Projet de sociobiologie

Introduction à l'Analyse numerique

Sinclair Tsana

05/08/2022

Question 1: Représentation graphique de SN

Par définition, on a

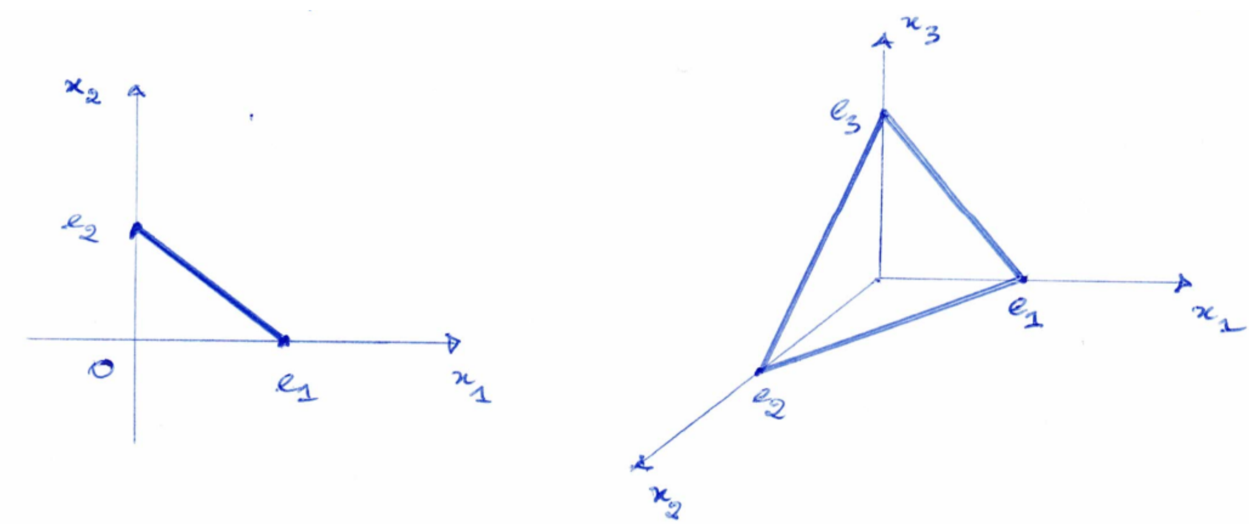
$S^N = \{x = (x_1, ..., x_N) : \sum_{i=1}^N = 1, \forall i = 1 \dots N x_i \geq 0\}$ Pour représenter S^N, on procède comme suit:

- On choisit un homéomorphisme entre le simplexe S^N et la boule unité de $B^N = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^N$

En effet la boule unité B^N est un difféomorphisme qui peut se restreindre a n'importe quelle dimension du simplexe S^N

- Ensuite on différentie ce difféomorphisme pour obtenir un champs de vecteurs sur la boule B^N
- Le Théorème de **Poincaré-Hoff** nous assure que tout champs de vecteur sur cette boule s'annule.

Pour N=2, on se donne un repère orthonormé (o, e_1, e_2) Pour N=3, on se donne un repère orthonormé (o, e_1, e_2, e_3)



Question 2:

Considérons $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ la fonction $x = (x_1, ..., x_N) \longmapsto (f_1(x)...f_N(x))$ telle que $f_i(x) = x_i(e_i^\intercal Ax - x^\intercal Ax)$ $i = 1, ..., N$.

Les fonctions f_i sont des fonctions polynômes donc elles sont toutes de classes C^∞ et en particulier de classe C^1. On en déduit que f ainsi définit est de classe C^1.

De plus, comme $\mathbb{R}^N$ est de dimension finie, alors la fonction f est localement Lipschitzienne.

On peut donc invoquer le théoreme d'existence et d'unicité qui garanti que le système (2) admet une unique solution qui est maximale.

Ainsi la condition de Cauchy(à t=0) apportée par (3) ne change pas la solution du système (2)-(3)

Question 3

Supposons que l'on ajoute une constante λ_j(Potentiellement différente) à chaque colonne de la matrice A. Le système devient.

$$\begin{aligned}
\partial_t x_i &= x_i(\sum_{i=1}^{N}(a_{ij}+\lambda_j)x_j - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(a_{ij}+\lambda_j)x_jx_i) \\
&= x_i(\sum_{i=1}^{N} a_{ij}x_j + \sum_{i=1}^{N}\lambda_j x_j - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N}\lambda_j x_j - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_jx_i) \\
&= x_i(\sum_{i=1}^{N} a_{ij}x_j + (1-\sum_{i=1}^{N} x_i)\sum_{i=1}^{N}\lambda_j x_j - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_jx_i) \\
&= x_i(\sum_{i=1}^{N} a_{ij}x_j - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_jx_i)
\end{aligned}$$

Déduction: Nous venons de montrer que le probleme de Cauchy reste equivalent si on ajoute une constante λ_j a chaque colonne j de la matrice A.

