Makeisia valmistava yritys on todennut, että lopputarkastukseen tulevista tuotteista kahdella prosentilla raaka-aine on ollut viallista. Valmistusvirhe ilmenee kolmella prosentilla ja pakkausvirhe neljällä prosentilla tuotteista. Millä todennäköisyydellä lopputarkastukseen tulevassa tuotteessa on

a. Vähintään yksi virhe
b. Korkeintaan kaksi virhettä
c. Kaikki kolme virhettä

Virheet esiintyvät toisistaan riippumatta

Ensin helpotetaan omaa työskentelyä ja lyhennetään hieman merkintöjä:

P(”Viallinen raaka-aina”) = P(R) = 0.02
P(”Valmistusvirhe”) = P(V) = 0.03
P(”Pakkausvirhe”)= P(P) = 0.04

Näistä voidaan ensin laskea komplementtien todennäköisyydet:

P(” Ei viallista raaka-ainetta”) = P(R)* = 1- P(R) = 1- 0.02 = 0.98
P(”Ei valmistusvirhettä”) = P(V)* = 1 – P(V) = 1- 0.03 = 0.97
P(”Ei pakkausvirhettä”) = P(P)* = 1 – P(P) = 1- 0.04 = 0.96

Ratkaisut:

a-kohta

P(”Vähintään yksi virhe”) = P(”yksi virhe”) + P(”kaksi virhettä”) + P(”kolme virhettä”)

Jos laskemme suoraan alkeistapauksista, niin tämä on työlästä, mutta esimerkin takia tehdään näin ensin tehtävän a-kohdassa.

P(”yksi virhe”) = $P(R \cap V^* \cap P^*) + P(R^* \cap V \cap P^*) + P(R^* \cap V^* \cap P)$
$0.02 * 0.97 * 0.96 + 0.98 * 0.03 * 0.96 + 0.98 * 0.97 * 0.04 =$0.084872

P(”kaksi virhettä”) = $P(R \cap V \cap P^*) + P(R \cap V^* \cap P) + P(R^* \cap V \cap P)$
$0.02 * 0.03 * 0.96 + 0.02 * 0.98 * 0.04 + 0.98 * 0.03 * 0.04 = 0.002536$

P(”kolme virhettä”) = $P(R \cap V \cap P) = 0.02 * 0.03 * 0.04 = 0.000024$

P(”Vähintään yksi virhe”) = P(”yksi virhe”) + P(”kaksi virhettä”) + P(”kolme virhettä”) = 0.084872+0.002536+0.000024 = 0.087432

Tällainen laskeminen on työlästä ja altistaa laskuvirheille. Fiksumpaa on hyödyntää demoissa 1 käytettyä vastatapahtumien hyödyntämistä, joten lasketaan mieluummin tehtävä näin:

P(”Vähintään yksi virhe”)
= 1 – P(”Ei virheitä”)
= 1 - P(” Ei viallista raaka-ainetta”)*P(”Ei valmistusvirhettä”)*P(”Ei pakkausvirhettä”)
= 1 – 0.98*0.97*0.96
= 0.0874247

Eli on 8,74% todennäköisyys, että tuotteessa on vähintään yksi virhe.

Nähdään, että koska näin laskemalla ei tarvita välituloksia. Koska ei lasketa välituloksia ja tehdä pyöristyksiä niin lopputulos on tarkempi.

b-kohta

P(”Korkeintaa kaksi virhettä”)
= 1 – P(” kaikki kolme virhettä”)
= 1 – 0.02*0.03*0.04
= 0,999976

Eli on 99,9976% todennäköisyys, että tuotteessa on korkeintaan kaksi virhettä.

c-kohta

P(”Kaikki kolme virhettä”) = 0.02*0.03*0.04 = 0.000024

Eli on 0.0024% todennäköisyys, että tuotteessa on kaikki kolme virhettä.

