1. Докажите, что при отражении волны от оптически более плотной среды ее фаза меняется на π

Рассмотрим векторы напряженности электрического поля E, E', E''и магнитного поля H, H', H'' в падающей, отраженной и преломленной волнах соответственно

$H = n_1 E \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, $H' = -n_1 E' \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, $H'' = n_2 E'' \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, т.к. проекции в отраженной волне имеют противоположные знаки

$n_2 = n_1 \frac{sin\,\theta_1}{sin\,\theta_2}$ – закон преломления

Граничные условия для тангенциальных компонент

$$E_\tau + E'_\tau = E''_\tau \ (1)$$

$$H_\tau + H'_\tau = H''_\tau$$

$$n_1 E_\tau \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} - n_1 E'_\tau \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = n_2 E''_\tau \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

$$n_1 E_\tau - n_1 E'_\tau = n_2 E''_\tau$$

$$E_\tau - E'_\tau = \frac{n_2 E''_\tau}{n_1} \ (2)$$

Решив систему уравнений 1 и 2, получим

$$E' \approx E \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$E'' \approx E \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

В случае, когда $n_1 < n_2$, дробь в выражении для E' отрицательна, т. е. направление вектора E' противоположно направлению вектора E, и колебания вектора E' происходят в противофазе с колебаниями вектора E. Это значит, что при отражении волны от оптически более плотной среды ее фаза изменяется скачком на π

Источники:

https://moodle.yspu.org/pluginfile.php/3404/mod_label/intro/Лекции%20по%20оптике.pdf
стр 24

2. Получите закон преломления света из: а) граничных условий б) принципа Ферма

Закон преломления света:

Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления постоянно для данной пары сред и равно показателю преломления второй среды относительно первой

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

а) Вывод из граничных условий

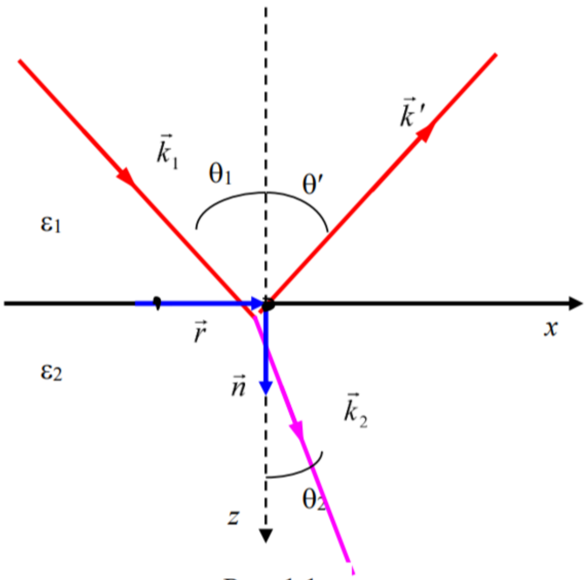

Рис. 1.1.

Граничное условие:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

Т.е. тангенциальная компонента вектора напряженности электрического поля по обе стороны границы раздела одинаковая

Падающая волна в комплексной форме записи:

$$\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E_{10}} e^{i(\overrightarrow{k_1}\vec{r} - \omega_1 t)}$$

Отраженная волна:

$$\overrightarrow{E'} = \overrightarrow{E'_0} e^{i(\overrightarrow{k'}\vec{r} - \omega' t)}$$

Прошедшая волна:

$$\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_{20}} e^{i(\overrightarrow{k_2}\vec{r} - \omega_2 t)}$$

k – волновое число, запишем как

$$k_1 = \frac{\omega_1}{v_1}$$

$$k' = \frac{\omega'}{v'}$$

$$k_2 = \frac{\omega_2}{v_2}$$

где v – скорость распространения света

Запишем граничное условие для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля

$$E_{10\tau} e^{i\left(\overrightarrow{k_1}\vec{r} - \omega_1 t\right)} + E'_{0\tau} e^{i\left(\overrightarrow{k'}\vec{r} - \omega' t\right)} = E_{20\tau} e^{i\left(\overrightarrow{k_2}\vec{r} - \omega_2 t\right)}$$

Равенство должно выполняться тождественно в произвольных точках $\vec{r}$ и в произвольные моменты времени t, причем t и r независимы друг от друга. При этом показатели экспонент должны быть одинаковыми, поэтому:

$$\omega_1 t = \omega' t = \omega_2 t$$

$$\overrightarrow{k_1}\vec{r} = \overrightarrow{k'}\vec{r} = \overrightarrow{k_2}\vec{r}$$

