Borodin-Kostochka's conjecture on (P_5,4-wheel)-free graphs

王枫愉

2024 年 3 月 2 日

1 引言

本文中所研究的图都是有限且无重边, 无环的简单图, 未定义的概念和符号参见文献 [1]
设 G 是一个图, $u, v \in V(G)$. 图 G 的团数, 记为 $\omega(G)$, 是 G 中最大完全子图所含的顶点数.

设 k 是正整数. 将集合 $\{1, 2, ..., k\}$ 简记为 $[k]$. 图 G 的一个染色是一个映射 $c : V(G) \rightarrow C$ 使得当 $u \sim v$ 时总有 $c(u) \neq c(v)$. 图 G 的色数 $\chi(G)$ 是使得 G 有 k-染色的最小整数 k.

设 H 是一个图, 如果图 G 有一个导出子图同构于 H, 则称 G 导出 H, 若 G 不能导出 H, 则称 G 是无 $H-$ 图,

给定一个正整数 k, 用 P_k 表示 k 个顶点的路, 并且对于 $k \geq 3$,C_k 表示 k 个顶点的圈, 对于 $k \geq 4$, 一个 k-轮是一个含有 C_k 外加一个连到 C_k 上所有点的点的图.

给定一个图, 一个图 H 的 blowup 是任意的图 G,$V(G)$ 可以被 partitoned into $|V(H)|$ (不一定非空) 个集合 Q_v, 且每个 Q_v 诱导一个 P_3-free 的图, 如果 $uv \in E(H)$ 那么 Q_u 就 complete to Q_v 并且如果 $uv \in E(H)$ 那么 Q_u 就 anticomplete to Q_v.A blowup is a clique-blowup 如果每个 Q_v 都是团.

引理 1. *(Cranston and Rabern[2])*
固定 $k \in \mathbb{Z}^+$. 让 G 是一个图并且令 $I_1, ... I_t$ 为 G 的两两互不相交的独立集, 如果 G - $\cup_{j=1}^{t} I_j$ is $(k - t - 1$ $)$-退化的. 那么就有 $\chi(G) \leq k$.

引理 2. *(Cranston and Rabern[2])*
每一个 *the Borodin-Kostochka's Conjecture* 的极小反例都有 $\delta(G) \geq \Delta G$-*1.* 特别地:$\delta(G) \geq 8$ *and* $|d(v) - d(w)| \leq 1$ 对于所有的 $u, v{\in}V(G)$.

引理 3. *(Cranston and Rabern[2])*
让 G 是 *the Borodin-Kostochka's Conjecture* 的极小反例. 如果 G 含有非空的, 互不相连且互不相交的齐次点集 A 和 B A 和 B 都是团且 $N(A) \subseteq N(B)$, 便有 $|A| > |B|$.

引理 4. *(Kostochka and Catlin[2])*
A complete-buoy 满足 *the Borodin-Kostochka's Conjecture.*

引理 5. *(Cranston and Rabern[2]))*
If G is vertex-critical and $\chi(G) = \Delta(G)$, 那么 G 不能含有任何非空的,d_1-可选的, 诱导子图 H. 所以这种 G 不能包含一下的诱导子图:
$K_3 \vee 3K_2$ 或者
$K_4 \vee H$,H 含有两组互不相连且互不相交的点集.

定理 1. *(Kostochka[3] and Catlin[4]) .Let* $\mathcal{G}$ *be a hereditary class of graphs.* 如果 *the Borodin-Kostochka's Conjecture* 对一些 $G{\in}\ \mathcal{G}$ 是错误的, 那么对于一些 $G{\in}\ \mathcal{G}$ 有着 $\Delta(G) = 9$ 也是错误的.

定理 2. 如果一个联通的无五长路和四轮的图含有五圈和一个五轮, 那么 G 满足 *the Borodin-Kostochka's conjecture.*

定理 3. 如果一个联通的无五长路和 k 轮的图含有五圈那么 G 满足 *the Borodin-Kostochka's conjecture.*

定理 4. 如果一个联通的无五长路和四轮的图含有七圈的补, 那么 G 满足 *the Borodin-Kostochka's conjecture.*

定理 5. 所有无 *(*$3K_1$*,4-wheel)* 图满足 *the Borodin-Kostochka's conjecture*

证明. 让 G be a ($3K_1$,4-wheel)-free graph, 并且令 v∈V(G) 为其中任意一点. 首先假设 G[N(V)] is chordal, 那么 G i 是完美图蕴含着 $\chi(G) = \omega(G)$, 矛盾. 所以 $G[N(V)]$ 是无弦的. 而且既然 G 不含有四轮,$G[N(V)]$ 含有诱导的 C_k 考虑到对于 k $\geq$6,C_k 含有诱导的 $3K_1$,$G[N(V)]$ 含有诱导的 C_5. 所以 G 含有五轮, 这就和第三节证明的内容一致. □

2 section2

首先假设结论是错的. 让 G 为极小反例. 进一步我们选择 G 是 vertex-critical. 根据定理一，我们不妨假设 Δ(G) = 9
我们首先 G i 是完美图, 那么 χ(G) = ω(G) 矛盾. 既然 G 不是完美图, 强完美图定理蕴含着 G 一定含有奇孔或者反奇孔. 每个 7 长的奇孔含有一个 P_5 作为诱导子图. 每 9 长的反奇孔含有一个 $4-wheel$ 作为诱导子图. G 是无 (P_5 4-wheel). G 一定含有一个 C_5 或者 $(C_7)^c$ 作为诱导子图

