

Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

Seminararbeit

**Analyse der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzles
mit Implementierung**

Studiengang Informatik

Studienrichtung angewandte Informatik

Verfasser(in):	Kai Fischer, Max Stubenbord
Matrikelnummer:	3683691, 5379506
Kurs:	TINF18AI1
Studiengangsleiter:	Prof. Dr. Holger Hofmann
Wissenschaftliche(r) Betreuer(in):	Prof. Dr. Karl Stroetmann
Bearbeitungszeitraum:	24.03.2021 – 11.06.2021

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel "*Analyse der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzles mit Implementierung*" selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich versichere zudem, dass die eingereichte elektronische Fassung mit der gedruckten Fassung übereinstimmt.

Ort, Datum

Kai Fischer, Max Stubenbord

Danksagung

Hier können Sie eine Danksagung schreiben.

Kurzfassung (Abstract)

Hier können Sie die Kurzfassung (engl. Abstract) der Arbeit schreiben. Beachten Sie dabei die Hinweise zum Verfassen der Kurzfassung.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Quelltextverzeichnis	vi
Abkürzungsverzeichnis	vii
1 Einleitung	1
1.1 Geschichte	1
1.2 Aufgabenstellung und Abgrenzung	2
1.3 Vorgehen	3
2 Grundlagen	4
2.1 Puzzle zu Listen wandeln	4
2.2 Zustände als Permutationen	5
2.3 Kontext Vorlesung + Abgrenzung	5
2.4 Sortieralgorithmen	5
3 Implementation	6
3.1 Umsetzung	6
3.2 Testing	8
4 Zusammenfassung	9
A Beispiel-Anhang: Testanhang	10
B Beispiel-Anhang: Noch ein Testanhang	15

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1	Zielzustand des 15 Puzzels	1
Abbildung 1.2	Illustration des 14-15 Puzzels von Sam Loyd	2
Abbildung 2.1	Beispiel Zustand eines 4x4-Puzzles	4
Abbildung 2.2	Häufig verwendeter Zielzustand eines 4x4-Puzzles	5
Abbildung 2.3	Verwendeter Zielzustand eines 4x4-Puzzles im Skript von Herrn Stroetmann TODO:StroetmannSkriptp	5

Quelltextverzeichnis

A.1 Python Code zur Validierung der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzels . . .	10
---	----

Abkürzungsverzeichnis

AD	Archiv für Diplomatik, Schriftgeschichte, Siegel- und Wappenkunde
BMBF	Bundesministerium für Bildung und Forschung
DHBW	Duale Hochschule Baden-Württemberg
ECU	European Currency Unit
EU	Europäische Union
RDBMS	Relational Database Management System

1 Einleitung

1.1 Geschichte

Die erste bekannte Erscheinung des heute so bekannten Puzzels ist in den 1870'er Jahren in Amerika aufgetreten. Bisher ist man davon ausgegangen, dass der Erfinder des Puzzels der Amerikaner Sam Loyd ist, jedoch ist nach einer Untersuchung von Jerry Slocum and Dieter Gebhardt Sam Loyd gar nicht der echte Erfinder des 15-Puzzels [[anchor-puzzle:book](#), [the-15-puzzle:online](#)]. Demnach hat Sam Loyd die Idee nur gut vermarktet und sich selbst dadurch in die Öffentlichkeit gestellt [[wiki-15-puzzle:online](#)].

zitat? -> woher die information Nichtsdestotrotz hat Sam Loyd es geschafft die Aufmerksamkeit der Öffentlichkeit auf das Puzzle zu lenken und somit das Interesse vieler geweckt.

Das Ziel des Puzzels ist es 15 Puzzlesteine numeriert von 1-15 auf einer 4 x 4 Ebene durch Verschiebung in seine Ursprüngliche sortierte Form zurückzubringen (vgl. Abb.1.1).

