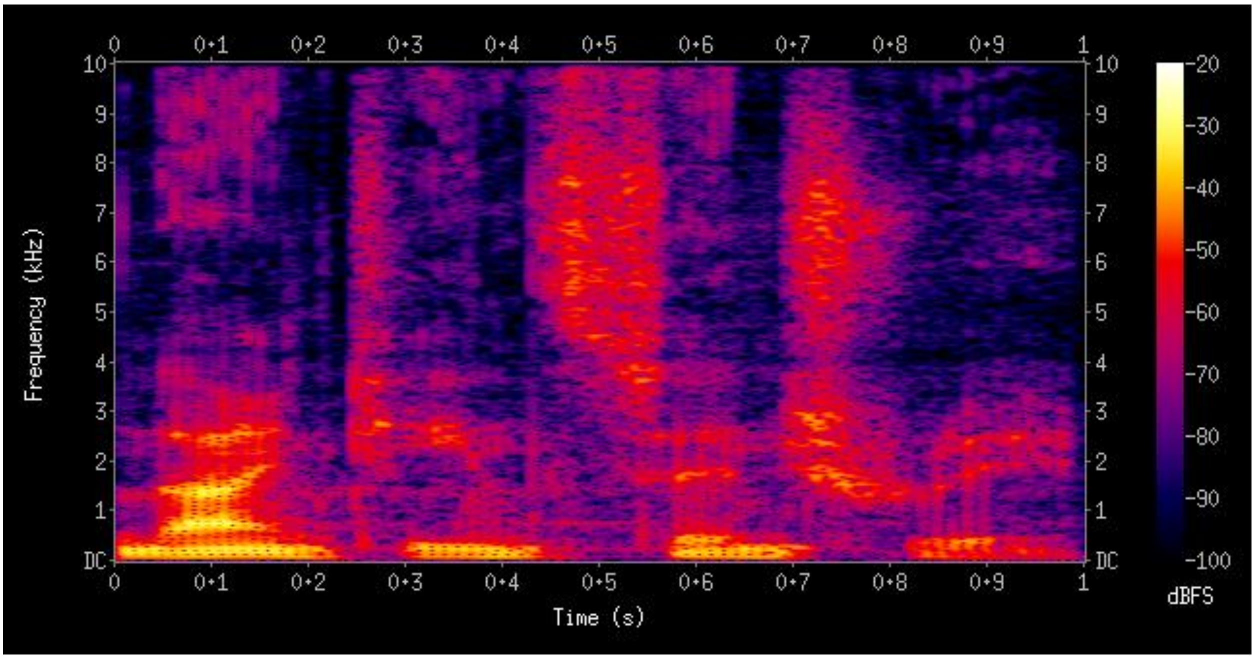
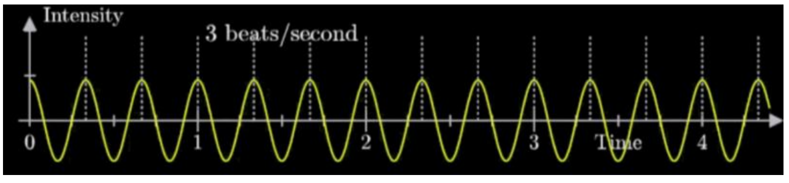
1. Какие физические принципы использует приложение Shazam

Shazam – это приложение, которое используется для идентификации песен по их фрагментам. В нем используется спектрограмма – трехмерный график, используемый для представления звука. По оси X отображается время, по оси Y – частота, по оси Z или в виде цветов – амплитуда.



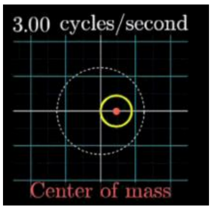
Чтобы создать такую спектрограмму, нужно получить из сложной волны набор всех чистых частот, из которых она состоит, а также амплитуду каждой из них. Это происходит с помощью преобразования Фурье.