在这一节我们分三小节给出主定理的证明
让 G 为一个联通的无五长路和四轮的 atom. 假设 G 含有诱导 C_5, 令为 v_1, v_2 , v_3 , v_4 , v_5 . 我们不妨假设有五个非空且互不相交的点集 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 并且对于每个模 5 的 i 都有:A_i is complete to $A_i-1 \cup A_i+1$, 并且 anticomplete to $A_i-2 \cup A_i+2$ .Let $A := A_1 \cup ... \cup A_5$. 我们选择这些点集中 A 为极大的. 并且令 $v_i \in A_i$. 令 $T = \{x \in V(G)\backslash A|x\ has\ no\ neighbor\ inA\}$,

$Z = \{x \in V(G)\backslash A|x\ has\ a\ neighbor\ in\ each\ A_i\}$

$Y_i = \{x \in V(G)\backslash A|x\ has\ a\ neighbor\ in\ each\ A_j\ j \in [5], j \neq i,$
$and\ anticomplete\ to\ A_i\}$

$X_i = \{x \in V(G)\backslash A|x\ has\ a\ neighbor\ in\ each\ A_j\ j \in \{i, i+2, i-2\}, and\ anticomplete\ to\ A_i-1 \cup A_i+1\}$ 令 $X := X_1 \cup ... \cup X_5$.

$T := T_1 \cup ... \cup T_5$.

$Z := Z_1 \cup ... \cup Z_5$.

且 $Y := Y_1 \cup ... \cup Y_5$

3 (P_5,4-wheel)-free graph with an induced 5-wheel

让 G 为一个联通的无五长路和四轮的 atom 并且含有一个诱导的五圈 v_1, v_2 , v_3 , v_4 , v_5,v_1, 加上一个点 z^* 和所有的 v_i 相连, 对于所有的 $i \in [5]$. 我们用和第二节一样定义的 A,X,Y,Z and T.

引理 6 (结构定理 [5]). *对于 $i \in [5]$, 有如下性质*
(i): 让 K 是一个 A_i-团. 如果 Z 中存在一个点在 K 有邻点, 那么它就 complete to K, 并且 anticomplete to $A_i \setminus K$.

(ii): 存在一个 $j \in$ [5] 使得 A_j,A_j-2 A_j+2 都是团.

(iii):Z 是一个团.

(iv): 存在 A_i-团, A_i*, 使得 Z is complete to A_i*,and anticomplete to $A_i* \setminus A_i*$.

(v):X_i is anticomplete to Z.

(vi):X_i is anticomplete to $X_i+2 \cup X_i-2$.

(vii) :Y 是空集.

(viii): 对于 $j \in$ i-2,i+2,X_i is complete to A_j*,and anticomplete to A_j* $\setminus$ A_j*.

(ix): 每个 T 中的点都在 X 中有邻点.

(x):Z is complete to T.

(xi):$G[T]$ 是无三长路

(xii): 如果 A_j,A_j-2 和 A_j+2 是团并且至少 X_j+1 和 X_j-1 有一个是 $=\emptyset$ 那么 A_i f 对于 $i \in$ [5] 是一个团.

(xiii) 让 Q 是 T - 团并且让 K 是一个 X_i-团. 那么 Q is either complete or aniticomplete to K.

证明. 根据对称性, 我们假设 A_1,A_3 and A_4 是团., 并且我们用 D_2 去表示一个团 $\in \mathrm{A}_2 \setminus \mathrm{A}_2$*,$\mathrm{D}_5$ 去表示一个团 $\in \mathrm{A}_5 \setminus \mathrm{A}_5$.

对于任意点 $z \in Z$, 我们有 $\leq$ d(z) = $|A_2*|$ + $|A_5*|$ + $|A_1|$ + $|A_3|$ + $|A_4|$ + $|Z-1|$ +$|T|$ $\leq$ 9 , 所以 3 $\leq$ $|A_1|$ + $|A_3|$ + $|A_4|$ $\leq$ 7. 对于任意的 d_5 $\in$ D_5 ,8$\leq$d (d_5) = $|A_1|$ + $|A_4|$ + $|D_5|$ -1 $\leq$ 9,then ,3$\leq$ $|D_5|$ $\leq$ 8, 根据对称性,3$\leq$ $|D_2|$ $\leq$ 8, 所以对于任意点 x $v_1 \in A_1$, d(v_1) $\geq$ 3+3+1+1+1 = 9,so $|A_1|$ = 1, then $|A_4|$ =5, 但是对于任意点 $v \in A_1$, d(v_1) $\geq$ 4+4+1+1 = 10, 和 $\Delta(G)$=9 矛盾.

