

Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

**Seminararbeit**

**Analyse der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzles  
mit Implementierung**

**Studiengang Informatik**

**Studienrichtung angewandte Informatik**

Verfasser(in):	Kai Fischer, Max Stubenbord
Matrikelnummer:	3683691, 5379506
Kurs:	TINF18AI1
Studiengangsleiter:	Prof. Dr. Holger Hofmann
Wissenschaftliche(r) Betreuer(in):	Prof. Dr. Karl Stroetmann
Bearbeitungszeitraum:	24.03.2021 – 11.06.2021

# Ehrenwörtliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel "*Analyse der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzles mit Implementierung*" selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich versichere zudem, dass die eingereichte elektronische Fassung mit der gedruckten Fassung übereinstimmt.

Ort, Datum

Kai Fischer, Max Stubenbord

# Danksagung

Hier können Sie eine Danksagung schreiben.

# Kurzfassung (Abstract)

Hier können Sie die Kurzfassung (engl. Abstract) der Arbeit schreiben. Beachten Sie dabei die Hinweise zum Verfassen der Kurzfassung.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Quelltextverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Geschichte . . . . .	1
1.2 Aufgabenstellung und Abgrenzung . . . . .	2
1.3 Vorgehen . . . . .	3
<b>2 Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1 Puzzle zu Listen wandeln . . . . .	4
2.2 Zustände als Permutationen . . . . .	5
2.3 Nutzen des Algorithmus an Beispielen . . . . .	7
<b>3 Implementation</b>	<b>14</b>
3.1 Umsetzung . . . . .	14
3.2 Testing . . . . .	16
<b>4 Zusammenfassung</b>	<b>17</b>
<b>A Beispiel-Anhang: Testanhang</b>	<b>18</b>
<b>B Beispiel-Anhang: Noch ein Testanhang</b>	<b>23</b>

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1	Zielzustand des 15 Puzzels . . . . .	1
Abbildung 1.2	Illustration des 14-15 Puzzels von Sam Loyd . . . . .	2
Abbildung 2.1	Beispiel Zustand eines 4x4-Puzzles . . . . .	4
Abbildung 2.2	Häufig verwendeter Zielzustand eines 4x4-Puzzles . . . . .	5
Abbildung 2.3	Verwendeter Zielzustand eines 4x4-Puzzles im Skript von Herrn Stroetmann TODO:StroetmannSkript . . . . .	5
Abbildung 2.4	Beispiel1: Startzustand eines 4x4-Puzzles nach figure 2.20 aus [github-stroetmann:online] . . . . .	7
Abbildung 2.5	Beispiel1: Zu erreichender Zielzustand für das Puzzle nach figure 2.20 aus [github-stroetmann:online] . . . . .	7
Abbildung 2.6	Beispiel1: Anwendung des Algorithmus auf ein Vorlesungsbeispiel . . . . .	8
Abbildung 2.7	Beispiel2: Startzustand für das Loyd Puzzle . . . . .	9
Abbildung 2.8	Beispiel2: Zu erreichender Zielzustand für das Loyd Puzzle . . . . .	9
Abbildung 2.9	Beispiel2: Anwendung des Algorithmus auf das Loyd Puzzle . . . . .	10
Abbildung 2.10	Beispiel2: Anwendung des Algorithmus auf die Überführbarkeit der Endzustände von Loyd und Stroetmann. . . . .	12

# Quelltextverzeichnis

A.1 Python Code zur Validierung der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzels . . .	18
---	----

# Abkürzungsverzeichnis

<b>AD</b>	Archiv für Diplomatik, Schriftgeschichte, Siegel- und Wappenkunde
<b>BMBF</b>	Bundesministerium für Bildung und Forschung
<b>DHBW</b>	Duale Hochschule Baden-Württemberg
<b>ECU</b>	European Currency Unit
<b>EU</b>	Europäische Union
<b>RDBMS</b>	Relational Database Management System



# 1 Einleitung

## 1.1 Geschichte

Die erste bekannte Erscheinung des heute so bekannten Puzzels ist in den 1870'er Jahren in Amerika aufgetreten. Bisher ist man davon ausgegangen, dass der Erfinder des Puzzels der Amerikaner Sam Loyd ist, jedoch ist nach einer Untersuchung von Jerry Slocum and Dieter Gebhardt Sam Loyd gar nicht der echte Erfinder des 15-Puzzels [[anchor-puzzle:book](#), [the-15-puzzle:online](#)]. Demnach hat Sam Loyd die Idee nur gut vermarktet und sich selbst dadurch in die Öffentlichkeit gestellt [[wiki-15-puzzle:online](#)].

zitat? -> woher die information Nichtsdestotrotz hat Sam Loyd es geschafft die Aufmerksamkeit der Öffentlichkeit auf das Puzzle zu lenken und somit das Interesse vieler geweckt.