Рассмотрим гармонический сигнал как зависимость амплитуды от времени:

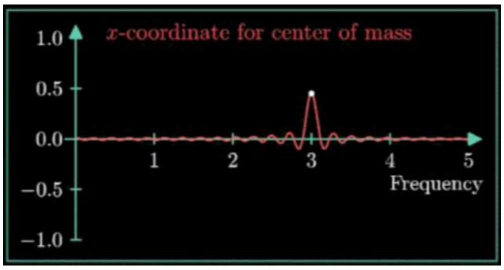


Его можно отобразить на комплексную плоскость таким образом: выберем произвольную частоту намотки (например, на рисунке она равна 3 круга в секунду, т. е. за один круг будет намотана часть графика на $\frac{1}{3}$ секунды, или одно полное колебание), и будем вращать радиус-вектор по часовой стрелке, его длина будет равна модулю значения сигнала.

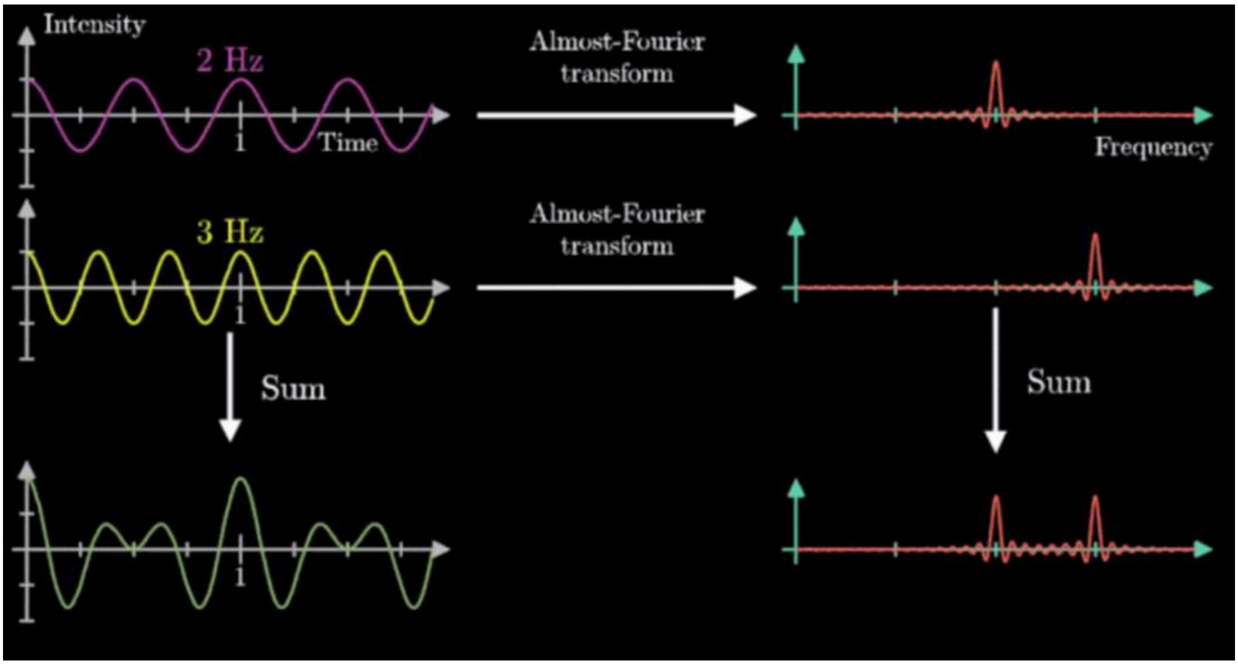
Для каждого такого отображения найдем центр масс. Например, при 3 колебаниях в секунду его координата по x будет максимальна:



Если построить график зависимости центра масс фигуры от частоты намотки, то мы увидим пик, и частота намотки в этом пике – частота исходного сигнала (3 Гц):