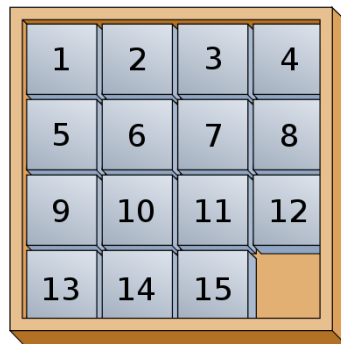


Abbildung 1.1: Zielzustand des 15 Puzzels

Der schnelle Ruhm des Puzzels ergab sich nun daraus, dass Sam Loyd ein Preisgeld von \$1000 für denjenigen ausschrieb, der sein Puzzle lösen kann. Darauf folgte ein öffentlicher Ansturm auf das Puzzle, welches als „14-15 Puzzle“ bekannt wurde, da lediglich die 14 und 15 vertauscht wurden. (Vgl. Abb.1.2)

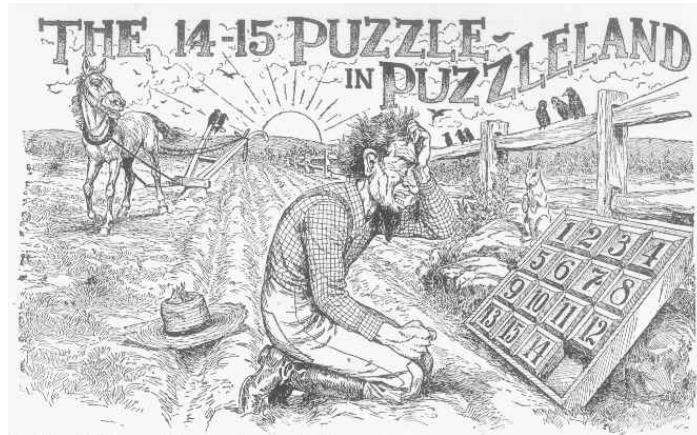


Abbildung 1.2: Illustration des 14-15 Puzzels von Sam Loyd (1914)

Quelle: [loyd-cyclopedia:book]

Allerdings zeigte sich im Nachhinein, dass das Puzzle unlösbar ist, da es eine Transformation von einer geraden zu einer ungeraden Permutation erfordert [wiki-15-puzzle:online]. Die Unlösbarkeit des Puzzels wurde erstmals von Wm. Woolsey Johnson und William E. Story im Jahre 1879 bei einer Veröffentlichung des American Journal of Mathematics bewiesen. [ajom-notes-15-puzzle:article] Somit gewann keiner das Preisgeld von \$1000. Das 15-Puzzle wurde daraufhin auch bei einer Illustration mit dem Titel „The Great Presidential Puzzle“ der US-Präsidentschaftswahl 1880 referenziert. Zu finden ist dies in der United States Library of Congress's Prints and Photographs division unter der Digitalen ID [ppmsca.15782](#) [presidential-puzzle:online].

1.2 Aufgabenstellung und Abgrenzung

Hätte man damals bewiesen, dass das Puzzle aus der Einleitung von Sam Loyd nicht lösbar ist, wäre wohl vielen Menschen nächtelange Verzweiflung erspart geblieben.

Nun stellt sich Frage wann eine Instanz des Puzzels lösbar ist. Allgemein gesprochen ist eine Instanz eines 15 Puzzels dann lösbar, falls es eine Sequenz von zulässigen Zügen gibt, welche vom Startzustand zum Zielzustand führen.

Diese Annahme gilt als Zutreffend für genau die Hälfte aller möglichen $16! \approx 2 \cdot 10^{13}$ Puzzle Kombinationen [sliding-piece-puzzles:book, solving-15-puzzle-lvi:article]. Das Puzzle Problem ist ein klassischer Anwendungsfall wenn es um Modellierung von Algorithmen mit Heuristiken geht. Üblicherweise werden Algorithmen wie A^* oder IDA^* zur Lösung solcher Heuristiken genutzt [wiki-15-puzzle:online, solving-15-puzzle-lvi:article, depth-first-id:article].

Im Rahmen dieser Arbeit geht es nun darum bei gegebener Puzzelinstantz vorherzusagen, ob diese als lösbar oder unlösbar gilt. Was bei dieser Arbeit nicht betrachtet wird, sind die verschiedenen Algorithmen wie A^* oder auch IDA^* . Diese werden ausführlich im zugehörigen [Vorlesungsskript](#) in den Sektionen **2.7** A^* Search und **2.10** A^* - IDA^* Search erläutert. Lediglich werden diese genutzt um die als lösbar identifizierten Puzzels anschließend auch zu lösen.

