№ 1.

Для каждого заданного рекуррентного соотношения найдите первые пять членов, выведите решение в замкнутой форме и проверьте его, заменив обратно на рекуррентное соотношение.

(a) $a_0 = 2, a_n = a_{n-1} + n$

$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 8, a_4 = 12, a_5 = 17$

$$a_0 = 2$$

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Домножаем каждую строчку за z в соответствующей степени

$$a_0 z^0 = 2$$

$$a_n z^n = z^n(a_{n-1} + n), n \geq 1$$

$$G(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

$$G(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

Приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = 2 + z \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$G(z) = 2 + z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$\begin{aligned}
G(z) &= 2 + zG(z) + z\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\
&= 2 + zG(z) + z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' \\
&= 2 + zG(z) + z\left(\frac{1}{1-z}\right)' \\
&= 2 + zG(z) + \frac{z}{(1-z)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{-2z^2 + 3z - 2}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} \\
&= \frac{-2}{z-1} + \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{-1}{(z-1)^3}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(z-1)^3}=\frac{d}{dz}\frac{1}{2(z-1)^2}=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}x^n=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}nx^{n-1}$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\frac{-1}{(z-1)^2}=\frac{d}{dx}\frac{-1}{1-z}=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}-z^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)z^n$$

$$\frac{-2}{z-1}=\frac{2}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}2z^n$$

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}2z^n$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}(n+2)(n+1) - (n+1) + 2 \\
&= (n+1)\left(\frac{1}{2}(n+2) - 1\right) + 2 \\
&= \frac{1}{2}n(n+1) + 2
\end{aligned}
$$

Проверим формулу:

$$a_n = a_{n-1} + n$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) + 2 = \frac{1}{2}n(n-1) + 2 + n$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1) + n$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) = n(\frac{1}{2}(n-1) + 1)$$

$$\frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(n-1) + 1$$

$$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

Формула верна.

(b) $a_0 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 2$

$a_1 = 4, a_2 = 10, a_3 = 22, a_4 = 46, a_5 = 94$

$$a_0 = 1$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 2$$

Домножаем каждую строчку за z в соответствующей степени

$$a_0 z^0 = 1$$

$$a_n z^n = z^n(2a_{n-1} + 2), n \geq 1$$

$$G(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

$$G(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n$$

Приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n$$

$$G(z) = 1 + 2z \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n$$

$$G(z) = 1 + 2z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n$$

$$G(z) = 1 + 2zG(z) + (\frac{2}{1-z} - 2)$$

$$G(z) = \frac{z+1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{2}{z-1} + \frac{-3}{2z-1}$$

$$\frac{2}{z-1} = \frac{-2}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} -2z^n$$

$$\frac{-3}{2z-1} = \frac{3}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 2^n z^n$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -2z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 2^n z^n$$

$$a_n = -2 + 3 \cdot 2^n$$

Проверим формулу:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2$$

$$-2 + 3 \cdot 2^n = 2(-2 + 3 \cdot 2^{n-1}) + 2$$

$$-2 + 3 \cdot 2^n = -4 + 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} + 2$$

$$-2 + 3 \cdot 2^n = -2 + 3 \cdot 2^n$$

Формула верна.

(c) $a_n = 3a_{n-1} + 2^n, a_0 = 5$

$a_1 = 17, a_2 = 55, a_3 = 173, a_4 = 535, a_5 = 1637$

$$a_0 = 5$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$$

Домножаем каждую строчку за z в соответствующей степени

$$a_0 z^0 = 5$$

$$a_n z^n = z^n(3a_{n-1} + 2^n), n \geq 1$$

$$G(z) = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

$$G(z) = 5 + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$$

Приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = 5 + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$$

$$G(z) = 5 + 3z\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$$

$$G(z) = 5 + 3z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$$

$$G(z) = 5 + 3zG(z) + (\frac{1}{1-2z} - 1)$$

$$G(z) = \frac{5-8z}{6z^2 - 5z + 1} = \frac{2}{2z-1} + \frac{-7}{3z-1}$$

$$\frac{2}{2z-1} = \frac{-2}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} -2 \cdot 2^n z^n$$

$$\frac{-7}{3z-1} = \frac{7}{1-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot 3^n z^n$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -2 \cdot 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot 3^n z^n$$

$$a_n = -2 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$$

Проверим формулу:

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$$

$$-2 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n = 3(-2 \cdot 2^{n-1} + 7 \cdot 3^{n-1}) + 2^n$$

$$-2 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n = 3(-2^n + 7 \cdot 3^{n-1}) + 2^n$$

$$-2 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n = -3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n + 2^n$$

$$-2 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n = 2^n(1-3) + 7 \cdot 3^n$$

$$-2 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n = -2 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$$

Формула верна.

