ДЗ 1.3. Бондаренко А.С. Б02-207

Упр. 1

y_i и x_i

$$L = \sum_{i=1}^{l} (y_i - \tilde{y})^2 \to \min$$

$$\tilde{y} = ax + b$$

$$L = \sum_{i=1}^{l} (y_i - (ax_i + b))^2 \to \min$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial b} = 0$$

$$\begin{cases} \sum (y_i - (ax_i + b)) x_i = 0 \\ \sum (y_i - (ax_i + b)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum^{l} x_i y_i - a \sum^{l} x_i^2 - b \sum^{\infty} x_i = 0 \\ \sum^{l} y_i - a \sum^{l} x_i - lb = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle xy \rangle - a \langle x^2 \rangle - b \langle x \rangle = 0 \\ \langle y \rangle - a \langle x \rangle = b \end{cases}$$

$$\langle xy \rangle - a \langle x^2 \rangle - \langle y \rangle \langle x \rangle + a \langle x \rangle^2 = 0$$

$$a = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \qquad b = \langle y \rangle - a \langle x \rangle$$

Подставим:

$a\langle x \rangle + \langle y \rangle - a \langle x \rangle = \langle y \rangle$

$\Rightarrow$ $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ – лежит на прямой

Упр. 3

$xw = y$ – недоопределенная система

$\|w\|^2 = w^T w \to \min$

Если существует $(XX^T)^{-1}$, то общее решение такой неоднородной системы

$w = X^T (XX^T)^{-1} b + (I_m - X^T (XX^T)^{-1} X) y$, y-произв

$Xw = b + (X - X)y = b$ $\Rightarrow$ подходит

$X^T(XX^T)^{-1}$ - правая псевдообр.

$w^Tw = (b^T(XX^T)^{-1}X + y^T(I_m\ X^T(XX^T)^{-1}X) \cdot w = b^T(XX^T)^{-1}b +$
$+ \underbrace{y^Ty - y^TX^T(XX^T)^{-1}Xy}_{\text{не м.б. отриц}} \to \min$

т.к иначе можно было бы домножить и получить сколь угодно малое w^Tw, даже отриц, тогда противор. $\Rightarrow w_{min} = X^T(XX^T)^{-1}b$

Упр. 4

$$(X-\tilde{X})(X-\tilde{X})^T = U(\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}})V^TV(\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}}) \cdot U^T = (\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}})^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{\tilde{F}+1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_F \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Сингулярное числа $X - \tilde{X}$ - посл.

$$\Rightarrow \|X - \tilde{X}\|^2 = \sum_{\tilde{F}+1}^{F} \lambda_i$$

$A = U\Sigma V^T$ - сингулярное разложение U-унит.

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \frac{(Ax, Ax)}{(x,x)} = \sup_{V_T x = 1} \frac{(U\Sigma V_0^T, U\Sigma V_0^T)}{(V^T_x, V^T_x)} = \sup_{z=1} \frac{\Sigma z, \Sigma z}{(z,z)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ сингулярной вектор, на кот. домн. число явл:

$$\underset{\|z\| \neq 0}{\mathrm{argmax}}\, (Az, Az) = \max$$

Упр. 5

$$U = \underset{\|z\|=1}{\mathrm{argmax}} \frac{(Mz, Mz)}{(z,z)} \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = M$$

$\sum (\underbrace{(x_i, y_i) \cdot u}_{\text{это усл. на } u})^2 \to \max$ чтобы $\sum dist^2[(x_i, y_i); a] \to \min$

Для любой прямой:

$\sum (x_i, y_i)u^2 + dist^2[(x_i, y_i); a] = const$, т.к. просто сумма расст. от 0 до точек