№ 1.

Одной из классических комбинаторных задач является подсчет количества способов размещения n мячей в k коробках. Существует как минимум 12 вариаций этой задачи: четыре случая $(a - d)$ с тремя различными ограничениями $(1 - 3)$. Для каждой задачи (случай + ограничение) выведите соответствующую общую формулу.

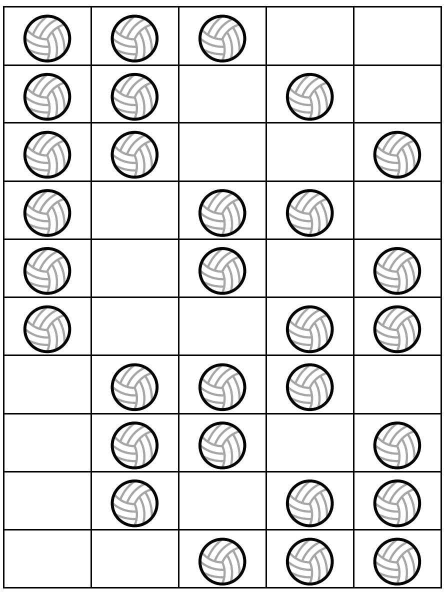
Кроме того, выберите несколько репрезентативных значений для n и k, и, используя полученные формулы, найдите количество размещений. Визуализируйте несколько возможных вариантов размещения для выбранных n и k.

а) Все мячи одинаковые, коробки разные.

1) В каждой коробке не более 1 мяча.

Очевидно, это возможно, только если $n \leq k$ (иначе как минимум в одной коробке будет ≥ 2 мяча). У каждой коробки тогда есть 2 состояния: в ней лежит или не лежит мяч, и n коробок будет занято мячами. Нужно посчитать количество способов выбрать n занятых коробок. Это будет равно C_k^n.

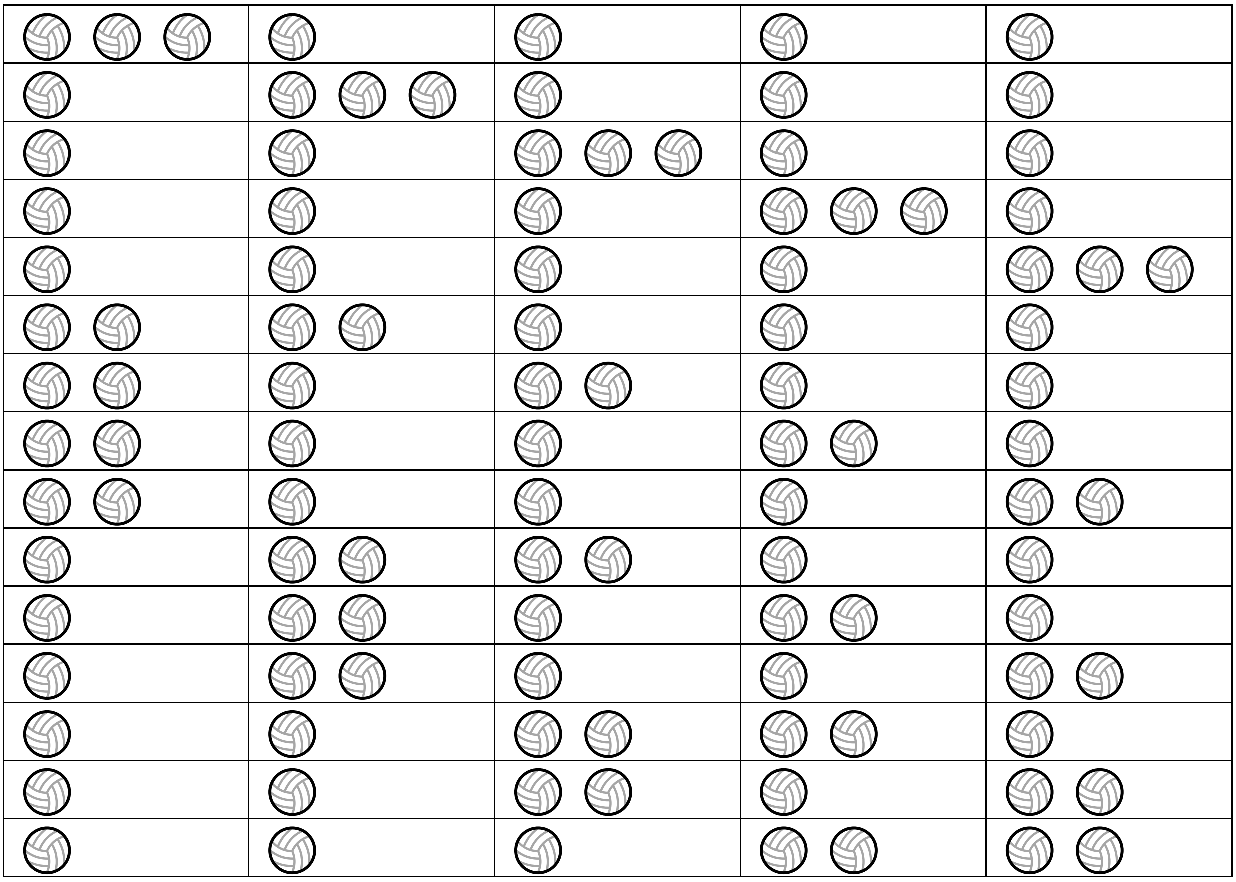
Пример для $n = 3$, $k = 5$: $C_5^3 = 10$



2) В каждой коробке не менее 1 мяча.

Очевидно, это возможно, только если $n \geq k$. Можно свести эту задачу к задаче о количестве способов расставить $k-1$ перегородок между мячами, выложенными в ряд, где перегородки можно ставить после первого и перед последним мячом, и не более одной перегородки подряд. Между началом и первой перегородкой, между перегородками в середине и между последней перегородкой и концом – соответствующие коробки с мячами. Это будет равно C_{n-1}^{k-1}. (т. к. можно поставить перегородку только между мячами, то количество возможных мест равно $n-1$).

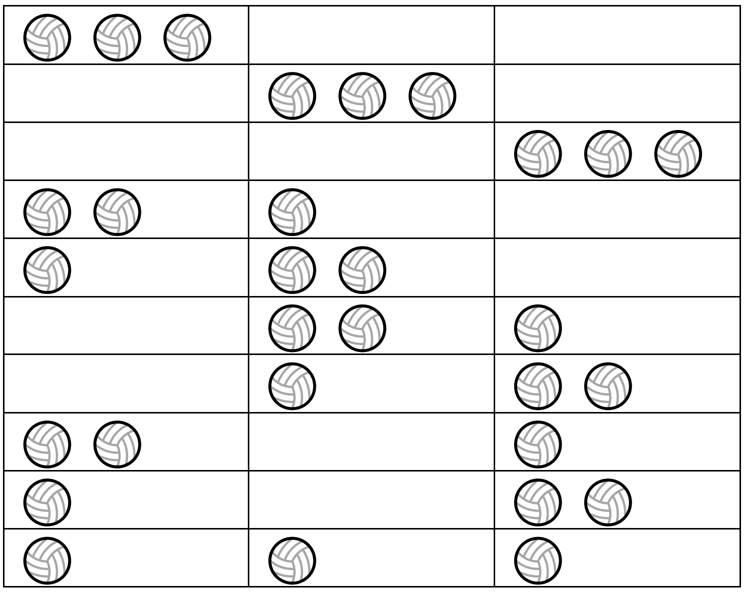
Пример для n = 7, k = 5: $C_6^4 = 15$



3) Любое количество мячей в коробке.

