Harjoitellaan t-jakauman ja Khii-jakaumataulukoiden käyttöä:

t-jakauma: Määrittele seuraavat arvot t-jakaumataulun avulla:

MUISTA $t_{0.1}^{(10)}$tarkoittaa: Millä t-jakauman arvolla (vapausaste 10) vain 10 % havainnoista

saa suuremman arvon. Eli kysytään ylähäntää. Taulukossa on valmiiksi ylähäntien arvot.

$t_{0.1}^{(10)} = ?$ $t_{0.9}^{(10)} = ?$

$t_{0.005}^{(20)} = ?$ $t_{0.995}^{(20)} = ?$

$t_{0.1}^{(35)} = ?$ $t_{0.9}^{(35)} = ?$

$P\left(t^{(10)} > 4.144\right)$=? $P\left(t^{(10)} < 4.144\right)$ =?

$P\left(t^{(10)} > 5\right)$ =? $P\left(t^{(10)} > 4\right)$ =?

$P\left(t^{(10)} > 1\right)$= ?

Vastaukset:

$t_{0.1}^{(10)} = 1.372$ $t_{0.9}^{(10)} = -t_{0.1}^{(10)} = -1.372$

$t_{0.005}^{(20)} = 2.845$ $t_{0.995}^{(20)} = -t_{0.005}^{(20)} = -2.845$

$t_{0.1}^{(35)} = \frac{1.310+1.303}{2} = 1.3065$ $t_{0.9}^{(35)} = -t_{0.1}^{(35)} = -1.3065$

$P\left(t^{(10)} > 4.144\right)$= 0.001

$P\left(t^{(10)} < 4.144\right) = 1 - P\left(t^{(10)} > 4.144\right) = 1 - 0.001$ = 0.999

$P\left(t^{(10)} > 5\right) < 0.0005$

$0.001 < P\left(t^{(10)} > 4\right) < 0.005$

$P\left(t^{(10)} > 1\right)$ > 0.1

Khii-jakauman taulukossa on taulukoitu ylähännät.

Khii-jakauman harjoittelua:

$\chi_{0.1}^{(10)} = ?$ $\chi_{0.95}^{(10)} = ?$

$\chi_{0.005}^{(20)} = ?$ $\chi_{0.975}^{(20)} = ?$

$\chi_{0.1}^{(35)} =?$ $\chi_{0.95}^{(35)} =?$

$P\left(\chi^{(10)} > 20.48\right)$ = ?

$P\left(\chi^{(10)} > 5\right) = ?$

$P\left(\chi^{(10)} > 21\right) = ?$

Khii-jakauman vastaukset:

$\chi_{0.1}^{(10)} = 15.99$ $\chi_{0.95}^{(10)} = 3.94$

$\chi_{0.005}^{(20)} = 40.00$ $\chi_{0.975}^{(20)} = 9.59$

$\chi_{0.1}^{(35)} = \frac{40.26+51.81}{2} = 46.035$ $\chi_{0.95}^{(35)} = \frac{18.49+26.51}{2} = 22.5$

$P\left(\chi^{(10)} > 20.48\right)$ = 0.025

$0.1 < P\left(\chi^{(10)} > 5\right) < 0.95$

$0.01 < P\left(\chi^{(10)} > 21\right) < 0.025$

Keskiarvojen testaus:

Suuret otokset (n > 30) => normaalijakauma
Tuntitehtävä 1)

Tehtävä:
Otoksessa, jonka koko oli 40 tuotetta, keskipaino oli 50 kg ja keskihajonta 5 kg. Määritä 95 % luottamusväli populaation keski-painolle ja tulkitse se.

Ratkaisu:
Koska havaintoja on yli 30 kpl voidaan katsoa z-taulukkoa:

$$\boldsymbol{V_{100(1-\alpha)}}[\,\boldsymbol{\overline{x}} \;\; - \boldsymbol{z_{(\alpha/2)}}\,\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\;;\;\boldsymbol{\overline{x}} \;\; + \boldsymbol{z_{(\alpha\,/\,2)}}\,\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\;]$$

$$\boldsymbol{V_{95}} = \left[\,\mathbf{50} \;\; - \mathbf{1.96}\,\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{40}}}\;;\;\mathbf{50} \;\; + \mathbf{1.96}\,\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{40}}}\;\right]$$

$$= \;[\,\mathbf{48,45}\,;\mathbf{51,55}]$$

Selitys: populaatiokeskiarvo Alaraja on $\mathbf{48,45}$ ja Yläraja on $\mathbf{51,55}$ (alfan 5% virheen riski)

Tuntitehtävä 2)

Tehtävä: Tuote väittää sisältävänsä keskimäärin 50 mg vaikuttavaa ainesosaa. Kuluttajien keskusliitto päättää testata tuotteen väittämää ja ostaa 40 tuotetta eri myyntipisteistä ja testaa laboratoriossa tuotteiden pitoisuudet. Otoksen keskiarvo on 52 mg ja keskihajonta on 8 mg. Voidaanko otoksen perusteella väittää, että tuotteen vaikuttavan aineen keskipaino ei ole populaatiossa 50 mg? Tee testaus 5 % riskitasolla.

