1. Доказать формулу

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Здесь $\omega_0 -$ круговая частота резонанса $= 2\pi f_0$, $\Delta\omega -$ ширина амплитудной резонансной кривой, Q – добротность.

Докажем обратную формулу:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$$

По определению добротность колебательной системы – это отношение энергии, запасенной системой, к потере энергии за время изменения фазы на 1 радиан.

$$Q = \frac{E}{-\Delta E_1}$$

Покажем связь с характеристиками колебаний

Координата колеблющегося тела в случае затухающих колебаний:

$$x(t) = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t)$$

t_1 - время увеличения фазы на 1 радиан

$$\omega(t + t_1) - \omega t = 1$$

$$\omega t_1 = 1$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 a_0^2 e^{-2\beta t}$$

$$E(t + t_1) = \frac{1}{2} m\omega^2 a_0^2 e^{-2\beta(t+t_1)}$$

$$E(t + t_1) = \frac{1}{2} m\omega^2 a_0^2 e^{-2\beta t} \cdot e^{-2\beta t_1}$$

$$-\Delta E_1 = E(t) - E(t+t_1) = \frac{1}{2}m\omega^2 a_0^2 e^{-2\beta t} - \frac{1}{2}m\omega^2 a_0^2 e^{-2\beta t} \cdot e^{-2\beta t_1}$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 a_0^2 e^{-2\beta t}\left(1 - e^{-2\beta t_1}\right) = E(t) \cdot \left(1 - e^{-2\beta t_1}\right)$$

$$Q = \frac{E(t)}{-\Delta E_1} = \frac{E(t)}{E(t) \cdot (1 - e^{-2\beta t_1})} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta t_1}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\beta}{\omega}}}$$

Пусть затухание мало: $\alpha \ll \omega$

$$\frac{2\beta}{\omega} \ll 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{1-x} = 1$$

Тогда заменим $e^{-\frac{2\beta}{\omega}}$ на $1 - \frac{2\beta}{\omega}$

$$Q = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\beta}{\omega}}} = \frac{1}{1 - (1 - \frac{2\beta}{\omega})} = \frac{\omega}{2\beta}$$

$$\omega \approx \omega_0$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Докажем, что ширина амплитудной резонансной кривой приблизительно равна удвоенному коэффициенту затухания колебательного контура β:

$$\Delta\omega \approx 2\beta$$

Формула для амплитуды напряжения на конденсаторе U_{C_m}, выраженная через собственную частоту контура ω_0 и коэффициент затухания β:

$$U_{C_m} = \frac{U_m {\omega_0}^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Предположим, что величина коэффициента затухания β последовательного колебательного контура мала: $\beta \ll \omega_0$. Тогда частота ω_{max}, при которой функция $U_{C_m}(\omega)$ достигает наибольшего значения, приблизительно равна собственной частоте контура ω_0: $\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0$.

Подставим $\omega = \omega_0$

$$U_{C_m} = \frac{U_m {\omega_0}^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\beta^2 {\omega_0}^2}} = \frac{U_m {\omega_0}^2}{\sqrt{4\beta^2 {\omega_0}^2}} = \frac{U_m {\omega_0}^2}{2\beta\omega_0} = \frac{U_m \omega_0}{2\beta}$$

$\Delta\omega$ — это диапазон частот колебаний внешнего напряжения U, границам которого соответствуют значения напряжения $U_{C_m}(\omega)$ в $\sqrt{2}$ раз меньше резонансного, т. е. ширина амплитудной резонансной кривой на такой ее высоте, где значения функции $U_{C_m}(\omega)$ в $\sqrt{2}$ раз меньше ее максимального значения $U_{C_m\,max}$.

Частота ω, при которой амплитуда напряжения в $\sqrt{2}$ раз меньше максимального резонансного значения, должна удовлетворять условию

$$U_{C_m}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{C_m\,max}$$

Используем формулу при условии, что $\omega = \omega_0$

$$\frac{U_m {\omega_0}^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_m {\omega_0}^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\beta^2 {\omega_0}^2}}$$

$$\frac{U_m {\omega_0}^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_m \omega_0}{2\beta}$$

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\beta}$$

$$2\sqrt{2}\beta\omega_0 = \sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

$$8\beta^2 {\omega_0}^2 = ({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2$$

$$({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 = 8\beta^2 {\omega_0}^2 - 4\beta^2 \omega^2$$

$$({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 = 4\beta^2 (2{\omega_0}^2 - \omega^2)$$