En particulier si on ajoute a chaque colonne j de A la constante $\lambda_j = -a_{1j}$, le sytème obtenu sera tel que $a_{1i} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et sera toujours équivalent a (2)-(3).

Ainsi les solutions resterons également inchangées

Question 4:

a) Preuve par contraposition

Soit $i \in \{1, \dots, N\}$ fixé.

Soit x une solution de $(2)-(3)$

Supposons que $\exists t \geq 0 : x_i(t) \neq 0$

Comme x est solution du système $(2)-(3)$, alors par unicité de la solution, on a également à l'instant $t = 0$ $x_i(0) = x_0, i \neq 0$

b) Preuve par contraposition

Soit x une solution de $(2)-(3)$.

Supposons que $\exists t \geq 0 : \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \neq 1$

Pour un tel t, on a $x_1(t) + \cdots + x_N(t) \neq 0$

Remarquons chaque instant t peut s'ecrire $t = t_0 + \Delta t$

on peut donc écrire $x_1(t_0 + \Delta t) + \cdots + x_N(t_0 + \Delta t) \neq 0$

En faisant $\Delta t \to +\infty$, on obtient $x_1(t_0) + \cdots + x_N(t_0) \neq 0$

Donc $\sum_{i=1}^{N} x_{0,i} \neq 1$

c) Déduction

D'après le point **(b)** précédent, nous avons montré que si $\sum_{i=1}^{N} x_{0,i} = 1$ (ie. $x_0 \in S^N$), alors la solution de $(2)-(3)$ vérifie $\forall t \geq 0, \sum_{i=1}^{N} x_i(t) = 1$ (ie. $\forall t \geq 0, x(t) \in S^N$)

On en déduit que si $x_0 \in S^N$, alors $\forall t \geq 0, x(t) \in S^N$

Question 5:

Supposons que $x(t) \to x^*$ lorsque $t \to +\infty$

i.e pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$,$\|x(t) - x^*\| \leq \epsilon$. $(*)$

En considérant la fonction f tel que définie à la question 2, le problème de Cauchy $(2)-(3)$ peut se réecrire de la manière suivante.

$\frac{x(t)-x_0}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t f(x(s)) - f(x^*)ds + \int_0^t f(x^*)ds$ de sorte que $\frac{x(t)-x_0}{t} \to f(x^*)$ lorsque $t \to +\infty$

Mais on a

$$\left\| \frac{x(t)-x_0}{t} \right\| = \left\| \frac{x(t)-x^*+x^*-x_0}{t} \right\| \leq \left\| \frac{x(t)-x^*}{t} \right\| + \left\| \frac{x^*-x_0}{t} \right\|$$

d'apres l'inégalité triangulaire.

ce qui équivaut a $\left\| \frac{x(t)-x_0}{t} \right\| \leq \frac{1}{t}\|x(t)-x^*\| + \frac{1}{t}\|x_0 - x^*\|$

En utilisant $(*)$, on peut écrire

$\left\| \frac{x(t)-x_0}{t} \right\| \leq \frac{1}{t}\epsilon + \frac{1}{t}\|x_0 - x^*\|$

Et comme $\frac{1}{t}\epsilon + \frac{1}{t}\|x_0 - x^*\| \to 0$ lorsque $t \to +\infty$

on en déduit que $\left\| \frac{x(t)-x_0}{t} \right\| \to 0$ lorsque $t \to +\infty$

Donc $x(t) \to x_0$ lorsque $t \to +\infty$

et par unicité de la limite on a $x_0 = x^*$

Ainsi la solution de condition initiale x_0 est la fonction constante $t \to x^*$

Donc x^* est un équilibre

Question 6:

Posons $F_i = x_i(e_i^\intercal Ax - x^\intercal Ax)$ $i = 1, ..., N$

a) Montrons que les sommets e_i de S^N sont des équilibres

En effet, pour tout $i = 1, ..., N$, on a

$F_i = x_i(e_i^\intercal Ae_i - e_i{}^\intercal Ae_i) = 0$

On conclut que tous les e_i, $i = 1, ..., N$ sont des équilibres

b) Preuve de l'équivalence

Soit $x = (x_1, \dots, x_N) \in S^N$, x est un équilibre ssi:

$\sum_{i=0}^{N} x_i = 1$ et $\forall i = 1, \dots, N$,$x_i(e_i^\intercal Ax - x^\intercal Ax) = 0$

qui équivaut à $\sum_{i=0}^{N} x_i = 1$ et $\forall i = 1, \dots, N x_i = 0$ ou $e_i^\intercal Ax - x^\intercal Ax = 0$

Mais on ne peut avoir $\sum_{i=0}^{N} x_i = 1$ et $\forall i = 1, \dots, N, x_i = 0$

Donc les x_i doivent etre **non tous nuls**. Ainsi, il existe une partie $I \subsetneq \{1, \dots, N\}$ telle que pour tout $i \in I, x_i = 0$ et $\forall i \notin I, x_i \neq 0$

La condition d'équilibre précédente devient:

$\forall i \in I, x_i = 0$ et $\forall i \notin I, x_i \neq 0$ ou $e_i^\intercal Ax = x^\intercal Ax$

Mais d'après l'énoncé la matrice A est symétrique donc pour tout $x \in \mathbb{R}^N, x^\intercal Ax \neq 0$,

Ainsi il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $x^\intercal Ax = e_i^\intercal Ax = \gamma$

D'ou $x \in S^N$ est un équilibre ssi il existe $I \subsetneq \{1, \dots, N\}$ tel que $\forall i \in I, x_i = 0$ et $\exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall i \notin I, x_i \neq 0$, $e_i^\intercal Ax = \gamma$

Question 7: Déterminons les équilibres de (2)

Soit $x \in \mathbb{R}^N, x$ est un équilibre ssi:

pour tout $i = 1, 2, 3$, $x_i = 0$ ou $e_i^\intercal = x^\intercal$ ou $Ax = 0$

- Le 1^{er} cas nous donne le point $(0, 0, 0)$
- Le 2^e cas nous donne les points $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$
- Le cas $Ax = 0$ equivaut à $x \in \ker(A)$

Posons $\delta_1 = ae - bd$, $\delta_2 = af - cd$, $\delta_3 = bf - ce$

Si $\delta_1 \neq 0$**,**$\delta_2 \neq 0$ **et** $\delta_3 \neq 0$

Alors on fixe une variable et on résout le système par la méthode de Cramer

Fixons dans ce cas $x_3 = m$, ou m est un paramètre réel, on aura

$x_1 = \frac{\delta_1}{\delta_3} m$, $x_2 = \frac{\delta_2}{\delta_3} m$ et $x_3 = m$

et $\ker(A) = vect(\frac{\delta_1}{\delta_3}, \frac{\delta_2}{\delta_3}, 1) = vect(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$

Si un seul des δ_i **est nul,**

Par exemple $\delta_1 = 0$ $\delta_2 \neq 0$ et $\delta_3 \neq 0$

Fixons dans ce cas $x_2 = m'$, ou m' est un paramètre réel, on aura

$x_2 = m'$ et $x_3 = \frac{\delta_3}{\delta_2} m'$

et $\ker(A) = vect(1, \frac{\delta_3}{\delta_1}) = vect(\delta_1, \delta_3)$

Si deux des δ_i sont nuls,

Par exemple $\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$ et $\delta_3 \neq 0$

Alors $\ker(A) = vect(\delta_3)$

Si $\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$ et $\delta_3 = 0$

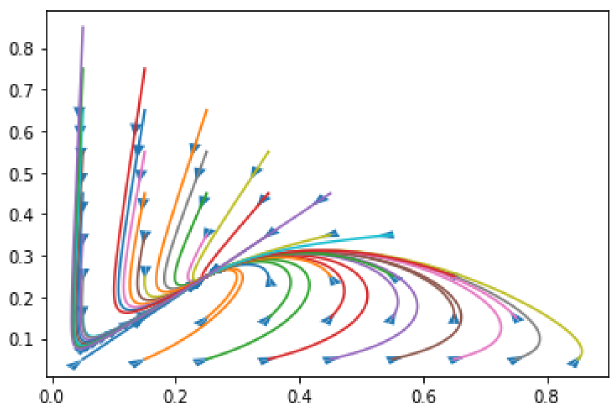
Alors on a forcément $A = 0$ et l'equation $Ax = 0$ admet une infinité de solutions

Question 10:

Pour V=2 et C= 4 on obtient la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En appliquant la fonction `Graphe()`, on obtient le graphe suivant:



Question 11:

a) Soit $u \in \mathbb{R}^2$, u est un équilibre ssi $Au = 0$

Puisque la matrice A est inversible, alors $b \in \mathbb{R}^2$, le système $Au = b$, admet une unique solution. Mais comme dans notre cas $b = (0,0)^\intercal$, le système est donc homogène. On en déduit que le point $(0,0)$ est la seule solution du système $Au = 0$.