Получаем, что частоты отраженной и преломленной волн равны частоте падающей волны

$$\omega_1 = \omega' = \omega_2$$

Из рисунка косинусы углов между векторами равны соответственно синусам углов θ_1, θ' и θ_2. Поэтому раскрываем скалярное произведение так

$$k_1 r \sin\theta_1 = k' r \sin\theta' = k_2 r \sin\theta_2$$

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$$

Т. к. $\omega_1 = \omega_2$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{\omega_2}{v_2}}{\frac{\omega_1}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Источник:
https://physics.spbstu.ru/userfiles/files/chapter3_electro_magneto_waves__less.pdf

б) Вывод из принципа Ферма

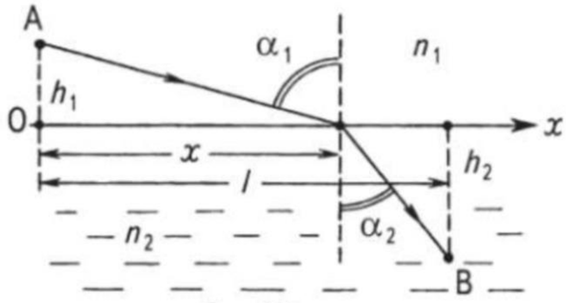

Рис. 5.3

Пусть имеются две среды с показателями преломления n_1 и n_2, разделенные плоской границей раздела

Согласно прицнипу Ферма луч пройдет так, чтобы время распространения было минимальным

Посчитаем время как сумму расстояния, пройденного в среде n_1, деленного на скорость распространения в среде n_1, и расстояния, пройденного в среде n_2, деленного на скорость распространения в среде n_2

$$t(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

Найдем минимум функции, для этого приравняем производную к нулю

$$t' = \frac{2x}{2v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} + \frac{-2l + 2x}{2v_2\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}} = 0$$

$$\frac{2x}{2v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2l - 2x}{2v_2\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{l - x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}}$$

Из первого треугольника:

$$\sin\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}$$

Из второго треугольника:

$$\sin\alpha_2 = \frac{l - x}{\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}}$$

Подставим в полученное выражение

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

Таким образом

$$\frac{sin\,\alpha_1}{sin\,\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Источники:
https://studme.org/375552/matematika_himiya_fizik/geometricheskaya_volnovaya_optika#146

https://studme.org/375553/matematika_himiya_fizik/vyvod_zakonov_prelomleniya_otrazheniya_printsipa_ferma#731

3. Для определения показателя преломления стеклянной пластины можно использовать интерферометр Майкельсона. Стеклянная пластина (толщиной t) помещается на платформу, которая может вращаться. Пластина помещается на пути света между светоделителем и неподвижным или подвижным зеркалом таким образом, чтобы ее толщина была в направлении лазерного луча. Платформа поворачивается на различные углы и подсчитывается количество смещенных полос. Можно показать, что если N - это число полос, смещенных при изменении угла поворота на θ, то показатель преломления равен

$$n = \frac{(2t - N\lambda)(1 - \cos\theta)}{2t(1 - \cos\theta) - N\lambda}$$

где t - толщина пластины. В прилагаемой таблице приведены данные, собранные студентом при определении показателя преломления прозрачной пластины с помощью интерферометра Майкельсона.

N	25	50	75	100	125	150
$\theta(degree)$	5,5	6,9	8,6	10,0	11,3	12,5

В эксперименте $\lambda = 632{,}8$ нм и $t = 4{,}0$ мм. Определите n для каждого θ и найдите среднее значение n.

$$\lambda = 632{,}8\text{ нм} = 6{,}328 \cdot 10^{-7}\text{м}$$

$$t = 4{,}0\text{ мм} = 4 \cdot 10^{-3}\text{м}$$

$$n_1 = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 25 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7})(1 - \cos 5{,}5°)}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}(1 - \cos 5{,}5°) - 25 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7}} = 1{,}75$$

$$n_2 = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 50 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7})(1 - \cos 6{,}9°)}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}(1 - \cos 6{,}9°) - 50 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7}} = 2{,}19$$

$$n_3 = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 75 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7})(1 - \cos 8{,}6°)}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}(1 - \cos 8{,}6°) - 75 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7}} = 2{,}10$$

$$n_4 = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 100 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7})(1 - \cos 10°)}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}(1 - \cos 10°) - 100 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7}} = 2{,}07$$

$$n_5 = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 125 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7})(1 - \cos 11{,}3°)}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}(1 - \cos 11{,}3°) - 125 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7}} = 2{,}02$$

$$n_6 = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 150 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7})(1 - \cos 12{,}5°)}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}(1 - \cos 12{,}5°) - 150 \cdot 6{,}328 \cdot 10^{-7}} = 1{,}98$$

$$n_{\text{ср}} = \frac{1{,}75 + 2{,}19 + 2{,}10 + 2{,}07 + 2{,}02 + 1{,}98}{6} = 2{,}02$$