Теперь перегородки можно ставить где угодно – в начале, в конце, несколько раз подряд, но их количество равно $k-1$. Соответственно, получится какая-то последовательность из $k-1$ перегородок и n мячей. Всего объектов $n+k-1$, и есть 2 состояния – объект является перегородкой или мячом. Значит есть C_{n+k-1}^{k-1} способов выбрать из всех объектов те, которые будут являться перегородками.

Пример для n = 3, k = 3: $C_5^2 = 10$



b) Все мячи разные, коробки одинаковые.

1) В каждой коробке не более 1 мяча.

Очевидно, это возможно, только если $n \le k$ (иначе как минимум в одной коробке будет $\geq$ 2 мяча). Каждому мячу будет соответствовать какая-то коробка. Т. к. коробки неразличимы и неважно, какая коробка какому мячу соответствует, то всего один способ разместить эти мячи в коробки.

2) В каждой коробке не менее 1 мяча.

Очевидно, это возможно, только если $n \ge k$. Пусть мячи соответствуют числам от 1 до n, а коробки – подмножествам множества таких чисел. Значит, нужно посчитать количество способов разделить множество чисел от 1 до n на k непустых непересекающихся подмножеств.

Такое количество равно числу Стирлинга II рода из n по k ($\left\{ n \atop k \right\}$).

Пример для n = 4, k = 2: $\left\{ 4 \atop 2 \right\} = 7$

$$\{1,2,3\}\{4\}$$

$$\{1,2,4\}\{3\}$$

$$\{1,3,4\}\{2\}$$

$$\{2,3,4\}\{1\}$$

$$\{1,2\}\{3,4\}$$

$$\{1,3\}\{2,4\}$$

$$\{1,4\}\{2,3\}$$

3) Любое количество мячей в коробке.

Теперь подмножества могут быть пустыми. Тогда нужно разбить числа от 1 до n, соответствующие мячам, на i подмножеств (коробок), где $0 \le i \le k$.

Тогда всего способов $\sum_{i=0}^{k} \left\{ n \atop i \right\}$.

Пример для n = 4, k = 2: $\left\{{4 \atop 0}\right\} + \left\{{4 \atop 1}\right\} + \left\{{4 \atop 2}\right\} = 8$

$$\{1,2,3,4\}\{\}$$

$$\{1,2,3\}\{4\}$$

$$\{1,2,4\}\{3\}$$

$$\{1,3,4\}\{2\}$$

$$\{2,3,4\}\{1\}$$

$$\{1,2\}\{3,4\}$$

$$\{1,3\}\{2,4\}$$

$$\{1,4\}\{2,3\}$$

c) Все мячи разные, коробки разные.

1) В каждой коробке не более 1 мяча.

Очевидно, это возможно, только если $n \leq k$ (иначе как минимум в одной коробке будет ≥ 2 мяча). Каждому мячу будет соответствовать какая-то определенная (различимая) коробка. Сначала выберем одну коробку для первого мяча из k коробок, затем для второго мяча из k – 1 коробок, для третьего из оставшихся k – 2 и т. д. Всего будет $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k - \ (n-1)) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k - \ n + 1) = \frac{k!}{(k-n)!} = P(k,n)$ способов.

Пример для n = 2, k = 3: $P(3,2) = 6$

1	2	
2	1	
	1	2
	2	1
1		2
2		1

2) В каждой коробке не менее 1 мяча.

Очевидно, это возможно, только если $n \geq k$. Решая задачу для k одинаковых коробок, получим $\left\{ {n \atop k} \right\}$ вариантов (b(2)). Теперь остается сделать коробки различимыми – например, пронумеровать их. Всего $k!$ таких вариантов. Значит, общее количество способов равно $k! \left\{ {n \atop k} \right\}$.

Пример для n = 3, k = 2: $k! \left\{ {n \atop k} \right\} = 2 \cdot 3 = 6$

1 3	2
1 2	3
2 3	1
2	1 3
3	1 2
1	2 3

3) Любое количество мячей в коробке.

Для каждого из n мячей есть ровно k способов выбрать коробку. Ограничений никаких нет, поэтому количество вариантов будет k^n.

Пример для n = 3, k = 2: $k^n = 2^3 = 8$

1 3	2
1 2	3
2 3	1
2	1 3
3	1 2
1	2 3
1 2 3	
	1 2 3

d) Все мячи одинаковые, коробки одинаковые.

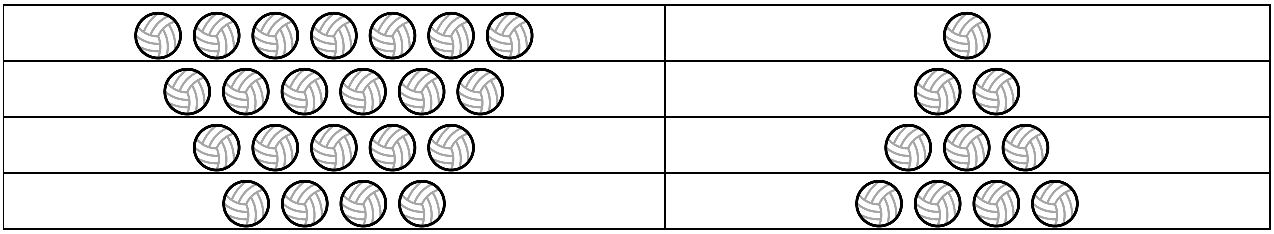
1) В каждой коробке не более 1 мяча.

Очевидно, это возможно, только если $n \le k$ (иначе как минимум в одной коробке будет ≥ 2 мяча). Существует всего один способ – достаточно положить каждый мяч в отдельную коробку.

2) В каждой коробке не менее 1 мяча.

Очевидно, это возможно, только если $n \geq k$. Нам нужно разделить число мячей n на k положительных частей (количества мячей с коробках). При этом можно упорядочить эти части по убыванию, т. к. нам не важно, в какую именно коробку и какой именно мяч будет положен, и при этом условии посчитать количество вариантов. Такое количество можно посчитать с помощью функции разбиения ($p_k(n)$).

Пример для n = 8, k = 2: $p_k(n) = 4$

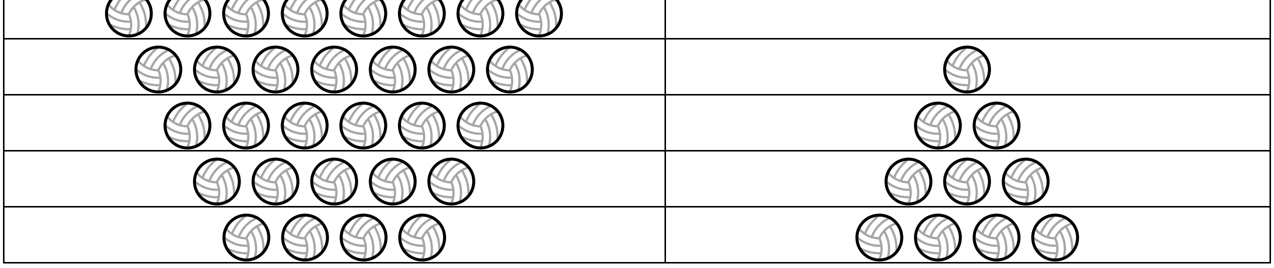


3) Любое количество мячей в коробке.