Das Ziel des Puzzels ist es 15 Puzzlesteine numeriert von 1-15 auf einer 4 x 4 Ebene durch Verschiebung in seine Ursprüngliche sortierte Form zurückzubringen (vgl. Abb.1.1).

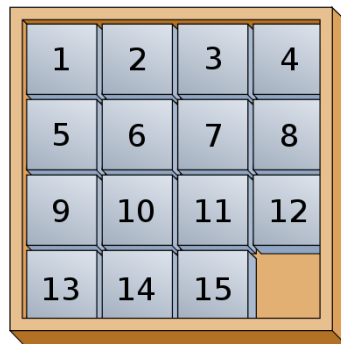


Abbildung 1.1: Zielzustand des 15 Puzzels

Der schnelle Ruhm des Puzzels ergab sich nun daraus, dass Sam Loyd ein Preisgeld von \$1000 für denjenigen ausschrieb, der sein Puzzle lösen kann. Darauf folgte ein öffentlicher Ansturm auf das Puzzle, welches als „14-15 Puzzle“ bekannt wurde, da lediglich die 14 und 15 vertauscht wurden. (Vgl. Abb.1.2)

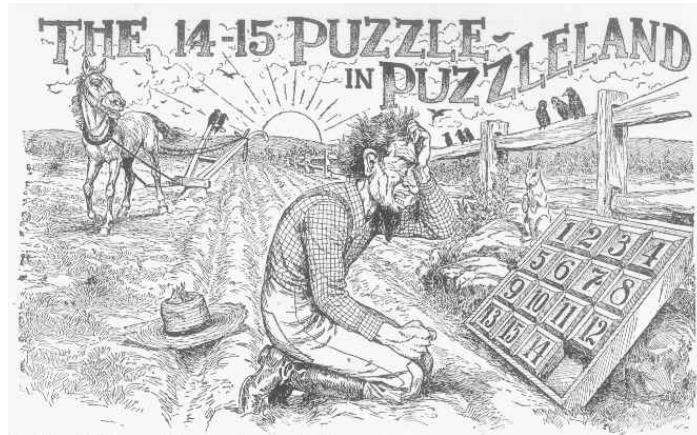


Abbildung 1.2: Illustration des 14-15 Puzzels von Sam Loyd (1914)

Quelle: [loyd-cyclopedia:book]

Allerdings zeigte sich im Nachhinein, dass das Puzzle unlösbar ist, da es eine Transformation von einer geraden zu einer ungeraden Permutation erfordert [wiki-15-puzzle:online]. Die Unlösbarkeit des Puzzels wurde erstmals von Wm. Woolsey Johnson und William E. Story im Jahre 1879 bei einer Veröffentlichung des American Journal of Mathematics bewiesen. [ajom-notes-15-puzzle:article] Somit gewann keiner das Preisgeld von \$1000. Das 15-Puzzle wurde daraufhin auch bei einer Illustration mit dem Titel „The Great Presidential Puzzle“ der US-Präsidentschaftswahl 1880 referenziert. Zu finden ist dies in der United States Library of Congress's Prints and Photographs division unter der Digitalen ID [ppmsca.15782](#) [presidential-puzzle:online].

## 1.2 Aufgabenstellung und Abgrenzung

Hätte man damals bewiesen, dass das Puzzle aus der Einleitung von Sam Loyd nicht lösbar ist, wäre wohl vielen Menschen nächtelange Verzweiflung erspart geblieben.

Nun stellt sich Frage wann eine Instanz des Puzzels lösbar ist. Allgemein gesprochen ist eine Instanz eines 15 Puzzels dann lösbar, falls es eine Sequenz von zulässigen Zügen gibt, welche vom Startzustand zum Zielzustand führen.

