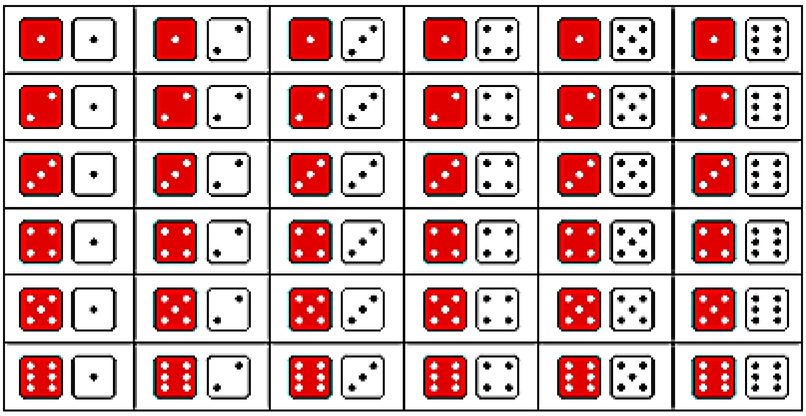
Heitettäessä kahta noppaa (kummassakin yhtä todennäköiset tulosmahdollisuudet 1,…,6) haluttiin määrittää todennäköisyydet tapahtumille

a. Summa on vähintään 8
b. Summa ei ole suurempi kuin 5
c. Suurempi tulos on suurempi kuin 4.

Pohdi luentojen pohjalta eri tapoja määrittää em. tapahtumien todennäköisyydet.

Taustaoletukset:
- **Heitot eivät riipu toisistaan.**
- **Noppa on symmetrinen eli kaikki sivut yhtä todennäköisiä.**

Tehtävää voidaan lähteä hahmottamaan / ratkaisemaan listaamalla kaikki mahdolliset alkeistapaukset (6*6 = 36 mahdollista kombinaatiota):



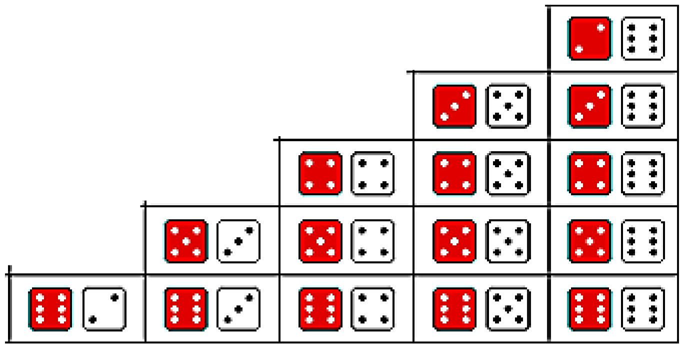
Tiedetään tehtävänannon todennäköisyys lasketaan seuraavan kaavan mukaan:

P("Jokin ehto") = $\frac{\textit{Suotuisten alkeistapausten määrä}}{\textit{Kaikkien mahdollisten alkeistapausten määrä}}$

Tiedämme yllä olevan taulukon perusteella, että "Kaikkien mahdollisten tapausten määrä" on 36 kappaletta.

Vastaukset:

a)



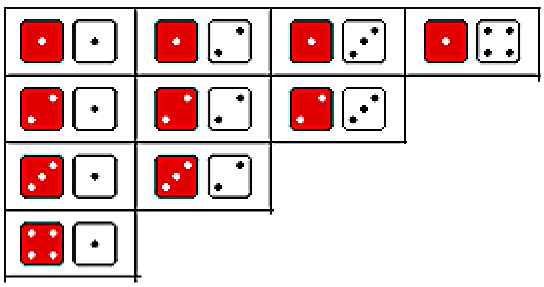
Yhteensä 15 kpl alkeistapauksia, joiden summa on vähintään 8.

P(”Summa on vähintään 8”) = $\frac{15}{36}$ **= 0,417**

Eli 41,7 % todennäköisyydellä noppien silmälukujen summa on vähintään 8.