Donc le point $(0,0)$ est le seul équilibre de l'équation $\partial_t u = Au$

b)

$1^{er} Cas$: **A est diagonalisable sur** $\mathbb{C}$

Alors il existe une base (V_1, V_2) de vecteurs propres associés aux valeurs propres conjuguées λ_1 et λ_2.

posons $\lambda_1 = a + ib$ et $\lambda_2 = a + ib$

Le système $\partial_t u = Au$ admet une solution $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2$ telle que:

$u_1 = e^{\lambda_1}.V_1$ et $u_2 = e^{\lambda_2}.V_2$

Si $a < 0$ alors $\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = \lim_{t\to+\infty} u_2(t) = \lim_{t\to+\infty} ce^{at} = 0$

i.e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = (0,0)$. Donc (0,0) est stable.

$2^{eme}Cas$: **A admet une Forme Normale de Jordan**

On sait que toute matrice non nulle admet une forme normale sur $\mathbb{C}$.

Dans ce cas A est semblable a une matrice J de la forme J= dite de Jordan de sorte quil existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = J$ ce qui équivaut a $A = PJP^{-1}$.

Ainsi $u' = Au \iff P^{-1}u' = JP^{-1}u$

En posant $y(t) = P^{-1}u(t)$, on est amené à résoudre le système $y'(t) = Jy(t)$ dont la solution est $y(t) = e^{Jt}.C$ ou $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$

Ainsi $y(t) = (c_1e^{\lambda_1 t}, c_2e^{\lambda_2 t})^\intercal$

En revenant a $u(t) = Py(t)$, on obtient $u(t) = (k_1e^{\lambda_1 t}, k_2e^{\lambda_2 t})^\intercal$, $k1, k2 \in \mathbb{C}$

- Si $Re(\lambda_1) < 0$ et $Re(\lambda_2) < 0$

Alors $\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = \lim_{t\to+\infty} k_1e^{Re(\lambda_1)t} = 0$

$\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = \lim_{t\to+\infty} k_2e^{Re(\lambda_2)t} = 0$

i.e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = (0,0)$. Donc (0,0) est stable.

c) Si $Re(\lambda_1) > 0$ et $Re(\lambda_2) > 0$

$\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = \lim_{t\to+\infty} k_1e^{Re(\lambda_1)t} = +\infty$

et $\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = \lim_{t\to+\infty} k_2e^{Re(\lambda_2)t} = +\infty$

Ainsi $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$

Donc le point d'equilibre $(0,0)$ est un equilibre **instable**

d) Si $Re(\lambda_1) < 0$ et $Re(\lambda_2) > 0$

$\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = \lim_{t\to+\infty} k_1e^{Re(\lambda_1)t} = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = \lim_{t\to+\infty} k_2e^{Re(\lambda_2)t} = +\infty$

On obtient deux directions diférentes de la limite de $u(t)$ quand $t \to +\infty$

on en déduit que le le point d'equilibre $(0,0)$ est un **point de selle**

Question 12: Preuve

[$\Longrightarrow$] supposons que $u^* \in \mathbb{R}^2$ est un équilibre.

Puisque le système est autonome, u^* est l'unique solution de l'équation $f(u) = 0$ et par conséquent $f(u^*) = 0$

[$\Leftarrow$] Supposons que $f(u^*) = 0$

Comme $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, alors pour tout $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u)$ et $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$ existent et sont continues.

Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, le developpement de Taylor d'ordre 1 de f en u^* s'écrit:

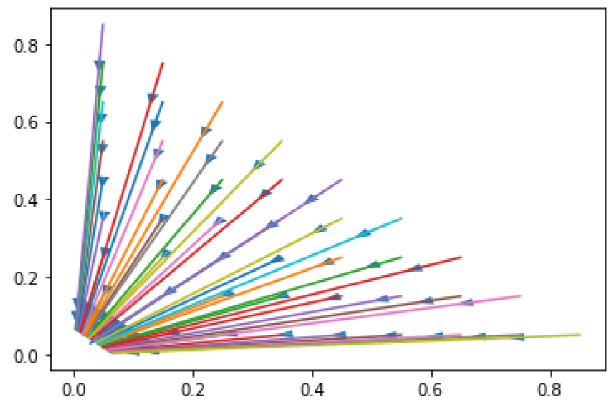
$$\begin{aligned} f(u^* + h) &= f(u^*) + h_1\frac{\partial f}{\partial u_1}(u^*) + h_2\frac{\partial f}{\partial u_2}(u^*) + O(h) \\ &= h_1\frac{\partial f}{\partial u_1}(u^*) + h_2\frac{\partial f}{\partial u_2}(u^*) + O(h) \end{aligned}$$

car $f(u^*) = 0$ par hypothèse.

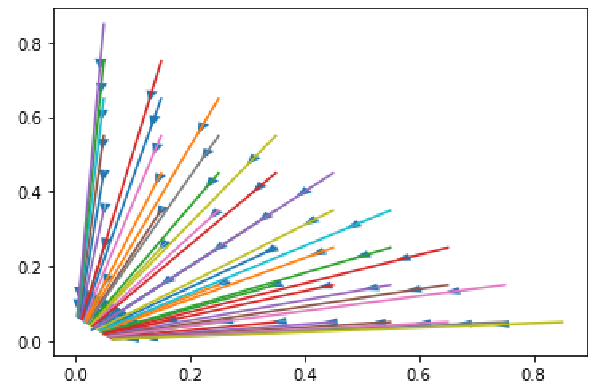
On en déduit que $\lim_{h\to(0,0)} f(u^*+h) = 0$ donc u^* est un équilibre.