Diese Annahme gilt als Zutreffend für genau die Hälfte aller möglichen  $16! \approx 2 \cdot 10^{13}$  Puzzle Kombinationen [sliding-piece-puzzles:book, solving-15-puzzle-lvi:article]. Das Puzzle Problem ist ein klassischer Anwendungsfall wenn es um Modellierung von Algorithmen mit Heuristiken geht. Üblicherweise werden Algorithmen wie  $A^*$  oder  $IDA^*$  zur Lösung solcher Heuristiken genutzt [wiki-15-puzzle:online, solving-15-puzzle-lvi:article, depth-first-id:article].

Im Rahmen dieser Arbeit geht es nun darum bei gegebener Puzzelinstantz vorherzusagen, ob diese als lösbar oder unlösbar gilt. Was bei dieser Arbeit nicht betrachtet wird, sind die verschiedenen Algorithmen wie  $A^*$  oder auch  $IDA^*$ . Diese werden ausführlich im zugehörigen [Vorlesungsskript \[github-stroetmann:online\]](#) in den Sektionen **2.7  $A^*$  Search** und **2.10  $A^*$ - $IDA^*$  Search** erläutert. Lediglich werden diese genutzt um die als lösbar identifizierten Puzzels anschließend auch zu lösen.

## 1.3 Vorgehen

Das Vorgehen der Arbeit ist dabei wie folgt:

## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen und Gedanken für die Umsetzung im nächsten Kapitel 3 vorgestellt. Die Lösung und das Vorgehen basieren maßgeblich auf dem Beitrag „[Why is this Puzzle Impossible? - Numberphile](#)“ von Herrn Steven Bradlow zur Lösbarkeit des „14-15 puzzles“ aus der Einleitung auf dem Youtube Kanal „Numberphile“ [[Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online](#)].

### 2.1 Puzzle zu Listen wandeln

Der Lösungsansatz aus [[Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online](#)] basiert auf Permutationen. Um 4x4 Puzzle besser auf Permutationen untersuchen zu können, werden die Puzzle als Listen von Zahlen dargestellt. Dazu werden die Inhalte der Zellen des Puzzles Zeilenweise hintereinander in eine Liste geschrieben. Die Leerstelle, auch als „blank“ beschrieben, wird dabei als Zahl „0“ interpretiert. Der Zustand des Puzzles aus Abb.2.1

	1	2	3
4	5	6	8
14	7	11	10
9	15	12	13

Abbildung 2.1: Beispiel Zustand eines 4x4-Puzzles

wird als Liste aus Zahlen wie folgt dargestellt:

$$State = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 14, 7, 11, 10, 9, 15, 12, 13\}$$

Wichtig ist bei der Betrachtung der lösbaren Puzzle und des Vorgehen der Lösung aus **[Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online]** aber auch anderer Verfügbarer Quellen wie **[bibid]** TODO: die ganzen anderen Quellen mal eintragen. Die Bezeichnung der Leerstelle oder die Art der Konvertierung eines Puzzles zu einer Liste variiert. Die meisten Lösungen sehen den Zielzustand aus Abb.2.2 vor, wobei die Leerstelle dann die Nummer „16“ trägt. Um mit den Darstellungen von Herrn Stroetmann aus dem Vorlesungsskript TODO :strotmann zitat übereinzustimmen, wird der Zielzustand aus Abb.2.3 angestrebt, bei dem die Leerstelle die Nummer „0“ trägt.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Abbildung 2.2: Häufig verwendeter Zielzustand eines 4x4-Puzzles

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Abbildung 2.3: Verwendeter Zielzustand eines 4x4-Puzzles im Skript von Herrn Stroetmann TODO:StroetmannSkript

## 2.2 Zustände als Permutationen

Die Grund-Idee der Lösbarkeitsüberprüfung von Bradlow basiert auf dem Vergleichen der Paritäten zwischen benötigten Transpositionen und benötigter Züge zum Verrücken der Leerstelle. Im Folgenden wird die Idee aus seinem Beitrag **[Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online]** zusammengefasst vorgestellt.