所以至少有一个 A_2, A_5 是团, 我们假设 A_2 是团. 如果 A_5 有超过两个 D_5-团, 那么对于任意点 $v \in A_1 \cup A_5$ d(v) > 3+3+1+1+1 =9, 所以 A_5 只有两个 D_5 -团, 且有且仅有三个点但有 $|A_1|$ = $|A_4|$ = 1, 和 $|A_1|$ + $|A_4|$ = 6 矛盾. 所以我们可以假设 A_5 仅有两个 D_5-团, 如果 $|D_5|$ = 3, 那么 $|A_1|$ + $|A_4|$ = 6, 且 $|A_3|$ = $|A_2|$ =$|A_5*|$ = 1,if $|A_1|$ = 2 and $|A_4|$ =4, 那么 X_5 = 4 or 5 , 那么 v_3 d(v_3) $\geq$ 4+4+1+1 = 10, 矛盾, 并且对于 $|A_1|$ = $|A_4|$ =3,then $|X_5|$ $\geq$ 2 蕴含着 $X_3 = X_2 = \emptyset$ 且 X_4 or X_1 = 1, t 那么对于任意点 $\in A_3$ d$\leq$ 3+1+2+1 = 7, 和 $\delta(G)$ = 8 矛盾.

, If $|D_5| = \geq 7$, 那么 d$(v_1) \geq 10$ 矛盾，,and if $|D_5| = 6$ $|A_1| = |A_4| = 1$, 那么对于任意点 $v_5 \in D_5$,d$(v_5) \leq 5+1+1 = 7$, 矛盾.If $|D_5| = 5$, 那么 $|A_4| = |A_1| = 2$. 那么 G i 诱导一个 $K_4 \vee H$ 所以 $|D_5| = 4$, 并且 $|A_4| + |A_1| = 5$ or 6, 如果 $|A_4| = 1$ 或者 $|A_1| = 1$, 假设 $|A_4| = 1$, 那么对于 A_1 中的点,d $\leq 5+3+1+1 = 10$ 矛盾, 所以 $|A_4|$ 和 $|A_1| \geq 2$, 那么 G 诱导 $K_4 \vee H$ 矛盾, 所以 $D_5 = \emptyset$. 所以 A$_i$ 都是团,for i $\in$ [5] .

□

情形 3.1. *首先我们不妨假设 T =$\emptyset$, 让 RX_i d 代表 X_i. 中最大的独立集, 并且让 RA_i 代表 A_i 中最大的独立集.*

根据对称性我们选择 $j = 1$ 并且首先我们假设至少 X_2 和 X_5 中有一个是空集.. 根据结构定理 A_i 是团对于所有的 $i \in [5]$

如果存在一个 $j \in [5]$ 使得如果 if $X_ij \neq \emptyset$ 至少有一个 $X_j + 1$ $X_j - 1$. 我们不妨假设 X_3 $X_4 \neq \emptyset$ 所以, 令 $I_1 = \{a_2,\ a_4,\ Rx_3\}$, $I_2 = \{a_3,\ a_5,\ Rx_4\}$. $G-(I_1 \cup I_2)$ 是 5-退化的根据点退化顺序 (Z,A_3,A_4,A_5,A_2,A_1,X_1,X_2 ,X_3,X_4,X_5). 根据引理 1G is 8 -可染的, 矛盾.

根据对称性我们选择 $j = 1$ 并且首先我们假设至少 X_2 和 X_5 中有一个是空集.. 根据结构定理 A_i 是团对于所有的 $i \in [5]$
如果存在一个 $j \in [5]$ 使得如果 if $X_ij \neq \emptyset$ 至少有一个 $X_j + 1$ $X_j - 1$. 我们不妨假设 X_3 $X_4 \neq \emptyset$ 所以, 令 $I_1 = \{a_2,\ a_4,\ Rx_3\}$, $I_2 = \{a_3,\ a_5,\ Rx_4\}$. $G-(I_1 \cup I_2)$ 是 5-退化的根据点退化顺序 (Z,A_3,A_4,A_5,A_2,A_1,X_1,X_2 ,X_3,X_4,X_5). 根据引理 1G is 8 -可染的, 矛盾.

所以，存在一个 j 使得如果 $X_j \neq \emptyset$ 那么 $X_i + 1$ 和 $X_i - 1$ 都是空集.

如果 $X_i = \emptyset$,for all $i \in [5]$ 那么对于任何点 $a_5 \in A_5$ 8$\leq$ d(a_5) =$|Z|$ + $|A_1|$ + $|A_5|$-1 +$|A_3|$ $\leq$ 9,so $|A_1|$ + $|A_5|$-1 +$|A_3|$ $\geq$ +$|Z|$ $\geq$9, 那么对于任意 $z \in Z$ d(z) $\geq$ 9-1+1+1 =10, 和 $\Delta(G) = 9$ 矛盾.

如果仅有一个 $X_i \neq \emptyset$, 我们假设 $X_1 \neq \emptyset$. 那么对于任意 $a_5 \in A_5$ 8$\leq$ d(a_5) =$|Z|$ + $|A_1|$ + $|A_5|$-1 +$|A_3|$ $\leq$ 9,so $|A_1|$ + $|A_5|$-1 +$|A_3|$ $\geq$ +$|Z|$ $\geq$9, 那么对于任意 $z \in Z$ d(z) $\geq$ 9-1+1+1 =10, 和 $\Delta(G) = 9$ 矛盾

如果存在一个 j$\in$ [5] 使得 $X_j \cup X_i + 1 = \emptyset$, 我们不妨假设 X_1,$X_4 \neq \emptyset$, 且 $X_5 = X_3 = \emptyset$ 根据 copycat 引理 $|X_4| > |Z|$ 让 $I_1 = \{z,\ Rx_4\}$, $I_2 = \{a_2,\ a_5,\ Rx_1\}$. $G-(I_1 \cup I_2)$is 5-退化的,根据点的退化顺序 (A_1,A_4,Z,A_3,A_2,A_5,X_1,X_2 ,X_4). 根据引理 1G is 8 -可染的, 矛盾.