(d) $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 17$

$a_2 = 73, a_3 = 377, a_4 = 1873, a_5 = 9377$

Составим характеристическое уравнение:

$$r^n - 4r^{n-1} - 5r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(r^2 - 4r - 5) = 0$$

$$r_0 = 0 - \text{не рассматриваем}, r_1 = 5, r_2 = -1$$

$$a_n = a \cdot 5^n + b \cdot (-1)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = a \cdot 5^0 + b \cdot (-1)^0 = a + b \\ a_1 = 17 = a \cdot 5^1 + b \cdot (-1)^1 = 5a - b \end{cases}$$

$$6a = 18 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 1 - a = -2$$

$$a_n = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$$

Проверим формулу:

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

$$3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n = 4(3 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1}) + 5(3 \cdot 5^{n-2} - 2 \cdot (-1)^{n-2})$$

$$3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n = 4 \cdot 3 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 2 \cdot (-1)^{n-2} + 3 \cdot 5^{n-1} - 5 \cdot 2 \cdot (-1)^{n-2}$$

$$3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n = 3 \cdot 5^{n-1}(4 + 1) + 2 \cdot (-1)^{n-2}(4 - 5) = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot (-1)^{n-1} = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$$

Формула верна.

(e) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, a_0 = 3, a_1 = 11$

$a_2 = 32, a_3 = 84, a_4 = 208, a_5 = 496$

Составим характеристическое уравнение:

$$r^n - 4r^{n-1} - 4r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(r^2 - 4r - 4) = 0$$

$$r_0 = 0 - \text{не рассматриваем}, r_{1,2} = 2$$

$$a_n = a \cdot 2^n + b \cdot n2^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 3 = a \cdot 2^0 + b \cdot 0 \cdot 2^0 = a \\ a_1 = 11 = a \cdot 2^1 + b \cdot 1 \cdot 2^1 = 2a + 2b \end{cases}$$

$$a = 3$$

$$b = \frac{11 - 2a}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a_n = 3 \cdot 2^n + \frac{5}{2} \cdot n2^n = 3 \cdot 2^n + 5 \cdot n2^{n-1}$$

Проверим формулу:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^n + 5 \cdot n2^{n-1} \\ &= 4(3 \cdot 2^{n-1} + 5 \cdot (n-1)2^{n-2}) - 4(3 \cdot 2^{n-2} \\ &+ 5 \cdot (n-2)2^{n-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^n + 5 \cdot n2^{n-1} \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} + 4 \cdot 5 \cdot (n-1)2^{n-2} - 4 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} \\ &- 4 \cdot 5 \cdot (n-2)2^{n-3} \end{aligned}$$

$$3 \cdot 2^n + 5 \cdot n2^{n-1} = 2 \cdot 3 \cdot 2^n + 5 \cdot (n-1)2^n - 3 \cdot 2^n - 5 \cdot (n-2)2^{n-1}$$

$$3 \cdot 2^n + 5 \cdot n2^{n-1} = 3 \cdot 2^n(2-1) + 5 \cdot 2 \cdot (n-1)2^{n-1} - 5 \cdot (n-2)2^{n-1}$$

$$3 \cdot 2^n + 5 \cdot n2^{n-1} = 3 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{n-1}(2 \cdot (n-1) - n + 2)$$

$$3 \cdot 2^n + 5 \cdot n2^{n-1} = 3 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{n-1}(2n - 2 - n + 2)$$

$$3 \cdot 2^n + 5 \cdot n2^{n-1} = 3 \cdot 2^n + 5n \cdot 2^{n-1}$$

Формула верна.

(f) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}, a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 6$

$$a_3 = 8, a_4 = 18, a_5 = 32$$

Составим характеристическое уравнение:

$$r^n - 2r^{n-1} - r^{n-2} + 2r^{n-3} = 0$$

$$r^{n-3}(r^3 - 2r^2 - r + 2) = 0$$

$$r_0 = 0 - \text{не рассматриваем}, r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = 2$$

$$a_n = a \cdot (-1)^n + b + c \cdot 2^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 3 = a \cdot (-1)^0 + b + c \cdot 2^0 = a + b + c \\ a_1 = 2 = a \cdot (-1)^1 + b + c \cdot 2^1 = -a + b + 2c \\ a_2 = 6 = a \cdot (-1)^2 + b + c \cdot 2^2 = a + b + 4c \end{cases}$$