Теперь части могут быть равны 0. Тогда нужно разделить число мячей n на i положительных частей (коробок), где $0 \le i \le k$.

Тогда всего способов $\sum_{i=0}^{k} p_i(n)$. Это выражение можно упростить – если добавить к каждой из k коробок по одному шару, то получится разбиение n+k шаров на k непустых частей, которое можно однозначно сопоставить с каким-то разбиением из суммы, просто убрав эти шары обратно. Тогда $\sum_{i=0}^{k} p_i(n) = p_k(n+k)$.

Пример для n = 8, k = 2: $p_2(10) = 5$



№2.

Сколько различных паролей можно сформировать с использованием следующих правил?
∗ Пароль должен состоять ровно из 8 символов.
∗ Пароль должен состоять только из латинских букв (a-z, A-Z) и арабских цифр (0-9).
∗ Пароль должен содержать как минимум 2 цифры (0-9) и как минимум 1 заглавную букву (A-Z).
∗ Каждый символ можно использовать только один раз в пароле.
Как долго потребуется, чтобы взломать такой пароль?

Заглавных латинских букв: 26
Прописных латинских букв: 26
Арабских цифр: 10
Всего используемых символов: 62
Символов в пароле: 8

Количество паролей, где все символы различны: $62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 = 136325893334400$
Количество паролей, где все символы различны и нет цифр: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 = 30342338208000$.

Количество паролей, где все символы различны и ровно 1 цифра: $C_8^1 \cdot 10 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = 53941934592000$.

Количество паролей, где нет заглавных букв: $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 1220096908800$.

Количество паролей, где нет заглавных букв и нет цифр: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 62990928000$.

Количество паролей, где нет заглавных букв и есть ровно 1 цифра: $C_8^1 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 = 265224960000$.

Вычтем из количества всех паролей, где все символы различны, 3 числа: пароли, где нет цифр, где ровно 1 цифра и где нет заглавных букв (везде все символы различны). Т. к. множества $(1 \cup 2)$ и 3 пересекаются, нужно еще прибавить их пересечение – количество, где нет заглавных букв и нет цифр + количество, где нет заглавных букв и есть ровно 1 цифра. Получаем: 136325893334400 –

30342338208000 – 53941934592000 - 1220096908800 + 62990928000 + 265224960000 = 51149739513600 паролей.

№3.

Найдите количество различных 5-значных чисел, используя цифры 1-9 при заданных ограничениях. Для каждого случая предоставьте примеры чисел, которые соответствуют и не соответствуют ограничениям, и получите общую формулу, которую можно применять к другим значениям n (общее количество доступных цифр) и k (количество цифр в числе). Выразите формулу, используя стандартные комбинаторные термины, такие как k-сочетания C_n^k и k-размещения P(n, k).

(a) Цифры могут повторяться.

Всего k позиций, на каждой позиции может находиться любая из n цифр. Значит, количество таких чисел n^k.

Нет ограничений, подходят любые 5-значные числа из цифр 1-9.

Количество таких чисел: $9^5 = 59049$

(b) Цифры не могут повторяться.

Всего k позиций, на 1-ой позиции может находиться любая из n цифр, на 2-ой – любая из оставшихся n – 1 цифр и т. д., на k-ой позиции – любая из оставшихся n – (k – 1) = n – k + 1 цифр. Значит, всего чисел $n \cdot n - 1 \cdot \ldots \cdot n - k + 1 = \frac{n!}{(n-k)!} = P(n, k)$.

Соответствует: 16235

Не соответствует: 18314

Количество таких чисел: $\mathrm{P}(9, 5) = 15120$

(c) Цифры могут повторяться и должны быть записаны в неубывающем порядке.

Будем обозначать любую цифру точкой. Для каждой цифры от 1 до n по порядку напишем столько точек, сколько раз эта цифра встречается в числе, а различные цифры будем отделять друг от друга перегородками. Ясно, что любой такой последовательности соответствует ровно одно число и наоборот. Мы получим столько точек, сколько цифр в числе (k), а перегородок на одну меньше, чем количество доступных цифр (n). Значит, нужно посчитать, сколькими способами можно переставить k точек и n - 1 перегородок. Если бы точки и перегородки были различны, то число перестановок равнялось бы (k + n – 1)!, но т. к. отдельно переставляя между собой точки k! способами и перегородки (n – 1)! способами ничего не изменится, то P(k + n – 1, k, n – 1) = $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ = $\frac{(k+n-1)!}{k!(k+n-1-k)!} = C_{n+k-1}^{k}$

Соответствует: 11235

Не соответствует: 18314

Количество таких чисел: $C_{13}^{5} = 1287$

(d) Цифры не могут повторяться и должны быть записаны в строго возрастающем порядке.

Для любого сочетания различных цифр ровно один способ расставить их в порядке возрастания. Значит, нужно найти количество сочетаний из n возможных цифр по k = C_n^k.

Соответствует: 12345

Не соответствует: 19873

Количество таких чисел: $C_9^5 = 126$

(e) Цифры могут повторяться и число должно быть кратно 3 или 5.

Посчитаем количество чисел, кратных 3

Пусть K_0 – множество цифр, которые при делении на 3 дают остаток 0 (K_1, K_2 аналогично), k_i – элемент такого множества.

$|K_0| = |K_1| = |K_2| = 3$

Возможные сочетания: $k_1k_1k_1k_1k_2$: $C_5^4 \cdot C_1^1 = 5 \cdot 1 = 5$ вариантов

$k_1k_1k_1k_3k_3$: $C_5^3 \cdot C_2^2 = 10 \cdot 1 = 10$ вариантов

$k_1k_1k_2k_2k_3$: $C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = 10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$ вариантов

$k_1k_2k_3k_3k_3$: $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = 5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$ вариантов

$k_1k_2k_2k_2k_2$: $C_5^1 \cdot C_4^4 = 5 \cdot 1 = 5$ вариантов

$k_2k_2k_2k_3k_3$: $C_5^3 \cdot C_2^2 = 10 \cdot 1 = 10$ вариантов

$k_3k_3k_3k_3k_3$: $C_5^5 = 1$ вариант

Сложим все варианты и умножим на 3^5, потому что для каждого варианта есть столько комбинаций

$(5 + 10 + 30 + 20 + 5 + 10 + 1) \cdot 3^5 = 19683$

Посчитаем количество чисел, кратных 5 – число должно оканчиваться на 5

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 6561$$

Посчитаем количество чисел, кратных и 3, и 5 – последняя цифра всегда 5 (k_2)

$k_1k_1k_1k_1\ k_2$: $C_4^4 = 1$ вариант

$k_1k_1k_2k_3\ k_2$: $C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ вариантов

$k_1k_3k_3k_3\ k_2$: $C_4^1 \cdot C_3^3 = 4 \cdot 1 = 4$ варианта

$k_1k_2k_2k_2\ k_2$: $C_4^1 \cdot C_3^3 = 4 \cdot 1 = 4$ варианта

$k_2k_2k_3k_3\ k_2$: $C_4^2 \cdot C_2^2 = 6 \cdot 1 = 6$ вариантов

Сложим все варианты и умножим на 3^4, потому что для каждого варианта есть столько комбинаций

$(1 + 12 + 4 + 4 + 6) \cdot 3^4 = 2187$

$19683 + 6561 - 2187 = 24057$

(f) Цифры не могут повторяться и сумма цифр должна быть четной.

