

# Mathematische Darstellung des Optimierungsmodells

January 29, 2025

## 1. Mengen (Sets)

- $m \in M$ : Mitarbeiter ( $m1, m2$ )
- $a, aa \in A$ : Aufträge ( $a1, \dots, a15$ )
- $wd \in WD$ : Werkzeuge ( $wd1, \dots, wd5$ )
- $s \in S$ : Skills ( $s1, \dots, s5$ )
- $i \in I$ : Zeit-Slots pro Tag ( $i1, \dots, i30$ )

## 2. Parameter

- $\text{priority}(a)$ : Priorität von Auftrag  $a$  (1 = am höchsten, 3 = normal).
- $\text{expectedHours}(a)$ : Erwartete Ausführungsstunden für Auftrag  $a$ .
- $\text{dayWeight}(wd)$ : Gewichtung des Wochentags (1 = Montag, ..., 5 = Freitag).
- $\text{maxWorkingHours}(m)$ : Max. Arbeitsstunden pro Tag.
- $\text{maxWorkingHoursWeek}(m)$ : Max. Arbeitsstunden pro Woche.
- $\text{minWorkingHours}(m)$ : Min. Arbeitsstunden pro Tag.
- $\text{employeeSkill}(m, s) \in \{0, 1\}$ : Verfügt Mitarbeiter  $m$  über Skill  $s$ ?
- $\text{necessarySkill}(a, s) \in \{0, 1\}$ : Benötigt Auftrag  $a$  Skill  $s$ ?
- $\text{driveTime}(a, aa)$ : Fahrzeit zwischen Aufträgen  $a$  und  $aa$ .
- $\text{driveTimeMainStation}(a)$ : Fahrzeit zwischen Hauptstation und Auftrag  $a$ .

## 3. Variablen

- $x(m, a, wd, i) \in \{0, 1\}$ : 1, wenn Mitarbeiter  $m$  Auftrag  $a$  an Tag  $wd$  zum Index  $i$  durchführt.
- $\text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i) \in \{0, 1\}$ : 1, wenn zwei Aufträge  $a, aa$  an einem Tag  $wd$  für Mitarbeiter  $m$  hintereinander liegen (Index  $i, i + 1$ ).
- $\text{isLastContractOnWD}(m, a, wd, i) \in \{0, 1\}$ : 1, wenn  $a$  der letzte Auftrag an  $wd$  (Index  $i$ ) für Mitarbeiter  $m$  ist.

## 4. Zielfunktion

In GAMS ist die Zielfunktion wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \max \text{ obj} = & 100 \sum_{m,a,wd,i} \frac{x(m, a, wd, i)}{\text{priority}(a) + \text{dayWeight}(wd)} + \sum_{m,a,aa,wd,i} \frac{\text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i)}{\text{driveTime}(a, aa) + 0.1} \\ & + \sum_{m,a,wd} \frac{x(m, a, wd, i1)}{\text{driveTimeMainStation}(a) + 0.1} + \sum_{m,a,wd,i} \frac{\text{isLastContractOnWD}(m, a, wd, i)}{\text{driveTimeMainStation}(a) + 0.1}. \end{aligned}$$

## 5. Nebenbedingungen

(nb1) Jeder Auftrag darf höchstens einmal zugewiesen werden:

$$\sum_{m,wd,i} x(m, a, wd, i) \leq 1 \quad \forall a \in A.$$

(nb2) Maximale tägliche Arbeitszeit pro Mitarbeiter:

$$\begin{aligned} & \sum_{a,i} [\text{expectedHours}(a) x(m, a, wd, i)] + \sum_{a,aa,i} [\text{driveTime}(a, aa) \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i)] \\ & + \sum_a [\text{driveTimeMainStation}(a) x(m, a, wd, i1)] + \sum_{a,i} [\text{driveTimeMainStation}(a) \text{isLastContractOnWD}(m, a, wd, i)] \leq \text{maxWorkingHours}(m), \quad \forall m, wd. \end{aligned}$$

(nb3) Maximale wöchentliche Arbeitszeit pro Mitarbeiter:

$$\begin{aligned} & \sum_{a,wd,i} [\text{expectedHours}(a) x(m, a, wd, i)] + \sum_{a,aa,wd,i} [\text{driveTime}(a, aa) \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i)] \\ & + \sum_{a,wd} [\text{driveTimeMainStation}(a) x(m, a, wd, i1)] + \sum_{a,wd,i} [\text{driveTimeMainStation}(a) \text{isLastContractOnWD}(m, a, wd, i)] \leq \text{maxWorkingHoursWeek}(m), \quad \forall m. \end{aligned}$$

(nb4) Skill-Anforderung:

$$\left( \prod_{s: \text{necessarySkill}(a,s)=1} \text{employeeSkill}(m, s) \right) + \text{noSkillNecessary}(a) \geq x(m, a, wd, i), \quad \forall m, a, wd, i.$$

(nb5) Minimale tägliche Arbeitszeit:

$$\begin{aligned} & \sum_{a,i} [\text{expectedHours}(a) x(m, a, wd, i)] + \sum_{a,aa,i} [\text{driveTime}(a, aa) \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i)] \\ & + \sum_a [\text{driveTimeMainStation}(a) x(m, a, wd, i1)] + \sum_{a,i} [\text{driveTimeMainStation}(a) \text{isLastContractOnWD}(m, a, wd, i)] \geq \text{minWorkingHours}(m), \quad \forall m, wd. \end{aligned}$$

(nb6) Ein Mitarbeiter darf an einem Wochentag jeden Index höchstens einmal belegen:

$$\sum_a x(m, a, wd, i) \leq 1, \quad \forall m, wd, i.$$

Kein „Index-Sprung“ (nb\_no\_index\_jumps):

$$\sum_{aa} x(m, aa, wd, i) \leq \sum_a x(m, a, wd, i - 1), \quad \forall m, wd, i > 1.$$

Hilfsvariablen für aufeinanderfolgende Aufträge (bothContractsConsecutively):

$$\begin{aligned} \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i) & \leq x(m, a, wd, i), \\ \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i) & \leq x(m, aa, wd, i + 1), \\ \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i) & \geq x(m, a, wd, i) + x(m, aa, wd, i + 1) - 1, \\ \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i) & = 0 \quad \text{für } i = i_{\max} \text{ (d.h. letzter Index)}. \end{aligned}$$

Hilfsvariablen für den letzten Auftrag des Tages (isLastContractOnWD):

$$\begin{aligned} \text{isLastContractOnWD}(m, a, wd, i) & \leq x(m, a, wd, i), \\ \text{isLastContractOnWD}(m, a, wd, i) & \leq 1 - \sum_{aa} \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i), \\ \text{isLastContractOnWD}(m, a, wd, i) & \geq x(m, a, wd, i) - \sum_{aa} \text{bothContractsConsecutively}(m, a, aa, wd, i). \end{aligned}$$