$$a = 1, b = 1, c = 1$$

$$a_n = (-1)^n + 1 + 2^n$$

Проверим формулу:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$$

$$(-1)^n + 1 + 2^n = 2((-1)^{n-1} + 1 + 2^{n-1}) + (-1)^{n-2} + 1 + 2^{n-2} - 2((-1)^{n-3} + 1 + 2^{n-3})$$

$$(-1)^n + 1 + 2^n = 2\cdot(-1)^{n-1} + 2^n + (-1)^{n-2} + 1 - 2\cdot(-1)^{n-3}$$

$$(-1)^n + 1 + 2^n = (-1)^{n-3}(2\cdot(-1)^2 - 1 - 2) + 2^n + 1$$

$$(-1)^n + 1 + 2^n = (-1)^{n-3}(-1) + 2^n + 1$$

$$(-1)^n + 1 + 2^n = (-1)^{n-2} + 2^n + 1$$

$$(-1)^n + 1 + 2^n = (-1)^n + 2^n + 1$$

Формула верна.

№ 2

Решите следующие рекуррентные соотношения, применив мастер-теорему. Для случаев, когда мастер-теорема неприменима, используйте метод Акра–Баззи. В случаях, когда ни одна из этих двух теорем неприменима, объясните почему и решите рекуррентное соотношение, внимательно изучив дерево рекурсии.

Решения должны быть в виде $T(n) \in \Theta(...)$.

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$c_{crit} = log_b\, a$$

(a) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$$a = 2, b = 2, f(n) = n, c_{crit} = log_2\, 2 = 1$$

$f(n) = n = \Theta(n^{c_{crit}}\, log^k\, n)$ при $k = 0 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}}\, log^{k+1}\, n) = \Theta(n\, log\, n)$

(b) $T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

Используем метод Акра–Баззи:

$$f(n) = n$$

$$T(n) \in \Theta\left(n^p\left(1 + \int_1^n \frac{f(u)}{u^{p+1}} du\right)\right)$$

Ищем p:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1: \quad p = 1$$

$$T(n) \in \Theta\left(n\left(1 + \int_1^n \frac{u}{u^2} du\right)\right) =$$

$$= \Theta\big(n(1 + \log(n) - \log(1))\big)$$
$$= \Theta\big(nlogn + O(n)\big) = \Theta(nlogn)$$

(c) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$$a = 3, b = 2, f(n) = n, c_{crit} = log_2 3 > 1$$

$f(n) = n = O(n^c)$ где $c < c_{crit}$ при $c = 1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}}) = \Theta(n^{log_2 3})$

(d) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{log\, n}$

$$a = 2, b = 2, f(n) = \frac{n}{log\, n}, c_{crit} = log_2 2 = 1$$

$f(n) = \frac{n}{log\, n} = \Theta(n^{c_{crit}} log^k n)$ при $k = -1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} log\, log\, n) = \Theta(n\, log\, log\, n)$

(e) $T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 log\, n$

$$a = 6, b = 3, f(n) = n^2 log\, n, c_{crit} = log_3 6 > 1$$

$$f(n) = n^2 log\, n = \Omega(n^c) \text{ где } c > c_{crit} \text{ при } c = 2$$

regularity condition: $6\left(\frac{n}{3}\right)^2 log\left(\frac{n}{3}\right) \leq kn^2 log\, n$ где $k < 1$ при $k = \frac{3}{4}$ (выполняется для $n > 1$) $\Rightarrow T(n) \in \Theta\big(f(n)\big) = \Theta(n^2 log\, n)$

(f) $T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + n\,log\,n$

$$a = 1, b = \frac{4}{3}, f(n) = n\,log\,n\,, c_{crit} = log_{\frac{4}{3}} 1 = 0$$

$$f(n) = n\,log\,n = \ \Omega(n^{\mathrm{c}}) \text{ где } c > c_{crit} \text{ при } c = 1$$

regularity condition: $\frac{3n}{4} log\left(\frac{3n}{4}\right) \leq kn\,log\,n$ где $k < 1$ при $k = \frac{3}{4}$ (выполняется для $n > 0$) $\Rightarrow\ T(n) \in \Theta\big(f(n)\big) = \Theta(n\,log\,n)$

(g) $T(n) = T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + n$

Используем метод Акра–Баззи:

$$f(n) = n$$

$$T(n) \in \Theta\left(n^p\left(1 + \int_1^n \frac{f(u)}{u^{p+1}} du\right)\right)$$

Ищем p:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p = 1: \quad p = 1$$

$$T(n) \in \Theta\left(n\left(1 + \int\limits_1^n \frac{u}{u^2} du\right)\right) =$$
$$= \Theta\big(n(1 + \log(n) - \log(1))\big)$$
$$= \Theta\big(nlogn + O(n)\big) = \Theta(nlogn)$$