Чтобы сумма цифр была четной, количество нечетных цифр должно быть четным. Пусть a – количество возможных четных цифр, а b – количество возможных нечетных цифр. Тогда нужно сложить все варианты сочетаний, где четное количество нечетных цифр, и умножить на количество перестановок всех цифр в числе - $k!$.

$$\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} C_b^{2i}\, C_a^{k-2i} \cdot k!$$

b – количество доступных нечетных, a – количество доступных четных цифр, в сумме n

Количество таких чисел (k = 5, a = 4, b = 5): $\left(C_5^0\, C_4^5 + C_5^2\, C_4^3 + C_5^4\, C_4^1\right) \cdot k! = (1 \cdot 0 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 4) \cdot 5! = 7200$

№ 4.

Пусть n - положительное целое число. Докажите следующее тождество, используя комбинаторный аргумент:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

Рассмотрим все непустые подмножества множества $\{1, 2, \dots n\}$. Попробуем посчитать сумму их мощностей S.

Т. к. в множестве нам не важен порядок, то всего существует C_n^k различных подмножеств мощности k. Суммируя количества подмножеств для k от 1 до n, получим левую часть равенства:

$$S = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k$$

Каждый элемент входит в 2^{n-1} подмножеств, потому что для n элементов 1 элемент входит в подмножество, а остальные n-1 элементов могут либо входить, либо нет (2 варианта), следовательно всего 2^{n-1} вариантов. Если для каждого элемента посчитать, во сколько подмножеств он входит, и сложить, то получится сумма мощностей всех подмножеств. Получаем правую часть равенства:

$$S = n \cdot 2^{n-1}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

№ 5.

Пусть r, m и n - неотрицательные целые числа. Докажите следующее тождество, используя комбинаторный аргумент:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

Пусть есть m пронумерованных объектов из множества 1 и n пронумерованных объектов из множества 2, и нужно выбрать из них r различных объектов. Посчитаем количество способов это сделать.

Левая часть равенства очевидна: порядок не важен, поэтому из m+n объектов можно выбрать r объектов $\binom{m+n}{r}$ способами.

Чтобы выбрать r различных объектов из множеств 1 и 2, нужно выбрать k объектов из множества 1 и r - k объектов из множества 2, где k может принимать значение от 0 до r. Для каждого k существует $\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ вариантов, т. к. есть $\binom{m}{k}$ способов выбрать k из m объектов множества 1, и для каждого из таких способов есть $\binom{n}{r-k}$ вариантов выбрать r - k из n объектов множества 2. Значит, нужно просуммировать все возможные значения k, и мы получим правую часть равенства.

Следовательно,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

№ 6.

Докажите обобщенную формулу Паскаля (для $n \geq 1$ и $k_1, \dots, k_r \geq 0$, где $k_1 + \dots + k_r = n$):

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r}$$

По определению мультиномиального коэффициента:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} {x_1}^{k_1} \dots {x_r}^{k_r}$$

Теперь представим $(x_1 + \dots + x_r)^n$ как $(x_1 + \dots + x_r)(x_1 + \dots + x_r)^{n-1}$:

$$(x_1 + \dots + x_r)(x_1 + \dots + x_r)^{n-1}$$

$$= (x_1 + \dots + x_r) \sum_{\substack{k_1', \dots, k_r' \geq 0 \\ k_1' + \dots + k_r' = n-1}} \binom{n-1}{k_1', \dots, k_r'} {x_1}^{k_1'} \dots {x_r}^{k_r'}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{k_1', \dots, k_r' \geq 0 \\ k_1' + \dots + k_r' = n-1}} \binom{n-1}{k_1', \dots, k_r'} {x_1}^{k_1'} \dots {x_i}^{k_i' + 1} \dots {x_r}^{k_r'}$$

Сделаем замену: $k_i = k_i' + 1$ и $k_j = k_j'$ (для $j \neq i$):

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r} {x_1}^{k_1} \dots {x_r}^{k_r}$$

Можем поменять местами знаки суммы:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r} {x_1}^{k_1} \dots {x_r}^{k_r}$$

Из этой формулы получаем, что $\sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r}$ – это формула мультиномиального коэффициента, как и $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$.

№ 7.

Найдите коэффициент при $x^5 y^7 z^3$ в разложении выражения $(x + y + z)^{15}$ на множители.

Воспользуемся формулой мультиномиального коэффициента:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots\ k_m!}$$

$$\binom{15}{5, 7, 3} = \frac{15!}{5!\, 7!\, 3!} = 360360$$

№ 8.

Посчитайте количество перестановок мультимножества Σ* = {2 · △, 3 · □, 1 · 🐈}.

Воспользуемся формулой перестановок мультимножества:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots\ k_m!}$$

где n – число всех элементов, $k_1, k_2, \dots, k_m$ – число повторений

$$\binom{6}{2, 3, 1} = \frac{6!}{2!\, 3!\, 1!} = 60$$

№ 9.

Непересекающееся совершенное паросочетание в графе - это набор попарно несмежных ребер, которые покрывают все вершины и не пересекаются между собой. Например, рассмотрим граф на 2n вершинах с номерами от 1 до 2n, расположенных по кругу. Дополнительно предположим, что ребра являются прямыми линиями. В этом случае, ребра {i, j} и {a, b} пересекаются, если i < a < j < b.

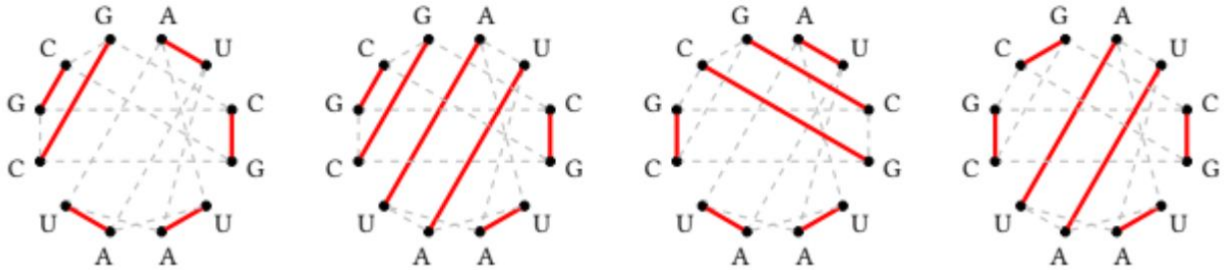
(a) Посчитайте количество всех возможных непересекающихся совершенных паросочетаний в полном графе K_{2n}.

Пусть a_n – количество непересекающихся совершенных паросочетаний в полном графе K_{2n}. $a_0 = 1$ (очевидно, если вершин нет, то ровно один способ, где нет пар), $a_1 = 1$ (очевидно, 2 вершины можно разбить на пары одним способом, просто соединив эти две вершины, и пересекаться пары не будут, потому что пара одна). Далее зафиксируем какую-нибудь вершину u и проведем из нее ребро к другой вершине v. Таким образом граф, если представить его в виде окружности с точками, будет разделен на две дуги. При этом на каждой дуге должно быть четное количество точек, чтобы разделить их между собой на пары, потому что иначе придется провести ребро из точки одной дуги до точки другой дуги, и тогда такое ребро пересечет ребро uv. Если на одной дуге расположено $2k$ точек, то на другой $2n - 2k - 2 = 2(n - k - 1)$ точек. Соединяем точки каждой дуги между собой $a_k a_{n-k-1}$ способами. При этом когда мы разбили граф на 2 дуги, то k может меняться от 0 до $n - 1$ (в зависимости от того как мы проведем эту дугу). Получаем рекуррентное соотношение: $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-2} a_1 + a_{n-1} a_0$.