所以我们不妨假设 X_2 和 X_5 都 $\neq \emptyset$

并且在这种情况下我们不妨假设 A_2 和 A_5 其中之一不是团否则和情形 *1.1* 和情形 *1.2* 是一样的情形. 我们不妨假设 A_2 不是团.

让 $I_1 = \{z,\ Rx_5,\ Rx_2\}$, $I_2 = \{Ra_2,\ Ra_5,\}$. $G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 $(A_1, Z, A_3, A_2, A_4, A_4X_1, X_2\ , X_3, X_4, X_5)$. 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾.

情形 3.2. 所以我们可以假设 $T \neq \emptyset$

首先我们假设至少有一个 X_2 *and* X_5 为空, 根据结构定理 A_i 是团. 进一步地, 我们假设存在一个 $j\in$ *[5]* 使得 $X_j\ X_j+2\ X_j-2 \neq \emptyset$
我们不妨假设 $X_1\ X_3$ 和 $X_4 \neq \emptyset$ 让 $I_1 = \{a_2,\ Rx_1,\ Rx_3\}$, $I_2 = \{a_5,\ a_3,\ t\}$. $G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 $(\ Z, A_1, A_2, A_3, X_3, A_5, A_4, X_1\ , X_2, X_5, X_4, T)$. 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾.

对于每个 $j\in$ *[5]*, 至少有一个 $X_j\ X_j+2\ X_j-2$ *is* $\emptyset$

首先, 我们假设至少有 $X_2\ X_5$ *is empty* 所以, 存在一个 $i \in$ *[5]* 使得 $X_i \neq \emptyset$ 且 $X \setminus X_i = \emptyset$ 或者 $X_i{-}1, Xi \cup X_i{+}1 \neq \emptyset$ 并且 $X \setminus X_i{-}1 \cup Xi \cup X_i{+}1 = \emptyset$
首先, 我们假设只有一个 $X_i \neq \emptyset$, 我们不妨设 $X_1 \neq \emptyset$, 根据 *copycat* 引理, $|X_1| > |Z|$, $|A_4| > |T|$ $|A_3| > |T|$, $|A_1| > |T|$. 故对于任意的 $z \in Z$ *d(z)* $\leq$ *9* 蕴含着 $|T| = |Z| = |A_5| = |A_2| =$ *1* , 并且对任意的点 $x\, t \in T$ *8* $\leq$ *d(t)* $\leq$ *9 i* 蕴含着存在一个 X_1-团 $X_1{}^*$ 使得 $|X_1{*}|$ *geq 7* , 但对于任意的 $a_4 \in A_4$ *d(* a_4*)*$\geq$ *10*, 矛盾.
其次, 我们可以假设 X_1 和 $X_4 \neq \emptyset$, 这样 T *is complete to* $X_1 \cup X_4$ 让 $I_1 = \{a_5,\ Rx_1,\ Rx_4\}$, $I_2 = \{a_2,\ a_5,\ t_1\}$. $G-(I_1 \cup I_2)$*is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 $(Z, A_5, A_5, A_2, X_1, A_4, A_3, X_2\ , X_5, X_3, X_4, T)$. 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾
所以我们可以假设 $X_1\ X_2 \neq \emptyset$. 且 $X_5 = \emptyset$ 如果 $|X_1| = |X_2| = |Z| =$ *1*. 那么 $|T| =$ *6*. 对于任意但 $z \in Z$ *,d(z)* $>$ *6+1+1+1+1+1 = 11*, 矛盾, 所以至少有 $f\,|X_1| = |X_2| = |Z| =$ *2*. 令 $I_1 = \{a_1,\ a_3,\ Rx_2\}$, $I_2 = \{a_2,\ a_5,\ Rx_1\}$. *G - (* $I_1 \cup I_2$ *) is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 $(Z, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, X_1, X_2\ , X_3, X_4, X_5, T)$. 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾.
所以我们可以假设 X_2 和 $X_5 \neq \emptyset$. 进一步我们可以假设至少有一个 A_2 *and* A_5 不是团, 否则实际上是同样根情形 *2.1* 和 *2.2* 一样的情况. 我们不妨假设 A_2 *i* 不是团.*t* 让 $I_1 = \{Ra_2,\ Ra_5,\ T\}$, $I_2 = \{Rx_2\ z,\ Rx_5\}$. *G - (* $I_1 \cup I_2$

) is 5-退化的, 根据点的退化顺序 (A_1,Z,A_5,A_2,A_3,A_4,X_1,X_2 ,X_3,X_4,X_5,T). *根据引理 1G is 8 -可染的, 矛盾.*

我们完成了这一节的证明.

4 (P_5 k-wheel)-free graph

这一节的证明包含 4 个情形

引理 7 (结构定理 [5])**.** *(i): 如果 $X_i + 1 \neq \emptyset$, 那么 X_i is anticomplete to $X_i + 2$.*
(ii): 让 K 是一个 X_i-团且 K^* 是一个 $X_i + 2$-团. 那么 K is complete to $A_i + 2$ 或者 K^* is complete to A_i.
(iii):Y_i 是团.
(iv) 对于 $j \in$ i-2,i+2 Y_i 中点每个点都 complete to 某一个 A_j-团.
(v) 如果 Y_i 的某个点不是 complete to $A_i - 1$(或者 $A_i + 1$), 那么它就 complete to $A_i - 2 \cup A_i + 2$.
(vi) 对于每一个 i,X_i,$Y_i + 2$,$Y_i - 2$ 中至少有一个是空集.
(vii)$Y_i + 1$ is anticomplete to $X_i \cup X_i + 2$.
(viii) 如果 $X \neq \emptyset$, 那么 $Y_i + 1$ is anticomplete to $Y_i - 2 \cup Y_i + 2$.

