KAMK • University of Applied Sciences

Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet

Diskreetti Fourier Muunnos (DFT)

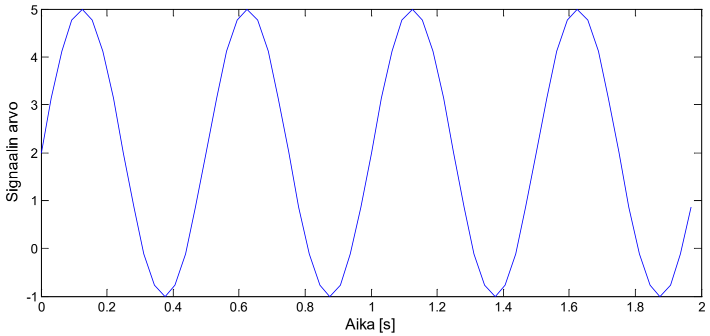
Taneli Rantaharju
044 7101 253
taneli.rantaharju@kamk.fi
Työhuone TA13H115

KAMK • University of Applied Sciences

Iso kuva – Mitä DFT tekee?

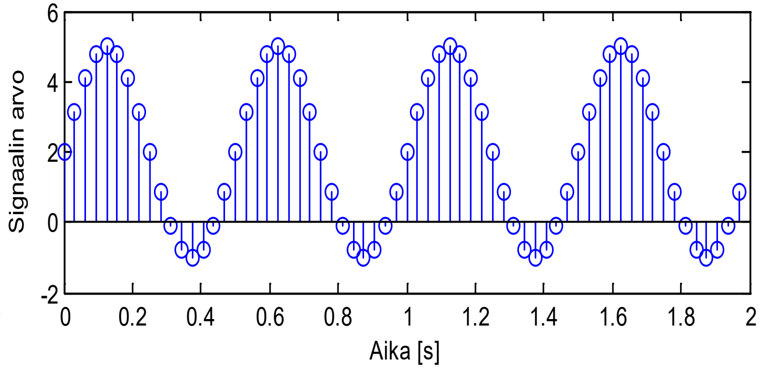
1) Lähtökohta: Jatkuva-aikainen signaali on muutettu oikeaoppisesti digitaaliseen muotoon (laskostumisen estäminen ja AD-muunnos)

Analoginen signaali



-AD-muunnos
-Laskostumisen esto (Nyquistin ehto)

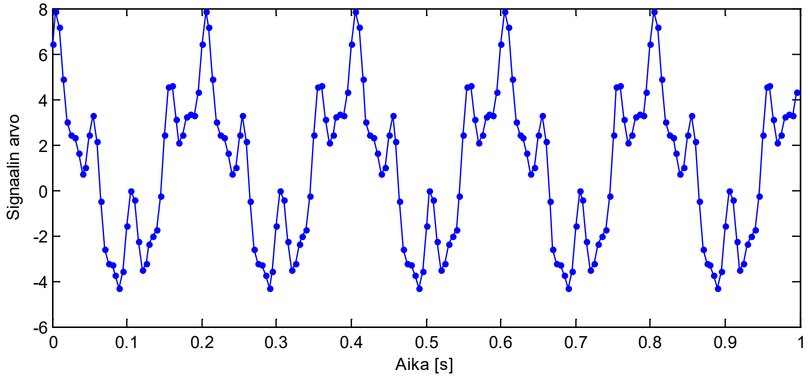
Digitaalinen signaali



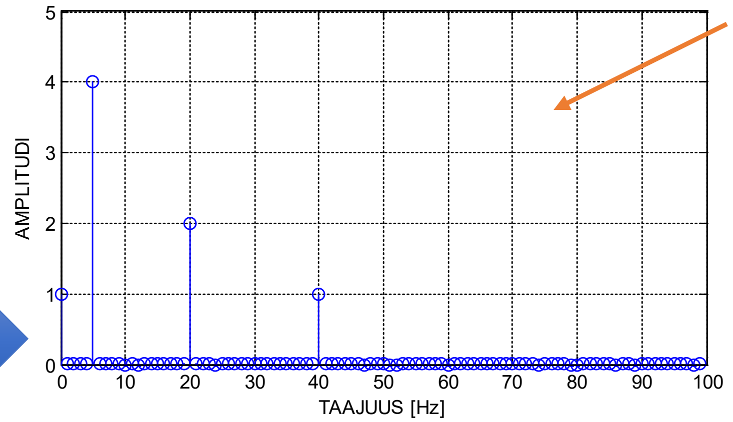
KAMK • University of Applied Sciences

Iso kuva – Mitä DFT tekee?