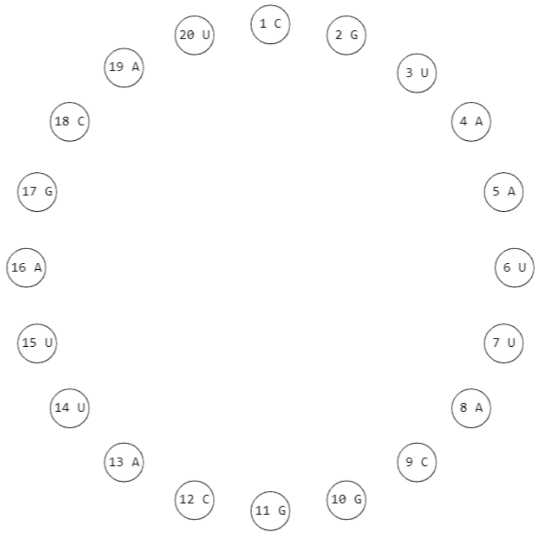
Данное рекуррентное соотношение соответствует числам Каталана, которые также можно выразить через формулу

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

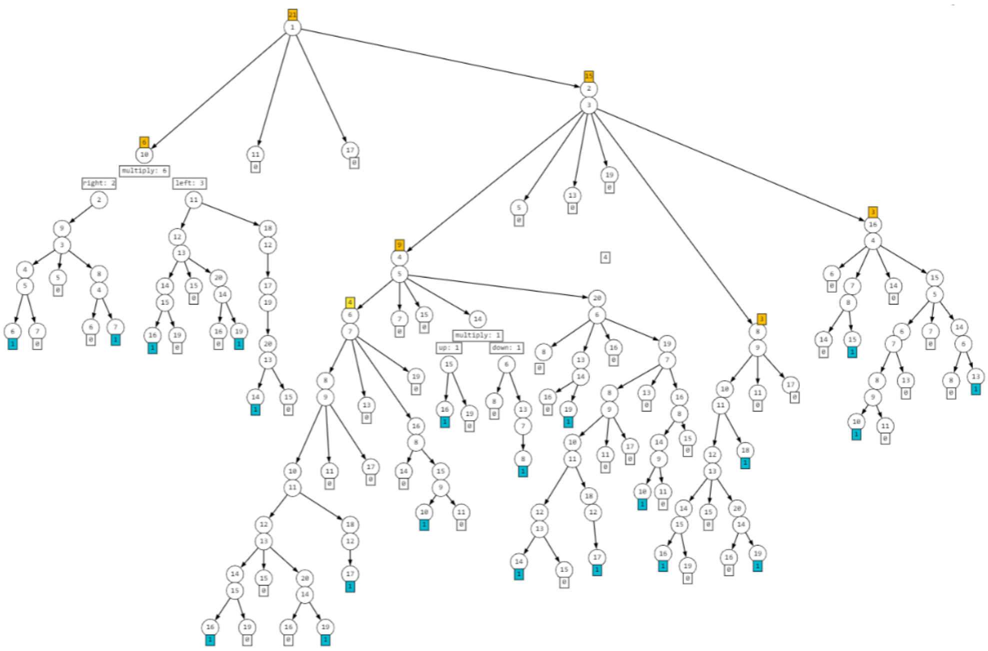
(b) Рассмотрим граф на вершинах, помеченных буквами {A, C, G, U}. Каждая пара вершин с метками A и U соединена ребром, образующим основную пару. Аналогично, пары C-G также соединены ребром. На рисунке ниже показаны некоторые из возможных непересекающихся идеальных паросочетаний в графе с 12 вершинами AUCGUAAUCGCG, расположенных по кругу. Ребра основных пар отрисованы пунктирными серыми линиями, а идеальные паросочетания выделены красным цветом.



Посчитайте количество всех возможных непересекающихся идеальных паросочетаний в графе на 20 вершинах, расположенных по кругу и помеченных как CGUAAUUACGGCAUUAGCAU.



Начнем с вершины 1, переберем все варианты



Ответ: 21

№ 10.

Сколько целочисленных решений есть для каждого данного уравнения?

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ где $x_i \geq 0$

Задачу можно сформулировать так: нужно посчитать количество способов распределить 20 одинаковых объектов (единиц) на 3 различных x, где в x может быть любое количество единиц. Это можно свести к пункту а (3) задачи 1, где количество способов вычисляется по формуле: C_{n+k-1}^{k-1}, где k – количество x (3), а n – количество единиц (20). $C_{22}^{2} = 231.$

(b) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ где $x_i \geq 1$

Теперь в каждом x не любое количество единиц, а есть хотя бы одна единица. Это пункт а (2), количество способов - C_{n-1}^{k-1}. $C_{19}^{2} = 171.$

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ где $x_i \geq 5$

Сделаем замену: $\begin{cases} x_1 = 5 + y_1 \\ x_2 = 5 + y_2\,, \quad y_i \geq 0 \\ x_3 = 5 + y_3 \end{cases}$

$$5 + y_1 + \ 5 + y_2 + 5 + y_3 = 20, \ \ y_i \geq 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 5, \ y_i \geq 0$$

Аналогично пункту (a): $C_7^2 = 21$

(d) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20,$ где $x_i \geq 0$

Очевидно, если $x_i \geq 0$, то сумма не может быть < 0. Тогда переберем все значения суммы от 0 до 20, аналогично пункту (a).

$$\begin{aligned} C_2^2 + C_3^2 &+ C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + C_7^2 + C_8^2 + C_9^2 + C_{10}^2 + C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 \\ &+ C_{14}^2 + C_{15}^2 + C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{18}^2 + C_{19}^2 + C_{20}^2 + C_{21}^2 + C_{22}^2 \\ &= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 \\ &+ 78 + 91 + 105 + 120 + 136 + 153 + 171 + 190 + 210 \\ &+ 231 = 1771. \end{aligned}$$

(e) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ где $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$

Количество таких решений можно посчитать с помощью функции разбиения $p_k(n)$. $p_3(20) = 33$.

(f) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ где $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$

Такую задачу можно свести к пункту 3 d задачи 1. $p_k(n+k) = p_3(23) = 44$.

(g) $x_1 + x_2 + x_3 = 20,$ где $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 10$

Количество способов без условия на то, что $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 10$, равно 44 (из предыдущего пункта). Вычтем те, где одно число ≥ 11 (больше таких чисел быть не может, потому что уже два числа дадут ≥ 22). Очевидно, это наибольшее число - x_3

1. $x_3 = 11$.