Jos joku on miettinyt tapahtumaa unionein eli $P(A \cup B \cup C)$ niin tällöin pitäisi käyttää seuraavaa kaavaa:

$$P(A \cup B \cup C) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} + \mathrm{P(C)} - \mathrm{P(A \cap B)} - \mathrm{P(A \cap C)} - \mathrm{P(B \cap C)} + \mathrm{P(A \cap B \cap C)}$$

Tämäkin toki onnistuu, mutta helpoin ja nopein tapa tämä ei ole.

Yrityksen johtoryhmä muodostuu 9 henkilöstä, joista 5 on miehiä. Johtoryhmästä valitaan peräkkäin arpomalla neljän henkilön toimikunta valmistelemaan erästä asiaa. Mikä on todennäköisyys, että valituista

a. Ainakin yksi on mies
b. Kolme on naisia ja yksi on mies
c. miehiä ja naisia on yhtä paljon

Tärkeää huomata, että kyseessä on toistopoiminta, jolloin edellinen poiminta on vaikuttaa seuraavaan.

<u>a-kohta</u>

P(”valitaan ainakin yksi mies”) vastatapahtuma on P(”ei valita yhtään miestä”)

1- P(”ei valita yhtään miestä”) = $1 - \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{1}{6} = 0.9921$

Eli todennäköisyys, että ainakin yksi mies valitaan on 99.21 %

<u>b-kohta</u>

Kaksi vaihtoehtoista tapaa laskea tilanne, käydään ensin tutumpi läpi:

Tapaus ”kolme naista ja yksi mies” voi tapahtua neljällä eri tavalla:

m,n,n,n tai n,m,n,n tai n,n,m,n tai n,n,n,m ja nämä kaikki pitää huomioida!

Lasketaan $\frac{5}{9} * \frac{4}{8} * \frac{3}{7} * \frac{2}{6} + \frac{4}{9} * \frac{5}{8} * \frac{3}{7} * \frac{2}{6} + \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * \frac{5}{7} * \frac{2}{6} + \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{5}{6} = 0.1587$

Voidaan huomata, että kaikissa tapauksissa osoittajat ja nimittäjät ovat samat eli tilanne voidaan laskea helpommin:

P(”yksi mies ja kolme naista”) = $4 * \left[\frac{5}{9} * \frac{4}{8} * \frac{3}{7} * \frac{2}{6}\right] = 4 * \frac{120}{3024} = 0.1587$

On myös mahdollista käyttää *hypergeometrisen jakauman* kaavaa kyseisen tehtävän laskemiseen:

P(”Yksi mies”) = P(X = 1) = $\frac{\binom{5}{1}*\binom{9-5}{4-1}}{\binom{9}{4}}$ = 0,1587

<u>c-kohta</u>

P(”Miehiä ja naisia yhtä paljon”), hyödynnetään yllä opittua.

mahdollisia ketjut ovat
m,m,n,n, tai m,n,m,n tai m,n,n,m tai n,m,n,m, tai n,m,m,n tai n,n,m,m
eli yhteensä 6 kpl

P(”kaksi naista ja kaksi miestä”) = $6 * \left[\frac{5}{9} * \frac{4}{8} * \frac{4}{7} * \frac{3}{6}\right] = 6 * \frac{240}{3024} = 0.4762$

Eli todennäköisyys, että valitaan kaksi miestä ja naista on 47,62 %

Tai hybergeometrisen jakauman avulla:

P(”kaksi miestä”) = P(X = 2) = $\frac{\binom{5}{2}*\binom{9-5}{4-2}}{\binom{9}{4}}$ = 0,4762

Lisävinkki:

Kun tiedetään, että kyseessä on tämänkaltainen tilanne ja haluat varmistua, että olet saanut mietittyä kaikki mahdolliset kombinaatiot niin voit hyödyntää kaavaa $\binom{n}{k}$ eli kombinaatioiden määrää:

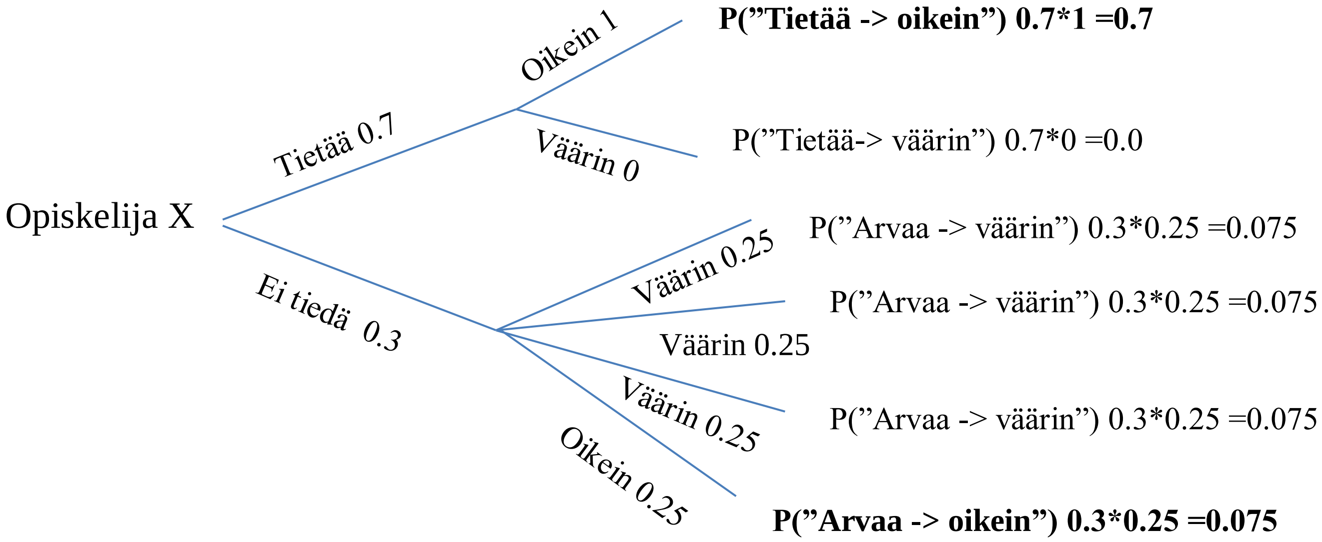
Miten monella eri tavalla 1 mies ja 3 naista voivat mennä jonossa eri kombinaatioihin?

$$\boldsymbol{\binom{4}{1} = 4}$$

Miten monella eri tavalla 2 mies ja 2 naista voivat mennä jonossa eri kombinaatioihin?

$$\boldsymbol{\binom{4}{2} = 6}$$

Monivalintatentissä on 4 vaihtoehtoa. Opiskelija X tietää oikean ratkaisun todennäköisyydellä 0.7. Jos hän ei tiedä oikeaa ratkaisua, hän joutuu arvaamaan. Arvaus osuu oikeaan todennäköisyydellä 0.25. Millä todennäköisyydellä hän valitsee oikein?



Ratkaistaan tehtävä tällaisen "puumallin" avulla. Kuten huomataan se laskee kaikki todennäköisyydet, sillä kun kaikkien ketjujen todennäköisyydet lasketaan yhteen saadaan arvo 1. Poimitaan sopivat tapaukset

P("Vastaa oikein") = P("Tietää -> oikein") + P("Arvaa -> oikein") = 0.7+0.075 =0.775

Laboratorion testissä saadaan positiivinen tulos 0.95 todennäköisyydellä, jos henkilöllä on tietty sairaus eli

P(”testi positiivinen” | ”sairas”) = 0.95

P(”testi negatiivinen” | ”terve”) = 0.99 eli

Jos 0.1 % (0.001) väestöstä on sairaita, millä todennäköisyydellä henkilöllä on todella sairaus, jos testi antaa positiivisen tuloksen?