情形 4.1 (X=$\emptyset$ 且 $Y \neq \emptyset$)**.**

断言 4.1. *如果 Y_1 和 Y_3 是非空的且 $Y_2 \cup Y_5 = \emptyset$, 那么 $|A_2|$ 和 $|A_5|$ 至少有一个大于等于 2.*

证明. 根据题目条件,.$|A_1|$+$|A_2|$+$|A_5|$ ≥9. 首先, 我们证明.$|A_1|$,$|A_2|$,$|A_5|$ 中至少有两个 ≥2, 如果不是, 那么 $|A_1| = 7$, 那么只能有 $|A_2|$=$|A_3| = |Y_1|$=$|A_5|$=$|A_4|$=1, 对于 A_4 中的点来说,dleq1+1+1 = 3, 矛盾. 其次, 我们进一步证明,$|A_3| \geq 2$, 若 $|A_3| = 1$,$|A_4| = 1$, 那么若 $|A_2|$ +$|Y_1| \geq 7$, □

根据定理 *3*, $T=\emptyset$, 并且如果 Y_i 不是 *anticomplete to* Y_i+2 那么,G *is* *3*K_1*-free*, 根据引理 *6*,G 满足 *thee Borodin Kostochka's conjecture*, 矛盾
所以我们不妨假设对于每个 $i\in$ *[5]*, Y_i *is anticomplete to* $Y_i+2\cup Y_i-2$ 并且如果 Y_i 和 Y_i+2 都非空, 那么 Y_i Y_i+2 至少有一个 *complete to* A_i+1
如果有一对 Y_i Y_i+2 是非空的, 我们不妨假设 Y_1 和 Y_3 是非空的.
如果 Y_1 是 *complete* 到 A_2, 且 Y_3 不 *complete* 到 A_2, 这样便有 $|A_2|\geq$*2* 且 A_1,A_2,A_5 是团，Y_3*complete to* A_1, 如果 A_3 和 A_4 中有一个不是团，不妨设 A_3 不是团, 那么让 $I_1=\{a_3,\ RY_1,\ RY_3\}$, $I_2=\{a_1,\ a_3',\}$. G - ($I_1\cup I_2$) *is 5*-退化的，根据点的退化顺序 (A_2,A_1,A_4,A_5,A_3,Y). 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾. 如果 A_3 和 A_4 都不是团, 那么让 $I_1=\{a_3,\ RY_1,\ RY_3\}$, $I_2=\{RA_2,\ RA_4',\}$. G - ($I_1\cup I_2$) *is* 5-退化的，根据点的退化顺序 (A_3,A_2,$A_4$5,A_1,A_4,Y). 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾. 如果 A_3 是团, 但 A_3 不是团, 那么让 $I_1=\{RA_2,\ RA_4\}$, $I_2=\{RA_1,\ RA_3\}$. G - ($I_1\cup I_2$) *is 5*-退化的，根据点的退化顺序 (Y_1,A_5,Y_3,A_3,A_1,A_4,A_2). 根据引理 *1G is* *8* -可染的, 矛盾

如果 Y_1 是 *complete* 到 A_2, 且 Y_3*complete* 到 A_2, 如果有 Y_1 *is not complete to* A_5 首先, 如果 A_1 不是团, 那么让 $I_1=\{RA_1,\ RA_4\}$, $I_2=\{RA_5,\ RA_3\}$. G - ($I_1\cup I_2$) *is 5*-退化的,根据点的退化顺序 (A_5,A_4,Y_3,A_2,A_1). 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾其次„ 如果 A_2 不是团, 那么让 $I_1=\{RA_1,\ RA_4\}$, $I_2=\{RA_5,\ RA_2\}$. G - ($I_1\cup I_2$) *is* 5-退化的，根据点的退化顺序 (Y_1,Y_3,A_5,A_1,$A_4A_3A_2$). 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾

如果 Y_1 *is complete to* A_5 Y_3 *is complete to* A_4. 根据断言, 不妨假设 $|A_2|\geq$ *2*, 那么让 $I_1=\{RA_1,\ RA_3,\}$, $I_2=\{RA_1,\ RA_4'\}$. G - ($I_1\cup I_2$) *is 5*-退化的，根据点的退化顺序 (A_2,Y_1,A_5,A_4,A_3,A_1,Y_3). 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾如果 $Y_2\cup Y_5\neq\emptyset$ 那么让 $I_1=\{RA_1,\ RA_3,\}$, $I_2=\{RA_2,\ RA_4\}$. G - ($I_1\cup I_2$) *is* 5-退化的，根据点的退化顺序 (A_2,Y_2,Y_1,A_5,Y_3,A_4,A_1). 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾

只有一个 $Y\neq\emptyset$, 不妨设 $Y_1\neq\emptyset$.