Если проделать эти действия с суммой сигналов, то на таком графике мы будем наблюдать несколько пиков, которые совпадают с частотами сложенных сигналов:



Формула Эйлера для комплексного числа

$$e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i\, sin(\varphi)$$

$g(t)$ – исходный сигнал

Описание намотки: $g(t)e^{-2\pi i f t}$

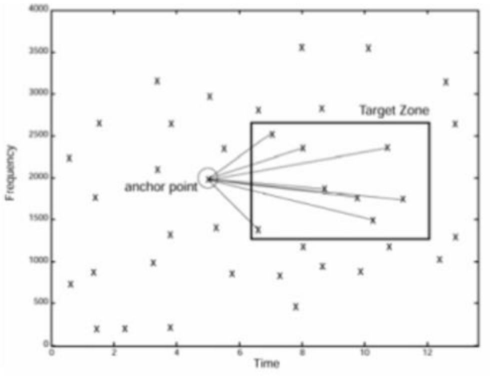
Центр масс: $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(t)e^{-2\pi i f t}$

При стремлении N к бесконечности получим интеграл

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} g(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

Можем отбросить коэффициент, т. к. он не отражает поведение центра масс. Полученное выражение является преобразованием Фурье.

Чтобы компьютер быстрее обрабатывал информацию, Shazam преобразует спектрограмму в карту, называемую отпечатком пальца, где каждая точка представляет наибольшую амплитуду в данный момент времени.



Таким образом, график уменьшен с 3D до 2D и точек становится гораздо меньше. Затем отпечаток короткой части песни преобразуется в хэш и сравнивается с каждой частью каждой песни во всей базе данных Shazam.

Источники:

https://www.theoverclocker.com/how-shazam-works/#:~:text=Shazam%20converts%20the%20spectrogram%20into,are%20unique%20to%20each%20song.

https://deep-review.com/articles/shazam-and-music-recognition/

https://proglib.io/p/fourier-transform

2. Покажите, что уравнение сферической волны является решением волнового уравнения

Сферическая волна – распространяется во всех трех измерениях.

Введем сферически симметричную функцию, т. е. функцию, зависящую только от расстояния r от начала координат. Обозначим ее $\psi(r)$, где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Найдем лапласиан ψ:

Первая производная по x:

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x} = \psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}$$

Вторая производная по x:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\right)'_x = \psi''(r)\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \psi'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \psi''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \psi'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)'_x = \left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right)'_x = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \left(\frac{x}{r}\right)'_x = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)'_x = \frac{x' \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \cdot (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})'}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2}$$
$$= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

Подставим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \psi'(r)\frac{r^2 - x^2}{r^3} = \psi''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \psi''(r)\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \psi''(r)\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

Лапласиан равен сумме этих трех производных

$$\Delta\psi = \psi''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right) + \psi''(r)\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)$$
$$+ \psi''(r)\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)$$
$$= \psi''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}+1-\frac{y^2}{r^2}+1-\frac{z^2}{r^2}\right)$$
$$= \psi''(r)\frac{r^2}{r^2} + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(3-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)$$
$$= \psi''(r) + \psi'(r)\frac{1}{r}\left(3-\frac{r^2}{r^2}\right) = \psi''(r) + \psi'(r)\frac{1}{r}(3-1)$$
$$= \psi''(r) + \psi'(r)\frac{2}{r}$$

Запишем это как $\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi)$

Волновое уравнение:

$$\Delta\psi(r,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(r,t) = 0$$

Подставим

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0$$

Домножим на r

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = 0$$

Функция $r\psi$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению. Данное уравнение имеет решение в виде волны $f = f(r - vt)$.

Значит, сферические волны обязаны иметь вид

$r\psi = f(r - vt)$, или $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$

Делим на r

$$\psi = \frac{f\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}$$

Пусть $f\left(t-\frac{r}{v}\right) = A\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)$. Тогда $\psi = \frac{A\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}$ – уравнение сферической волны, и оно является решением волнового уравнения.