(h) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + 1$

Используем метод Акра–Баззи:

$$f(n) = 1$$

$$T(n) \in \Theta\left(n^p\left(1 + \int\limits_1^n \frac{f(u)}{u^{p+1}} du\right)\right)$$

Ищем p:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1: \quad p = \log_2\big(1 + \sqrt{5}\big) - 1$$

$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2(1+\sqrt{5})-1}\left(1 + \int\limits_1^n \frac{1}{u^{\log_2(1+\sqrt{5})}} du\right)\right) =$$
$$= \Theta\left(n^{\log_2(1+\sqrt{5})-1} \cdot \left(\frac{n^{-\log_2(1+\sqrt{5})+1} - 1}{-\log_2\big(1 + \sqrt{5}\big) + 1} + 1\right)\right)$$
$$= \Theta\left(n^{\log_2(1+\sqrt{5})-1} \cdot O(1)\right) = \Theta(n^{\log_2(1+\sqrt{5})-1})$$

(i) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{6}\right) + n$

Используем метод Акра–Баззи:

$$f(n) = n$$

$$T(n) \in \Theta\left(n^p\left(1 + \int_1^n \frac{f(u)}{u^{p+1}} du\right)\right)$$

Ищем p:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{3}\right)^p + \left(\frac{1}{6}\right)^p = 1: \quad p = 1$$

$$T(n) \in \Theta\left(n\left(1 + \int_1^n \frac{u}{u^2} du\right)\right) =$$

$$= \Theta\big(n(1 + \log(n) - \log(1))\big)$$
$$= \Theta\big(nlogn + O(n)\big) = \Theta(nlogn)$$

j) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + 2T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$

Используем метод Акра–Баззи:

$$f(n) = n$$

$$T(n) \in \Theta\left(n^p\left(1 + \int_1^n \frac{f(u)}{u^{p+1}} du\right)\right)$$

Ищем p:

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^p + 2\left(\frac{2}{3}\right)^p = 1: \quad p \sim 2{,}2$$

$$T(n) \in \Theta\left(n^{2,2}\left(1 + \int_1^n \frac{1}{u^{2,3}}\,du\right)\right)$$

$$= \Theta\left(n^{2,2} \cdot \left(\frac{-10 + 10n^{1,3}}{-13n^{1,3}} + 1\right)\right) = \Theta(n^{2,2})$$

k) $T(n) = \sqrt{2n}T\left(\sqrt{2n}\right) + \sqrt{n}$

Пусть $n = 2 \cdot 2^{2^k}, k = \log\left(\log_2 \frac{n}{2}\right), \sqrt{2n} =$

$\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2^{2^k}} = 2 \cdot 2^{2^{k-1}}, \sqrt{n} = \sqrt{2} \cdot 2^{2^{k-1}}$

$$t(k) = T\left(2 \cdot 2^{2^k}\right)$$

$$t(k) = 2 \cdot 2^{2^{k-1}} t(k-1) + \sqrt{2} \cdot 2^{k-1}$$

$$\frac{t(k)}{2^k \cdot 2^{2^k}} - \frac{t(k-1)}{2^{k-1} \cdot 2^{2^{k-1}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^k \cdot 2^{2^{k-1}}}$$

$$\frac{t(r)}{2^r 2^{2^r}} - \frac{t(0)}{2^0 \cdot 2^{2^0}} = \sum_{1 \le k \le r} \frac{\sqrt{2}}{2^k \cdot 2^{2^{k-1}}}$$

$$t(r) = 2^{r-1} \cdot 2^{2^r}(0) + \sqrt{2} \cdot 2^r \cdot 2^{2^r} \cdot \sum_{1 \le k \le r} 2^{-k} \cdot 2^{-2^{k-1}}$$

$$\sum_{1\le k\le r} 2^{-k}\cdot 2^{-2^{k-1}} \le \sum_{1\le k\le r} 2^{-k} < \sum_{k\ge 1} 2^{-k} = \frac{1}{2}$$

$$t(r) \le 2^{r-1}\cdot 2^{2^r} t(0) + \sqrt{2}\cdot 2^{r-1}\cdot 2^{2^r}$$

$$t(r) = \Theta\left(2^r\cdot 2\cdot 2^{2^r}\right)$$

$$T(n) = \Theta(2^{log_2 log_2 n}\cdot n) = \Theta(n\log n)$$

(l) $T(n) = \sqrt{2n}T\left(\sqrt{2n}\right) + n$

Пусть $n = 2\cdot 2^{2^k}, k = \log\left(\log_2\frac{n}{2}\right), \sqrt{2n} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2^{2^k}} = 2\cdot 2^{2^{k-1}}$

