

Czas 2012-12-12 1:00
Miejsce Przyczółek
Obecni MO, RW

1 Wstęp

1.1 Opis algorytmu

Algorytm Forda-Fulkersona analizuje znaną ścieżkę powiększającą, obliczając maksymalny przepływ dostępny na tej ścieżce, tj. najmniejszy z maksymalnych dostępnych przepływów krawędzi na ścieżce.

Dla krawędzi przednich dostępny przepływ obliczamy jako różnicę przepustowości i wykorzystanego przepływu $(u,v).przepustowość - (u,v).przepływ$. Dla krawędzi tylnych dostępny przepływ jest równy wykorzystanemu przepływowi (do przodu) na tej krawędzi $(u,v).przepływ$. Przepływ tylny krawędzi jest pojęciem abstrakcyjnym na potrzeby prowadzonych obliczeń, a biorąc pod uwagę, że przepływ musi być nieujemny, dostępny przepływ tylny dla krawędzi jest równy wykorzystanemu przepływowi do przodu dla tej krawędzi. Po przeanalizowaniu maksymalnej ścieżki powiększającej i obliczeniu maksymalnego przepływu dostępnego na tej ścieżce, aktualizujemy przepływy krawędzi.

Dla krawędzi przednich, powiększamy przepływ krawędzi o obliczoną wartość $(u,v).przepływ += delta$. Dla krawędzi tylnych, pomniejszamy przepływ krawędzi o obliczoną wartość $(u,v).przepływ -= delta$. Dopóki możliwe jest znalezienie ścieżki powiększającej, kontynuujemy obliczanie maksymalnego przepływu dostępnego na kolejnych ścieżkach i aktualizujemy przepływy na poszczególnych krawędziach tych ścieżek.

Algorytm zakończy swoją pracę w momencie, kiedy nie istnieją już żadne ścieżki powiększające, tj. zostanie wykorzystana maksymalna przepustowość sieci ze źródła do ujścia.

1.2 Lista kroków

1. Sprawdź czy istnieje ścieżka powiększająca w grafie.
2. Jeśli nie istnieje ścieżka powiększająca w grafie, zakończ działanie algorytmu
Zgodnie z twierdzeniem o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju [Ford i Fulkerson, 1962], przy nieujemnych przepływach i przepustowościach, algorytm zawsze się kończy, identyfikując maksymalny przepływ w sieci.
3. Zaczynij od krawędzi kończącej się w ujściu ($v = ujście$)
4. Ustaw przepływ znalezionej ścieżki na nieskończoność ($delta = nieskończoność$)
5. Jeśli koniec aktualnej krawędzi znajduje się w wierzchołku źródłowym, przejdź do punktu 12 $v == źródło$
6. Ustaw początek krawędzi (u) na wierzchołek poprzedzający wierzchołek końcowy aktualnej krawędzi (v)
7. Jeśli aktualna krawędź (u, v) nie jest krawędzią przednią, przejdź do punktu 9
8. Jeśli maksymalny przepływ analizowanej ścieżki jest większy niż różnica przepustowości aktualnej krawędzi i jej przepływu, to zmniejsz wartość delty do różnicy przepustowości i przepływu aktualnej krawędzi $delta = MIN((u,v).przepustowość - (u,v).przepływ, delta)$ i przejdź do punktu 10
9. Jeśli przepływ aktualnej krawędzi, jest mniejszy niż delta, to zmień wartość delty na przepływ aktualnej krawędzi $delta = MIN((u,v).przepływ, delta)$
10. Zamień wierzchołek końcowy krawędzi na wierzchołek początkowy, zacznij analizować wcześniejszą krawędź
11. Przejdź do punktu 5
12. Zaczynij od krawędzi kończącej się w ujściu ($v = ujście$)

13. Jeśli koniec aktualnej krawędzi znajduje się w wierzchołku źródłowym, przejdź do punktu 1 $v == \text{źródło}$
14. Ustaw początek krawędzi (u) na wierzchołek poprzedzający wierzchołek końcowy aktualnej krawędzi(v)
15. Jeśli aktualna krawędź (u,v) nie jest krawędzią przednią, przejdź do punktu 17
16. Zwiększ przepływ na krawędzi o maksymalny przepływ znalezionej ścieżki $(u,v).przepływ += \text{delta}$ i przejdź do punktu 18
17. Zmniejsz przepływ na krawędzi o maksymalny przepływ znalezionej ścieżki $(u,v).przepływ -= \text{delta}$
18. Zamień wierzchołek końcowy krawędzi na wierzchołek początkowy, zacznij analizować wcześniejszą krawędź
19. Przejdź do punktu 13