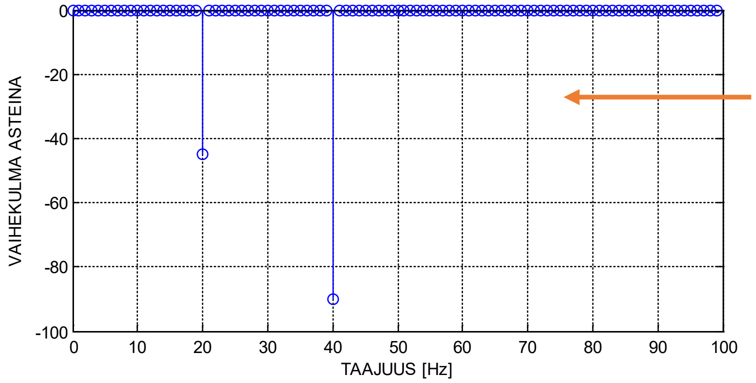
2) Diskreetti Fourier-muunnos vie digitaalisen signaalin taajuustasoon. Signaalin taajuusjakaumaa tai taajuussisältöä voidaan tarkastella mm. erilaisten spektrien avulla.



DFT + muutama välivaihe



Yksipuolinen amplitudispektri



Yksipuolinen vaihespektri

Signaali on kolmen kosinisignaalin summa

s1=4*cos(2*pi*5*t);

s2=2*cos(2*pi*20*t - pi/4)+1;

s3=cos(2*pi*40*t - pi/2);

Diskreetti Fourier-muunnos

N näytettä pitkän signaalin x[n] diskreetti Fourier-muunnos (DFT) on muodostettavissa yhtälön

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

mukaisesti, missä $\boldsymbol{n}$ **on signaaliin liittyvä indeksi** ja $\boldsymbol{k}$ **sen muunnokseen liittyvä indeksi.**

On huomattava, että **yhden $\boldsymbol{X[k]}$:n arvon laskemiseksi on käytävä läpi kaikki signaalin arvot** ja että muunnos on yhtä pitkä kuin alkuperäinen signaali.

Diskreetti Fourier-muunnos

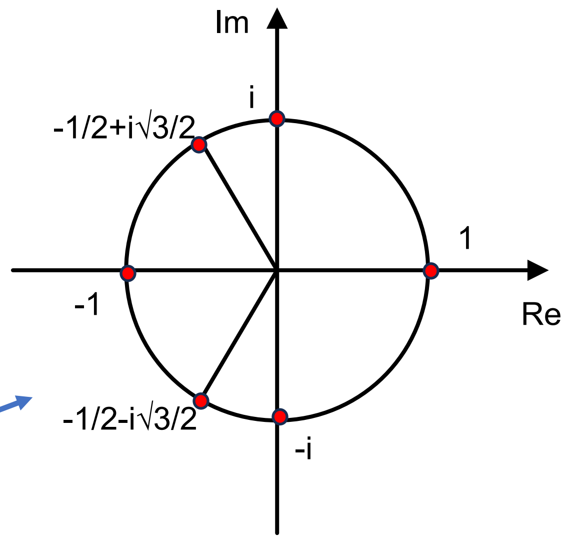
Yhtälössä

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

esiintyvä tekijä

$$e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}$$

saa arvoja, jotka ovat kompleksitasossa olevan yksikköympyrän kehällä.



Kaikki mahdolliset $e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}$:n arvot, kun $N = 1, 2, 3, 4$

Diskreetti Fourier-muunnos

Tarkastellaan esimerkkinä signaalin x[n] = [0, 1, 2, 3] diskreettiä Fourier-muunnosta ja lasketaan se määritelmän perusteella. Eri komponenteille saadaan seuraavat tulokset:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 0 \cdot n} = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = 6,$$

$$X[1] = x[0] e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 1\cdot 0} + x[1] e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 1\cdot 1} + x[2] e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 1\cdot 2} + x[3] e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 1\cdot 3} =$$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-i) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot i = -2 + 2i$$