$$t(k) = T\left(2\cdot 2^{2^k}\right)$$

$$t(k) = 2\cdot 2^{2^{k-1}} t(k-1) + 2\cdot 2^{2^k}$$

$$\frac{t(k)}{2^k\cdot 2^{2^k}} - \frac{t(k-1)}{2^{k-1}\cdot 2^{2^{k-1}}} = \frac{2}{2^k}$$

$$\frac{t(r)}{2^r 2^{2^r}} - \frac{t(0)}{2^0\cdot 2^{2^0}} = \sum_{1\le k\le r}\frac{2}{2^k}$$

$$t(r) = 2^{r-1}\cdot 2^{2^r}(0) + \sqrt{2}\cdot 2^r\cdot 2^{2^r}\cdot \sum_{1\le k\le r}\frac{2}{2^k}$$

$$\sum_{1\le k\le r}\frac{2}{2^k} \le \sum_{1\le k\le r} 2\cdot 2^{-k} < 2\cdot\sum_{k\ge 1} 2^{-k} = 1$$

$$t(r) \leq 2^{r-1} \cdot 2^{2^r} t(0) + \sqrt{2} \cdot 2^r \cdot 2^{2^r}$$

$$t(r) = \Theta\left(2^r \cdot 2 \cdot 2^{2^r}\right)$$

$$T(n) = \Theta(2^{log_2 log_2 n} \cdot n) = \Theta(n \log n)$$

№ 3.

Рассмотрим рекуррентное соотношение $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_0 = a_1 = 2$. Решите его (т.е. найдите замкнутую формулу) и покажите, как его можно использовать для оценки значения $\sqrt{3}$ (подсказка: используйте $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$. После этого разработайте алгоритм построения рекуррентного соотношения с целыми коэффициентами и начальными условиями, который можно использовать для вычисления квадратного корня $\sqrt{k}$ из заданного целого числа k.

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_0 = a_1 = 2$$

Составим характеристическое уравнение:

$$r^n - 2r^{n-1} - 2r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(r^2 - 2r - 2) = 0$$

$$r_0 = 0 - \text{не рассматриваем}, r_1 = 1 - \sqrt{3}, r_2 = 1 + \sqrt{3}$$

$$a_n = a\cdot(1-\sqrt{3})^n + b\cdot(1+\sqrt{3})^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 2 = a\cdot(1-\sqrt{3})^0 + b\cdot(1+\sqrt{3})^0 = a + b \\ a_1 = 2 = a\cdot(1-\sqrt{3}) + b\cdot(1+\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$a = b = 1$$

$$a_n = (1 - \sqrt{3})^n + (1 + \sqrt{3})^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - \sqrt{3})^n + (1 + \sqrt{3})^n}{(1 - \sqrt{3})^{n-1} + (1 + \sqrt{3})^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{3} + \left(1 - \sqrt{3}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{3}}{1} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1$$

$$b_n = 2b_{n-1} + (k - 1)b_{n-2}, \qquad b_0 = b_1 = 2$$

$$r^n - 2r^{n-1} - (k - 1)r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(r^2 - 2r - k + 1) = 0$$

$$r_0 = 0 - \text{не рассматриваем}, r_1 = 1 - \sqrt{k}, r_2 = 1 + \sqrt{k}$$

$$b_n = a\cdot(1 - \sqrt{k})^n + b\cdot(1 + \sqrt{k})^n$$

$$\begin{cases} b_0 = 2 = a\cdot(1 - \sqrt{k})^0 + b\cdot(1 + \sqrt{k})^0 = a + b \\ b_1 = 2 = a\cdot(1 - \sqrt{k}) + b\cdot(1 + \sqrt{k}) \end{cases}$$

$$a = b = 1$$

$$b_n = (1-\sqrt{k})^n + (1+\sqrt{k})^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\sqrt{k})^n + (1+\sqrt{k})^n}{(1-\sqrt{k})^{n-1} + (1+\sqrt{k})^{n-1}} = 1+\sqrt{k}$$

$$\sqrt{k} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}} - 1$$

№ 4.

Найдите замкнутую формулу для n-го члена последовательности с производящей функцией $\frac{3x}{1-4x} + \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{3x}{1-4x} = -\frac{3}{4(4x-1)} - \frac{3}{4}$$

Тогда $\frac{-3}{-4+16x} - \frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{1-4x} + \frac{\frac{-3}{4}}{1-0x} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{3}{4}(0x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{4}(4x)^n$

Сложим

$$\frac{3x}{1-4x}+\frac{1}{1-x}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{3}{4}(0x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{4}(4x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Значит, формула n-го члена последовательности:
$-\frac{3}{4}\cdot 0^n+\frac{3}{4}\cdot 4^n+1=\ -\frac{3}{4}\cdot 0^n+3\cdot 4^{n-1}+1.$

№ 5.