Die Vorstellung des Verfahrens beginnt Bradlow damit die Puzzle wie in der vorherigen Sektion in Zahlen Reihen zu wandeln. Durch das Vertauschen von 2 beliebigen Zahlen aus

dieser Zahlenreihe entsteht eine Permutation der vorherigen Reihe. Auf diese Weise sei jeder möglicher Zustand in dem sich das Puzzle befinden kann als eine Permutation einer zugrundeliegenden aufsteigend sortierten Zahlenreihe zu sehen. Für diese Permutationen beschreibt er die folgenden zwei Eigenschaften:

- E1** Jede dieser Permutationen lässt sich nur durch das Nutzen von Transpositionen, also dem Vertauschen von Zwei Elementen aus der Liste, während die restlichen gleich bleiben, in eine andere Permutation überführen [**Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online**].
- E2** Die Anzahl der Schritte, die für das Überführen einer Permutation in eine andere Permutation mithilfe von Transpositionen benötigt wird, ist nicht festgelegt, aber die Parität dieser Zahl ist fest [**Unsolvable-14-15-Numberphile-YT:online**].

Basierend auf diesen Eigenschaften fährt er fort, dass die Parität der Anzahl notwendiger Transpositionen durch das zielgerichtete Tauschen der Zahlen, mit dem Ziel einer aufsteigend sortierten Zahlenreihe, ermittelt werden kann. Wie in der vorherigen Sektion beschrieben, sieht auch Bradlow die sortierte Zahlenreihe

$$Goal_{Bradlow} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

als Abbild des Zielzustandes vor. Daher ist in seinem Vortrag das Ziel der Transpositionen die aufsteigend sortierte Liste. Durch E1 ist sicher gestellt, dass die sortierte Liste erreicht werden kann. E2 begründet, dass die Parität der für die Sortierung notwendigen Transpositionen mit der Parität der notwendigen Züge, wenn das Puzzle lösbar ist, übereinstimmt, obwohl die Regeln des Puzzles nicht betrachtet und somit möglicherweise nicht eingehalten werden.

Im zweiten Schritt der Lösbarkeitsüberprüfung ermittelt Bradlow die Parität der notwendigen legalen Züge zum Überführen der Leerstelle aus dem Startzustand zum Zielzustand. Dabei ist ebenfalls jeder einzelne Zug als eine Transposition zu sehen.

Lösbar ist ein Puzzle nach Bradlow dann, wenn die ermittelten Paritäten übereinstimmen. Denn nach E2 sind die Paritäten festgelegt und können nicht verändert werden. Die Parität der Leerstellen Bewegung ist Legal, während Parität der notwendigen zur Sortierung notwendigen Züge nur hypothetisch sind. stimmen die Paritäten nicht überein existiert nach E2 keine Möglichkeit beide Ziele, also die Sortierung ebenso wie das einhalten Zugregeln einzuhalten.

In der nächsten Sektion wird dieses Verfahren an einem Beispiel schrittweise durchgegangen.

Für die Sektion 3.1, soll noch erwähnt werden, dass sich die Leerstelle nur horizontal und vertikal „bewegen“ darf und sich die Anzahl der Züge so mithilfe der Manhattan-Distanz ermitteln lässt.

## 2.3 Nutzen des Algorithmus an Beispielen

Aus der Vorlesung von Herrn Stroetmann und dem begleitenden Skript [[github-stroetmann:online](#)] ist bekannt, dass sich Puzzle aus Abb.2.4 lösen, also in den Zielzustand aus Abb.2.5 überführen lässt.

	1	2	3
4	5	6	8
14	7	11	10
9	15	12	13

Abbildung 2.4: Beispiel1: Startzustand eines 4x4-Puzzles nach figure 2.20 aus [[github-stroetmann:online](#)]

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Abbildung 2.5: Beispiel1: Zu erreichender Zielzustand für das Puzzle nach figure 2.20 aus [[github-stroetmann:online](#)]

Der Algorithmus aus dem vorherigen Abschnitt schätzt diese Puzzles ebenfalls als Lösbar ein.