Diskreetti Fourier-muunnos

$$X[2] = x[0]e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 2\cdot 0} + x[1]e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 2\cdot 1} + x[2]e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 2\cdot 2} + x[3]e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 2\cdot 3}$$

$$= 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) = -2$$

$$X[3] = x[0]e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 3\cdot 0} + x[1]e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 3\cdot 1} + x[2]e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 3\cdot 2} + x[3]e^{-\frac{i2\pi}{4}\cdot 3\cdot 3}$$
$$= 0\cdot 1 + 1\cdot i + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-i) = -2 - 2i.$$

FFT-algoritmi

- DFT:n muodostaminen edellä kuvatulla tavalla on tietokoneellakin suoritettuna erittäin paljon aikaa vievä prosessi.
- Siinä tarvitaan N^2 kertolaskua ja $N(N-1)$ yhteenlaskua.
- Lisäksi on huomioitava, että e:n korottaminen kompleksiseen potenssiin vaatii oman kapasiteettinsa.
- Diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseksi on kehitetty nopeampia tapoja, joiden kompleksisuus on luokkaa $N \cdot logN$.
- Algoritmien avulla saatavia diskreettejä Fourier-muunnoksia kutsutaan nimellä FFT (Fast Fourier Transform).

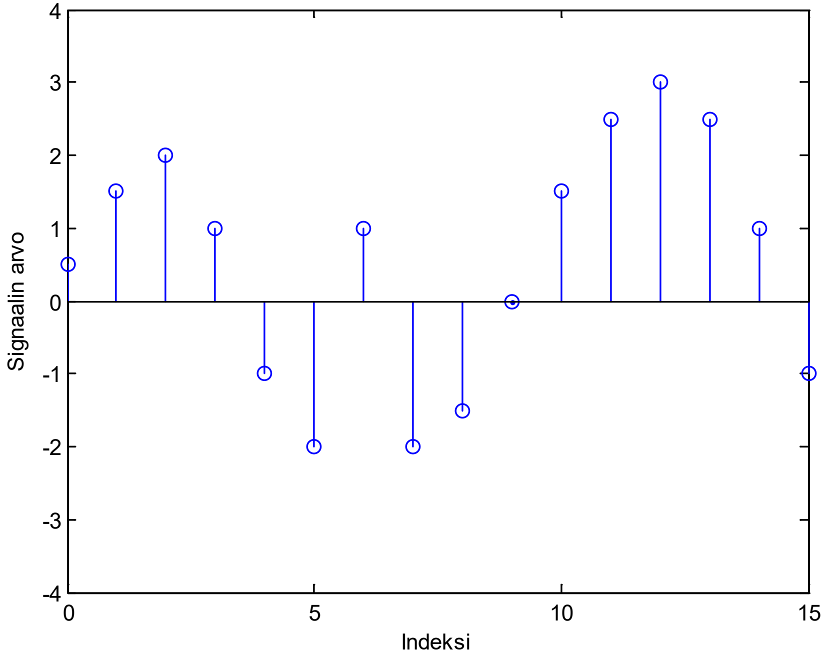
FFT-algoritmi

- FFT-algoritmeista tunnetuin on Cooleyn ja Tukeyn 1965 esittämä menetelmä, jossa muunnettava signaali jaetaan useassa vaiheessa aina kahteen osaan
- Jaosta aiheutuen signaalin pituus täytyy olla esitettävissä kahden kokonaislukupotenssin avulla
- FFT-algoritmilla saavutetaan merkittäviä hyötyjä suhteessa määritelmän mukaiseen DFT:n laskentaan, kun näytepisteiden määrä on suuri

Diskreetti Fourier-muunnos

- DFT:n ominaisuuksien läpikäymiseksi otetaan tarkasteltavaksi kuvan mukainen, ohjelmallisesti luotu esimerkkisignaali (pituus 16 näytepistettä)

- Signaali sisältää tasa- eli DC-komponentin (sen keskiarvo on positiivinen)
- Signaalin epäsäännöllisyydestä päätellen se sisältää ilmeisesti useita taajuuskomponentteja