Дана производящая функция $G(x)=\frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3}$,
разложите ее на дроби и найдите последовательность, которую она представляет.

$$\frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3}=-\frac{5}{x-1}-\frac{12}{(x-1)^2}-\frac{8}{(x-1)^3}$$

$$-\frac{5}{x-1}=\frac{5}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}5x^n$$

$$-\frac{12}{(x-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{-12}{1-x}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} -12x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -12nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -12(n+1)x^n$$

$$-\frac{8}{(x-1)^3} = \frac{d}{dx}\frac{4}{(x-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{4}{1-x}$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} 4x^n = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} 4nx^{n-1}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} 4n(n-1)x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+2)(n+1)x^n$$

Сложим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -12(n+1)x^n$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+2)(n+1)x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 5x^n - 12(n+1)x^n + 4(n$$
$$+ 2)(n+1)x^n$$

Последовательность задается формулой:

$a_n = 5 - 12(n+1) + 4(n+2)(n+1) = 1 + 4n^2.$

№ 6.

Числа Пелла–Лукаса определяются как $Q_0 = Q_1 = 2$ и $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ для n ≥ 2. Выведите соответствующую производящую функцию и найдите замкнутую формулу для n-го числа Пелла–Лукаса.

$$Q_0 = 2$$
$$Q_1 = 2$$
$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

Домножаем каждую строчку за z в соответствующей степени

$$Q_0 z^0 = 2z^0$$
$$Q_1 z^1 = 2z^1$$

$$Q_n z^n = z^n(2Q_{n-1} + Q_{n-2}), n \geq 2$$

$$G(z) = 2 + 2z + \sum_{n=2}^{\infty} Q_n z^n$$

$$G(z) = 2 + 2z + \sum_{n=2}^{\infty} 2Q_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-2} z^n$$

Приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = 2 + 2z + \sum_{n=2}^{\infty} 2Q_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-2} z^n$$

$$G(z) = 2 + 2z + z\sum_{n=2}^{\infty} 2Q_{n-1} z^{n-1} + z^2\sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-2} z^{n-2}$$

$$G(z) = 2 + 2z + 2z\sum_{n=1}^{\infty} Q_n z^n + z^2\sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$$

$$G(z) = 2 + 2z + 2z(G(z) - Q_0) + z^2 G(z)$$

$$G(z) = 2 + 2z + 2z(G(z) - 2) + z^2 G(z)$$

$$G(z) = \frac{2z - 2}{z^2 + 2z - 1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{z + \sqrt{2} + 1} + \frac{1 - \sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + 1}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2} - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{-1 - \sqrt{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^n z^n$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1-z}=\frac{1}{1-\frac{z}{\sqrt{2}-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(1+\sqrt{2})^n z^n$$

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\sqrt{2})^n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(1+\sqrt{2})^n z^n$$

$$Q_n=(1-\sqrt{2})^n+(1+\sqrt{2})^n$$

№ 7.

(a) $a_0=3, a_1=5, a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$

$$a_0=3$$

$$a_1=5$$

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$$

Домножаем каждую строчку за z в соответствующей степени

$$a_0z^0=3z^0$$

$$a_1z^1=5z^1$$

$$a_nz^n=z^n(2a_{n-1}-a_{n-2}), n\geq 2$$

$$G(z)=3+5z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

$$G(z)=3+5z+\sum_{n=2}^{\infty}2a_{n-1}z^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}z^n$$

Приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = 3 + 5z + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}z^n$$

$$G(z) = 3 + 5z + z\sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}z^{n-1} - z^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}z^{n-2}$$

$$G(z) = 3 + 5z + 2z\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n - z^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$G(z) = 3 + 5z + 2z(G(z) - a_0) - z^2G(z)$$

$$G(z) = 3 + 5z + 2z(G(z) - 3) - z^2G(z)$$

$$G(z) = \frac{3 - z}{z^2 - 2z + 1} = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{1 - z}$$

$$\frac{2}{(z-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{2}{1-z} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} 2z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)z^n$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$a_n = 2(n+1) + 1 = 2n + 3$$

(b) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 5, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 5$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

Домножаем каждую строчку за z в соответствующей степени

$$a_0 = 1$$

$$a_1 z = z$$

$$a_2 z^2 = 5z^2$$

$$a_n z^n = z^n(a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}), n \geq 3$$

$$G(z) = 1 + z + 5z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n$$

$$G(z) = 1 + z + 5z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} z^n - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} z^n$$

Приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = 1 + z + 5z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}z^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}z^n - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}z^n$$

$$G(z) = 1 + z + 5z^2 + z\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}z^{n-1} + z^2\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}z^{n-2} - z^3\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}z^{n-3}$$

$$G(z) = 1 + z + 5z^2 + z\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + z^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n - z^3\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$G(z) = 1 + z + 5z^2 + z(G(z) - a_0 - a_1) + z^2(G(z) - a_0) - z^3G(z)$$

$$G(z) = 1 + z + 5z^2 + z(G(z) - z - 1) + z^2(G(z) - 1) - z^3G(z)$$

$$G(z) = \frac{3z^2 + 1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{1}{1+z} + \frac{2}{-1+z} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

$$\frac{2}{(z-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{2}{1-z} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} 2z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)z^n$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

$$\frac{2}{-1+z} = \frac{-2}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} -2z^n$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} -2z^n$$

$$a_n = 2(n+1) + (-1)^n - 2 = 2n + (-1)^n$$

(c) $a_0 = 0, a_n = a_{n-1} + n$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Домножаем каждую строчку за z в соответствующей степени

$$a_0 z^0 = 0$$

$$a_n z^n = z^n(a_{n-1} + n), n \geq 1$$

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

Приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$G(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$G(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$G(z) = zG(z) + z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = zG(z) + z \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right)'$$

$$= zG(z) + z \left(\frac{1}{1-z} \right)' = zG(z) + \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$G(z) = \frac{-z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} = \frac{-1}{(z-1)^3} + \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$-\frac{1}{(z-1)^3} = \frac{d}{dz}\frac{1}{2(z-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}x^n = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}nx^{n-1}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{-1}{1-z} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}-z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}-nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)z^n$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)z^n$$

$$a_n = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) - (n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{1}{2}(n+2) - 1\right) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(d) $a_0 = 2, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$$

Домножаем каждую строчку за z в соответствующей степени

$$a_0 z^0 = 2$$

$$a_1 z^1 = z$$

$$a_n z^n = z^n(a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n), n \geq 2$$

$$G(z) = 2 + z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

$$G(z) = 2 + z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-2} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n$$

Приводим все суммы к замкнутому виду:

$$G(z) = 2 + z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-2} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n$$

$$G(z) = 2 + z$$
$$+ z\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}z^{n-1} + 2z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}z^{n-2}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n$$

$$G(z) = 2 + z + z\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n$$

$$G(z) = 2 + z + z(G(z) - 2) + 2z^2\big(G(z)\big) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n$$
$$= 2 + z + z(G(z) - 2) + 2z^2\big(G(z)\big) + (\frac{1}{1-2z}$$
$$- 1 - 2z)$$

$$G(z) = \frac{6z^2 - 5z + 2}{4z^3 - 3z + 1}$$
$$= \frac{1}{9(2z-1)} + \frac{2}{3(2z-1)^2} + \frac{13}{9(z+1)}$$

$$\frac{1}{9(2z-1)} = \frac{1}{18z-9} = \frac{1}{-9+18z} = \frac{-\frac{1}{9}}{1-2z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{9}(2z)^n$$

$$\frac{13}{9(z+1)} = \frac{13}{9z+9} = \frac{13}{9+9z} = \frac{\frac{13}{9}}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{13}{9}(-z)^n$$

$$\frac{2}{3(2z-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{\frac{1}{3}}{1-2z} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(2z)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} n 2^n\, z^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(n+1)2^{n+1}\, z^n$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{9}(2z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{13}{9}(-z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(n+1)2^{n+1} z^n$$

$$a_n = -\frac{1}{9}2^n + \frac{13}{9}(-1)^n + \frac{1}{3}(n+1)2^{n+1}$$

№ 8.

Найдите число неотрицательных целых решений диофантова уравнения 3x + 5y = 100, используя производящие функции.

$$G_1(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots + x^{99}$$

$$G_2(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots + x^{100}$$

$G(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots + x^{99})(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots + x^{100})$, ответом будет коэффициент при x^{100}

```
int count = 0;
for (int i = 0; i <= 99; i += 3) {
    for (int j = 0; j <= 100; j += 5) {
        if (i + j == 100) {
            count++;
        }
    }
}
cout << count << endl;
```

```
D:\PROJECTS\task8\cmake-build-debug\task8.exe
7

Process finished with exit code 0
```

№ 9.

Считайте, что 2n-значный номер билета является “счастливым”, если сумма его первых n цифр равна сумме его последних n цифр. Каждая цифра (включая первую!) числа может принимать значение от 0 до 9.