Ratkaisu:

n= 40 > 30 => z-testi

Testataan $\boldsymbol{H_0}\!: \mu = \mathbf{50}\ \boldsymbol{ja}\ \boldsymbol{H_1}\!: \mu \neq \mathbf{50}$

$$\boldsymbol{z_{hav}} = \frac{\mathbf{52-50}}{\frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{40}}}} \approx \mathbf{1{,}58}$$

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{2} * \left(\mathbf{1} - \Phi(\mathbf{1,58})\right) = \mathbf{2} * (\mathbf{1} - \mathbf{0.9429})$$

$$= \mathbf{0.1142} > \mathbf{0.05}$$

Ei tilastollisesti merkitsevää eroa tasolla 0,05 . Eli nollahypootesi jää voimaan. Aineisto tukee väitettä, että populaatiokeskiarvo on 50.

Keskiarvojen testaus:

Pienet otokset (n<31) => t-jakauma, samat tehtävät, mutta t-jakaumilla.
Tuntitehtävä 1b)

Otoksessa, jonka koko oli 20 tuotetta, keskipaino oli 50 kg ja keskihajonta 5 kg. Määritä 95 % luottamusväli populaation keski-painolle ja tulkitse se.

Koska havaintoja on alle 31 kpl, pitää katsoa t-taulukkoa, n = 20 eli vapausaste on 19:

$$\boldsymbol{V_{100(1-\alpha)}}[\,\overline{\boldsymbol{x}} \quad - \boldsymbol{t}_{(\alpha/2)}\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\;;\;\overline{\boldsymbol{x}} \quad + \boldsymbol{t}_{(\alpha\,/\,2)}\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\;]$$

$\boldsymbol{t}_{(0{,}05/2)}^{(20-1)} = \boldsymbol{t}_{0{,}025}^{19}$ =**2,093**
(Eli taulukon rivi vapausaste= 19 ja kolmas sarake, eli p=0,025 ja 2p=0,05)

$$\boldsymbol{V_{95}} = \left[\,\mathbf{50} \quad - \mathbf{2{,}093}\,\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{20}}}\;;\;\mathbf{50} \quad + \mathbf{2{,}093}\,\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{20}}}\,\right]$$

$$= \;[\,\mathbf{47{,}66}\,;\mathbf{52{,}34}]$$

Selitys: populaatiokeskiarvo Alaraja on $\mathbf{47{,}66}$ ja Yläraja on $\mathbf{52{,}34}$ (alfan 5 % virheen riski)

Kahden eri keskiarvon testaus: populaatiohajontoja ei tunneta, mutta ne oletetaan yhtäsuuriksi.

Tehtävä: Voidaanko olettaa, että kahdelta tuotantolinjalta tulee keskimäärin samanpainoisia tuotteita, kun otoskeskiarvot olivat 2,5 ja 2,3 kg (n1=22 ja n2=20) ja keskihajonnat 0.5 kg ja 0.4 kg. Populaatiohajonnat oletetaan yhtä suuriksi. Havaintojen oletetaan poimitun normaalisti jakautuneista perusjoukoista.

Ratkaisu:

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{H_0}: & \mu_1 = \mu_2 & (\mu_1 - \mu_2 = \mathbf{0}) \\ \boldsymbol{H_1}: & \mu_1 \neq \mu_2 & (\mu_1 - \mu_2 \neq \mathbf{0}) \end{array}$$

Populaatiohajontoja ei tunneta, mutta ne oletetaan yhtäsuuriksi.

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{(\boldsymbol{n_1} - \mathbf{1})\boldsymbol{S_1^2} + (\boldsymbol{n_2} - \mathbf{1})\boldsymbol{S_2^2}}{\boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_2} - \mathbf{2}}}$$

testisuure on muotoa $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

Sijoitetaan arvot:

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{(22-1)0.5^2 + (20-1)0.4^2}{22+20-2}} = 0.455$$

testisuure on muotoa $\frac{2.50 - 2.30}{0.455 * \sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{20}}} = 1.422$

$\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} < \mathbf{30}$ **joten suure on t-jakaumasta vapausasteella** $(22 + 20 - 2) = 40$

$\boldsymbol{p} = \mathbf{0,02} < \mathbf{2} * \boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{t}^{(40)} > 1.422\right) < 0.1$

Koska p > 0,05 = α, joten nollahypoteesi saa kannatusta.