1. Уравнения Максвелла

1. Обобщение закона электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Здесь $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{B}$ – магнитная индукция, L – контур, S – поверхность контура.

$$rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Смысл: изменение магнитного поля во времени порождает вихревое электрическое поле.

2. Обобщение закона полного тока. Закон полного тока гласит о том, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру в вакууме равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром. Максвелл ввел понятие тока смещения $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, где $\vec{D}$ – электрическая индукция. Полный ток – это сумма тока проводимости и тока смещения.

$\vec{H}$ – напряженность магнитного поля.

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S}$$

$$rot\, \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Смысл: протекание тока проводимости по проводникам и изменение электрического поля во времени порождает вихревое магнитное поле.

3. Поток вектора $\vec{D}$ электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных электрических зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \int_V \rho\, dV = \sum q_i$$

$$div\,\vec{D} = \rho$$

Смысл: источником электростатического поля являются свободные электрические заряды.

4. Теорема Гаусса для магнитного поля. Поток $\vec{B}$ магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

Смысл: в природе не существует магнитных зарядов.

Система этих четырех уравнений дополняется системой материальных уравнений, которые характеризуют индивидуальные свойства заполняющей пространство материальной среды.

Материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

Источники:

https://portal.tpu.ru/SHARED/r/REDHG/academic/Dis2/Tab1/lek16.pdf

https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Максвелла

https://vinoglyadov.ucoz.ru/tema_uravnenija_maksvella-lekcija.pdf

Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и в случаях, когда существуют поверхности разрыва, на которых свойства среды или напряжённости электрических и магнитных полей меняются скачкообразно.

В дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и во времени меняются непрерывно. Поэтому дифференциальные уравнения надо дополнить граничными условиями, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред.

Здесь n_{1-2} - единичный вектор нормали к поверхности, направленный из среды 1 в среду 2, j_s - плотность поверхностных свободных токов вдоль границы, p_s - поверхностная плотность свободных зарядов.

Каждому дифференциальному уравнению 1-4 соответствует граничное условие.

1. $(E_1 - E_2) \times n_{1-2} = 0$

2. $(H_1 - H_2) \times n_{1-2} = j_s$

3. $(D_1 - D_2) \cdot n_{1-2} = -p_s$

4. $(B_1 - B_2) \cdot n_{1-2} = 0$

Источник:
https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Максвелла#Граничные_условия

Из уравнений Максвелла могут быть выведены следующие законы электромагнетизма:

1. Закон сохранения заряда.

Запишем систему двух уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} rot\,\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (1) \\ div\,\vec{D} = \rho & (2) \end{cases}$$

Применим оператор div к 1-му уравнению (дивергенция ротора равна 0):

$$div\,rot\,\vec{H} = div\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$div\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

$$div\,\vec{j} + div\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$$

Можно поменять местами порядок вычисления частной производной по времени и вычисления дивергенции

$$div\,\vec{j} = -\,div\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial\,div\,\vec{D}}{\partial t}$$

Подставим ρ вместо $div\,\vec{D}$ из уравнения (2)

$$div\,\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Это закон сохранения заряда в дифференциальной форме.

Источник: https://helpiks.org/6-65048.html

2. Закон сохранения энергии в электромагнитной волне, или теорема Пойнтинга

$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ – первое уравнение Максвелла

Умножим его скалярно на $\vec{H}$

$$\vec{H}\,rot\,\vec{E} = -\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$rot\,\vec{H} = \vec{j}\, + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ – второе уравнение Максвелла

Умножим его скалярно на $-\vec{E}$

$$-\vec{E}\,rot\,\vec{H} = -\vec{E}\vec{j}\, - \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Сложим получившиеся равенства

$\vec{H}\,rot\,\vec{E} - \vec{E}\,rot\,\vec{H}\; = -\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\vec{j}\, - \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (1)

$\vec{H}\,rot\,\vec{E} - \vec{E}\,rot\,\vec{H}\; = \mathrm{div}\big(\vec{E}\times\vec{H}\big)$ (2)

$\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\vec{H}\vec{B}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2})$ (3)

Подставим (2) и (3) в (1)

В итоге получается теорема Пойнтинга:

$$\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{H}\vec{B}}{2}+\frac{\vec{E}\vec{D}}{2}\right)-\vec{E}\vec{J}$$

Источник:

http://fn.bmstu.ru/data-physics/library/physbook/tom3/ch7/texthtml/ch7_3_text.htm

3. Закон Кулона.

Рассмотрим интегральную форму уравнения Максвелла:

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \int_V \rho\,dV = \sum q_i$$

Пусть суммарный заряд состоит из одного заряда q_1. Интеграл по сфере будет равен $D\cdot 4\pi r^2$ ($4\pi r^2$ – площадь поверхности сферы). Пространство заполнено однородным диэлектриком, значит $D=\varepsilon_0\varepsilon E$.

$$D\cdot 4\pi r^2 = q_1$$

$$\varepsilon_0\varepsilon E\cdot 4\pi r^2 = q_1$$

$$E = \frac{q_1}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon}$$

$$E = \frac{F}{q_2}$$

$$\frac{F}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon}$$

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon}$$

Источник: https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Кулона#Уравнения_Максвелла

Уравнения Максвелла записывают в дифференциальной форме, потому что они позволяют описывать электромагнитные поля в каждой точке пространства и в каждый момент времени, в то время как в интегральной форме – для всего контура или поверхности.

Основные следствия из уравнений Максвелла – закон сохранения электрического заряда, закон сохранения электромагнитной энергии и волновое уравнение. Важным следствием был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света, и существование электромагнитного поля, которое способно существовать самостоятельно, в отсутствие электрических зарядов и токов.