Question 14 Graphes de la dynamique pour les matrices A1 a A12

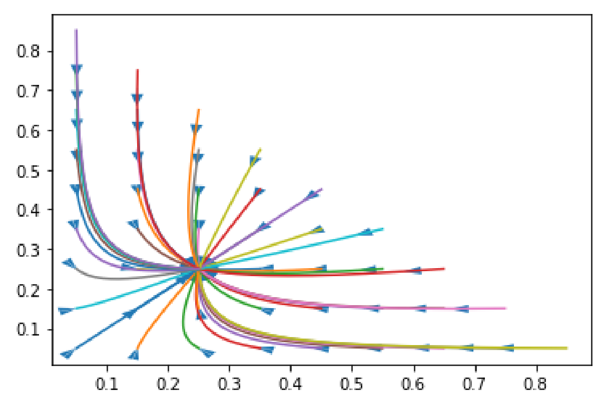
Trajectoires pour la matrice A1



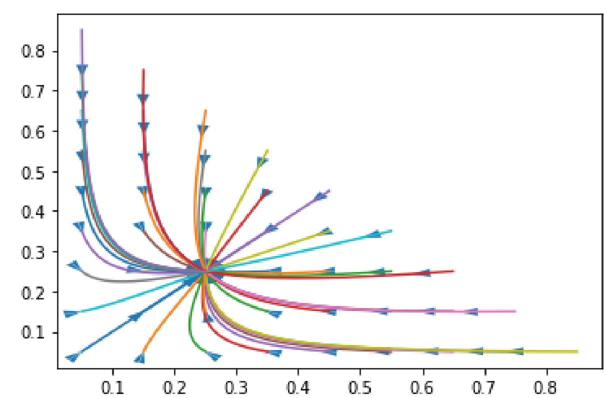
Trajectoires pour la matrice A2



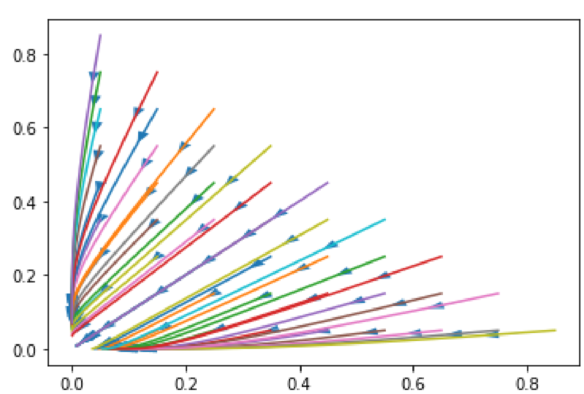
Trajectoires pour la matrice A3



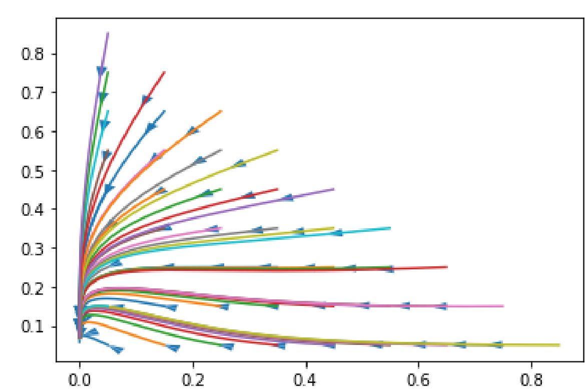
Trajectoires pour la matrice A4



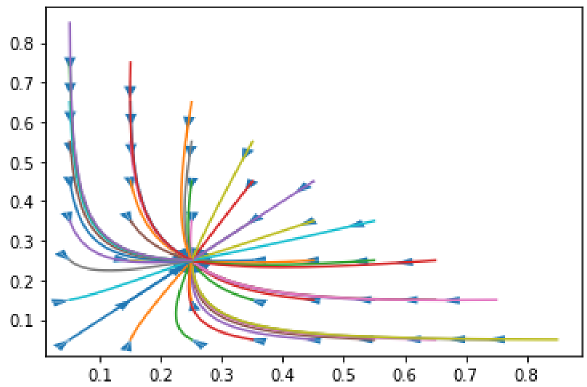
Trajectoires pour la matrice A5



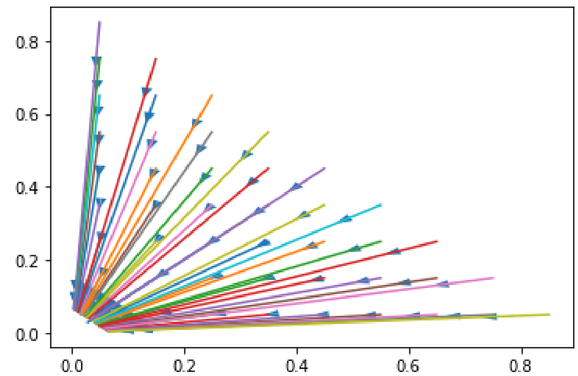
Trajectoires pour la matrice A6



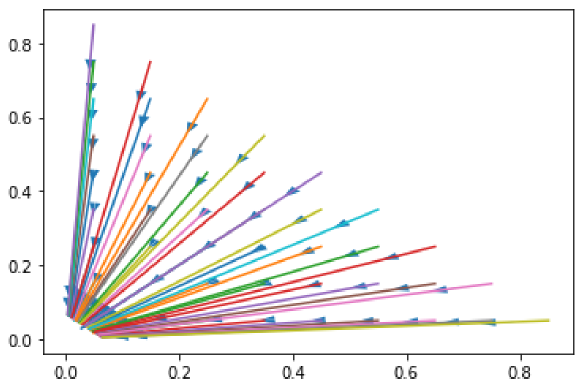
Trajectoires pour la matrice A7



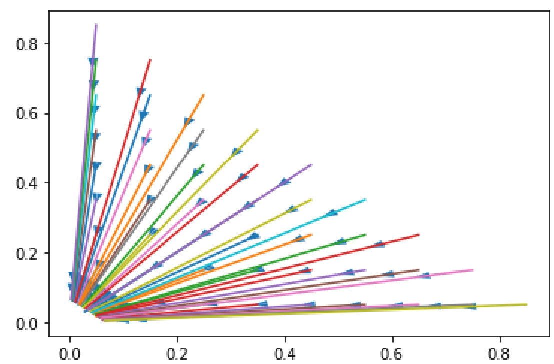
Trajectoires pour la matrice A8



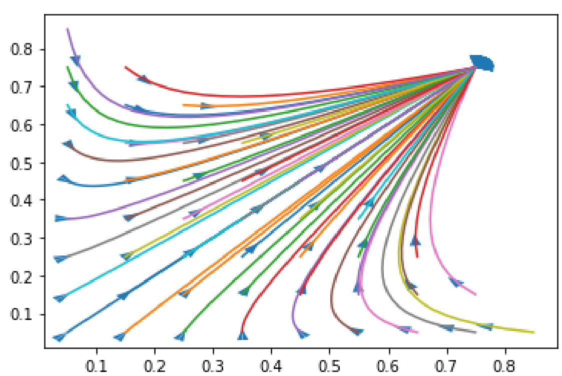
Trajectoires pour la matrice A9



Trajectoires pour la matrice A10



Trajectoires pour la matrice A11



Trajectoires pour la matrice A12