**S1.1** Konvertierung der Puzzle-Zustände in Zahlenreihen

$$start_{ex1} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 14, 7, 11, 10, 9, 15, 12, 13\}$$

$$end_{ex1} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

**S1.2** Notwendige Transpositionen  $T_{ex1}$  um  $start_{ex1}$  zu sortieren:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 14, 7, 11, 10, 9, 15, 12, 13 \quad (8, 7)$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 8, 11, 10, 9, 15, 12, 13 \quad (14, 8)$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 11, 10, 9, 15, 12, 13 \quad (14, 9)$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 10, 14, 15, 12, 13 \quad (11, 10)$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 12, 13 \quad (14, 12)$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13 \quad (15, 13)$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$$

$$T_{ex1} = \{(8, 7), (14, 8), (14, 9), (11, 10), (14, 12), (15, 13)\}$$

$$|T_{ex1}| = 6 \rightarrow \text{Parität} = 0$$

**S1.3** Anzahl der Notwendigen Züge  $z_{ex1}$  um das Leerfeld von der Position aus dem Startzustand (Koordinaten (0, 0)) an die Position des Zielzustandes (Koordinaten (0, 0)) zu verschieben.

$$z_{ex1} = |0 - 0| + |0 - 0|$$

$$z_{ex1} = 0 \rightarrow \text{Parität} = 0$$

**S1.4** Die Paritäten stimmen überein, das Puzzle ist Lösbar.

Abbildung 2.6: Beispiel1: Anwendung des Algorithmus auf ein Vorlesungsbeispiel

Dazu wird wie in Abb.2.6 schrittweise vorgegangen. Zunächst werden, wie im Abschnitt 2.1 und in Schritt 1 (S1.1) dargestellt, die Zustände in Zahlenreihen konvertiert. Anschließend werden die Paritäten ermittelt (S1.2 und S1.3). Zunächst die Parität der Anzahl notwendiger Transpositionen und anschließend die Parität benötigter Züge um die Leerstelle korrekt zu platzieren. Im abschließenden Schritt (S1.4) werden die ermittelten Paritäten verglichen. In diesem Beispiel stimmen diese Paritäten überein. Das Beispiel ist also lösbar.

Als nächstes wird das Puzzle von Loyd aus der Einleitung betrachtet. Der bereits bekannte Startzustand ist in Abb.2.7 zur Vereinfachung erneut abgebildet. Der Ziel Zustand ist



daneben in Abb.2.8 dargestellt.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Abbildung 2.7: Beispiel2: Startzustand für das Loyd Puzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Abbildung 2.8: Beispiel2: Zu erreichender Zielzustand für das Loyd Puzzle

Auch hier wird der beschriebene Algorithmus angewandt, das vorgehen ist in Abb.2.9 skizziert.

**S2.1** Konvertierung der Puzzle-Zustände in Zahlenreihen

$$start_{ex2} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 0\}$$

$$end_{ex2} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 0\}$$

**S2.2** Notwendige Transpositionen  $T_{ex2}$  um  $start_{ex2}$  zu  $end_{ex2}$  überführen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 0 \quad (15, 14)$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 0$$

$$T_{ex2} = \{(14, 15)\}$$

$$|T_{ex2}| = 1 \rightarrow \text{Parität} = 1$$

**S2.3** Anzahl der Notwendigen Züge  $z_{ex2}$  um das Leerfeld von der Position aus dem Startzustand (Koordinaten (3, 3)) an die Position des Zielzustandes (Koordinaten (3, 3)) zu verschieben.

$$z_{ex1} = |3 - 3| + |3 - 3|$$

$$z_{ex1} = 0 \rightarrow \text{Parität} = 0$$

**S2.4** Die Paritäten stimmen nicht überein, das Puzzle ist somit **nicht Lösbar**.

Abbildung 2.9: Beispiel2: Anwendung des Algorithmus auf das Loyd Puzzle

Da die Zielzustände der beiden Puzzle verschieden sind (Abb.2.5 und Abb.2.8) unterscheiden sich auch die Zahlenreihen als welche diese dargestellt werden. doch zur Übersichtlichkeit wurde sowohl in S1.1 als auch in S2.1 die Leerstelle mit der Zahl „0“ kodiert. Es ist leicht zu erkennen, dass nur eine Transposition notwendig ist, um die Zahlenreihe  $start_{ex2}$  in die Reihe  $end_{ex2}$  überführen, die Parität des Vorgangs ist also 1. Da sich die Leerstelle bereits an der Korrekten stelle befindet, sind keine Züge notwendig, die Parität ist also 0. Da die Paritäten unterschiedlich sind, kategorisiert der Algorithmus dieses Puzzle korrekterweise als nicht Lösbar ein.