Источники:
https://portal.tpu.ru/SHARED/r/REDHG/academic/Dis2/Tab1/lek16.pdf

Лекция

Как выяснилось, что существуют электромагнитные волны?

Все началось с того, что Эрстед обнаружил взаимодействие электрического тока с магнитным элементом. Далее он изучил это взаимодействие и установил векторный характер магнитного поля, возбуждаемого током. Результаты его исследований были обобщены Ампером в виде уравнения для тока. Затем Фарадей и Генри открыли явление электромагнитной индукции.

Основной вклад был сделан Максвеллом. На основе работ Фарадея он сформулировал в своей работе дифференциальные уравнения. После смерти Максвелла Хевисайд и Герц привели уравнения Максвелла в современный вид.

Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле не стоит на месте, а распространяется в пространстве со скоростью света в виде поперечных волн. На том основании, что скорость электромагнитных волн равна скорости света, Максвелл предположил, что свет тоже представляет собой электромагнитные волны.

В 1888 г. Герц экспериментально доказал, что предсказанные Максвеллом электромагнитные волны существуют в действительности. Герц провел много экспериментов с электромагнитными волнами: наблюдал отражение волн, их преломление, интерференцию и поляризацию, измерил скорость волн и доказал, что она равна скорости света. Эксперименты Герца свидетельствовали в пользу теории Максвелла и опровергали другие теории электромагнетизма.

Источники:

https://etu.ru/assets/files/ru/muzejnyj-kompleks/iz-istorii-izobreteniya-i-nachalnogo-perioda-razvitiya-radiosvyazi.pdf стр 18-20

https://studme.org/312033/matematika_himiya_fizik/velikie_uravneniya

https://studme.org/312034/matematika_himiya_fizik/otkrytie_elektromagnitnyh_voln

2. В прежние времена подводящие провода от антенны часто были выполнены в виде двух параллельных проводов. По двум проводам проходят токи равной величины в противоположных направлениях. Расстояние между проводами от центра к центру равно w, а - их радиус. Пусть w достаточно велико в сравнении с а, чтобы по проводам проходил ток, равномерно распределенный по их поверхностям, и внутри проводов существовало незначительное магнитное поле.

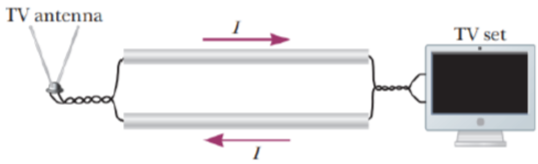


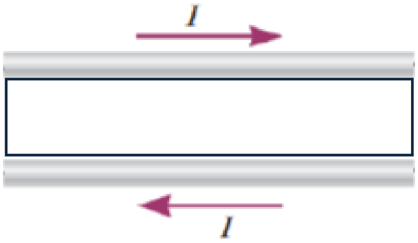
Figure P32.78

(а) Почему эта конфигурация проводников имеет индуктивность?

Проходящий по проводам ток создает магнитный поток, проходящий через контур. Магнитный поток линейно зависит от величины магнитной индукции из формулы $\Phi = BS\cos\alpha$. В свою очередь величина магнитной индукции линейно зависит от силы тока из формулы $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (формула для прямого тока). Тогда магнитный поток линейно зависит от силы тока: $\Phi = BS\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} S\cos\alpha$. Коэффициент этой зависимости и есть индуктивность контура: $L = \frac{\Psi}{I}$ (здесь $\Psi = \Phi$, если магнитный поток контура порождается только этим током). Поэтому при наличии магнитного потока, порождаемого током, проходящего через контур, будет существовать индуктивность.

(б) Что составляет контур потока для этой конфигурации?

Контуром здесь будет являться прямоугольник длины, равной длине проводов, и шириной, равной расстоянию между границами этих проводов. Линии магнитной индукции поля, порождаемого током верхнего провода, идут от нас, а током нижнего провода – к нам.



(в) Покажите, что индуктивность длины x этого провода равна

$$L = \frac{\mu_0 x}{\pi} ln\left(\frac{w-a}{a}\right)$$

Индуктивность — коэффициент пропорциональности между электрическим током, текущим в каком-либо замкнутом контуре, и полным магнитным потоком, создаваемым этим током через поверхность, краем которой является данный контур. Ψ – полный магнитный поток.

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ – формула магнитной индукции поля прямого тока вне проводника.

Посчитаем магнитный поток для одного провода:

$dS = x\,dr$, где x – длина провода, dr – малая часть расстояния между границами проводов (ширины). Эта часть проходит значения от a до $w-a$, вне границ провода, т. к. мы не учитываем магнитное поле внутри провода

$$\Phi = \int B\,dS = \int_a^{w-a} Bx\,dr = \int_a^{w-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} x\,dr = \int_a^{w-a} \frac{\mu_0 I x}{2\pi}\frac{dr}{r} =$$

$$= \ln(r)\frac{\mu_0 I x}{2\pi}\bigg|_a^{w-a} = \frac{\mu_0 I x}{2\pi}(\ln(w-a) - \ln(a)) = \frac{\mu_0 I x}{2\pi}\ln\left(\frac{w-a}{a}\right)$$

Т. к. для 2-го провода такие же вычисления, для получения общего потока умножим на 2:

$$\Psi = 2\Phi = \frac{\mu_0 I x}{\pi}\ln\left(\frac{w-a}{a}\right)$$

$$L = \frac{\frac{\mu_0 I x}{\pi} \ln\left(\frac{w-a}{a}\right)}{I} = \frac{\mu_0 x}{\pi} \ln\left(\frac{w-a}{a}\right)$$

Источник: https://www.youtube.com/watch?v=eNtPaTo8M34