Перепишем уравнение:

$$x_1 + x_2 = 9, \text{где } 0 \leq x_1 \leq x_2$$

Считаем по аналогии с пунктом f: $p_2(11) = 5$

2. $x_3 = 12$.

$$x_1 + x_2 = 8, \text{где } 0 \leq x_1 \leq x_2$$

$$p_2(10) = 5$$

3. $x_3 = 13$.

$$x_1 + x_2 = 7, \text{где } 0 \leq x_1 \leq x_2$$

$$p_2(9) = 4$$

4. $x_3 = 14$.

$$x_1 + x_2 = 6, \text{где } 0 \leq x_1 \leq x_2$$

$$p_2(8) = 4$$

5. $x_3 = 15$.

$$x_1 + x_2 = 5, \text{где } 0 \leq x_1 \leq x_2$$

$$p_2(7) = 3$$

6. $x_3 = 16$.

$$x_1 + x_2 = 4, \text{где } 0 \le x_1 \le x_2$$

$$p_2(6) = 3$$

7. $x_3 = 17$.

$$x_1 + x_2 = 3, \text{где } 0 \le x_1 \le x_2$$

$$p_2(5) = 2$$

8. $x_3 = 18$.

$$x_1 + x_2 = 2, \text{где } 0 \le x_1 \le x_2$$

$$p_2(4) = 2$$

9. $x_3 = 19$.

$$x_1 + x_2 = 1, \text{где } 0 \le x_1 \le x_2$$

$$p_2(3) = 1$$

10. $x_3 = 20$.

$$x_1 + x_2 = 0, \text{где } 0 \le x_1 \le x_2$$

$$p_2(2) = 1$$

Вычтем из 44 все полученные значения:

$44 - 5 - 5 - 4 - 4 - 3 - 3 - 2 - 2 - 1 - 1 = 14$.

(h) $x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ \text{где} - 5 \le x_i \le 5$.

Сделаем замену: $\begin{cases} x_1 = -5 + y_1 \\ x_2 = -5 + y_2 \\ x_3 = -5 + y_3 \end{cases},\ 0 \le y_i \le 10$

$$-5 + y_1 - \ 5 + y_2 - 5 + y_3 = 5,\ 0 \le y_i \le 10$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 20,\ 0 \le y_i \le 10$$

Без условия $y_i \le 10$ ответ равен 231 (пункт а). Вычтем те варианты, где есть один $y \ge 11$ (больше таких чисел быть не может, потому что уже два числа дадут ≥ 22).

1. $y_1 = 11$.

Перепишем уравнение:

$$y_2 + y_3 = 9, \text{где } y_i \geq 0$$

Считаем по аналогии с пунктом а: $C_{10}^1 = 10$

Для $y_2 = 11$ и $y_3 = 11$ – также по 10 вариантов.

2. $y_1 = 12$.

$$y_2 + y_3 = 8, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_9^1 = 9$$

Для $y_2 = 12$ и $y_3 = 12$ – также по 9 вариантов.

3. $y_1 = 13$.

$$y_2 + y_3 = 7, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_8^1 = 8$$

Для $y_2 = 13$ и $y_3 = 13$ – также по 8 вариантов.

4. $y_1 = 14$.

$$y_2 + y_3 = 6, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_7^1 = 7$$

Для $y_2 = 14$ и $y_3 = 14$ – также по 7 вариантов.

5. $y_1 = 15$.

$$y_2 + y_3 = 5, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_6^1 = 6$$

Для $y_2 = 15$ и $y_3 = 15$ – также по 6 вариантов.

6. $y_1 = 16$.

$$y_2 + y_3 = 4, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_5^1 = 5$$

Для $y_2 = 16$ и $y_3 = 16$ – также по 5 вариантов.

7. $y_1 = 17$.

$$y_2 + y_3 = 3, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_4^1 = 4$$

Для $y_2 = 17$ и $y_3 = 17$ – также по 4 варианта.

8. $y_1 = 18$.

$$y_2 + y_3 = 2, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_3^1 = 3$$

Для $y_2 = 18$ и $y_3 = 18$ – также по 3 варианта.

9. $y_1 = 19$.

$$y_2 + y_3 = 1, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_2^1 = 2$$

Для $y_2 = 19$ и $y_3 = 19$ – также по 2 варианта.

10. $y_1 = 20$.

$$y_2 + y_3 = 0, \text{где } y_i \geq 0$$

$$C_1^1 = 1$$

Для $y_2 = 20$ и $y_3 = 20$ – также по 1 варианту.

Вычтем из 231 все полученные значения:

$231 - 3 \cdot 10 - 3 \cdot 9 - 3 \cdot 8 - 3 \cdot 7 - 3 \cdot 6 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 66.$

№ 11.

Рассмотрим три кубика: один с 4 гранями, один с 6 гранями и один с 8 гранями. Грани пронумерованы от 1 до 4, от 1 до 6 и от 1 до 8 соответственно. Найдите вероятность получения суммарного значения, равного 12.

Всего различных исходов $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$.

Рассмотрим все различные сочетания трех чисел 1..8, которые в сумме дадут 12.

1) $\{8, 3, 1\}$. 1 способом можно выбрать число 8 (только 3-й кубик содержит такую грань), остается еще 2 кубика. 2 способами можно выбрать число 3 (1-й и 2-й кубики), остается 1 кубик на число 1. Всего способов получить такое сочетание $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.

2) $\{8, 2, 2\}$. 1 способом можно выбрать число 8 (только 3-й кубик содержит такую грань), остается еще 2 кубика. Две двойки из двух оставшихся кубиков можно получить только одним способом, т. к. они неразличимы. Значит, всего 1 способ получить такое сочетание.

3) $\{7, 4, 1\}$. Аналогично 1-му случаю – 2 способа.

4) $\{7, 3, 2\}$. Аналогично 1-му случаю – 2 способа.

5) $\{6, 5, 1\}$. 2-мя способами можно выбрать число 6 (2-й и 3-й кубики). Число 5 может быть получено только с помощью 2-го или 3-го кубика, один из которых мы уже выбрали для числа 6, значит выбрать число 5 один способ. Остается 1 кубик на число 1. Всего способов получить такое сочетание $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.

6) $\{6, 4, 2\}$. 2-мя способами можно выбрать число 6 (2-й и 3-й кубики). 2-мя способами можно выбрать число 4 (1-й и свободный из 2-го и 3-го кубиков). Остается 1 кубик на число 2. Всего способов получить такое сочетание $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.

7) $\{6, 3, 3\}$. 2-мя способами можно выбрать число 6 (2-й и 3-й кубики). Две тройки из двух оставшихся кубиков можно получить только одним способом, т. к. они неразличимы. Значит, всего два способа.

8) $\{5, 5, 2\}$. Две пятерки из 2-го и 3-го кубика (из 1-го получить не можем) можно получить только одним способом, т. к. они неразличимы. Остался 1-й кубик на число 2. Всего один способ.

9) $\{5, 4, 3\}$. Аналогично 6-му случаю – 4 способа.

10) $\{4, 4, 4\}$. Ровно один способ, т. к. четверки неразличимы.

Всего получаем $2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 1 + 4 + 1 = 21$ способ получить данные сочетания.

Вероятность получить сумму 12: $\frac{21}{192} = \frac{7}{64} = 0.109375$

№ 12.

Пусть A = {1, 2, 3, ..., 12}. Определим интересное подмножество A как подмножество, в котором никакие два элемента не имеют разницу в 3. Определите количество интересных подмножеств A.

Назовем соседними элементы, разница между которыми равна 3

Разделим это множество на такие подмножества, где нет соседних элементов из двух разных подмножеств

Получим классы эквивалентности по модулю 3:

1) {1, 4, 7, 10}

2) {2, 5, 8, 11}

3) {3, 6, 9, 12}

Выпишем все интересные подмножества множества 1:

$\{\}, \{1\}, \{4\}, \{7\}, \{10\}, \{1, 7\}, \{1, 10\}, \{4, 10\}$ – 8 подмножеств

Аналогично по 8 интересных подмножеств имеют множества 2 и 3

Очевидно, что объединение интересных подмножеств является интересным подмножеством. Теперь нам достаточно посчитать количество различных комбинаций, которые мы можем составить из этих подмножеств. Берем по одному любому подмножеству из групп 1, 2 и 3: $C_8^1 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$. Любую другую комбинацию элементов взять не можем, потому что тогда нельзя будет представить в виде комбинаций интересных подмножеств 1, 2 и 3 => она будет содержать подмножество, не входящее в интересные подмножества множеств 1, 2 и 3 => будет содержать соседние элементы.