---

b)



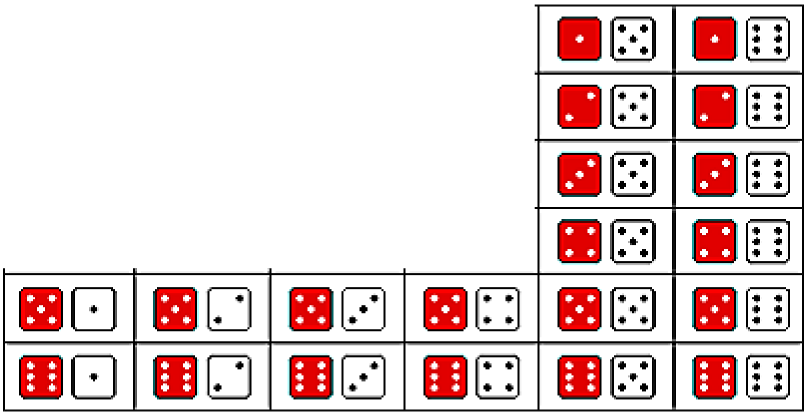
Yhteensä 10 kpl alkeistapauksia, joiden summa ei ole suurempi kuin 5.

P(”Summa ei ole suurempi kuin 5”) = $\frac{10}{36}$ **= 0,278**

Eli 27,8 % todennäköisyydellä noppien silmälukujen summa ei ole suurempi kuin 5

---

c)



”Suurempi tulos on suurempi kuin 4” Tulkitaan tehtävä näin: toinen nopista saa vähintään silmäluvun 5. Tällaisia yhdistelmiä on 20 kpl.

P(”Suurempi tulos on suurempi kuin 4”) = $\frac{20}{36}$ = 0,5556

Eli on 55,56 % todennäköisyys, että toinen silmäluvuista saa vähintään arvon 5.

Pohdi luentojen pohjalta eri tapoja määrittää em. tapahtumien todennäköisyydet.

Käytetään esimerkkinä kohtaa a.

P(”Summa on vähintään 8”) = P(”Summa on suurempi kuin 7”)

Tämä on todennäköisyys on yhtä suuri kuin

1 – P(”Summa on pienempi kuin 8”)

Tai

P(”Summa on 8”) + P(”Summa on 9”) + P(”Summa on 10”) + P(”Summa on 11”) + P(”Summa on 12”)

Tai näiden yhdistelmä

1 – [P(”Summa on 1”) + P(”Summa on 2”) +… + P(”Summa on 7”)]

Yrityksen A todennäköisyys mennä konkurssiin tulevan vuoden aikana arvioitiin olevan 0.1 ja yrityksen B 0.2.

Määritä todennäköisyys tapahtumalle:
"Kumpikaan yritys ei mene konkurssiin tulevan vuoden aikana".

Taustaoletukset:

- **Yritysten konkurssit eivät riipu toisistaan.**
- **Tällöin voidaan hyödyntää kaavakokoelman kaavaa (5) ja (9)**

(5) $P(A^*) = 1 - P(A)$
(9) $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ **[Eli A ja B molemmat]**

P(A) = P("Yritys A menee konkurssiin") = 0.1

P(A*) = P("Yritys A ei mene konkurssiin") = 1- P(A) =0.9

P(B) = P("Yritys B menee konkurssiin") = 0.2

P(B*) = P("Yritys B ei mene konkurssiin") = 1- P(B) =0.8

Vastaus:

$P(A^* \cap B^*)$
= P("Kumpikaan yritys ei mene konkurssiin tulevan vuoden aikana")
= $P(A^*)$***P**(B^*)
= 0.9* 0.8 = 0,72

Jatkoa tehtävään 2. Määritä todennäköisyys tapahtumalle ”vähintään toinen yritys menee konkurssiin tulevan vuoden aikana”. Pohdi eri tapoja määrittää em. todennäköisyys.