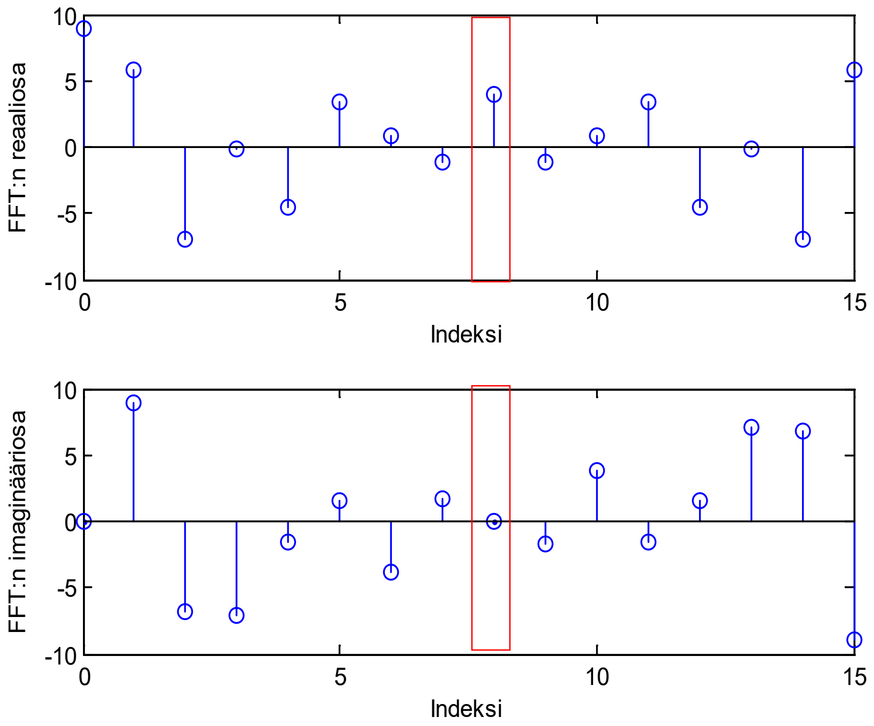
Kuva. Ohjelmallisesti muodostettu keinotekoinen signaali indeksin funktiona

Diskreetti Fourier-muunnos

Kuvassa on esitetty signaalin DFT muodostettuna MATLABin/Octaven FFT-algoritmin avulla.

Havaintoja kuvasta:

- Indeksille nolla muodostuva DFT:n komponentti on reaalinen
- **Reaaliosa on indeksin 8 suhteen symmetrinen** lukuun ottamatta indeksillä nolla olevaa DFT:n komponenttia.
- Vastaavasti **imaginääriosa on indeksin 8 suhteen antisymmetrinen** lukuun ottamatta indeksillä nolla olevaa DFT:n komponenttia.
- Lisäksi tässä tapauksessa, kun N on parillinen, indeksillä kahdeksan oleva DFT-komponentin imaginääriosa on nolla.



Diskreetti Fourier-muunnos

- DFT:n laskennassa ei tarvitse rajoittua k:n arvoihin $0 \ldots N-1$, vaan se voidaan suorittaa millä tahansa k:n kokonaislukuarvolla.
- Näin saatavalle **DFT:lle on ominaista jaksollisuus** jakson pituuden ollessa N, mikä nähdään yksinkertaisesti muodostamalla DFT kokonaislukuarvolla $k+N$.

$$X[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}\cdot(k+N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}\cdot k\cdot n}\, e^{-2i\pi n}$$

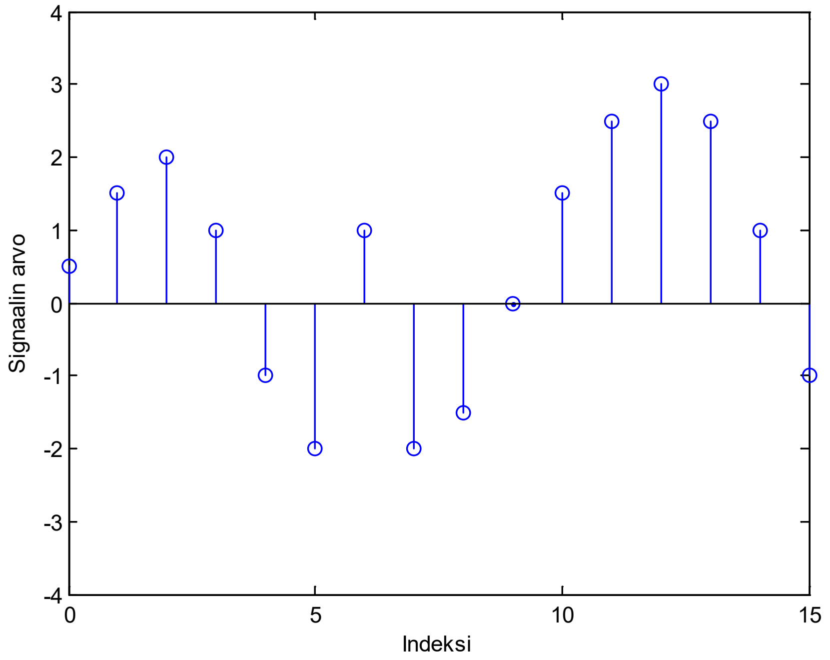
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}\cdot k\cdot n} = X[k],$$

