KAJAANIN AMMATTIKORKEAKOULU
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

SIGNAALINKÄSITTELY 3 op

Fourier'n sarja

Taneli Rantaharju
044 7101 253
taneli.rantaharju@kamk.fi
Työhuone TA13H115

Jaksolliset signaalit (Fourier'n sarja)

- Määritelmänsä perusteella ollakseen jaksollinen signaalin täytyy katsoa alkaneen ajanhetkestä t = -∞ ja jatkuvan ajanhetkeen t = ∞.
- Seuraavassa tarkastellaan erityispiirrettä, joka liittyy tällaisiin signaaleihin.
- Edellä tarkasteltiin yksinkertaista sinimuotoista signaalia

$$x(t) = \mathrm{A}\,sin(\omega t + \theta) = Asin(2\pi f t + \theta) = Asin(2\pi\, t/T + \theta).$$

Ottamalla käyttöön uusi vaihekulma $\phi = \theta - \pi/2$ voidaan eo. signaali esittää muodossa

$$x(t) = Acos(\omega t + \phi) = Acos(2\pi f t + \phi)$$

- $\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

Jaksolliset signaalit (Fourier’n sarja)

$$x(t) = Acos(\omega t + \phi) = Acos(2\pi f t + \phi)$$

- Kun argumentti ωt kerrotaan vakiotekijällä k = 2, 3, …, signaali kutistuu vaakasuunnassa, eli määrättyä aikaväliä kohti värähtely tapahtuu k-kertaisena.
- Edellä esitetyn yhtälön mukaisesti signaalin taajuus f moninkertaistuu tekijällä k, ja vastaavasti jaksonaika T kutistuu tekijällä k.
- Tällaisia **signaalin taajuuksien monikertoja kutsutaan harmonisiksi taajuuksiksi** (k’s harmoninen taajuus).

KAJAANIN AMMATTIKORKEAKOULU
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Jaksolliset signaalit (Fourier'n sarja)

- Voidaan osoittaa, että vakiosignaalista A_0, perustaajuutta ω olevasta signaalista ja sen harmonisia taajuuksia kω olevista signaaleista voidaan muodostaa signaali

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 cos\left(2\omega t + \phi_2\right) + A_3 cos\left(3\omega t + \phi_3\right) \ldots ,$$

joka on jaksollinen. Sen jaksonaika on perustaajuuden määräämä jaksonaika $T = 1/f$ riippumatta vakioista A_k ja ϕ_k tai niiden määrästä.

Jaksolliset signaalit (Fourier'n sarja)

Yhtälö

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 cos(2\omega t + \phi_2) + A_3 cos(3\omega t + \phi_3)$$

voidaan esittää muodossa

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \phi_k).$$

Edelleen yhtälössä olevat kosinitermit voidaan esittää kosini- ja sinitermien summana, jolloin saadaan muoto

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, cos(k\omega t) + b_k sin(k\omega t).$$

Jaksolliset signaalit (Fourier'n sarja)

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \phi_k).$$

kompakti kosinimuoto

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos(k\omega t) + b_k sin(k\omega t)$$

trigonometrinen muoto

Eo. kahdessa yhtälössä vakioiden välillä on yhteys

$$A_0 = a_0,$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

A_k on aina positiivinen

$$\phi_k = tan^{-1}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right).$$

Huom! Kertoimen etumerkki (-)

Jaksolliset signaalit (Fourier'n sarja)

- Voidaan osoittaa, että mikä tahansa käytännön jaksollinen signaali x(t) voidaan esittää em. yhtälöiden avulla. Tällä tavoin esitetty jaksollinen funktio tunnetaan funktion Fourier'n kehitelmänä (sarjana).
- **Vakiot a_0, a_k ja b_k voidaan ratkaista muodostamalla yhden jakson yli seuraavat integraalit funktiosta f(t)**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)cos(k\omega t)dt \quad ja$$

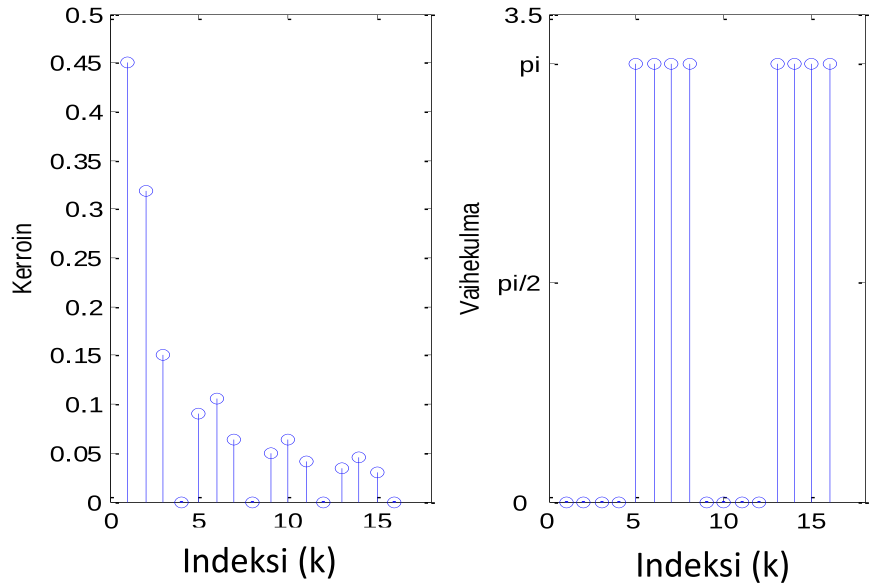
$$b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sin(k\omega t)dt.$$

Jaksolliset signaalit (Fourier’n sarja)

- **Jaksollisen signaalin voidaan siis ajatella koostuvan sinimuotoisista signaaleista**
- Fourier’n sarjan kertoimet A_k ilmoittavat signaalin eri taajuutta olevien komponenttien, perustaajuuden ja harmonisten taajuuksien, suhteellisen osuuden signaalissa.
- Kuvausta, jossa A_k esitetään indeksin k tai taajuuden kω funktiona kutsutaan signaalin amplitudispektriksi.
- Vastaavasti kuvausta, jossa ϕ_k esitetään indeksin k tai taajuuden kω funktiona, kutsutaan signaalin vaihespektriksi.
- Eo. perusteella jaksollisen signaalin spektri on diskreetti.

Jaksolliset signaalit (Fourier'n sarja)

- Kuvaustavasta, jossa signaali on esitetty ajan funktiona, sanotaan että signaali on esitetty aikatasossa.
- Vastaavasti kuvaustavasta, jossa signaali on esitetty sen Fourier'n sarjan kertoimien ja vaihekulmien avulla, sanotaan että signaali on esitetty taajuustasossa.



Jaksolliset signaalit (Fourier’n sarja)

Huomioita funktioiden ominaisuuksista

- Voidaan osoittaa, että mikä tahansa funktio on esitettävissä parillisen ja parittoman funktion summana

- Parillisten ja parittomien funktioiden tulolle on voimassa

parillinen x parillinen = parillinen
pariton x pariton = parillinen
pariton x parillinen = pariton