若 A_2 不是团, 那么让 $I_1=\{RA_1,\ RA_5,\}$, $I_2=\{RA_2,\ RA_4\}$. G - ($I_1\cup I_2$) *is 5*-退化的, 根据点的退化顺序 (Y_1,A_3,A_2,A_1,A_5,A_3). 根据引理 *1G is 8*

-可染的, 矛盾若 A_4 不是团, 那么让 $I_1 = \{RA_5,\ RA_3,\}$, $I_2 = \{RA_2,\ RA_4\}$. *G - (* $I_1 \cup I_2$ *) is 5*-退化的，根据点的退化顺序 *(*A_4,A_3,Y_1,A_2,A_5,A_1*)*. 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾

如果只有 Y_i 和 $Y_i + 1 \neq \emptyset$, 不妨设 Y_1 和 $Y_2 \neq \emptyset$. 如果 Y_1 *is complete to* $A_5 \cup A_1$,Y_2 *is complete to* $A_1 \cup A_3$
若 $A_4 \cup A_5$ 是一个团, 那么让 $I_1 = \{RA_1,\ RA_3,\}$, $I_2 = \{RA_2,\ RA_4,\}$. *G - (* $I_1 \cup I_2$ *) is 5*-退化的，根据点的退化顺序 *(*A_2,A_3,Y_1,Y_2,A_5,A_4,A_1*)*. 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾
若 A_5 不是团, 那么让 $I_1 = \{RA_5,\ RA_3,\}$, $I_2 = \{RA_2,\ RA_4\}$. *G - (* $I_1 \cup I_2$ *) is 5*-退化的，根据点的退化顺序 *(*A_4,Y_1,Y_2,,A_1,A_2,A_3,A_5*)*. 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾如果 Y_1 *is not complete to* A_5, 那么 A_5,A_3 和 A_4 是团,, 那么让 $I_1 = \{RA_5,\ RA_2,\}$, $I_2 = \{RA_1,\ RA_3\}$. *G - (* $I_1 \cup I_2$ *) is 5*-退化的，根据点的退化顺序 *(*Y_1,Y_2,A_1,A_2,A_4,A_3,A_5*)*. 根据引理 *1G is 8* -可染的, 矛盾

情形 4.2 (X $\neq \emptyset$ and Y $\neq \emptyset$)**.**

断言 4.2. *每个 T-团至少在 $X \cup Y$ 中有 3 个邻点.*

证明. 如果不是，每个 T-团至少有七个点，则我们任意挑选 complete 到这个 T-团上的 X 中任意一点 x,x 的度数 $d(x) \geq$ 7+1+1+1=10. 矛盾.

□

对每个 $i \in$ [5] ,X_i Y_i 其中之一为空.

由于 Y 不是空集，我们不妨假设 Y_2 不是空集，所以 X_2 是空集，根据结构定理，$X_4 \cup X_5 = \emptyset$, 又由于 X 不是空集 $X_1 \cup X_3 \neq \emptyset$, 我们不妨假设 $X_1 \neq \emptyset$, 所以 $Y_1 = \emptyset$, 根据结构定理,$X_3 \cup X_4 = \emptyset$.

若 Y_2 is not complete to A_1 or A_3.
我们不妨假设 Y_2 is not completet to A_1, 根据结构定理:A_1,A_4, A_5 是团, 令 $I_1 = \{RA_2,\ RA_5\ RX_1\}$, 令 $I_2 = \{RA_1,\ RA_3,\ T\}$. 现在有，*G - (* $I_1 \cup I_2$ *) is 5*-退化的, 根据点的退化顺序 *(*A_1,X_1,A_2,A_5,A_4,A_2,Y_2,A_3 ,X_3,Y_5 T *)*. 根据引理 *1,G 是 8* -可染的, 矛盾.

若:Y_2 *is complete to* $A_1 \cup A_3$.
, 令 $I_1 = \{RA_2,\ RY_2\ RX_1\}$, 令 $I_2 = \{RA_1,\ RA_3,\ T\}$. 现在有，$G$ - (I_1 $\cup$ I_2) *is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 (A_1,X_1,A_4,A_3,X_1,Y_2,Y_5,A_2 ,A_5,X_3). 根据引理 1,G 是 8 -可染的, 矛盾.
对每个 $i \in$ [5] 存在一个 i, 使得 X_i,Y_i .$\neq \emptyset$

我们不妨假设 X_1 和 $Y_1 \neq \emptyset$, 根据结构定理，$X_3 \cup X_4 \cup Y_3 \cup Y_4 = \emptyset$. 假设 $x \in X_1$ 在 ($A_3 \setminus B_3$) $\cup$ (A_4 *setminus* B_4) 中有邻点. 根据结构定理，x *is complete to* Y_1.
令 $I_1 = \{RA_2,\ RA_5\ RX_1\}$, 令 $I_2 = \{RA_1,\ RA_3,\ T\}$. 现在有,$G - (I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 (Y_1,X_1,A_3,A_4,A_1,A_2,A_5,X_2 ,X_5,Y_2,Y_5 T). 根据引理 1,G 是 8 -可染的, 矛盾

假设 $x \in X_1$ 在 ($A_3 \setminus B_3$) $\cup$ (A_4 *setminus* B_4) 中有没邻点
根据结构定理我们分为两种情况，第一种情况，$A_3 \cup A_4$ 是团, 如果 A_2 和 A_5 有一个是团，那么 G 是 5-退化的, 如果 A_2 和 A_5 都是团, 那么根据断言 2,A_1 不是团令 $I_1 = \{RA_1,\ RA_4\}$, 令 $I_2 = \{RA_2,\ RA_5,\ RX1,\ T\}$. 现在有,$G - (I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 (A_1A_5,Y_1,A_3,A_4,A_2,A_5,X_2 ,X_5,Y_2,Y_5 T). 根据引理 1,G 是 8 -可染的, 矛盾