sillä

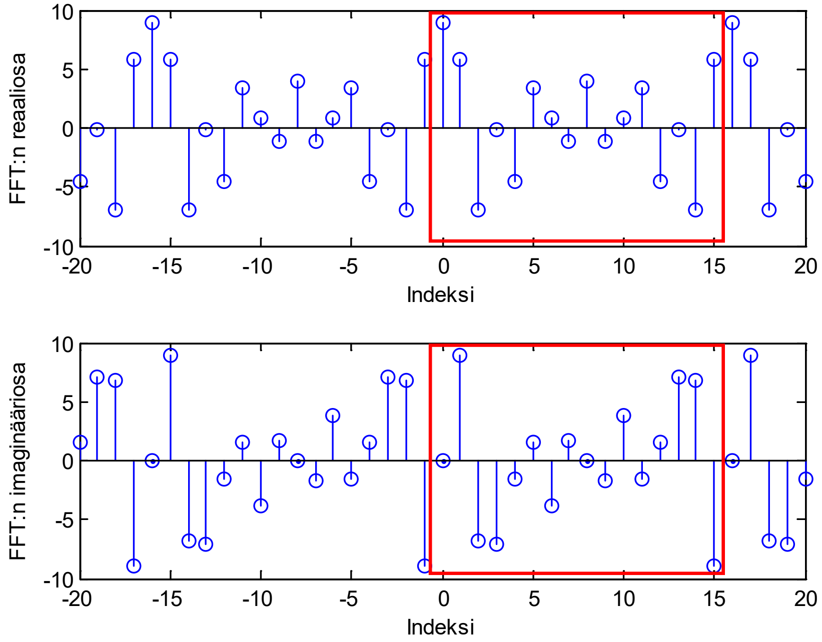
$e^{-2i\pi n} = 1$ kaikilla n:n arvoilla.

Diskreetti Fourier-muunnos

- Alla olevissa kuvassa on esitetty signaalin DFT:n jaksollisuus
- Signaalin pituus N=16 (indeksit 0…15), DFT muodostettu k:n arvoille -20…20



Diskreettiaikainen signaali



Vasemmalla esitetyn signaalin DFT, k:n arvot -20…20

Diskreetti Fourier-muunnos

Digitaalisessa signaalinkäsittelyssä signaalit ovat yleensä reaalisia. Niiden DFT:lle on voimassa seuraavat ominaisuudet:

1. $X[k] = X[-k]^*$,
2. $ReX[k] = ReX[-k\,]$,
3. $ImX[k] = -ImX[-k]$
4. $|X[k]| = |X[-k]|$
5. $argX[k] = -argX[-k]$.

Ominaisuus 1 sisältää sen, että $X[k]$ ja $X[-k]$ ovat toistensa kompleksikonjugaatteja, joilla on ominaisuuden 2 mukaisesti sama reaaliosa ja ominaisuuden 3 mukaisesti vastakkaismerkkinen imaginääriosa. Tällöin niiden itseisarvo on yhtä suuri (ominaisuus 4), ja kulma on vastakkaismerkkinen osoitinesityksessä (ominaisuus 5).

Käänteinen diskreetti Fourier-muunnos (IDFT)

Diskreetin Fourier-muunnoksen käänteismuunnos määritellään yhtälöllä

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N} \cdot k \cdot n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Käytetyt symbolit ovat merkitykseltään samat kuin DFT:n määritelmässä: $\boldsymbol{n}$ **on signaaliin liittyvä indeksi** ja $\boldsymbol{k}$ **sen muunnokseen liittyvä indeksi.**

On huomattava, että **yhden x**$[n]$**:n arvon laskemiseksi on käytävä läpi kaikki DFT:n arvot** ja että käänteismuunnos on yhtä pitkä DFT eli alkuperäisen signaalin mittainen.