Mitä tarkoittaa ”vähintään toinen yritys menee konkurssiin tulevan vuoden aikana”? Väite toteutuu jos:

i) **A menee konkurssiin, mutta B ei mene.** $P(A \cap B^{*})$ **= 0.1*0.8 = 0.08**
ii) **B menee konkurssiin, mutta A ei mene.** $P(B \cap A^{*})$ **= 0.2*0.9 = 0.18**
iii) **Molemmat A ja B menevät konkurssiin.** $P(A \cap B)$ **= 0,1*0,2 = 0.02**

Seuraava tapaus ei kelpaa:
iv) **Kumpikaan ei mene konkurssiin.** $P(A^{*} \cap B^{*})$**=0.9*0.8= 0.72**

On melko itsestään selvää, että jos yksi näistä toteutuu, niin muut tilanteet eivät voi samanaikaisesti toteutua. Eli kyseiset tapaukset ovat toisensa poissulkevia.

Ratkaisu:

P(”vähintään toinen yritys menee konkurssiin”)
= P(”A menee konkurssiin, mutta B ei mene”) + P(”B menee konkurssiin, mutta A ei mene”) + P(”Molemmat A ja B menevät konkurssiin”)
= 0.08 + 0.18 + 0.02 = 0,28

Tai lyhyemmin merkinnöin:

P(”vähintään toinen yritys menee konkurssiin”)
= $P(A \cap B^{*}) + P(B \cap A^{*}) + P(A \cap B)$ **= 0.08 + 0.18 + 0.02 = 0.28**

Vaihtoehtoinen ratkaisutapa:

P(”vähintään toinen yritys menee konkurssiin”)
=1 – P(”Kumpikaan yritys ei mene konkurssiin”)
= 1 – 0.72 = 0.28

Mikä on todennäköisyys saada 10 heiton rahanheittosarjassa 10 kpl tuloksia ”klaava”?

Taustaoletukset:
- **Heitot ovat toisistaan riippumattomia.**
- **Kruuna ja Klaava ovat yhtä todennäköisiä, kolikko ei voi jäädä sivuttain.**
- **Hyödynnetään kaavakokoelman kaavaa (10)**

P(”Klaava”) = 0.5

P(” Heitetään 2 klaavaa peräkkäin”) = P(”Klaava”)* P(”Klaava”)= 0.5*0.5 = $(0.5)^2$ = 0.25

P(” Heitetään 3 klaavaa peräkkäin”) = P(”Klaava”)* P(”Klaava”)* P(”Klaava”)= 0.5 * 0.5 * 0.5 = $(0.5)^3$ = 0.125

.
.
.

P(” Heitetään 10 klaavaa peräkkäin”) = $(0.5)^{10}$ = 0.000977

Piirrä Venn-diagrammit kuvaamaan seuraavia tapahtumia:

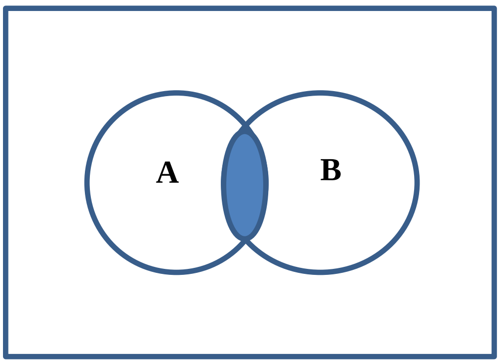
a. $(A \cap B)*$
b. $(A \cup B)*$
c. $A* \cap B*$

Pohdi luentojen pohjalta tapoja määrittää em. tapahtumien todennäköisyydet.