情形 4.3 (X = Y = $\emptyset$)**.** 根据 [5],$T = \emptyset$, 既然 A_i 不含 3 长路, 并且 A_i 是齐次点集我们不妨假设 A_i 是团, 通过选择每个 A_i 最大的团, 这样 G 是一个 *complete buoy*. 根据引理 5,G 满足 *the Borodin Kostochka's conjecture*, 矛盾

情形 4.4 (X $\neq \emptyset$ Y = $\emptyset$)**.** 首先, 我们假设如果存在一个指标 $i \in [5]$,X_i *is not anticomplete to* $X_i + 2$, 根据对称性, 我们不妨设 X_1 *is not anticomplete to* X_3. 我们分为三种情况来证明.

如果 X_4,X_5 都不为空, 那么 X_1 *is anticomplete to* X_4, 根据结构定理,X_1 *is complete to* A_4 或者 X_4 *is complete to* A_1, 且 X_3 *is complete to* A_5 或者 X_5 *is complete to* A_3, 根据对称性, 我们不妨设 X_1 *is complete to* A_4 以及 X_3 *is anticomplete to* A_5 令 $I_1 = \{RA_2,\ RA_5\ X_1\}$,$I_2 = \{RA_4,\ RA_5,\ RX3,\}$. 现在有,$G - (I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 (A_5,A_4,X_4,X_1,X_5,A_1,X_3,A_2 , T). 根据引理 1,G 是 8 -可染的, 矛盾.

如果 X_5 和 X_4 中有一个为空, 我们不妨设 X_1 *is anticomplete to* X_4,

即 X_5 为空集, 我们再分两种情况讨论, 第一种, 若 A_4 是团, 那么令 $I_1 = \{Q_1,\ X_3\ A_2\ A_4\}$,$I_2 = \{RX_4,\ RA_5,\ RQ1',\}$. 现在有,$G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 $(A_1,X_4,X_3,A_3,A_4,A_2,A_5,T\ )$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的, 矛盾. 如果 A_4 不是团, 那么令 $I_1 = \{RX_1,\ A_2\ A_5,\}$,$I_2 = \{RA_4,\ X_3,\}$. 现在有,$G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的, 根据点的退化顺序 $(A_1,A_3,X_4,A_4,A_2,A_5,X_1,T\ )$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的, 矛盾.

如果 X_1 *is anticomplete to* X_4 或者 $X_4 = \emptyset$. 如果 T 是非空集合, 那么对于 T 中的点来说,$|Q_1|\ +\ |Q_3|\ +|T|\ \geq\ 9$, 那么对于 Q_1 中的点来说,$d\ \geq\ |A_1|\ +|A_3*|\ +|Q_1|\ +\ +|Q_3|\ +\ +|T|\ \geq\ 11$, 和最大度小于 9 产生矛盾. 所以我们不妨假设 T 是空集, 若 $X_1 \cup X_3$ 是空集, 那么令 $I_1 = \{RX_3,\ RA_4\}$,$I_2 = \{RX_1,\ RA_5,\ RA_2',\}$. 现在有,$G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的根据点的退化顺序 $(A_1,A_3,A_2,A_5,A_4,A_4,X_1,X_3\ )$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的, 矛盾. 如果 X_1 *is not a clique*, 根据 *copycat* 引理,$|X_1| \geq 3$, 集, 那么令 $I_1 = \{RX_3,\ RA_4\ RA_2\}$,$I_2 = \{RX_1,\ RA_5,\ RA_3,\}$. 现在有,$G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的根据点的退化顺序 $(A_1,A_3,A_2,A_5,A_4,A_4,X_1,X_3\ )$.. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的, 矛盾.

其次, 我们假设对于任意的 $i \in [5]$ X_i *is anticomplete to* $X_i + 2$.

如果只有一个 $X_i \neq \emptyset$ 我们假设 $X_1 \neq \emptyset$, 同时不妨假设 X_1 *is complete to*A_3, 根据 *copycat* 引理,$|A_5| \geq |X_1|$, 故有 $|A_5| \geq 2$, 若 $|A_1| = 1$, 那么 $|A_5| + |A_3| \geq 8$, 而对于 A_3 中的点来说,$d \geq 8+1+1 = 10$, 矛盾, 故若 $|A_1| \geq 2$,, 那么令 $I_1 = \{RA_4,\ RA_1\}$,$I_2 = \{RX_1,\ RA_5,\ RA_2,\}$. 现在有,$G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的根据点的退化顺序 $(A_1,A_5,A_3,A_2,A_4,X_1,T\ )$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的.

如果存在指标 *j*, 使得 X_j,X_j+2,X_j-2 是非空的, 我们不妨假设 X_1,X_3 和 X_4 是非空的,, 那么令 $I_1 = \{RX_4,\ RA_3,\ RA_5\}$,$I_2 = \{RX_1,\ RX_3,\ RA_2,\}$. 现在有,$G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的根据点的退化顺序 $(A_1,A_5,A_2,A_3,A_4,X_1,X_3,X_4,T\ )$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的.