Сделаем предположение о том, что резонансная кривая является достаточно узкой. Это означает, что:

$$|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0$$

$$|{\omega_0}^2 - \omega^2| \ll {\omega_0}^2$$

Тогда

$$({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 = 4\beta^2(2{\omega_0}^2 - \omega^2) \approx 4\beta^2{\omega_0}^2$$

$$((\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega))^2 \approx 4\beta^2{\omega_0}^2$$

Т. к. ω_0 и ω близки друг к другу, то:

$$\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$$

Т. к. $|\omega_0 - \omega| = \frac{\Delta\omega}{2}$

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 (2\omega_0)^2 \approx 4\beta^2{\omega_0}^2$$

$$\frac{\Delta\omega}{2} 2\omega_0 \approx 2\beta\omega_0$$

$$\Delta\omega \approx 2\beta$$

Тогда $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

Источники:

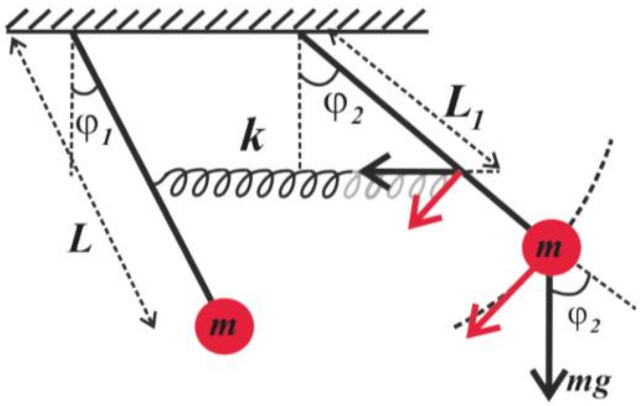
https://www.youtube.com/watch?v=tNJDjGcEgVs

Леденев А.Н. - Физика. Кн. 4. Колебания и волны. Оптика-ФМЛ (2005) (https://studfile.net/preview/12632504/page:5/#7) стр 26-29

2. Что называют собственными частотами в связанных колебательных системах? Как найти собственные частоты двух одинаковых маятников, связанных между собой пружиной. Приведите примеры связанных колебаний.

Собственные частоты в связанных колебательных системах – это частоты собственных колебаний. Собственные колебания системы – это набор характерных для колебательной системы типов гармонических колебаний, происходящих за счёт начального запаса энергии. Колебание физической системы можно представить в виде суперпозиции различных нормальных колебаний.

Система двух одинаковых связанных пружиной маятников



Чтобы найти их собственные частоты, нужно решить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} mL^2\ddot{\varphi}_1 = -F_{\text{тяж}} \cdot L\sin\varphi_1 + F_{\text{упр}} \cdot L_1 \, cos\,\varphi_1 \\ mL^2\ddot{\varphi}_2 = -F_{\text{тяж}} \cdot L\sin\varphi_2 - F_{\text{упр}} \cdot L_1 \, cos\,\varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -F_{\text{тяж}} \cdot L\sin\varphi_1 + F_{\text{упр}} \cdot L_1 \, cos\,\varphi_1 - mL^2\ddot{\varphi}_1 = 0 \\ -F_{\text{тяж}} \cdot L\sin\varphi_2 - F_{\text{упр}} \cdot L_1 \, cos\,\varphi_2 - mL^2\ddot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{\text{тяж}} \cdot L\sin\varphi_1 - F_{\text{упр}} \cdot L_1 \, cos\,\varphi_1 + mL^2\ddot{\varphi}_1 = 0 \\ F_{\text{тяж}} \cdot L\sin\varphi_2 + F_{\text{упр}} \cdot L_1 \, cos\,\varphi_2 + mL^2\ddot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{F_{\text{тяж1}} \cdot L\sin\varphi_1}{mL^2} - \dfrac{F_{\text{упр}} \cdot L_1 \, cos\,\varphi_1}{mL^2} + \ddot{\varphi}_1 = 0 \\ \dfrac{F_{\text{тяж2}} \cdot L\sin\varphi_2}{mL^2} + \dfrac{F_{\text{упр}} \cdot L_1 \, cos\,\varphi_2}{mL^2} + \ddot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

$$F_{\text{упр}} = kL_1(tg\,\varphi_2 - tg\,\varphi_1)$$

При малом отклонении $tg\,\varphi \approx \varphi$

$$F_{\text{упр}} \approx kL_1(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$F_{\text{тяж}1} = mg\cos\varphi_1$$

$$F_{\text{тяж}2} = mg\cos\varphi_2$$

При малом отклонении $cos\,\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} = 1$