2 Instrukcja obsługi

2.1 Dane wejściowe

Algorytm Forda-Fulkersona opisany powyżej przyjmuje dwa argumenty:

- *FlowNetwork* - graf przepływu sieci
- *Search* - metoda wykorzystywana do wyszukiwania ścieżek powiększających.

2.1.1 Graf przepływu

FlowNetworkAdjacencyArray - zrealizowany z wykorzystaniem list powiązanych. Do każdego wierzchołka grafu przypisane są dwie listy krawędzi, przednich oraz tylnych. Rozwiązanie charakteryzuje się wysoką przejrzystością, okupioną jednak niską wydajnością pamięciową. Co ogranicza możliwość zastosowania w przypadku dużych grafów.

Graf przepływu realizowany jest przy pomocy algorytmu z użyciem list powiązanych, *FlowNetworkAdjacencyArray*. Do każdego wierzchołka grafu przypisywane są dwie listy, krawędzi przednich oraz tylnych. Takie rozwiązanie charakteryzuje się bardzo dobrą przejrzystością, aczkolwiek, ze względu na niską wydajność pamięciową nie jest odpowiednia dla zastosowań uwzględniających duże grafy. Argumenty wejściowe:

- *int* - ilość wszystkich węzłów w grafie
- *int* - indeks węzła początkowego
- *int* - indeks węzła docelowego
- *Iterator<EdgesInfo>* - lista krawędzi wraz z ich przepustowością

2.1.2 Krawędzie

Informacje o krawędziach grafu przechowywane są w kolekcji obiektów *EdgeInfo*, które zawierają informację o wierzchołkach, pomiędzy którymi dana krawędź się znajduje oraz o jakie posiada możliwości przepustowe.

- *int* - indeks węzła startowego
- *int* - indeks węzła końcowego
- *int* - wartość przepustowa krawędzi

2.2 Dane wyjściowe

Wyniki wyznaczania maksymalnego przepływu są zapisywane wewnątrz struktury reprezentującej graf. Obiekt *FlowNetwork* posiada metodę *toString*, która wyświetla aktualny stan grafu.

Przykładowy wynik *toString* przed i po wyznaczeniu maksymalnego przepływu:

```
Przed:
[0] -> [1] 0/3 @ 0
[0] -> [2] 0/2 @ 0
[1] -> [3] 0/2 @ 0
[1] -> [4] 0/2 @ 0
[2] -> [4] 0/3 @ 0
[2] -> [3] 0/2 @ 0
[3] -> [5] 0/3 @ 0
[4] -> [5] 0/2 @ 0

Po:
[0] -> [1] 3/3 @ 0
[0] -> [2] 2/2 @ 0
[1] -> [3] 2/2 @ 0
[1] -> [4] 1/2 @ 0
[2] -> [4] 1/3 @ 0
[2] -> [3] 1/2 @ 0
[3] -> [5] 3/3 @ 0
[4] -> [5] 2/2 @ 0
```

[indeks węzła startowego] -> [indeks węzła końcowego] przepływ/przepustowość

3 Przykład użycia

W pierwszej kolejności ustalane są główne parametry grafu.

- Ilość węzłów grafu
- Indeks węzła źródłowego, *source*
- Indeks węzła docelowego, *sink*

```
int numVertices = 6;
int srcIndex = 0;
int sinkIndex = 5;
```

Następnie definiowane są poszczególne krawędzie grafu wraz z ich przepustowością.