Tehtävän voidaan käyttää kaavakokoelman kaavaa (11)

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A),$$

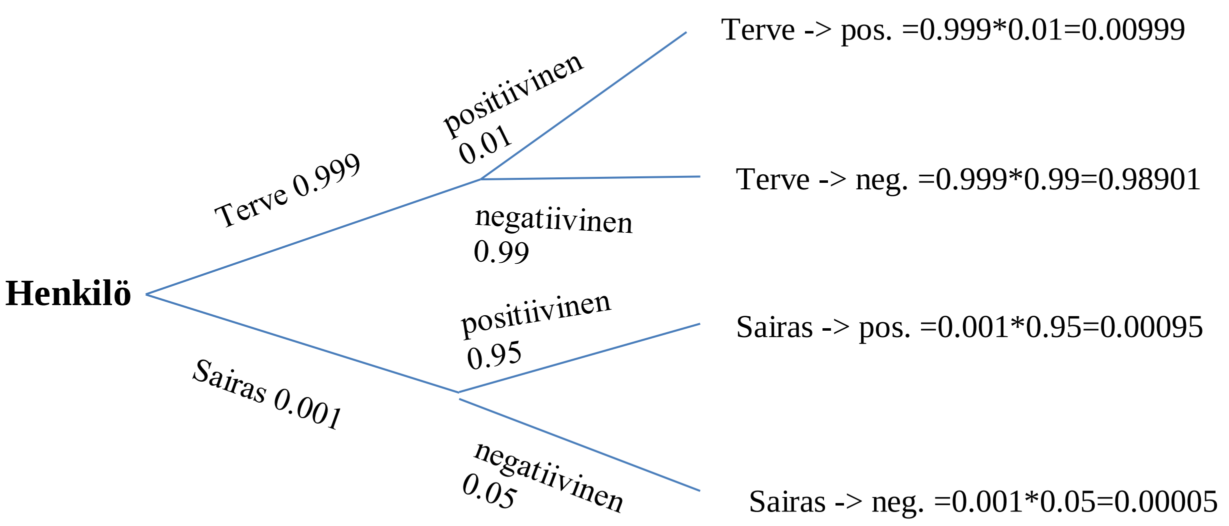
joka voidaan muokata seuraavaan muotoon jakamalla puolittain P(A):lla.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

Kyseessä on oikeastaan sama kaava vain eri muotoon kirjoitettuna.

Jos tehtävänannossa kysytään, että millä todennäköisyydellä P(”x jos y”) niin tällöin on usein tarkoitus käyttää juuri ehdollisen todennäköisyyden kaavaa. Tapaukset eivät ole riippumattomia, eli testin tulos riippuu siitä onko henkilö sairas vai terve!

Hahmotellaan tehtävää laskemalla todennäköisyyksiä:



Muutetaan tehtävänanto sopivaan kaavamuotoon:

P(A) = P(”testi on positiivinen”) =0.999*0.01 + 0.001*0.95

P(B) = P(”henkilö on sairas”) = 0.001

P(A | B) tiedetään tehtävänannosta eli P(”testi on positiivinen” | ”sairas”) = 0.95

Nyt pitää ratkaista mikä on P(”Sairas” | ”Testi on positiivinen”) eli P(B | A)

Ratkaisu saadaan kaavaan sijoittamalla:

$\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B|A)$, jossa

P(A) = P(”testi on positiivinen”) =0.999*0.01 + 0.001*0.95 = 0.01094

$P(A \cap B) =$ P(”Sairas ja testi on positiivinen”) = 0.00095

Sijoitetaan kaavaan:

$\frac{0.00095}{0.01094}$ = 0,086837…

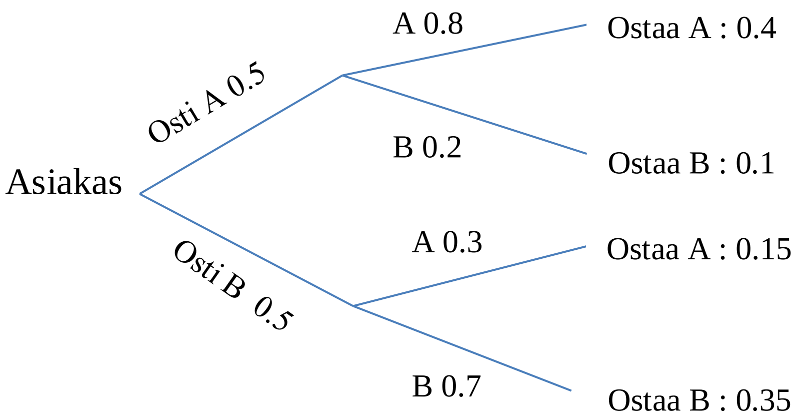
eli todennäköisyys olla sairas jos testi on positiivinen on 8,68 %.

Vastaus: Jos testi on positiivinen on 8,68 % riski olla oikeasti sairas.

Tuotteet A ja B kattavat yhdessä tämän tuotetyypin markkinat. Merkkiuskollisuutta koskevan tutkimuksen mukaan 80 % tuotteen A ostajista osti A:ta seuraavallakin ostokerralla ja B:n ostajista 70 % osti B:tä myös seuraavalla ostokerralla. Molempia tuotteita A ja B ostetaan alkutilanteessa yhtä paljon. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu asiakas osti toisella ostokerralla tuotetta B?

Taustaoletus, henkilö ostaa myös toisella ostokerralla joko tuotetta A tai tuotetta B.

Ratkaistaan samaan tapaan kuin tehtävä 3.



P(”Ostaa toisella kerralla tuotteen B”)

= P(”Toka B” | ”Eka B”) + P(”Toka B” | ”Eka A”)

= 0.1 + 0.35 = 0.45

Eli todennäköisyys, että satunnaisesti valittu asiakas ostaa toisella ostokerralla tuotteen B on 45 %.

Henkilön pitäisi olla tietyssä paikassa sovittuun aikaan. Jos hän käyttää taksia, todennäköisyys olla perillä on 0.9. Bussia käyttäessä vastaava todennäköisyys on 0.5 ja liftatessa 0.1. Matkustustapojen valinnan todennäköisyydet ovat: taksi 0.3, bussi 0.6 ja liftaaminen 0.1. Millä todennäköisyydellä henkilö on ajoissa perillä.

Voitaisiin piirtää kuvio kuten tehtävässä 3, mutta tehdään ratkaisu tällä kertaa hieman nopeammin.

P(” Pääsee perille ajoissa”)

= P(”Pääsee perille ajoissa bussilla”) + P(”Pääsee perille ajoissa taksilla”) + P(”Pääsee perille ajoissa liftaten”)

= 0.3*0.9 + 0.6*0.5 + 0.1*0.1 = 0.58

Eli henkilön todennäköisyys päästä perille on 58%.

Oletetaan, että kuljetusauton kulkusuunta alla olevassa reittivaihtoehdossa on lännestä itään (hän ei voi siis palata takaisin kerran valitulta reitiltä). Laske todennäköisyys, että auto pääsee perille paikasta A paikkaan B, kun oletetaan kuljettajan valitsen reittinsä umpimähkään. (ts. jokaisen reittivaihtoehdon todennäköisyys on yhtä suuri).

Alla olevasta kaaviosta nähdään reittien todennäköisyydet. Nähdään, että alussa kuski voi valita kolmen kadun väliltä jne..

P(”saapuu perille”) = 1/3 *1/2 *1/2 + 1/3 *1/3 + 1/3 *1/3 = 0,30555

Eli kuskin todennäköisyys päästä perille on 30,55 %.