Например, билет с 6 цифрами 345 264 считается счастливым, потому что 3 + 4 + 5 = 2 + 6 + 4.

(a) Билет состоит из двух частей. Пусть цифры из первой части $a_1 \dots a_n$, из второй - $b_1 \dots b_n$ Заменим цифры второй его части на величину, которой им не хватает до 9: $9 - b_1 \dots 9 - b_n$, при этом количество решений не изменится, т.к. правую часть можем однозначно преобразовать обратно. Теперь сумма всех цифр билета равна 9n. Таким образом, количество счастливых билетов из 2n цифр равно количеству 2n-значных чисел с суммой цифр, равной 9n.

$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 -$ производящая функция, коэффициент при z^k которой равен количеству n-значных чисел с суммой 1. Тогда количество 2n-значных чисел с суммой k будет равно коэффициенту при x^k производящей функции $G^{2n}(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^{2n}$, т.к. он получается перебором всех возможных комбинаций из n цифр, дающих в сумме k.

Соответственно чтобы найти количество 2n-значных чисел с суммой цифр, равной 9n, нужно посмотреть на коэффициент при x^{9n}

При n = 3:

$$x^{54} + 6x^{53} + 21x^{52} + 56x^{51} + 126x^{50} + 252x^{49} + 462x^{48} + 792x^{47} + 1287x^{46} + 2002x^{45} + 2997x^{44} + 4332x^{43} + 6062x^{42} + 8232x^{41} + 10872x^{40} + 13992x^{39} + 17577x^{38} + 21582x^{37} + 25927x^{36} + 30492x^{35} + 35127x^{34} + 39662x^{33} + 43917x^{32} + 47712x^{31} + 50877x^{30} + 53262x^{29} + 54747x^{28} + 55252x^{27} + 54747x^{26} + 53262x^{25} + 50877x^{24} + 47712x^{23} + 43917x^{22} + 39662x^{21} + 35127x^{20} + 30492x^{19} + 25927x^{18} + 21582x^{17} + 17577x^{16} + 13992x^{15} + 10872x^{14} + 8232x^{13} + 6062x^{12} + 4332x^{11} + 2997x^{10} + 2002x^{9} + 1287x^{8} + 792x^{7} + 462x^{6} + 252x^{5} + 126x^{4} + 56x^{3} + 21x^{2} + 6x + 1$$

Коэффициент при x^{9n} равен 55252

При n = 4:

$$x^{72} + 8x^{71} + 36x^{70} + 120x^{69} + 330x^{68} + 792x^{67} + 1716x^{66} + 3432x^{65} + 6435x^{64} + 11440x^{63} + 19440x^{62} + 31760x^{61} + 50100x^{60} + 76560x^{59} + 113640x^{58} + 164208x^{57} + 231429x^{56} + 318648x^{55} + 429220x^{54} + 566280x^{53} + 732474x^{52} + 929672x^{51} + 1158684x^{50} + 1419000x^{49} + 1708575x^{48} + 2023680x^{47} + 2358840x^{46} + 2706880x^{45} + 3059100x^{44} + 3405600x^{43} + 3735720x^{42} + 4038560x^{41} + 4303545x^{40} + 4521000x^{39} + 4682700x^{38} + 4782360x^{37} + 4816030x^{36} + 4782360x^{35} + 4682700x^{34} + 4521000x^{33} + 4303545x^{32} + 4038560x^{31} + 3735720x^{30} + 3405600x^{29} + 3059100x^{28} + 2706880x^{27} + 2358840x^{26} + 2023680x^{25} + 1708575x^{24} + 1419000x^{23} + 1158684x^{22} + 929672x^{21} + 732474x^{20} + 566280x^{19} + 429220x^{18} + 318648x^{17} + 231429x^{16} + 164208x^{15} + 113640x^{14} + 76560x^{13} + 50100x^{12} + 31760x^{11} + 19440x^{10} + 11440x^{9} + 6435x^{8} + 3432x^{7} + 1716x^{6} + 792x^{5} + 330x^{4} + 120x^{3} + 36x^{2} + 8x + 1$$

Коэффициент при x^{9n} равен 4816030

(b) $G^{2n}(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^{2n}$

(c) $G(x) = 1 + x + \cdots + x^9 = \frac{1-x^{10}}{1-x}, G^{2n}(x) = (1 - x^{10})^{2n}(1 - x)^{-2n} =$

$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-x^{10})^k\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-2n}{j}(-x)^j\right)$. Т. к. $\binom{-2n}{k}=(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}$, то $[x^{9n}]G^{2n}(x)=$ $\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{9n}{10}\right\rfloor}(-1)^j\binom{2n}{j}\binom{11n-10j-1}{9n-10j}$