Ответ: 512

№ 13.

Найдите количество способов расставить пять людей с разным ростом в линию так, чтобы никакие три последовательно стоящих человека не образовывали строго возрастающую или убывающую последовательность по росту.

Всего существует $5! = 120$ способов расставить людей. Пусть A, B, C – множества перестановок, где является убывающей или возрастающей последовательность, начинающаяся с 1, 2 или 3 человека соответственно.

Вычтем количество способов $|A \cup B \cup C|$, где есть убывающая или возрастающая последовательность.

Используя принцип включения-исключения: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

1) $|A|$: Выбрать 3 человека для последовательности: $C_5^3 = 10$ способов. Расставить их можно двумя способами: по убыванию и по возрастанию соответственно (т. к. все числа различны, по одному способу). Расставить остальных можно $2! = 2$ способами. Всего получится $10 \cdot 2 \cdot 2 = 40$ способов.

2) $|B|$: аналогично 1 случаю – 40 способов.

3) $|C|$: аналогично 1 случаю – 40 способов.

4) $|A \cap B|$: Если числа на 1, 2, 3 и 2, 3, 4 позициях образуют возрастающую или убывающую последовательность, то они образуют возрастающую или убывающую последовательность из всех 4 чисел. Выбрать 4 человека для последовательности: $C_5^4 = 5$ способов. Расставить их можно двумя способами: по убыванию и по возрастанию соответственно (т. к. все числа различны, по

одному способу). Расставить остальных можно $1! = 1$ способом. Всего получится $5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$ способов.

5) $|B \cap C|$: аналогично 4 случаю – 10 способов.

6) $|A \cap C|$: Если числа на 1, 2 и 3 и 3, 4, 5 позициях образуют возрастающую или убывающую последовательность, то возможно 2 случая:

1. Возрастающая/убывающая последовательность из всех 5 чисел – 2 способа соответственно.

2. Числа 1, 2, 3 образуют одну последовательность (возрастающую/убывающую), а 3, 4, 5 – другую. Очевидно, число на позиции 3 будет наибольшим/наименьшим числом, следовательно выбрать его 1 способ. Далее, по $C_4^2 = 6$ способов выбрать числа для одной стороны (и поставить их в упорядоченную последовательность единственным образом), и $C_2^2 = 1$ способ выбрать числа для другой стороны. Всего получится $1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ способов.

Всего 14 способов.

7) $|A \cap B \cap C|$: Если числа на 1, 2 и 3; 2, 3 и 4; 3, 4, и 5 позициях образуют возрастающую или убывающую последовательность, то возможно только 2 случая – возрастающая или убывающая последовательность из всех чисел, соответственно, 2 способа.

$|A \cup B \cup C| = 40 + 40 + 40 - 10 - 10 - 14 + 2 = 88$

$120 - |A \cup B \cup C| = 120 - 88 = 32$

Ответ: 32

№ 14.

GLaDOS тестирует новый набор первокурсников в одной из ее известных тестовых камер. Она назначает каждому испытуемому уникальный номер от 1 до n, а затем разделяет студентов на k групп (здесь группы неразличимы). Кроме того, один студент в каждой группе назначается лидером группы. GLaDOS хочет знать, сколько различных способов у нее есть, чтобы распределить студентов по группам и выбрать лидеров групп. Она называет эту организацию

"GLaDOS Partition". Например, рассмотрим $n = 7$ студентов и $k = 3$ группы. Вот три (из многих!) различных разбиения, с выделенными лидерами групп: ($\underline{1}$ | 2$\underline{5}$67 | 3$\underline{4}$), ($\underline{1}$ | 25$\underline{6}$7 | $\underline{3}$4) и ($\underline{1}$ | 25$\underline{6}$7 | 3$\underline{4}$).

Пусть количество GLaDOS Partitions для n студентов на k групп, где каждая группа имеет назначенного лидера, обозначается как $\mathrm{G(n, k)}$. Ваша задача - найти общую формулу и / или рекуррентное соотношение для $\mathrm{G(n, k)}$ и обосновать его.

Сначала для каждой из k групп выберем лидера из n студентов. Количество таких вариантов равно C_n^k. Останется $n - k$ студентов. Для каждого из них есть ровно k вариантов выбрать группу (теперь группы различимы по их лидеру): k^{n-k} вариантов.

Ответ: $\mathrm{G(n, k)} = C_n^k k^{n-k}$

№ 15.

Каждое регулярное выражение P порождает регулярный язык $L(P)$, который состоит из всех строк, соответствующих заданному образцу P. Для каждого заданного P найдите размер множества $L' = \{\mathrm{w} \in \mathrm{L(P)} \mid \mathrm{length(w)} \leq 5\}$, которое содержит все принятые слова длиной не более 5. Для "любых" (.) и "отрицательных" ([^ .]) соответствий предполагается, что алфавит $\Sigma = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$. Кроме того, постройте соответствующие ДКА (Детерминированные Конечные Автоматы) для каждого шаблона P.

