ДЗ 1.2. Бондаренко А.С.

Упр. 3

$$C_1\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2\|x\|_2$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\left(\sum_1^n |x_i|\right)^2 \ge \sum_1^n |x_i|^2 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\sum_1^n |x_i| \cdot 1 \le \sqrt{\sum_1^n x_i^2} \cdot \sqrt{n} \Rightarrow C_2 = \sqrt{n}$$

Упр. 4

$$\|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_1^m x_i^2} \le \sqrt{\sum_1^m x_{max}^2} = \sqrt{m}\,|x_{max}| = \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty \sqrt{n}}{\|x\|_2} \le \sqrt{n} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|} = [\text{no опред.}] = \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$A = \underset{m\times n}{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\underbrace{1+1+\dots+1}_{m}} = \sqrt{m}\cdot 1 = \|x\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty} = n$$

$$\|A\|_2 = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = \sqrt{n}$$

Упр. 5

$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr} A^T A = \operatorname{tr} AA^T$$

$$\|UA\|_F^2 = \operatorname{tr} A^T U^T U A = \operatorname{tr} A^T A = \|A\|_F^2$$

$$\|AU\|_F^2 = \operatorname{tr} AUU^T A^T = \operatorname{tr} AA^T = \|A\|_F^2$$