$$F_{\text{тяж}1} \approx mg$$

$$F_{\text{тяж}2} \approx mg$$

$$\begin{cases} \dfrac{mg\cdot L\sin\varphi_1}{mL^2} - \dfrac{kL_1(\varphi_2-\varphi_1)\cdot L_1\cos\varphi_1}{mL^2} + \ddot{\varphi}_1 = 0 \\ \dfrac{mg\cdot L\sin\varphi_2}{mL^2} + \dfrac{kL_1(\varphi_2-\varphi_1)\cdot L_1\cos\varphi_2}{mL^2} + \ddot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{g\cdot \sin\varphi_1}{L} - \dfrac{kL_1(\varphi_2-\varphi_1)\cdot L_1\cos\varphi_1}{mL^2} + \ddot{\varphi}_1 = 0 \\ \dfrac{g\cdot \sin\varphi_2}{L} + \dfrac{kL_1(\varphi_2-\varphi_1)\cdot L_1\cos\varphi_2}{mL^2} + \ddot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

$$cos\,\varphi \approx 1,\ sin\,\varphi \approx \varphi$$

$$\begin{cases} \dfrac{g\cdot \varphi_1}{L} - \dfrac{kL_1(\varphi_2-\varphi_1)\cdot L_1}{mL^2} + \ddot{\varphi}_1 = 0 \\ \dfrac{g\cdot \varphi_2}{L} + \dfrac{kL_1(\varphi_2-\varphi_1)\cdot L_1}{mL^2} + \ddot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \dfrac{g}{L}\varphi_1 - \dfrac{k{L_1}^2}{mL^2}\cdot(\varphi_2-\varphi_1) = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \dfrac{g}{L}\varphi_2 + \dfrac{k{L_1}^2}{mL^2}\cdot(\varphi_2-\varphi_1) = 0 \end{cases}$$

Здесь $\frac{g}{L} = {\omega_0}^2$

Сложим уравнения:

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{L}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$$

Вычтем из второго первое:

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{L}\varphi_2 + \frac{k{L_1}^2}{mL^2}\cdot(\varphi_2-\varphi_1) - \ddot{\varphi}_1 - \frac{g}{L}\varphi_1 + \frac{k{L_1}^2}{mL^2}\cdot(\varphi_2-\varphi_1) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{L}(\varphi_2-\varphi_1) + \frac{2k{L_1}^2}{mL^2}\cdot(\varphi_2-\varphi_1) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k{L_1}^2}{mL^2}\right)(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Перейдем к координатам $\xi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ и $\xi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{g}{L}\xi_1 = 0$$

$$\ddot{\xi}_2 + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k{L_1}^2}{mL^2}\right)\xi_2 = 0$$

Тогда нормальные частоты равны:

$$\Omega_{n1} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\Omega_{n2} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k{L_1}^2}{mL^2}}$$

В зависимости от типа колебаний (синфазные, противофазные, общий случай) собственные частоты маятников будут равны либо первой моде:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\Phi_{01}\, cos(\Omega_{n1}t + \varphi_{01})$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\Phi_{01}\, cos(\Omega_{n1}t + \varphi_{01})$$

либо второй моде:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\Phi_{02}\, cos(\Omega_{n2}t + \varphi_{02})$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\Phi_{02}\, cos(\Omega_{n2}t + \varphi_{02})$$

либо их полусумме:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\Phi_{01}(cos(\Omega_{n1}t) + \cos(\Omega_{n2}t)) =$$

$$= \frac{1}{2}\Phi_{01}\cos\left(\frac{(\Omega_{n1} + \Omega_{n2})t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(\Omega_{n2} - \Omega_{n1})t}{2}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\Phi_{02}(cos(\Omega_{n1}t) + \cos(\Omega_{n2}t)) =$$

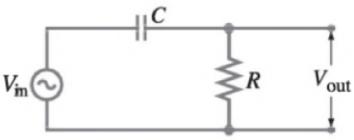
$$= -\frac{1}{2}\Phi_{01}\, sin\left(\frac{(\Omega_{n1} + \Omega_{n2})t}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{(\Omega_{n2} - \Omega_{n1})t}{2}\right)$$

Источники:

https://study.physics.itmo.ru/mod/resource/view.php?id=5669 стр 7-16

https://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000469545/SOURCE1 стр 8-11

3. RC-схема, показанная на рисунке, называется фильтром высоких частот, поскольку она пропускает высокочастотные сигналы переменного тока с меньшим затуханием, чем низкочастотные сигналы.



