Calcolo Combinatorio

Calcolo della cardinalità di un insieme, numero dei suoi elementi $|A|$

Lemma X

Se $P = \{A_i\}_{i \in I}$ è partizione di A allora

$$|A| = \sum_{i \in I} |A_i|$$

Principio di Inclusione-Esclusione

Cardinalità dell'unione di un numero finito r di insiemi:

$$|\bigcup_{j=1}^{r}| = \sum_{I\subseteq\{1,2,...,r\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i\in I} S_i|$$

Cardinalità di alcuni insiemi notevoli

Esempio 1.7.2	$\lvert\varnothing\rvert$	$=$	0
Esempio 1.7.2	$\lvert n\rvert$	$=$	n
Corollario 6.1.4.1	$\lvert A\setminus B\rvert$	$=$	$\lvert A\rvert - \lvert A\cap B\rvert$
Corollario 6.1.4.2	$\lvert A\cup B\rvert$	$=$	$\lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A\cap B\rvert$
Proposizione 6.1.10	$\lvert A\times B\rvert$	$=$	$\lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$
Proposizione 6.2.9	$\lvert\mathcal{P}(A)\rvert$	$=$	$2^{\lvert A\rvert}$
Corollario 6.3.15	$\lvert\mathcal{P}_k(A)\rvert$	$=$	$\binom{\lvert A\rvert}{k}$
Esercizio 6.2.10	$\lvert Rel(A,B)\rvert$	$=$	$2^{\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert}$
Proposizione 6.2.7	$\lvert Fun(A,B)\rvert$	$=$	$\lvert B\rvert^{\lvert A\rvert}$
Esercizio 6.3.6	$\lvert Bii(A,B)\rvert$	$=$	$\begin{cases} 0 & \text{se } \lvert A\rvert \neq \lvert B\rvert \\ \lvert A\rvert! & \text{se } \lvert A\rvert = \lvert B\rvert \end{cases}$

Regola di Biiezione

- Se $R : A \to B$ è una biiezione, allora $|R| = |A| \wedge |R| = |B|$
- Quindi se A e B sono in biiezione allora $|A| = |B|$

Esempio: $|Fun(A,B)| = |B^{|A|}| = |B|^{|A|}$

Cardinalità dell'insieme delle parti

Avendo visto che $\mathcal{P}(A) \cong Fun(A, Bool)$, per la regola di biiezione $|Fun(A, Bool)| = |Bool|^{|A|}$, di conseguenza

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Permutazioni

Sia A un insieme con $|A| = n$. Una permutazione di A è una sequenza ordinata di tutti gi elementi di $A \to a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$

Una permutazione di A è una biiezione $\pi : A \to |A|$

Il numero di permutazioni dipende solo dal numero di elementi

$$|A| = |B| \Rightarrow |Perm(A)| = |Perm(B)|$$

Definizione di $P(n)$: numero di permutazione di insieme di n elementi

$$P(n) = n!$$

Cardinalità delle biiezioni tra due insiemi

$$|Bii(A, B)| = \begin{cases} 0 \text{ se } A \neq B \\ |A|! \text{ se } A = B \end{cases}$$

Anagrammi e permutazioni con ripetizioni

- Sia $S = s_1, s_2, \ldots, s_k$ sequenza di elementi di $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ con $|A| = n$
- Sia per ogni $i \in n + 1$, sia c_i il numero di occorrenze di a_i in S

Allora il numero di permutazioni con ripetizioni di S è

$$\frac{k!}{c_1! \cdot c_2! \ldots c_n!}$$

Disposizioni

Sia A un insieme con $|A| = n$. Una disposizione degli elementi A in k posti è una sequenza ordinata di k elementi distinti di A, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$

- Il numero di disposizioni dipende solo dalla cardinalità dell'insieme e da k

$D(n, k)$ è il numero di disposizioni di n elementi in k posti

$$D(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinazioni

Sia A un insieme con $|A| = n$. Una combinazione di k elementi di A è un sottoinsieme di A di cardinalità k