Käänteinen diskreetti Fourier-muunnos

Käänteisen DFT:n laskennassa ei tarvitse rajoittua n:n arvoihin $0 \ldots N-1$, vaan laskenta voidaan suorittaa millä tahansa n:n kokonaislukuarvolla.

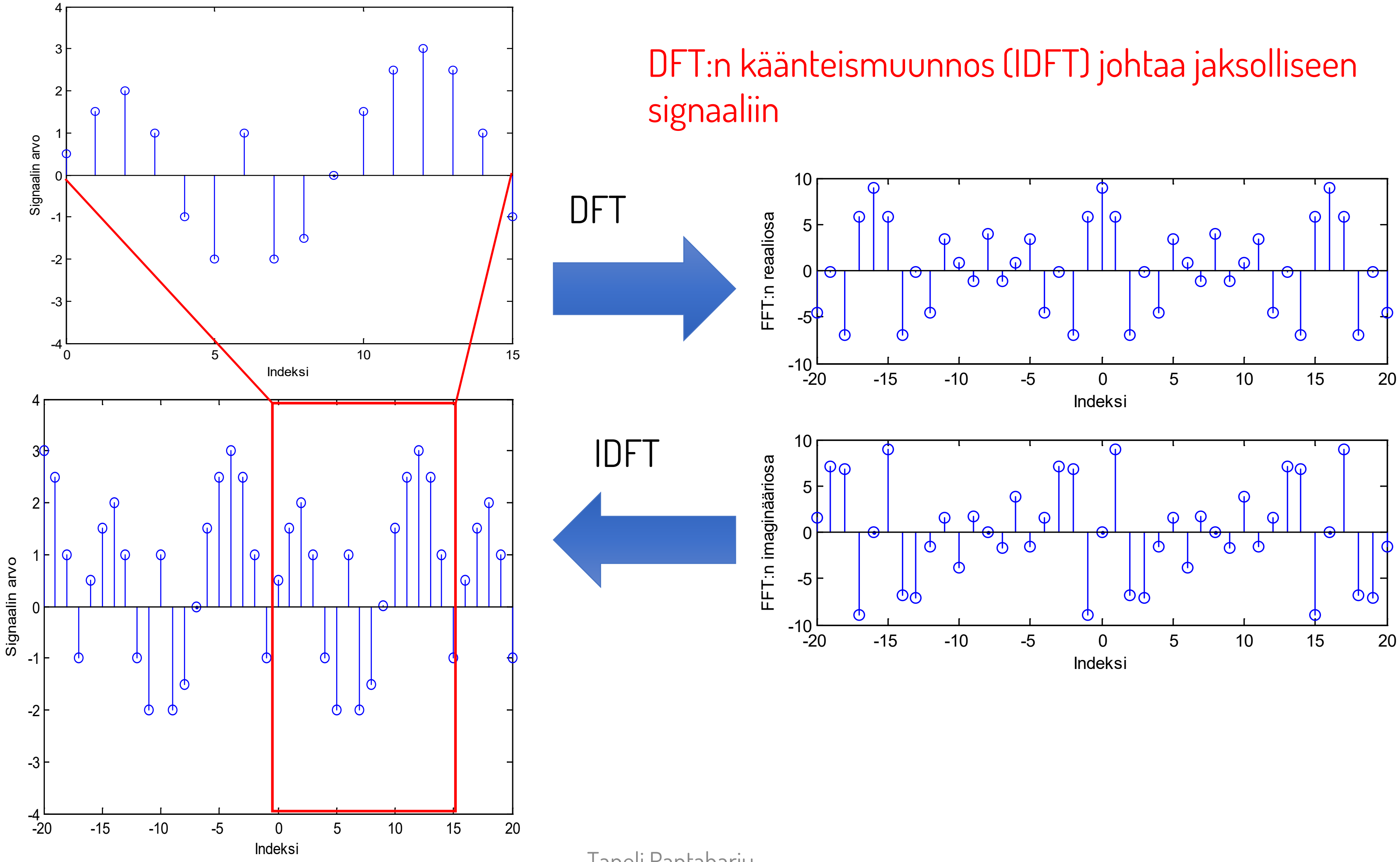
Näin saatavalle **käänteiselle DFT:lle on ominaista jaksollisuus** jakson pituuden ollessa N, mikä on yksinkertaisesti osoitettavissa muodostamalla käänteinen DFT kokonaislukuarvolla $n+N$.

$$x[n+N] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N} \cdot k(n+N)} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \, e^{i2\pi k} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N} \cdot k \cdot n} = x[n],$$

sillä
$e^{i2\pi k} = 1$ kaikilla k:n arvoilla.

