Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti detti elementi

Esempi

- I numeri interi / naturali / reali
- Le automobili parcheggiate a Pisa
- Le lettere dell'alfabeto
- I giocatori di una squadra
- Gli studenti di FDI

Notazione ed Esempi

- $A, B, C, \ldots$ denotano insiemi
- $a, b, c, \ldots$ denotano elementi
- $a \in A$ è a appartiene ad A
- $a \notin A$ è a non appartiene ad A

- $\mathbb{N}$ i numeri naturali
- $\mathbb{Z}$ i numeri interi
- $\mathbb{Q}$ i numeri razionali
- $\mathbb{R}$ i numeri reali

Insiemi definiti per enumerazione

- Le ore in un giorno: $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 23\}$
- Le vocali $V = \{a, e, i, o, u\}$
- I booleani $Bool = \{t, f\}$
- I naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- Gli interi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- L'insieme vuoto $\emptyset = \{\}$

Insiemi definiti per proprietà

$$X = \{x \in A \mid P(x)\}$$

L'insieme X contiene tutti e solo gli elementi di x di A che soddisfano la proprietà $P(x)$

- $\mathbb{N}^p = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è divisibile per } 2\}$
- $\mathbb{N}^d = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ non è divisibile per } 2\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^+\}$

Confrontare gli insiemi

Due insiemi A e B sono uguali se hanno gli stessi elementi, altrimenti sono diversi

Inclusione

A è un sottoinsieme di B, $A \subseteq B$ se ogni elemento di A appartiene anche a B

A è un sottoinsieme proprio di B, $A \subset B$ se $A \subseteq B, A \neq B$

A e B sono disgiunti se non hanno elementi in comune

Proprietà di uguaglianza e inclusione

- Riflessività:

  $$A = A, A \subseteq A$$

- Transitività:

  $$A = B \land B = C \Rightarrow A = C$$

  $$A \subseteq B \land B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

- Simmetria:

$$A = B \Rightarrow B = A$$

- Antisimmetria:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

Operazioni su insiemi

- Unione: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Differenza: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Complemento: $\overline{B} = \{x \mid x \notin B\}$

Operatori Booleani

- Not: $\neg P$
- And: $P \wedge Q$
- Or: $P \vee Q$
- Se P allora Q: $P \Rightarrow Q$
- P se Q: $P \Leftarrow Q$
- P se e solo se Q: $P \Leftrightarrow Q$

Leggi per operatori su insimi

associatività	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
unità	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \mathcal{U} = A$
commutatività	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
idempotenza	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
assorbimento	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	$A \cap \varnothing = \varnothing$

distributività di $\cup$ su $\cap$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
distributività di $\cap$ su $\cup$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
assorbimento di $\cup$ su $\cap$	$A \cup (A \cap B) = A$
assorbimento di $\cap$ su $\cup$	$A \cap (A \cup B) = A$
complemento per $\cup$	$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
complemento per $\cap$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$

complemento-1	$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$	$A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
complemento-2	$\overline{A} \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup B$	$\overline{A} \cap (A \cup B) = \overline{A} \cap B$
convoluzione	$\overline{(\overline{A})} = A$	
De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\mathcal{U} : \varnothing$	$\overline{\varnothing} = \mathcal{U}$	$\overline{\mathcal{U}} = \varnothing$

Cardinalità di Insiemi finiti

La cardinalità di un insieme finito è il numero dei suoi elementi

- Sia $V = \{a, e, i, o, u\}$, allora $|V| = 5$

Valgono le regole

- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
- $A = B \Rightarrow |A| = |B|$

Insiemi di insiemi

Un Insieme può contenere altri insiemi

- $A = \{\{1, 2, 3\}, 4, \{5, 6, 7\}\}$

  $4 \in A, 2 \notin A, \{1, 2, 3\} \in A$

Numeri naturali come insiemi

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Quindi abbiamo che $n = |n|$

- $0 = \emptyset = \{\}$
- $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$

- e così via

Insieme delle parti

Dato l'insieme A, l'insieme delle parti di A è

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Per esempio

- $\mathcal{P}(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

Famiglie di Insiemi

Sia I un insieme finito di indici. Una famiglia di insiemi F indicizzata da I è

$$F = \{A_i \mid i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$$

Per una famiglia F definiamo $\cup F = \cup_{i \in I} A_i$ l'insieme di tutti gli elementi che compaiono in almeno un insieme e invece $\cap F = \cap_{i \in I} A_i$ l'insieme di tutti gli elementi che compaiono in tutti gli insiemi

Partizioni

Una partizione su un insieme A è una famiglia di sottoinsiemi di A che soddisfa

- Ogni insieme A_i è diverso da $\emptyset$ (insiemi non vuoti)
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ (Copertura di A)
- Presi due indici qualsiasi i, j con $i \neq j$, si ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ (insiemi disgiunti)

Prodotto Cartesiano

Siano A e B due insiemi, il prodotto cartesiano di A per B è l'insieme di tutte e sole le coppie ordinate (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$