesso nodo $\forall v_1, v_2 \in P, v_1 \neq v_2$

Walk chiusi, circuiti e cicli

- Un walk P è chiuso se $v_0 = v_k$
- Un walk chiuso che è un trail è un **circuito**
- Un circuito che è un path è un **ciclo**

Connettività

Un grafo orientato $G = (V, E)$ è fortemente connesso se per ogni coppia di nodi $x, y \in V$ esiste un walk da x a y.

Una **componente fortemente connessa** di un grafo G è un sottoinsieme non vuoto di nodi $U \subseteq V$ tale che:

- Per ogni coppia di nodi $x, y \in U$ esiste un walk da x a y
- Se $U^{'} \subseteq V$ soddisfa la precedente e $U \subseteq U^{'}$ allora $U = U^{'}$

L'insieme delle componenti fortemente connesse di G è una partizione di V

Grafi orientati aciclici

Un grafo orientato senza cicli si chiama Directed Acyclic Graph (**DAG**).

- Nodi con grado di ingresso 0: **sorgenti**
- Nodi con grado di uscita 0: **pozzi**

Se $G = (V, E)$ è un DAG, allora E^* è un ordinamento parziale

Un ordinamento topologico di G è una biiezione $\eta : V \to n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tale che

$$\text{Per ogni arco } (x, y) \in E \text{ vale che } \eta(x) < \eta(y)$$

Ogni DAG ha almeno un ordinamento topologico

Grafi non orientati

- Gli archi non hanno una direzione, quindi sono sottoinsiemi di nodi di cardinalità 2
- $P_2(V) = \{X \subseteq V \mid |X| = 2\}$
- Un grafo non orientato $G = (V, E)$ ha un insieme finito di nodi V e un insieme di archi $E \subseteq P_2(V)$
- Un grafo non orientato non può avere cappi $\{x, x\} = \{x\}$, cardinalità 1
- Vicinato di x

  $$N(x) = \{y \in V \mid xy \in E\}$$
- Grado di x

  $$d_x = |N(x)|$$
- Nodi universali e nodi isolati
- Hand-shaking lemma

  $$\sum_{x \in V} d_x = 2|E|$$

Circuiti e trail euleriani

Un circuito euleriano è un circuito che passa esattamente una volta per tutti gli archi del grafo

Analogalmente il trail euleriano, ma ogni arco è visitato massimo una volta

Teorema di Eulero:

- Esiste un circuito euleriano se e solo se tutti i nodi hanno grado pari
- Esiste un trail euleriano da x a y se e solo se x a y sono gli unici nodi di grado dispari

Cicli e path hamiltoniani

Dato un grafo connesso, un ciclo hamiltoniano è un ciclo che passa esattamente una volta per tutti i nodi del grafo

Analogalmente path hamiltoniano, ma ogni nodo è visitato massimo una volta

Alberi

Un albero è un grafo non orientato, connesso, aciclico e non vuoto

- Una foresta è un grafo non orientato, aciclico, e non vuoto di cui ogni componente fortemente connessa è un albero
- Foglia: nodo di grado 1
- Nodo interno: nodo con grado > 1
- Albero radicato: albero con un nodo speciale, la radice

Proprietà di alberi

- Ogni albero con almeno due nodi ha almeno una foglia
- Ogni albero ha esattamente $n-1$ archi, n numero di nodi

  $n=1$, albero con un nodo ha 0 archi
- Per ogni coppia di nodi distinti $x, y \in V$ esiste un unico path da x a y
- Per ogni arco $xy \in E$, la rimozione di xy rende il grafo non connesso
- Per ogni coppia di nodi distinti $x, y \in V$ tale che $xy \notin E$, l'aggiunta dell'arco xy crea un ciclo

Distanza su un grafo non orientato

- $d(x,y) \geq 0$
- $d(x,y) = 0$ solo quando $x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$ è una simmetria
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ è una disuguaglianza triangolare

Distanza su un grafo orientato

- $d(x,y) \geq 0$ quando è definita
- $d(x,y) = 0$ solo quando $x = y$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ è una disuguaglianza triangolare quando è definita

Isomorfismo tra grafi

Un isomorfismo tra $G = (V, E)$ e $G^{'} = (V^{'}, E^{'})$ è una biiezione $f : V \to V^{'}$ tale che $xy \in E$ se e solo se $f(x)f(y) \in E^{'}$