Источники:

https://scask.ru/a_lect_f_phis6.php?id=30

https://www.chem-astu.ru/chair/study/physics-part1/?p=137

https://mathprofi.com/uploads/files/2298_f_41_lekcii-po-kursu-optika-i-kvantovaya-mehanika.pdf?key=46e8f291db7e6ac5a7ad05a553cb7ca5 стр 11

3. Что называют спектральным анализом сигналов?

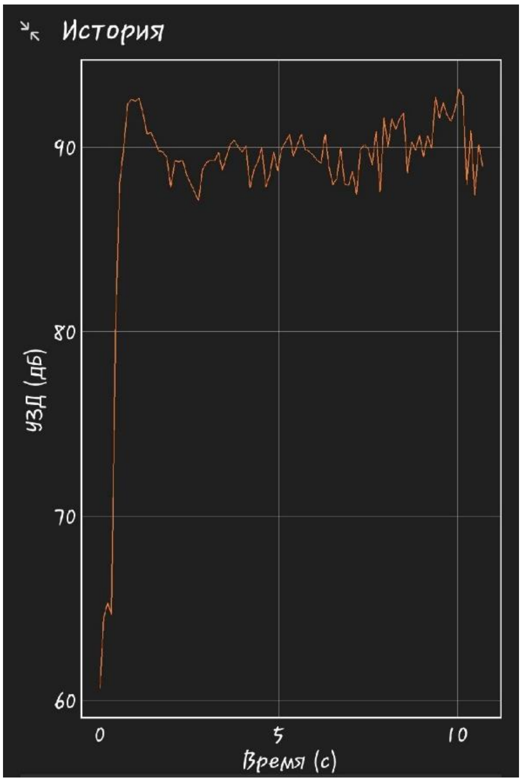
Спектральный анализ – это определение спектра сигнала по его известной функции от времени. Спектр сигнала – это функция частоты $F(\omega)$.

Сигнал можно представить как сумму гармонических колебаний. Это представление называют спектральным разложением Фурье. Подробнее рассмотрела разложение в п. 1

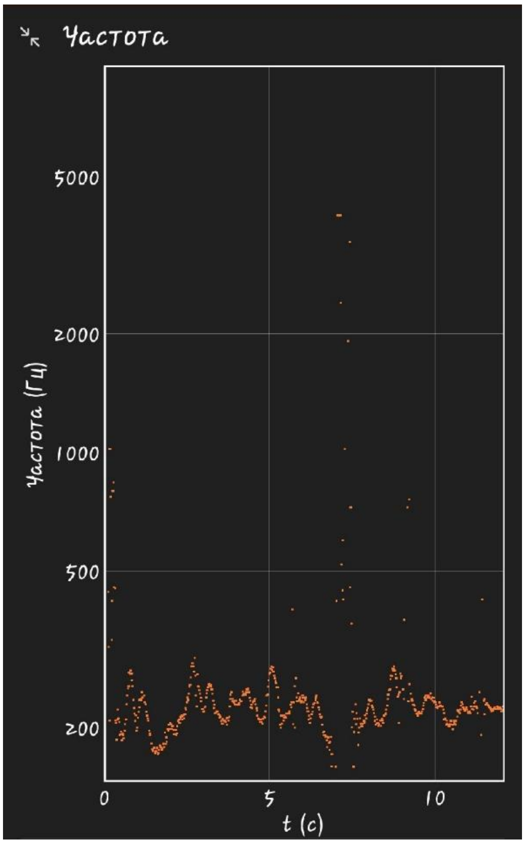
Источники: https://kpfu.ru/staff_files/F1700343876/SPEKTRY_02.01.15.pdf

4. Запишите свой голос, оцените амплитуду, частоту, проанализируйте спектр. Можно использовать самостоятельно разработанные или готовые инструменты, например Phyfox

Амплитуда: максимальная равна 93 дБ



Частота: примерно от 150 до 300 Гц



Спектрограмма