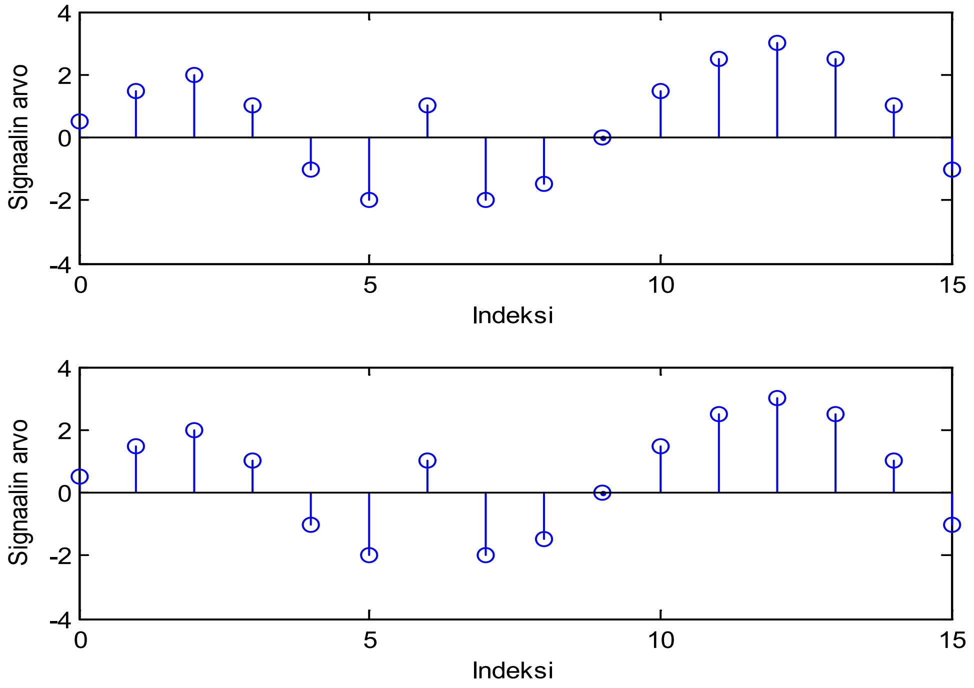
Käänteinen diskreetti Fourier-muunnos

DFT:n käänteismuunnos (IDFT) johtaa jaksolliseen signaaliin



Käänteinen diskreetti Fourier-muunnos

- On huomattava, että alkuperäisen signaalin muodostamiseen käänteismuunnoksen avulla voidaan käyttää yhtä mitä tahansa jaksoa jaksollisesta DFT:stä.
- Alla olevassa kuvassa on esitetty tulokset, jotka on saatu muodostamalla käänteismuunnos edellisen dian DFT:n indeksiarvoilla $3 \ldots 18$ (ylempi kuva) ja $-8 \ldots 7$ (alempi kuva).



KAMK • University of Applied Sciences

DFT:n symmetrisyyden tarkastelua

Pituudeltaan pariton signaali

x[n] = [-1 4 6 7 8], n= 0…N-1, missä N on signaalin pituus

- X[k]= 24 -7,81 + 4,39i -6,69 + 1,40i -6,69 - 1,40i -7,81 - 4,39i

Aina reaalinen ja uniikki

Kompleksikonjugaatteja

Kompleksikonjugaatteja

Päätelmä: X[k]:n arvoja tarvitsee laskea vain (N-1)/2 saakka, sillä loput voidaan päätellä symmetrisyyden perusteella**. Tässä esimerkissä X[0], X[1] ja X[2]**

DFT:n symmetrisyyden tarkastelua

Pituudeltaan parillinen signaali

x[n] = [-1 4 6 7], n= 0...N-1, missä N on signaalin pituus

Aina reaalinen ja "uniikki"

- X[k]= 16 -7 + 3i -6 -7 - 3i

Aina reaalinen ja "uniikki"

Kompleksikonjugaatteja

Päätelmä: X[k]:n arvoja tarvitsee laskea vain N/2 saakka, sillä loput voidaan päätellä symmetrisyyden perusteella**. Tässä esimerkissä X[0], X[1] ja X[2]**

KAMK • University of Applied Sciences

www.kamk.fi