- Indeks węzła początkowego krawędzi
- Indeks węzła końcowego krawędzi
- Maksymalna przepustowość krawędzi

```
ArrayList preIterator = new ArrayList();
EdgeInfo edge1 = new EdgeInfo(0, 1, 3);
EdgeInfo edge2 = new EdgeInfo(1, 3, 2);
EdgeInfo edge3 = new EdgeInfo(3, 5, 3);
EdgeInfo edge4 = new EdgeInfo(1, 4, 2);
EdgeInfo edge5 = new EdgeInfo(0, 2, 2);
EdgeInfo edge6 = new EdgeInfo(2, 4, 3);
EdgeInfo edge7 = new EdgeInfo(4, 5, 2);
EdgeInfo edge8 = new EdgeInfo(2, 3, 2);
preIterator.add(edge1);
preIterator.add(edge2);
preIterator.add(edge3);
preIterator.add(edge4);
preIterator.add(edge5);
preIterator.add(edge6);
preIterator.add(edge7);
preIterator.add(edge8);

Iterator<EdgeInfo> edges = preIterator.iterator();
```

Tworzony jest obiekt reprezentujący cały graf przepływu.

```
FlowNetworkAdjacencyList network = new FlowNetworkAdjacencyList(numVertices, srcIndex, sinkIndex, edges)↵
;
System.out.println(network.toString());
```

Wybierana jest funkcja wyszukiująca i wykonywany jest algorytm Forda-Fulkersona.

```
//algorytm przeszukiwania wszerz
BFS_SearchList search = new BFS_SearchList(network);

//algorytm FORD-FULKERSON
FordFulkerson fordFulkerson = new FordFulkerson(network, search);

//wykonaj algorytm
fordFulkerson.compute();
```

Wyświetlenie wyznaczonego maksymalnego przepływu.

```
System.out.println("Wynik:");
System.out.println(network.toString());
```

4 Słownik pojęć i definicje

Pojęcie	Opis
Sieć przepływowa	Sieć reprezentująca przepływy pomiędzy węzłem źródłowym i docelowym, z uwzględnieniem węzłów pośrednich.
Graf przepływu	Graf skierowany stanowiący abstrakcję sieci przepływowej, wierzchołki w grafie, odpowiadają węzłom sieci.
Wierzchołek grafu przepływu	Wierzchołek w grafie przepływu reprezentuje węzeł w sieci przepływowej. Wierzchołki w grafie przepływu, z wyjątkiem wierzchołka źródłowego i docelowego, muszą spełniać warunek, że suma $f(u,v)$ wszystkich krawędzi (u,v) we wpływie do wierzchołka u , musi być równa sumie $f(u,w)$ wszystkich krawędzi w wypływie z wierzchołka u . Co oznacza, iż żaden wierzchołek, poza wierzchołkami źródłowym i docelowym, nie mogą produkować ani konsumować przepływu.
Krawędź grafu przepływu	Krawędź w grafie przepływu łączy dwa wierzchołki. Wszystkie krawędzie w grafie przepływu są krawędziami skierowanymi.
Przepustowość krawędzi	Przepustowość krawędzi wyraża ograniczenie, co do maksymalnej liczby jednostek, które mogą tą krawędzią przepłynąć.
Przepływ krawędzi	Przepływ krawędzi definiuje liczbę jednostek przepływających z u do v (z punktu początkowego krawędzi do jej punktu końcowego).
Wierzchołek źródłowy	Wierzchołek źródłowy (źródło, ang. source) to wierzchołek wytwarzający jednostki towarów, które przepływają przez krawędzie grafu do wierzchołka docelowego. Przyjmuje się, że wierzchołek źródłowy jest w stanie wytworzyć dowolną wymaganą liczbę jednostek towarów, które zostaną z niego odebrane.
Wierzchołek docelowy	Wierzchołek docelowy (ujście, stacja końcowa, ang. target, terminus) to wierzchołek, który konsumuje otrzymane jednostki towarów dostarczone z wierzchołka źródłowego za pośrednictwem krawędzi grafu. Przyjmuje się, że wierzchołek źródłowy jest w stanie skonsumentować dowolną liczbę jednostek towarów jakie zostaną do niego dostarczone.
Ścieżka	Ścieżka oznacza niecykliczną ścieżkę w grafie z niepowtarzalnymi wierzchołkami, prowadzącą z wierzchołka źródłowego do wierzchołka docelowego.
Ścieżka powiększająca	Ścieżka powiększająca (ang. augmenting path) to taka ścieżka, do której można dodać więcej przepływu. Co oznacza, że dla każdej krawędzi w ścieżce, przepływ jest mniejszy od jej przepustowości.