若存在指标 *j*, 使得 X_i,X_j+1 是非空的, 我们不妨假设 X_1 和 X_2 是非空的, 首先, 若 X_1 *is anticomplete to* A_3 或者 X_2 *is anticomplete to* A_5, 我们不妨设 X_1 *is anticomplete to* A_3, 那么,$|A_5| \geq 3$, 令 $I_1 = \{RX_1,\ RA_2,\ RA_5\}$,$I_2 = \{RX_x,\ RX_3,\ RA_1,\}$. 现在有,$G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的根据点的退化顺序 $(A_1,A_2,A_4,A_5,A_3,X_1,X_2,T\ )$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的. 故有 X_1 *is complete to* $X_4 \cup X_3$ 且 X_2 *is complete to* $X_4 \cup X_5$ 令 $I_1 = \{RX_1,\ RA_2,\ RA_5\}$,$I_2 = \{RX_2,\ RX_3,\ RA_1,\}$. 现在有,$G-(I_1 \cup I_2)$ *is* 5-退化的根据点的退化顺序

$(A_1,A_2,A_4,A_5,A_3,X_1,X_2,T)$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的.

若存在指标 j, 使得只有 X_j X_j+2 是非空的，我们不妨假设只有 X_1 和 X_3 是非空的，$|A_1|$ $+|A_2|$ $+$ $|A_3|$ $\geq$ 9, 若 $|A_2|\geq 3$, 那么若 $|A_1|\geq 2$ 且 $|A_3|\geq 2$, 那么 G 诱导一个 $K_4\cup H$ 矛盾，故 $|A_3|\leq 2$, 令 $I_1=\{RX_1,\ RA_2,\ RA_5\}$,$I_2=\{RX_3,\ RA_,\}$. 现在有,$G-(I_1\cup I_2)$ is 5-退化的根据点的退化顺序 $(A_1,A_2,A_3,A_5,X_1,X_3,T)$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的. 若 $|A_2|\leq 2$, 那么不妨设 $|A_1|\geq 3$, 且若 $|A_3|$ =1, 那么 $|A_1|\geq 6$, 且有 $|A_4|$,$|X_1|$ $\leq$2,$|A_5|\leq 3$, 那么对于 A_3 中的点来说,$d\leq$ 2+1+3=6 矛盾. 故 $|A_3|\geq 2$,, 令 $I_1=\{RX_1,\ RA_2,\ RA_5\}$,$I_2=\{RX_3,\ RA_,\}$. 现在有,$G-(I_1\cup I_2)$ is 5-退化的根据点的退化顺序 $(A_1,A_2,A_3,A_5,X_1,X_3,T)$. 根据引理 1,$G$ 是 8 -可染的.

我们完成了这部分的证明

5 (P_5,4wheel)-free graph with an induced $(C_7)^c$

引理 8 (结构定理 [5])**.** *我们不妨假设 G is a blowup of H^*. 我们不妨假设 /G is a clique expansion of H^*. 根据条件，G 含有一个诱导的 $(C_7)^c$,a_1, a_2 , a_3 , a_4 , a_5 . a_6 , a_7,a_8,a_9 我们不妨假设有七个非空且两两不相交的顶点集：$V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6,V_7$ ，使得对于每个模 7 的 i,V_i is anticomplete to $V_i-1\cup V_i+1$,and complete to $V_jj\neq$\{i-1,i+1\},V_8 is complete to $V_1\cup V_2\cup V_5$,and anticomple to $V_3\cup V_4\cup V_6\cup V_7$ V_9 is complete to $V_2\cup V_5\cup V_6$,and anticomple to $V_1\cup V_3\cup V_4\cup V_7$ 并且记 $V:=V_1\cup ...\cup V_9$. 我们选择这样的 A 为极大的并且记 $a_i\in V_i$.*

证明. 首先，我们不妨假设 $|V_2|$ = $|V_5|$ = $|V_6|$ =1, 故有 $|V_9|$ =6 or 7, 同时，我们有 d(V$_2$)= $|V_4|+|V_5|+|V_6|+|V_7|+|V_8|+|V_9|\geq$ 1+1+1+1+1+6 = 11. 矛盾. 所以至少 $|V_2|$,$|V_5|$, $|V_7|$, 中有一个 $\geq$ 2. 令 $I_1=\{v_4,\ v_5\}$, 令 $I_2=\{v_6,\ v_7,\ v_8\}$. 现在有，$G-(I_1\cup I_2)$ 是 5-退化的, 有点的退化顺序 (V$_2$,V$_5$,V$_1$,V$_8$,V$_3$,V$_4$,V$_6$,V$_7$,V$_9$). 根据引理 1,G 是 8 -可染的, 矛盾.

□

参考文献

[1] Bondy J A,Murty U S R Graph Theory.Berlin:Springer,2008

[2] Cranston D W, Lafayette H, Rabern L. Coloring (P 5, gem) (P_5,gem)-free graphs with δ− 1 $\delta - 1$colors[J]. Journal of Graph Theory, 2022, 101(4): 633-642.

[3] A. V. Kostochka, Degree, density, and chromatic number, Metody Diskret. Anal. 35 (1980), 45–70 (in Russian).

[4] P. A. Catlin, Embedding subgraphs and coloring graphs under extremal degree conditions, Ann Arbor, MI, ProQuest LLC, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1976.

[5] Arnab Char, T. Karthick Coloring of (P5, 4-wheel)-free graphs.