Die Wahl des Endzustandes ist sehr relevant bei der Lösbarkeitsüberprüfung eines Puzzles. In der Sektion 2.2 wurde explizit hervorgehoben, dass der in der Literatur übliche Endzustand (Abb.2.8) von dem in Herrn Stroetmanns Skript [[github-stroetmann:online](#)] (Abb.2.5) verschieden ist. In Abb.2.10 zeigt der Algorithmus, dass diese Endzustände nicht ineinander Überführbar sind, In Schritt S3.1 werden Leerstellen erneut mit der Zahl „0“

kodiert.

**S3.1** Konvertierung der Puzzle-Zustände in Zahlenreihen

$$\begin{aligned} end_{Loyd} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 0\} \\ end_{Stroetmann} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} \end{aligned}$$

**S3.2** Notwendige Transpositionen  $T_{ex2}$  um  $start_{ex2}$  zu  $end_{ex2}$  überführen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 0	(1, 0)
0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 1	(2, 1)
0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 3	(3, 2)
0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 3	(4, 3)
0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 4	(5, 4)
0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 5	(6, 5)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 6	(7, 6)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 7	(8, 7)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 8	(9, 8)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 9	(10, 9)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 10	(11, 10)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 11	(12, 11)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 12	(13, 12)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13	(14, 13)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14	(15, 14)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	

$$T_{ex3} = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8), (10, 9), (11, 10), (12, 11), (13, 12), (14, 13), (15, 14)\}$$

$$|T_{ex3}| = 15 \rightarrow \text{Parität} = 1$$

**S3.3** Anzahl der Notwendigen Züge  $z_{ex2}$  um das Leerfeld von der Position aus Loyds Endzustand (Koordinaten (3, 3)) an die Position des Zielzustandes von Stroetmann (Koordinaten (0, 0)) zu verschieben.

$$\begin{aligned} z_{ex3} &= |3 - 0| + |3 - 0| \\ z_{ex3} &= 6 \rightarrow \text{Parität} = 0 \end{aligned}$$

**S3.4** Die Paritäten stimmen nicht überein, das Puzzle ist somit **nicht Lösbar**.

Abbildung 2.10: Beispiel2: Anwendung des Algorithmus auf die Überführbarkeit der Endzustände von Loyd und Stroetmann.

Ist ein Puzzle also für den einen Endzustand lösbar, ist es für den anderen Endzustand automatisch nicht lösbar, da es keine Möglichkeit gibt die Endzustände ineinander zu überführen.

# 3 Implementation

## 3.1 Umsetzung

Der vollständige Quellcode ist im Anhang unter A.1 zu finden.

Zur Umsetzung wird zu erst eine Datenstruktur definiert, in welcher die Instanzen des 15-Puzzels ausgewertet werden. Hierfür werden Tupel von Tupeln verwendet. Anschließend ist die generelle Idee, wie auch schon in `kais abschnitt?` vorgestellt zu schauen, ob die Anzahl der Permutationen bei der Datenstruktur als 1-Dimensionale Liste und der Abstand des Blank-Feldes vom Start- zum Zielzustand die gleiche Parität besitzen. Ist diese gleich, so ist das Puzzle lösbar, vice versa unlösbar.

Spannend ist hier allerdings, dass dies kein Indikator für die Komplexität der Lösbarkeit ist. So kann ein lösbares Puzzle mit den zur Verfügung stehenden Algorithmen wie  $A^*$  oder  $IDA^*$  nicht in angemessener Zeit gelöst werden.

Das weitere Vorgehen der Implementierung ist weitestgehend die Bearbeitung von kleinen Teilproblemen, welche sich aus dem eben genannten Vorgehen ergeben.

So betrachten wir zunächst die Anzahl der Permutationen, welche sich in einer Puzzleinstanz befinden. Um diese zu berechnen wird als Datenstruktur eine Liste mit der Dimension 1 benötigt. Anschließend muss die Liste durch tauschen der Elemente sortiert werden. nächsten Satz überarbeiten!

Vereinfacht wird dieser Schritt dadurch, dass der Lösungszustand des Puzzels so definiert ist, dass der Index innerhalb der Liste und der Wert des zugehörigen Elementes identisch sind. Somit kann für jeden Index der entsprechende Wert innerhalb der Liste gesucht werden, sodass eine minimale Anzahl von *swaps* durchgeführt werden.

Die Anzahl der getätigten *swaps* liefert uns dann die Anzahl der mindestens durchzuführenden Permutationen innerhalb der Puzzleinstanz.