1.3 Vorgehen

Das Vorgehen der Arbeit ist dabei wie folgt:

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen und Gedanken für die Umsetzung im nächsten Kapitel 3 vorgestellt. Die Lösung und das Vorgehen basieren maßgeblich auf dem Beitrag „[Why is this Puzzle Impossible? - Numberphile](#)“ von Herrn Steven Bradlow zur Lösbarkeit des „14-15 puzzles“ aus der Einleitung auf dem Youtube Kanal „Numberphile“ [[Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online](#)].

2.1 Puzzle zu Listen wandeln

Der Lösungsansatz aus [[Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online](#)] basiert auf Permutationen. Um 4x4 Puzzle besser auf Permutationen untersuchen zu können, werden die Puzzle als Listen von Zahlen dargestellt. Dazu werden die Inhalte der Zellen des Puzzles Zeilenweise hintereinander in eine Liste geschrieben. Die Leerstelle, auch als „blank“ beschrieben, wird dabei als Zahl „0“ interpretiert. Der Zustand des Puzzles aus Abb.2.1

	1	2	3
4	5	6	8
14	7	11	10
9	15	12	13

Abbildung 2.1: Beispiel Zustand eines 4x4-Puzzles

wird als Liste aus Zahlen wie folgt dargestellt:

$$State = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 14, 7, 11, 10, 9, 15, 12, 13\}$$

Wichtig ist bei der Betrachtung der lösbaren Puzzle und des Vorgehen der Lösung aus [Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online] aber auch anderer Verfügbarer Quellen wie [bibid] TODO: die ganzen anderen Quellen mal eintragen. Die Bezeichnung der Leerstelle oder die Art der Konvertierung eines Puzzles zu einer Liste variiert. Die meisten Lösungen sehen den Zielzustand aus Abb.2.2 vor, wobei die Leerstelle dann die Nummer „16“ trägt. Um mit den Darstellungen von Herrn Stroetmann aus dem Vorlesungsskript TODO :strotmann zitat übereinzustimmen, wird der Zielzustand aus Abb.2.3 angestrebt, bei dem die Leerstelle die Nummer „0“ trägt.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Abbildung 2.2: Häufig verwendeter Zielzustand eines 4x4-Puzzles

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Abbildung 2.3: Verwendeter Zielzustand eines 4x4-Puzzles im Skript von Herrn Stroetmann TODO:StroetmannSkript

2.2 Zustände als Permutationen

2.3 Kontext Vorlesung + Abgrenzung

2.4 Sortieralgorithmen

Mit Ordnung?!

3 Implementation

3.1 Umsetzung

Der vollständige Quellcode ist im Anhang unter A.1 zu finden.

Zur Umsetzung wird zu erst eine Datenstruktur definiert, in welcher die Instanzen des 15-Puzzels ausgewertet werden. Hierfür werden Tupel von Tupeln verwendet. Anschließend ist die gernerelle Idee, wie auch schon in `kais abschnitt?` vorgestellt zu schauen, ob die Anzahl der Permutationen bei der Datenstruktur als 1-Dimensionale Liste und der Abstand des Blank-Feldes vom Start- zum Zielzustand die gleiche Parität besitzen. Ist diese gleich, so ist das Puzzel lösbar, vice versa unlösbar.

Spannend ist hier allerdings, dass dies kein Indikator für die Komplexität der Lösbarkeit gibt. So kann ein lösbares Puzzel mit den zur Verfügung stehenden Algorithmen wie A^* oder IDA^* nicht in angemessener Zeit gelöst werden.

Das weitere Vorgehen der Implementierung ist weitesgehend die Bearbeitung von kleinen Teilproblemen, welche sich aus dem eben genannten Vorgehen ergeben.

So betrachten wir zunächst die Anzahl der Permutationen, welche sich in einer Puzzelinstantz befinden. Um diese zu berechnen wird als Datenstruktur eine Liste mit der Dimension 1 benötigt. Anschließend muss die Liste durch tauschen der Elemente sortiert werden. Praktischerweise ist der Lösungszustand des Puzzels so definiert, dass der Index innerhalb der Liste und der Wert des zugehörigen Elementes identisch sind. Somit kann für jeden Index der entsprechende Wert innerhalb der Liste gesucht werden, sodass eine minimale Anzahl von *swaps* durchgeführt werden.

