

Havaintojen standardointi:

Standardointu havainto: $(Z) = \frac{\text{Havainto-odotusarvo}}{\text{keskihajonta}}$ eli

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Standardoi seuraavat havainnot:

- a) Populaation odotusarvo on 5 ja keskihajonta on 3. Standardoi arvo 4.
- b) Populaation odotusarvo on 25 ja keskihajonta on 25. Standardoi arvo 28.
- c) Populaatio noudattaa jakaumaa $N \sim (10, 4)$. Standardoi arvo 18.

Vastaukset:

a) Populaation odotusarvo on 5 ja keskihajonta on 3. Standardoi arvo 4.

$$Z = \frac{4-5}{3} = \frac{-1}{3} = -0,333$$

b) Populaation odotusarvo on 25 ja varianssi on 25. Standardoi arvo 28.

$$Z = \frac{28-25}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

c) Populaatio noudattaa jakaumaa $N \sim (10, 4)$. Standardoi arvo 18.

$$Z = \frac{18-10}{\sqrt{4}} = \frac{8}{2} = 4$$

Määritä seuraavat normaalijakauman kertymäfunktion arvot:

Huom! TSE:n kursseilla on käytössä merkintätapa: $Z_{(p)} = P(X^{(v)} \geq x_p^{(v)}) = p$ eli $P(z \geq x)$ eli päinvastoin kuin kertymäfunktion arvo normaalijakaumataulukossa.

a) Millä z : arvolla kertymäfunktio saa arvon 0,9505 ?

b) Millä z : arvolla kertymäfunktio saa arvon 0,4522? [vinkki: $Z_{(p)} = -Z_{(1-p)}$]

c) Millä z : arvolla kertymäfunktio saa arvon 0,65?

d) Mikä todennäköisyys on kertymäfunktion arvolla 0,55?

Eli määritä $\Phi(0,55)$

e) Määritä $\Phi(-0,60)$

Vastaukset:

a) 1,65

b) 0,4522 ei ole taulukoitu. Symmetrian avulla voidaan määritellä, että $Z_{(p)} = -Z_{(1-p)}$. Eli määritellään kertymäfunktion arvo 0,5478, joka on 0,12, joten tehtävän vastaus on -0,12.

c) Kertymäfunktion arvo jää kahden taulukkoarvon väliin:

$\Phi(0,38) = 0,6480$ ja $\Phi(0,39) = 0,6517$. Otetaan siis näiden kahden keskiarvo eli vastaus on: $(0,38+0,39)/2 = 0,385$

d) $\Phi(0,55) = 0,7088$

e) $\Phi(-0,60) = 1 - \Phi(0,60) = 1 - 0,7257 = 0,2743$

Esimerkkilaskuja:

Tutkimusten mukaan ihmisen älykkyys on jakautunut $N(100, 24^2)$. Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valitun henkilön älykkyysosamäärä on:

- a) Enintään 130?
- b) Yli 130?
- c) Välillä 76 - 124?

Vastaukset:

$$a) Z = \frac{130-100}{24} = 1,25$$

$$P(X \leq 130) = P(Z \leq 1,25) = \Phi(1,25) = 0,8944$$

Todennäköisyys, että henkilön älykkyys on enintään 130 on 89,44 %.

$$b) Z = \frac{130-100}{24} = 1,25$$

$$P(X \geq 130) = P(Z \geq 1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = 1 - \Phi(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

Todennäköisyys, että ÄO on suurempi kuin 130 on 10,56 %.

$$c) P(76 \leq X \leq 124) = P\left(\frac{76-100}{24} \leq Z \leq \frac{124-100}{24}\right) \\ = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,8413 - (1-0,8413) = 0,8413 - 0,1587 = 0,6826$$

Tulos: Ihmisistä 68 % älykkyys poikkeaa maksimissaan yhden hajonnan mitan verran, eli 68 % ihmisistä ÄO on välillä 76 - 124.

Tuntitehtäviä

a) Olkoon $Z \sim N[0, 1]$.

Laske: $P(Z < 1.628)$ ja $P(Z > 0.79)$

$$P(Z < 1.628) = \Phi(1.628) \approx \Phi(1.63) = 0,9484$$

$$P(Z > 0.79) = 1 - P(Z < 0.79) = 1 - \Phi(0.79) = 1 - 0,7852 = 0,2148$$

b) Tutkimusten mukaan ihmisen älykkyys on jakautunut $X \sim N[100, 24^2]$. Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valitun henkilön älykkyysosamäärä on:

- i) Enintään 145?
- ii) 10 hengen älykkyiden keskiarvon odotusarvo ja keskihajonta.
- iii) Todennäköisyys, että 5 hengen yhteenlaskettujen ÄO-pisteiden summa on pienempi kuin 600.

$$Z = \frac{145-100}{24} = 1,875$$

$$P(X \leq 145) = P(Z \leq 1,875) = \Phi(1,88) = 0,9699$$

Todennäköisyys, että henkilön älykkyys on enintään 145 on 96,99 %.

10 hengen älykkyiden keskiarvon odotusarvo ja keskihajonta.

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ eli } \bar{x} \sim N\left(100, \frac{24^2}{10}\right) \text{ tai } \bar{x} \sim N(100, 57.6)$$

$$\text{keskihajonta} = \sqrt{57.6} = 7.589$$

c) Määrittele:

Ensin pitää määritellä jakauma: $S \sim N(n * \mu, n * \sigma^2)$ eli $S \sim N(5 * 100, 5 * 24^2)$ on $S \sim N(500, 2880)$

Lasketaan todennäköisyys tuttuun tapaan:

$$Z = \frac{600-500}{\sqrt{2880}} = 1,863$$

$$P(X \leq 600) = P(Z \leq 1,863) = \Phi(1,86) = 0,9686$$

d) Havainto x :n arvo on populaatiosta, joka noudattaa jakaumaa

$X \sim N[100, 24^2]$. Määritä sellainen x :n arvo, että vain 0.0089 populaatiosta saa suurempia arvoja.

Määritellään ensin $Z_{(0.0089)} \Rightarrow P(Z < z) = 0.9911 \rightarrow z = 2.37$

Ratkaistaan yhtälö: $\frac{x-100}{24} = 2.37$

$$x - 100 = 2.37 * 24$$

$$x = 2.37 * 24 + 100$$

$$x = 2.37 * 24 + 100$$

$$x = 156.88$$