Die Implementierung ist dabei wie folgt:

```
1 def get_inversion_count(Puzzle: tuple) -> int:
2     working_1d_puzzle = to_1d(Puzzle)
3     count = 0
4     for i in range(len(working_1d_puzzle)):
```

```

5         if working_1d_puzzle[i] != i:
6             count += 1
7             swap(i, find_tile_1d(i, working_1d_puzzle),
                  ↪ working_1d_puzzle)
8     return count

```

wobei die Funktion **to\_1d** definiert ist durch

```
to_1d = lambda Puzzle: [elem for tupl in Puzzle for elem in tupl]
```

und die Funktion **swap** durch

```

def swap(idxA, idxB, Puzzle_1d):
    Puzzle_1d[idxA], Puzzle_1d[idxB] = Puzzle_1d[idxB],
    ↪ Puzzle_1d[idxA]

```

definiert ist.

Die Funktion **find\_tile\_1d** gibt den Index einer 1-Dimensionalen Liste zurück, an der das entsprechende Element zu finden ist. Diese ist auch im Anhang unter A.1 zu finden.

Nun muss als nächstes die Distanz des Blank-Feldes vom Startzustand zum Zielzustand berechnet werden. Wie schon in Abschnitt 2.2 angesprochen kann die Anzahl der notwendigen Züge um das Blank-Feld von der Position im Startzustand zu der Position im Zielzustand zu bewegen durch die Manhattan-Distanz ermittelt werden..

Da die  $x, y$  Position des Blank-Feldes im Endzustand immer 0, 0 ist, muss diese nicht berechnet werden, wird in der Funktion allerdings auch gesucht, sodass bei einer Erweiterung noch der Endzustand variieren kann. Sei  $x_1, y_1$  nun die Position des Blank-Feldes im Startzustand und  $x_2, y_2$  die Position des Blank-Feldes im Endzustand, so ist der Abstand beider Blank-Felder durch

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

definiert.

Die dazugehörige Funktion **manhattan** ist auch im Anhang unter A.1 zu finden.

Abschließend wird verglichen, ob die Summe der Distanz und die Anzahl der Permutationen im Startzustand die gleiche Parität besitzen. Stimmen die Paritäten überein, so ist die Instanz lösbar, sind diese unterschiedlich, so ist diese unlösbar.

## 3.2 Testing

TODO: Problem mit Berechnungsdauer! Um nun verschiedene Puzzelinstanzen und deren Lösbarkeit anhand des Codes zu testen, werden verschiedene Startzustände und zu Testzwecken verschiedene Endzustände definiert. Anschließend werden alle Startzustände auf Lösbarkeit des „normalen“ Endzustandes getestet.

Um eine verbose Ausgabe zu ermöglichen, bei der noch die verschiedenen zuvor berechneten Werte ausgegeben werden können, kann der Funktion, welche die Puzzelinstanzen auf ihre Lösbarkeit prüft noch ein entsprechender verbose Flag mitgegeben werden. Somit kann anhand schon bekannten lösbarer Instanzen überprüft werden, ob die Implementierung vollständig ist.

Der Output dieses Testes befindet sich im dazugehörigen [Jupyter-Notebook](#).

Diese Puzzel werden dann bspw. in das schon aus der Vorlesung bekannte [Jupyter-Notebook](#) zum lösen der Instanzen gegeben, so dass geschaut werden kann, ob diese in angemessener Zeit lösbar sind und wieviele Züge für die jeweilige Lösung gebraucht werden.