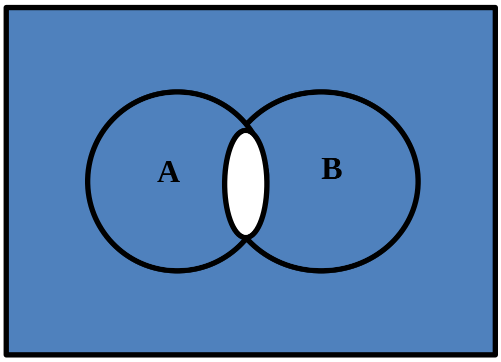
Tiedetään, että Venn-diagrammin koko alue on 100% eli 1. Myös tiedetään että $P(A) + P(A^*) = 1$. Näin ratkaisut on helppo nähdä symmetrian avulla.

a. Eli A:n ja B:n leikkauksen vastatapahtuma. Piirretään ensin A:n ja B:n leikkaus.

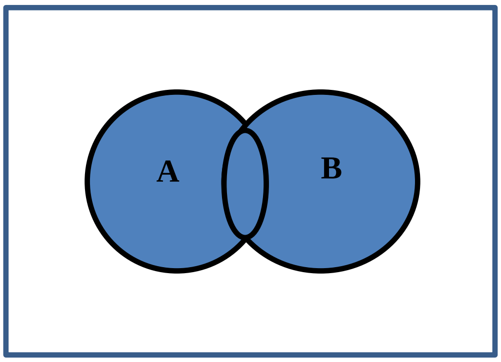
$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$ **eli "A ja B leikkaus"**



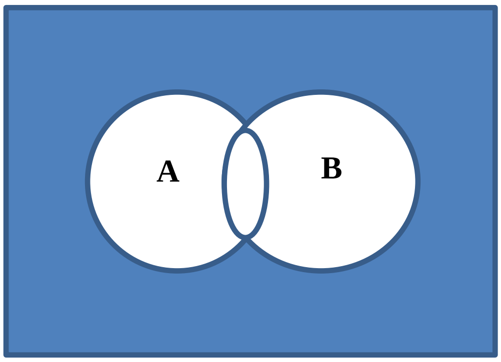
$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})^*$ **eli "Ei A ja B leikkaus"**



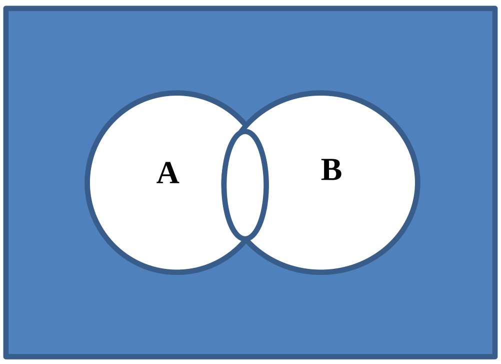
$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$ **eli "A tai B tai A ja B"**



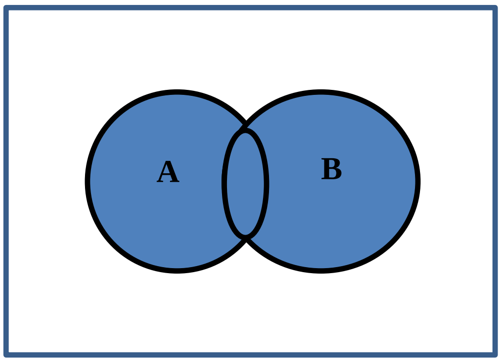
$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^*$ **eli "Ei A, eikä B, eikä A ja B"**



$(\boldsymbol{A}^* \cap \boldsymbol{B}^*)$ **eli "Ei A eikä B"**



$(\boldsymbol{A}^* \cap \boldsymbol{B}^*)^*$ **eli "A tai B tai A ja B"**



Pohdi luentojen pohjalta tapoja määrittää em. tapahtumien todennäköisyydet? Tiedetään, että A ja B ovat riippumattomia.

Hyödynnetään Venn-diagrammien kuvia:

$$\boldsymbol{P\ ((A \cap B)^{*}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) * P(B)}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P\ ((A \cup B)^{*})} &= \boldsymbol{1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\ &= \boldsymbol{1 - P(A) + P(B) - P(A) * P(B)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P(A^{*} \cap B^{*})} &= \boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\ &= \boldsymbol{1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big)} \\ &= \boldsymbol{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}\end{aligned}$$