Relazioni su un insieme

Dato un insieme A, una relazione su A è un sottoinsieme si $A \times B$, cioè un elemento di $Rel(A, A)$

Proprietà

- Riflessività: $\forall a \in A \text{ vale che } (a, a) \in R$
- Simmetria: $\forall a, b \in A \text{ vale che se } (a, b) \in R \text{ allora } (b, a) \in R$
- Transitività: $\forall a, b, c \in A \text{ vale che se } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \text{ allora } (a, c) \in R$
- Anti-simmetria: $\forall a, b \in A \text{ vale che se } (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \text{ allora } a = b$

Teorema di caratterizzazione

- R è **riflessiva** se e solo se $id_A \subseteq R$
- R è **simmetrica** se e solo se $R \subseteq R^{op}$
- R è **transitiva** se e solo se $R; R \subseteq R$
- R è **anti-simmetrica** se e solo se $R \cap R^{op} \subseteq id_A$

Chiusure

- La chiusura riflessiva di R è la relazione $R \cup id_A$
- La chiusura simmetrica di R è la relazione $R \cup R^{op}$
- La chiusura transitiva di R è definita come $R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$

Stella di Kleene

Chiusura riflessiva e transitiva di R, preso R^n per $n \in \mathbb{N}$ si ottiene $R^0 \cup R^+ = id_A \cup R^+$ ed è denotata come:

$$R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$$

Relazioni di ordinamento

Sia $R : A \leftrightarrow A$ una relazione su A, si dice che R è una **relazione di ordinamento parziale** se è riflessiva, transitiva e anti-simmetrica, ex. $id_A : A \leftrightarrow A$ è un ordinamento parziale