(a) Покажите, что коэффициент передачи по напряжению равен $A = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{2\pi fRC}{\sqrt{4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1}}$

Закон Ома: $U = IR$

Полное сопротивление: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

X_L не учитываем

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{IR}{I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + {X_C}^2}}$$

Реактивное сопротивление:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi fC}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{R^2 4\pi^2 f^2 C^2 + 1}{4\pi^2 f^2 C^2}}}$$
$$= \frac{R}{\frac{\sqrt{R^2 4\pi^2 f^2 C^2 + 1}}{2\pi fC}} = \frac{2\pi fRC}{\sqrt{4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1}}$$

Источники: https://studfile.net/preview/7510994/

https://ru.wikipedia.org/wiki/Реактивное_сопротивление

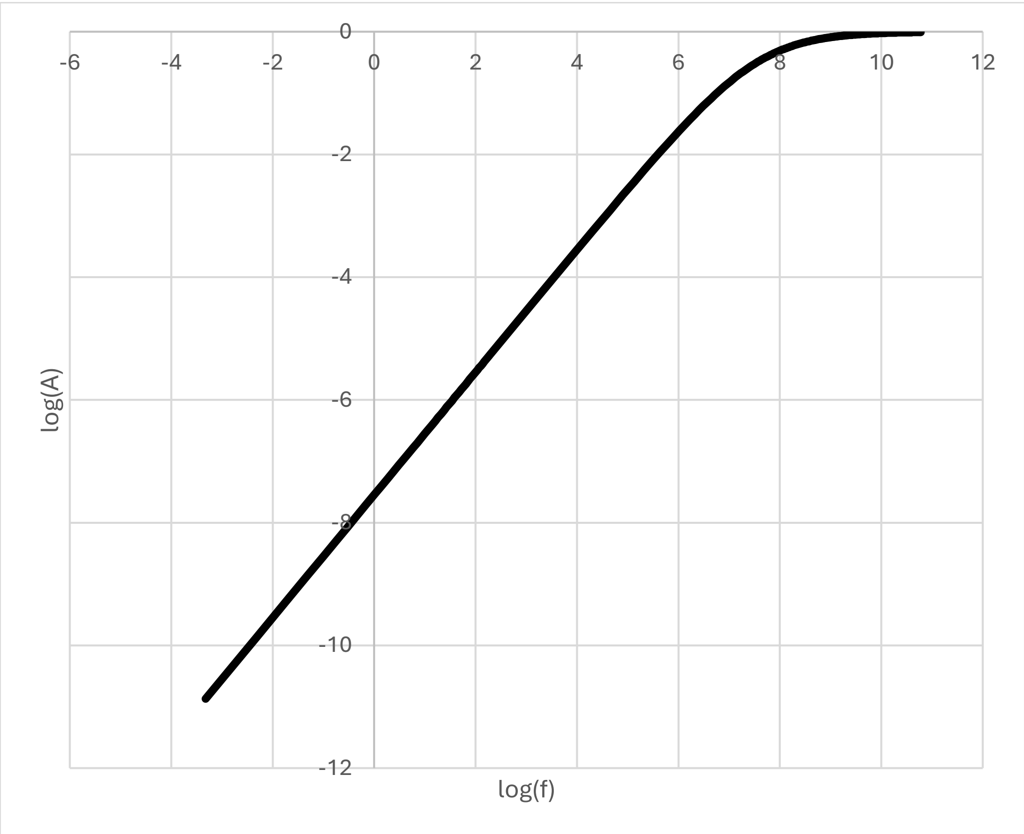
(b) Коэффициент усиления A при $f \to 0$ и $f \to \infty$

$$\lim_{f \to 0} \frac{2\pi f RC}{\sqrt{4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0$$

$$\lim_{f \to \infty} \frac{2\pi f RC}{\sqrt{4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1}} = \lim_{f \to \infty} \frac{2\pi f RC}{2\pi f RC \sqrt{\frac{4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1}{4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}} = \lim_{f \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

(c) При $R = 850$ Ом и $C = 1.0 \times 10^{-6}$Ф постройте график зависимости log(A) от log(f) в подходящих масштабах, чтобы показать поведение схемы на высоких и низких частотах



Можно заметить, что на больших частотах логарифм коэффициента усиления стремится к 0, т. к. сам коэффициент стремится к единице. При низких частотах коэффициент стремится к 0, поэтому логарифм стремится к $-\infty$ (т.к. основание логарифма взяла =2)