Die Anzahl der getätigten *swaps* liefert uns dann die Anzahl der vorhandenen Permutationen innerhalb der Puzzelinstantz.

Die Implementierung ist dabei wie folgt:

```
1 def get_inversion_count(Puzzle: tuple) -> int:
2     working_1d_puzzle = to_1d(Puzzle)
3     count = 0
4     for i in range(len(working_1d_puzzle)):
5         if working_1d_puzzle[i] != i:
```

```

6         count += 1
7         swap(i, find_tile_1d(i, working_1d_puzzle),
              ↪ working_1d_puzzle)
8     return count

```

wobei die Funktion **to_1d** definiert ist durch

```
to_1d = lambda Puzzle: [elem for tupl in Puzzle for elem in tupl]
```

und die Funktion **swap** durch

```

def swap(idxA, idxB, Puzzle_1d):
    Puzzle_1d[idxA], Puzzle_1d[idxB] = Puzzle_1d[idxB],
    ↪ Puzzle_1d[idxA]

```

definiert ist. Die Funktion **find_tile_1d** gibt den Index einer 1-Dimensionalen Liste zurück, an der das entsprechende Element zu finden ist. Diese ist auch im Anhang unter A.1 zu finden.

Nun muss als nächstes die Distanz des Blank-Feldes vom Startzustand zum Zielzustand berechnet werden. Hierbei wird die x, y Position des Blank-Feldes im Startzustand gesucht und anschließend ähnlich wie bei der Manhattan Distanz die Absolute Differenz beider Zustände addiert. Da die x, y Position des Blank-Feldes im Endzustand immer $0, 0$ ist, muss diese nicht berechnet werden, wird in der Funktion allerdings auch gesucht, sodass bei einer Erweiterung noch der Endzustand variieren kann. Sei α, β nun die Position des Blank-Feldes der Matrix A und γ, ϵ die Position des Blank-Feldes der Matrix B , so ist der Abstand beider Blank-Felder durch

$$|\alpha - \gamma| + |\beta - \epsilon|$$

definiert. Die dazugehörige Funktion **manhattan** ist auch im Anhang unter A.1 zu finden. Zuallerletzt muss nur noch geschaut werden, ob das Produkt der Distanz und die Anzahl der Permutationen im Startzustand die gleiche Parität besitzen. Damit wissen wir nun, ob diese Instanz lösbar ist.

3.2 Testing

Um nun verschiedene Puzzelinstanzen und deren Lösbarkeit anhand des Codes zu testen, werden verschiedene Startzustände und zu Testzwecken verschiedene Endzustände definiert. Anschließend werden alle Startzustände zunächst auf Lösbarkeit des „normalen“ Endzustandes getestet, danach auf Lösbarkeit von allen anderen definierten Endzuständen. Um eine verbose Ausgabe zu ermöglichen, bei der noch die verschiedenen zuvor berechneten Werte ausgegeben werden können, kann der Funktion, welche die Puzzelinstanzen auf ihre Lösbarkeit prüft noch ein entsprechender verbose Flag mitgegeben werden. Somit kann anhand schon bekannten lösbarer Instanzen überprüft werden, ob die Implementierung vollständig ist.

Der Output dieses Testes befindet sich im dazugehörigen [Jupyter-Notebook](#).

Diese Puzzel werden dann bspw. in das schon aus der Vorlesung bekannte [Jupyter-Notebook](#) zum lösen der Instanzen gegeben, sodass geschaut werden kann, ob diese in angemessener Zeit lösbar sind und wieviele Züge für die jeweilige Lösung gebraucht werden.

4 Zusammenfassung

A Beispiel-Anhang: Testanhang

Python Code zur Validierung der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzels

Quelltext A.1: Python Code zur Validierung der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzels

```
1  #!/usr/bin/env python
2  # coding: utf-8
3  start1 = {
4      'data': ((13, 2, 10, 3),
5              (1, 12, 8, 4),
6              (5, 0, 9, 6),
7              (15, 14, 11, 7)),
8      'name': 'start1'}
9
10 start2 = {
11     'data': ((0, 1, 2, 3),
12             (4, 5, 6, 8),
13             (14, 7, 11, 10),
14             (9, 15, 12, 13)
15             ),
16     'name': 'start2'
17 }
18
19 start3 = {
20     'data': ((6, 13, 7, 10),
21             (8, 9, 11, 0),
22             (15, 2, 12, 5),
23             (14, 3, 1, 4)),
24     'name': 'start3'
25 }
26
27
```

```
28 start4 = {
29     'data': ((3, 9, 1, 15),
30             (14, 11, 4, 6),
31             (13, 0, 10, 12),
32             (2, 7, 8, 5)),
33     'name': 'start4'
34 }
35
36 start5 = {
37     'data': ((1, 2, 3, 4),
38             (5, 6, 7, 8),
39             (9, 10, 11, 12),
40             (13, 15, 14, 0)),
41     'name': 'start5'
42 }
43
44 upperLeft = {
45     'data': ((0, 1, 2, 3),
46             (4, 5, 6, 7),
47             (8, 9, 10, 11),
48             (12, 13, 14, 15)),
49     'name': 'solved - Blank upper Left'
50 }
51
52 downRight = {
53     'data': ((1, 2, 3, 4),
54             (5, 6, 7, 8),
55             (9, 10, 11, 12),
56             (13, 14, 15, 0)),
57     'name': 'solved - Blank down Right'
58 }
59 upperRight = {
60     'data': ((1, 2, 3, 0),
61             (4, 5, 6, 7),
62             (8, 9, 10, 11),
```

```

63         (12, 13, 14, 15)),
64     'name': 'solved - Blank upper Right'
65 }
66 downLeft = {
67     'data': ((1, 2, 3, 4),
68             (5, 6, 7, 8),
69             (9, 10, 11, 12),
70             (0, 13, 14, 15)),
71     'name': 'solved - Blank down Left'
72 }
73 spirale = {
74     'data': ((1, 2, 3, 4),
75             (12, 13, 14, 5),
76             (11, 0, 15, 6),
77             (10, 9, 8, 7)),
78     'name': 'spirale Goal'
79 }
80
81 Starts = [start1, start2, start3, start4, start5]
82 Goals = [upperLeft, upperRight, downLeft, downRight, spirale]
83
84
85 def to_1d(Puzzle: tuple) -> list:
86     return [elem for tupl in Puzzle for elem in tupl]
87
88
89 def swap(idxA, idxB, Puzzle_1d):
90     Puzzle_1d[idxA], Puzzle_1d[idxB] = Puzzle_1d[idxB],
91     ↪ Puzzle_1d[idxA]
92
93 def find_tile_1d(tile, State_1d):
94     n = len(State_1d)
95     for it in range(n):
96         if State_1d[it] == tile:

```

```
97         return it
98
99
100 def get_inversion_count(Puzzle: tuple) -> int:
101     working_1d_puzzle = to_1d(Puzzle)
102     count = 0
103     old_count = -1
104     while old_count != count:
105         old_count = count
106         for i in range(len(working_1d_puzzle)):
107             if working_1d_puzzle[i] != i:
108                 count += 1
109                 swap(i, find_tile_1d(i, working_1d_puzzle),
110                     ↪ working_1d_puzzle)
111
112     return count
113
114
115 def find_tile(tile, State):
116     n = len(State)
117     for row in range(n):
118         for col in range(n):
119             if State[row][col] == tile:
120                 return row, col
121
122
123 def manhattan(stateA, stateB):
124     tile = 0
125     result = 0
126     rowA, colA = find_tile(tile, stateA)
127     rowB, colB = find_tile(tile, stateB)
128     result += abs(rowA - rowB) + abs(colA - colB)
129     return result
130
131
132 def is_solvable(Start: tuple, verbose: bool = False) -> int:
```

```
131     Destination: tuple = upperLeft
132     if verbose:
133         print(f"Name: {Start['name']}")
134         print(f"Start is: {Start['data']}")
135         print(f"Inversion Count:
136             ↪ {get_inversion_count(Start['data'])}")
137         print(
138             f"Manhattan Distance: {manhattan(Start['data'],
139             ↪ Destination['data'])}")
140     return (get_inversion_count(Start['data']) +
141             ↪ manhattan(Start['data'], Destination['data'])) % 2 == 0
142
143 for s in Starts:
144     print(f"is solvable: {is_solvable(s, verbose=True)}")
145     print('\n')
146
147 get_inversion_count(start4['data'])
```

B Beispiel-Anhang: Noch ein Testanhang

nochmal: lipsum ...