

MEC 6616 Aérodynamique Numérique – Hiver 2020  
TPP2 – Travail Pratique de Programmation 2 - Semaine 5  
Travail individuel ou en équipe de 2 personnes  
Pondération : 5% de la note globale  
À remettre le 21 février 2020  
(10 % pénalité par jour de retard)

**Équation de convection-diffusion sur maillages de triangles**

Votre travail consiste à implémenter et vérifier un code de calcul pour les problèmes de convection-diffusion en 2D sur les maillages de triangles. La méthodologie générale est basée sur la méthode des volumes finis cell-centered et le traitement du terme de convection a été présenté en classe pour les schémas Centré et Upwind.

Vous allez vérifier votre implémentation de la méthode des volumes finis et utilisant la méthode de la solution manufacturée.

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\frac{\partial \rho C_p u T}{\partial x} + \frac{\partial \rho C_p v T}{\partial y} - k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = S \quad (1)$$

où  $\rho=1$  est la masse volumique,  $C_p=1$  est chaleur spécifique,  $k$  est la conductivité thermique et  $S$  est un terme source en  $\text{W/m}^3$ .

On se donne le champ de vitesse suivant, dans un domaine de calcul carré  $x \in [-1,1] * y \in [-1,1]$ :

$$\begin{aligned} u &= (2x^2 - x^4 - 1)(y - y^3) \\ v &= -(2y^2 - y^4 - 1)(x - x^3) \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que le champ de vitesse a une divergence nulle (par exemple avec SymPy).

On se donne le champ de température suivant :

$$T(x,y) = (1 - x^2)(4 - y^2)$$

Appliquant le méthodologie MMS, on peut vérifier que le terme source  $S$  requis pour satisfaire l'équation (1) est donné par (ceci a été obtenu avec sympy) :

$$S = \text{Source}(x,y) = -k*(2*x**2 + 2*y**2 - 10) + x*y*(-6.0*x**4*y**2 + 6.0*x**4 + 12.0*x**2*y**2 - 12.0*x**2 - 6.0*y**2 + 6.0)$$

La température sera imposée à  $T(x,y)$  sur les toutes les frontières (conditions de Dirichlet).

On désire étudier la précision et la stabilité des schémas numériques pour différents ratios entre la convection et la diffusion. La diffusivité thermique  $\alpha = k/\rho C_p$  contrôle la diffusion et joue le rôle du  $\Gamma$  dans la définition du nombre de Peclet  $Pe = |u_{\max}|L/\alpha$ , où  $|u_{\max}|$  est la vitesse maximale dans le domaine et  $L=1$  est la longueur caractéristique. On pourra donc faire varier  $k$  pour contrôler le nombre de Peclet global. Le nombre de Peclet local, quand à lui, est défini en utilisant la vitesse locale et la taille locale du maillage  $\Delta x$ .

Faites varier le nombre de Peclet et comparez les résultats obtenus par les schémas Centré et Upwind. Obtenez des solutions pour différents maillages et choisissez la taille des maillages permettant de bien illustrer la convergence en maillage et de bien calculer l'ordre de convergence des deux schémas.

### Résultats attendus :

- Afficher certains des maillages utilisés
- Tracer les contours du champ de température et comparer qualitativement à la solution analytique
- Comparer vos solutions numériques à la solution analytique sur des coupes à X ou Y constant.
- En faisant varier le nombre de nœuds du maillage, déterminer l'ordre de convergence de l'approximation numérique pour les schémas Centré et Upwind en utilisant tous les points du maillage pour la mesure de la norme de l'erreur.

### DÉPOT SUR MOODLE

Déposer votre programme Python sur MOODLE avant le vendredi 21 février 23h55. Je vais exécuter le programme et je vais vérifier que :

- Votre programme fonctionne tel qu'attendu
- Votre programme est facile à comprendre
- Le programme trace les contours du champ de température pour les solutions analytiques et numériques
- Le programme compare les solutions analytiques et numériques sur des coupes X ou Y.
- Le programme calcule la norme de l'erreur et l'ordre de convergence

Une note maximale de 5% sera donnée selon la grille suivante :

Item	État				
Résultats	Incompréhensible	Environ ¼ des résultats corrects	Environ la moitié des résultats corrects	Environ ¾ des résultats corrects	La presque totalité des résultats corrects
Note	0-1.0%	1.0-2.0%	2.0-3.0%	3.0-4.0%	4.0-5.0%