- L'insieme delle combinazioni di k elementi di A è $\mathcal{P}_k(A)$, l'insieme di k-insiemi di A
- Il numero di combinazioni dipende solo dalla cardinalità dell'insieme e da k
- Il numero di combinazioni k elementi in un insieme di n elementi è chiamato il coefficiente binomiale

$$\binom{k}{n} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Contare nei grafi

- Dati i nodi $\{1, 2, \dots, n\}$, quanti grafi diversi possiamo comporre? guardiamo con
  $n = 3$, abbiamo 8 grafi

Metodo 1

- Numero massimo di archi: $\frac{n(n-1)}{2}$, diviso 2 perché non contiamo gli archi due volte e ognuno dei nodi può avere $\leq n-1$ vicini
- Il numero di grafi possibili

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots \text{ dove } m = \frac{n(n-1)}{2}$$

Metodo 2

- Per ogni arco abbiamo due possibili scelte: Sì e No

Quindi abbiamo che

$$|\mathcal{P}(m)| = 2^m \text{ dove } m = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Abbiamo contato tutti i possibili sottoinsiemi di m elementi, anche noto come *insieme delle parti*, dimostrando che $|\mathcal{P}(m)| = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$
- Notiamo anche una proprietà del coefficiente binomiale $\forall m > 0, \binom{m}{i} < 2^m$

Grafi orientati

Stessa logica, ma abbiamo n^2 possibili archi perché $|V \times V| = |V| \cdot |V| = |V|^2 = n^2$

Ne segue che con n nodi esistono:

- $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ grafi non orientati
- 2^{n^2} grafi orientati

Quanti grafi diversi esistono

Non esiste una formula per calcolare i grafi diversi, possiamo vedere come per $n = 4$ abbiamo $2^{\frac{4-3}{2}} = 64$ diversi grafi possibili, ma possiamo vedere disegnandoli che solo 11 sono diversi, i restanti sono isomorfi.

Grafi complementari

$G(V, E)$ è il complemento di $H(V, E^{'})$

Se $E^{'} = (V \times V) \backslash E = \{xy \in (V \times V) \mid xy \notin E\}$

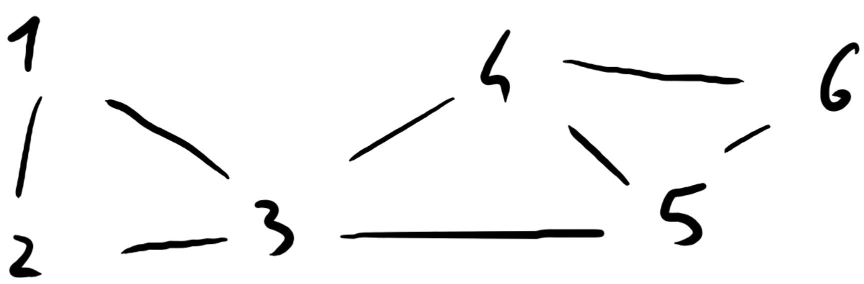
Relazione complemento

Sia G_n l'insieme dei grafi su n nodi, la relazione complemento è $C \subseteq G_n \times G_n$

- E' una relazione biiettiva, $C^{-1} = C$

Shortest path e distanze

La lunghezza di uno shortest path tra due nodi è detta **distanza**



La distanza tra $1, 6$ è $d(1, 6) = 3$

Esistono più shortest path:

- $(1, 3)(3, 4)(4, 6) : 3$

- $(1,3)(3,5)(5,6):3$

Path in una cricca

- Shortest path tra x e $y \to xy : 1$
- Path hamiltoniani
  Posso andare in qualsiasi ordine
  $\to$ permutazioni: $n!$
- Cicli hamiltoniani
  Come sequenze:
  $n!$
  Se ci interessano solo gli insiemi di archi togliamo simmetria e rotazioni:
  $\frac{n!}{2n}$
- Quanti path con k nodi
  Possiamo fare qualsiasi scelta, ma ci fermiamo dopo
  k scelte
  Otteniamo le
  disposizioni di n elementi in k posti: $D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Quanti k-sottoinsiemi, come con i path ma non ci interessa l'ordine
  Ogni
  k-sottoinsieme può generare $k!$ k-cammini, dividiamo per $k!$ il numero di k-path : $\binom{n}{k} = \frac{D(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Quanti walk su k nodi (lunghi $k-1$, con ripetizione di archi)
  Dopo il primo passo, sempre
  $n-1$ scelte, ogni scelta dopo la prima è un arco: $n(n-1)^{k-1}$