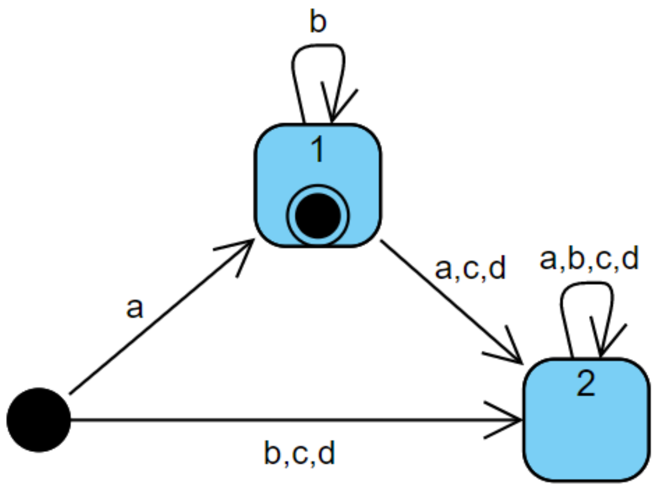
 - начальное состояние

 - конечное состояние

(a) P_1 = ab*

L' = {a, ab, abb, abbb, abbbb}

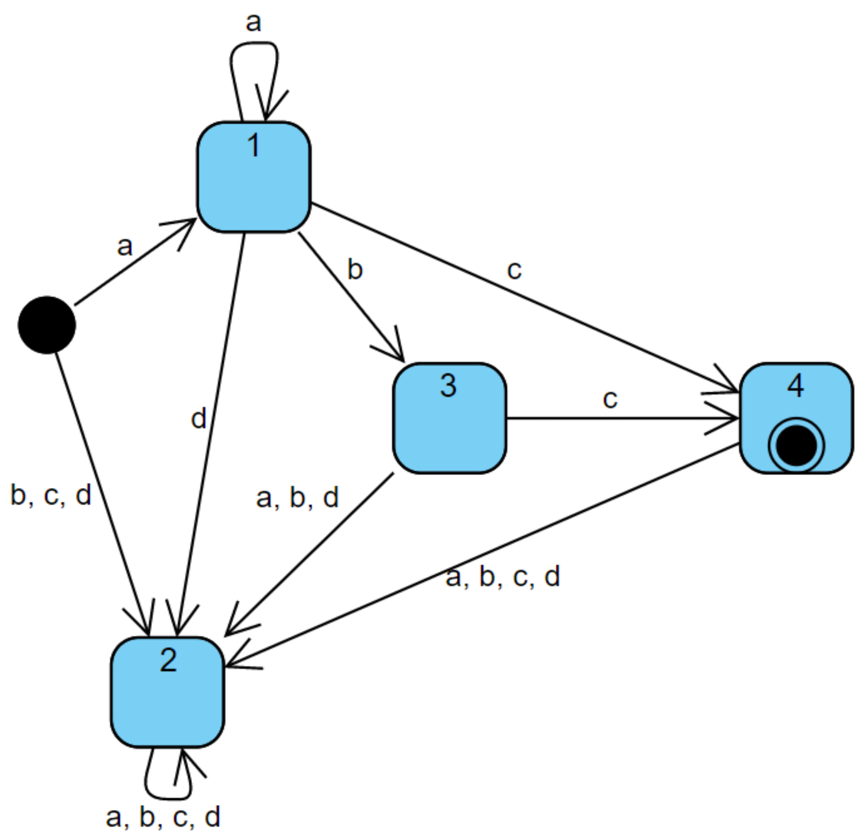
| L' | = 5



(b) P_2 = a+b?c

L' = {ac, aac, abc, aaac, aabc, aaaac, aaabc}

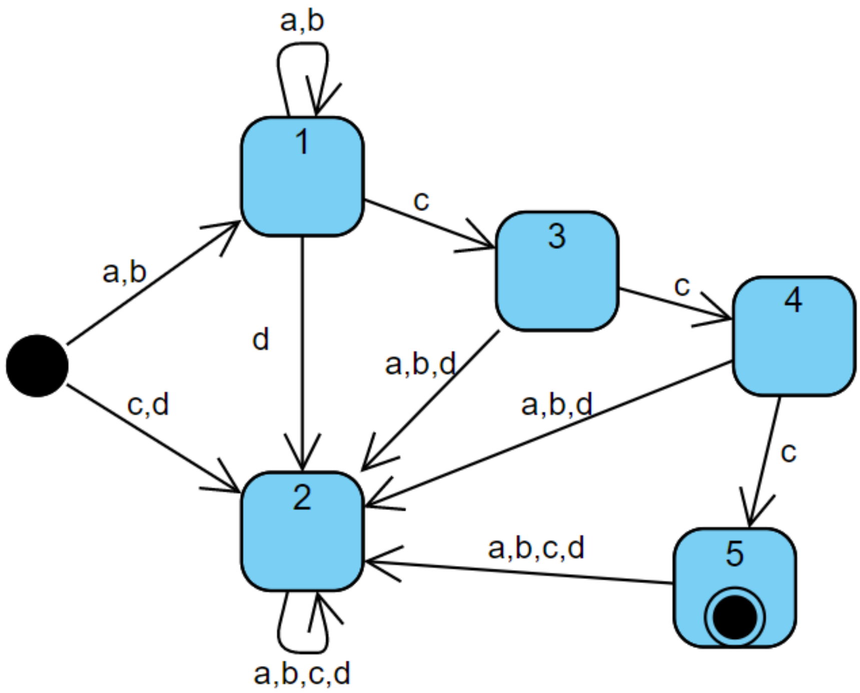
| L' | = 7



(c) P_3 = [^cd]+c{3}

L' = {accc, bccc, aaccc, abccc, baccc, bbccc}

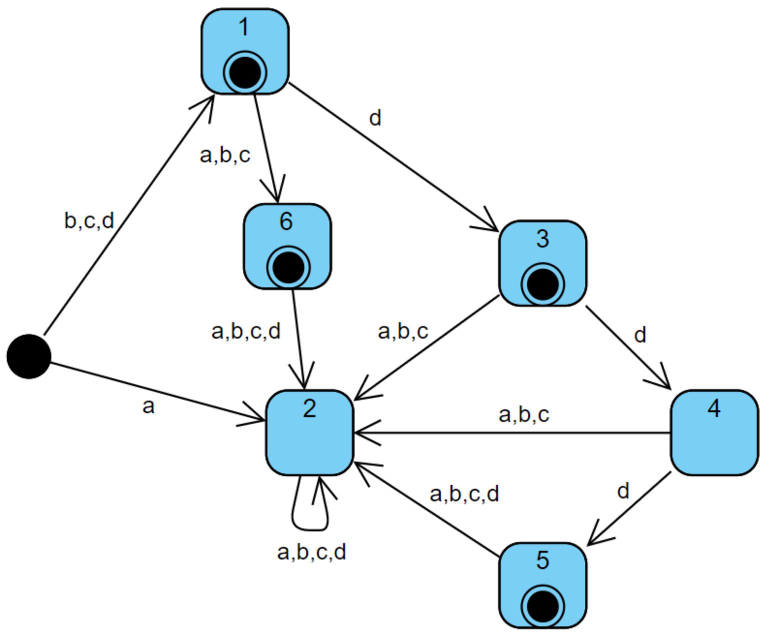
| L' | = 6



(d) P_4 = [^a](.|ddd)?

L' = {b, c, d, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd, bddd, cddd, dddd}

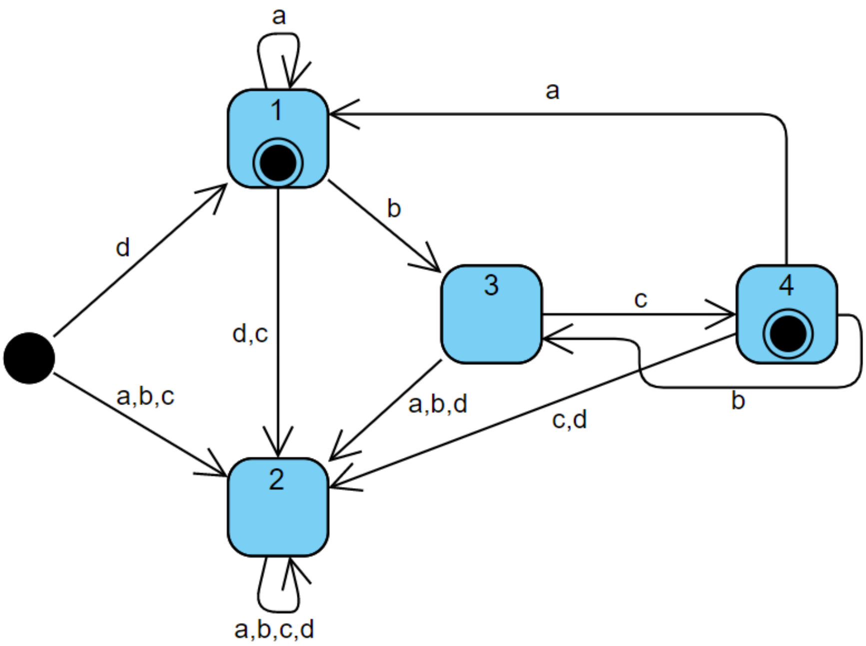
| L' | = 18



(e) P_5 = d(a|bc)*

L' = {d, da, daa, dbc, daaa, dabc, dbca, daaaa, daabc, dabca, dbcaa, dbcbc}

| L' | = 12



(f) P_6 = ((a|ab)[cd]){2}

L' = {acac, acad, adac, adad, abcac, abcad, abdac, abdad, acabc, acabd, adabc, adabd}

| L' | = 12