ДЗ 1.4. Бондаренко А.С. Б02-207

Гауссовы интегралы для МНК

1. A^{-1} - симметричн. матрица, значит, существует ортогональное преобр., которое ее диагонализует

$S^{-1}A^{-1}S = S^TA^{-1}S = \Lambda$ - диагональная

$\tilde{y} - y = Sz$:

$$\tilde{y} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\det \Lambda)^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^T\Lambda z}{2}\right) = \prod^{\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_i}} \exp\left(-\frac{z_i^2\lambda_i}{2}\right)$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(\tilde{y})dy_1 \ldots dy_\ell = \prod^{\ell} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(z_i)dz_i = 1$ - распр. норм.

2. Известно, что для распр.

$$\tilde{y} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\det A)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^TA^{-1}(\tilde{y}-y)}{2}\right)$$

неприводимыми корреляторами будут $\langle\langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle\rangle = A_{ij}$. Тогда замена $\tilde{y}_i - y_i \to \frac{\tilde{y}_i - y_i}{s_i}$. Значит соотв. корреляторы $\langle\langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle\rangle = s_i s_j A_{ij}$

Систематические погрешности в МНК

Хотим получить погрешность весов. Для этого нужно взять корень из дисперсии $\tilde{w}_i$ - случ. величин :

$$\tilde{w} = \underbrace{(X^TX)^{-1}X^T}_{Q} \cdot y$$

$$\tilde{w}_a = Q_{ak} \cdot y_k$$

$\sigma_{w_a}^2 = [\text{по опр.}] = \langle\langle \tilde{w}_a \tilde{w}_a \rangle\rangle = Q_{ai} \cdot Q_{aj} \cdot \langle\langle \tilde{y}_i y_j \rangle\rangle =$

$= (QAQ^T)_{aa} s_i s_j$

В случае диагональной A с учетом $QQ^T = (X^TX)^{-1}$:

$$\sigma_{w_a}^2 = (X^TX)^{-1}_{aa} A_i s_i^2$$

Т.е. нужно или $A_i = 1$, или вкл. погрешность в матрицу, тогда $A_i = S_i^2$

$$\sigma_{w_a}^2 = (X^T X)^{-1}_{aa} \cdot A_i = (X^T X)^{-1}_{aa} S_i^2$$

Систематическая погрешность весов:

$$\Delta_{сист} w_a = \sqrt{(QAQ^T)_{aa} S_i S_j}$$

Если матр. диаг:

$$\Delta_{сист} w_a = \sqrt{(X^T X)^{-1}_{aa} \cdot S_i^2}$$