## **4 Zusammenfassung**

# A Beispiel-Anhang: Testanhang

## Python Code zur Validierung der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzels

Quelltext A.1: Python Code zur Validierung der Lösbarkeit von Instanzen des 15-Puzzels

```
1  #!/usr/bin/env python
2  # coding: utf-8
3  start1 = {
4      'data': ((13, 2, 10, 3),
5              (1, 12, 8, 4),
6              (5, 0, 9, 6),
7              (15, 14, 11, 7)),
8      'name': 'start1'}
9
10 start2 = {
11     'data': ((0, 1, 2, 3),
12            (4, 5, 6, 8),
13            (14, 7, 11, 10),
14            (9, 15, 12, 13)
15            ),
16     'name': 'start2'
17 }
18
19 start3 = {
20     'data': ((6, 13, 7, 10),
21            (8, 9, 11, 0),
22            (15, 2, 12, 5),
23            (14, 3, 1, 4)),
24     'name': 'start3'
25 }
26
27
```

```
28 start4 = {
29     'data': ((3, 9, 1, 15),
30             (14, 11, 4, 6),
31             (13, 0, 10, 12),
32             (2, 7, 8, 5)),
33     'name': 'start4'
34 }
35
36 start5 = {
37     'data': ((1, 2, 3, 4),
38             (5, 6, 7, 8),
39             (9, 10, 11, 12),
40             (13, 15, 14, 0)),
41     'name': 'start5'
42 }
43
44 upperLeft = {
45     'data': ((0, 1, 2, 3),
46             (4, 5, 6, 7),
47             (8, 9, 10, 11),
48             (12, 13, 14, 15)),
49     'name': 'solved - Blank upper Left'
50 }
51
52 downRight = {
53     'data': ((1, 2, 3, 4),
54             (5, 6, 7, 8),
55             (9, 10, 11, 12),
56             (13, 14, 15, 0)),
57     'name': 'solved - Blank down Right'
58 }
59 upperRight = {
60     'data': ((1, 2, 3, 0),
61             (4, 5, 6, 7),
62             (8, 9, 10, 11),
```

```

63         (12, 13, 14, 15)),
64     'name': 'solved - Blank upper Right'
65 }
66 downLeft = {
67     'data': ((1, 2, 3, 4),
68             (5, 6, 7, 8),
69             (9, 10, 11, 12),
70             (0, 13, 14, 15)),
71     'name': 'solved - Blank down Left'
72 }
73 spirale = {
74     'data': ((1, 2, 3, 4),
75             (12, 13, 14, 5),
76             (11, 0, 15, 6),
77             (10, 9, 8, 7)),
78     'name': 'spirale Goal'
79 }
80
81 Starts = [start1, start2, start3, start4, start5]
82 Goals = [upperLeft, upperRight, downLeft, downRight, spirale]
83
84
85 def to_1d(Puzzle: tuple) -> list:
86     return [elem for tupl in Puzzle for elem in tupl]
87
88
89 def swap(idxA, idxB, Puzzle_1d):
90     Puzzle_1d[idxA], Puzzle_1d[idxB] = Puzzle_1d[idxB],
91     ↪ Puzzle_1d[idxA]
92
93 def find_tile_1d(tile, State_1d):
94     n = len(State_1d)
95     for it in range(n):
96         if State_1d[it] == tile:

```

```
97         return it
98
99
100 def get_inversion_count(Puzzle: tuple) -> int:
101     working_1d_puzzle = to_1d(Puzzle)
102     count = 0
103     old_count = -1
104     while old_count != count:
105         old_count = count
106         for i in range(len(working_1d_puzzle)):
107             if working_1d_puzzle[i] != i:
108                 count += 1
109                 swap(i, find_tile_1d(i, working_1d_puzzle),
110                     ↪ working_1d_puzzle)
111
112     return count
113
114
115 def find_tile(tile, State):
116     n = len(State)
117     for row in range(n):
118         for col in range(n):
119             if State[row][col] == tile:
120                 return row, col
121
122
123 def manhattan(stateA, stateB):
124     tile = 0
125     result = 0
126     rowA, colA = find_tile(tile, stateA)
127     rowB, colB = find_tile(tile, stateB)
128     result += abs(rowA - rowB) + abs(colA - colB)
129     return result
130
131
132 def is_solvable(Start: tuple, verbose: bool = False) -> int:
```

```
131     Destination: tuple = upperLeft
132     if verbose:
133         print(f"Name: {Start['name']}")
134         print(f"Start is: {Start['data']}")
135         print(f"Inversion Count:
136             ↪ {get_inversion_count(Start['data'])}")
137         print(
138             f"Manhattan Distance: {manhattan(Start['data'],
139             ↪ Destination['data'])}")
140     return (get_inversion_count(Start['data']) +
141             ↪ manhattan(Start['data'], Destination['data'])) % 2 == 0
142
143 for s in Starts:
144     print(f"is solvable: {is_solvable(s, verbose=True)}")
145     print('\n')
146
147 get_inversion_count(start4['data'])
```

## **B Beispiel-Anhang: Noch ein Testanhang**

nochmal: lipsum ...