Grafo bipartito completo

K_{ab} denota il grafo bipartito completo con a nodi da un lato e b nodi dall'altro

- Guardiamo K_{nn}, quanti shortest path tra x e y

  1 se lati opposti

  n se stesso lato
- Quanti path hamiltoniani: $2 \cdot n! \cdot n!$
  Devo sempre alternare, l'ordine in ogni lato è arbitrario

2 lato iniziale, $n!$ ordine lato 1, $n!$ ordine lato 2

- Quanti cicli hamiltoniani: $\frac{2 \cdot n! \cdot !n}{2 \cdot 2n} = \frac{n!(n-1)!}{2}$
  Come per la cricca, togliamo simmetria (
  2) e rotazione ($2n$)

Albero

Un albero è un grafo che non contiene cicli

- Dato G connesso, posso sempre definire un albero che copre tutti i nodi, detto **spanning tree**
  Lo spanning tree è un albero con
  n nodi e quindi $n-1$ archi
- Quanti spanning tree in una cricca:

  $\#st > n!$ ogni path hamiltoniano è uno spanning tree

  $\#st < \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{n-1}$ ogni spanning tree è fatto di $n-1$ archi
  Formula di Caley:
  n^{n-2} (include anche alberi isomorfi)

L'altezza di un albero radicato è la massima distanza di una foglia dalla radice

- Quale è la massima distanza possibile tra due nodi x, y in un albero di altezza h
  Diseguaglianza triangolare:
  $d(x,y) \leq d(x,r) + d(r,y) \leq 2h$ se r è la radice

Albero binario completo di altezza h

Un albero binario è un albero radicato dove ogni nodo ha al più 2 figli

E' detto completo se tutti i nodi eccetto quelli al livello h hanno esattamente 2 figli

- Quante foglie ha: 2^h
- Quanti nodi ha: $\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$

Dato un albero binario con f foglie, quale è l'altezza minima h che può avere

- Il massimo numero di foglie si ha nell'albero completo, dove avremo $f = h^2$

$$h \geq log_2 f$$

E per alberi ternari $h \geq log_3 f$, per alberi k-ari $h \geq log_k f$

Nodi non-unari in albero binario

Un nodo è unario se ha un solo figlio, un nodo non è unario se ha più di un figlio (biforcazioni)

Quanti nodi non-unari in un albero T con f foglie? Decomponiamo il problema

- T ha sempre un nodo x con solo foglie come figli (1 o 2)
- Rimuoviamo i figli di x
- Se x ha un figlio, ottengo un albero con f foglie, stessi nodi non-unari
- Se x ha 2 figli, ottengo un albero con $f-1$ foglie, un nodo non-unario in meno

Formalizzato:

$$NU(f) = \begin{cases} NU(f) \text{ se ha un figlio} \\ 1 + NU(f-1) \text{ se ha 2 figli} \\ 0 \text{ se } f = 1 \end{cases}$$

Albero binario con $n!$ foglie

Quale è l'altezza minima h di un albero con $n!$ foglie: $h \geq log_2(n!)$

Quanto vale? Usando l'approssimazione di Stirling: $h \geq log_2(n!) \cong n\ log(n)$

Ordinamento per confronto

Un algoritmo di ordinamento per confronto lo possiamo vedere come un albero di decisioni, posso ricevere $n!$ input e ognuno va permutato in modo diverso e quindi l'albero deve avere $f \geq n!$.

Il numero di confronti al caso peggiore è l'altezza h dell'albero

$$h_{min} \cong log(n!) \cong n\ log(n)$$

Questo dimostra come la complessità $O(n\ log\ n)$ sia la complessità ottimale per algoritmi di ordinamento basati sul confronto.