

Tuntitehtävä:

Asiakas ostaa arvan ensimmäisenä kojulta. Hän tietää, että arpoja on painettu seuraavalla tavalla:

Arpojen määrä	Voitto (€)
149	0
50	5
20	10
10	20
1	500
Yhteensä	230
	535

Määritä arvasta saatavan voiton ($=x$)

Pistetodennäköisyysfunktio ja Kertymäfunktio.

Määritä Pistetodennäköisyysfunktion avulla todennäköisyys:
 $P(\text{"asiakas voittaa } 20\text{€"})$

Määritä Kertymäfunktion avulla todennäköisyys:
 $P(\text{"asiakas voittaa vähintään } 20\text{€"})$

Määritä Pistetodennäköisyysfunktion avulla todennäköisyys:
 $P(\text{"asiakas voittaa } 5\text{€} - 20\text{€"})$

Määritä myös voiton odotusarvo ja varianssi.

Vastaus:

Pistetodennäköisyysfunktio

$$P(X) = \begin{cases} 149/230, & \text{kun } x = 0 \\ 50/230, & \text{kun } x = 5 \\ 20/230, & \text{kun } x = 10 \\ 10/230, & \text{kun } x = 20 \\ 1/230, & \text{kun } x = 500 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Kertymäfunktio

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 149/230, & \text{kun } 0 \leq x < 5 \\ 199/230, & \text{kun } 5 \leq x < 10 \\ 219/230, & \text{kun } 10 \leq x < 20 \\ 229/230, & \text{kun } 20 \leq x < 500 \\ 1, & \text{kun } x \geq 500 \end{cases}$$

Määritä Pistetodennäköisyysfunktion avulla todennäköisyys:

P("asiakas voittaa 20€")

P(20) eli $P(X=20) = 10/230$

Määritä Kertymäfunktion avulla todennäköisyys:

P("asiakas voittaa vähintään 20€")

eli $P(\text{"asiakas voittaa 20€ tai enemmän"}) = P(X \geq 20) =$

$1 - P(\text{"Asiakas voittaa vähemmän kuin 20€"}) = 1 - F(10)$

$= 1 - 219/230 = 11/230$

Määritä Pistetodennäköisyysfunktion avulla todennäköisyys:

P("asiakas voittaa 5 - 20€")

$F(20) - F(0) = 229/230 - 149/230 = 80/230$

Odotusarvo

$EX = E(X) = 0 * 149/230 + 5 * 50/230 + 10 * 20/230 + 20 * 10/230 + 500 * 1/230 = 5$

Varianssi

$D^2X = D^2(X) = (0-5)^2 * 149/230 + (5-5)^2 * 50/230 + (10-5)^2 * 20/230 + (20-5)^2 * 10/230 + (500-5)^2 * 1/230 = 1093,478$

Tuntiesimerkki 1, Binomijakauma

Turkulainen ohjelmistoyritys arvioi tulevaa myyntiään. Yrityksessä tiedetään, että 15 % markkinointitapahtumaan osallistuneista päätyy ostamaan tuotteen. Yritys järjestää markkinointitapahtuman, johon osallistuu 10 yritystä. Mikä on todennäköisyys, että tietyinä päivinä:

- a) 4 päätyy ostamaan tuotteen
- b) Vähintään 3 ostaa tuotteen
- c) Alle 3 ostaa tuotteen
- d) Laske jakauman odotusarvo ja varianssi

Vastaus:

$P(\text{"Tapahtumaan osallistunut asiakas ostaa tuotteen"}) = 0.15$

$X \sim \text{Bin}(10, 0.15)$

X = Tuotteen ostaneiden asiakkaiden määrä.

$$P(X=k) = \binom{10}{k} * 0.15^k * (1 - 0.15)^{10-k}$$

- a) 4 päätyy ostamaan tuotteen

a) $P(X=4) = \binom{10}{4} * 0.15^4 * (1 - 0.15)^{10-4} = \mathbf{0.04}$

- b) Vähintään 3 ostaa tuotteen

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) = 1 - \left(\binom{10}{0} * 0.15^0 * (1 - 0.15)^{10-0} - \binom{10}{1} * 0.15^1 * (1 - 0.15)^{10-1} - \binom{10}{2} * 0.15^2 * (1 - 0.15)^{10-2} \right) = 1 - 0.820196 = \mathbf{0.1798}$

- c) Alle 3 ostaa tuotteen : $P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$

c) Hyödynnetään b-kohtaa = **0.820196**

d) Laske jakauman odotusarvo ja varianssi

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,15 = 1,5$$

$$D^2(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 10 \cdot 0,15 \cdot 0,85 = 1,275$$

Tuntiesimerkki 2, Hypergeometrinen jakauma.

Start-up yritys esittelee hieman keskeneräistä ohjelmistoaan mahdollisille asiakkailleen. He tietävät, että ohjelmistonsa 10 kokonaisuudesta 7 toimii ilman bugeja eli 3 on hieman keskeneräisiä. Puolentunnin tapaamisen aikana asiakkaat toivovat näkevänsä 3 eri osion toimintaa. Asiakkaat itse päättävät mitkä kokonaisuudet he haluavat nähdä. Yrittäjät toivovat, että heillä kävisi tuuri, eivätkä asiakkaat toivoisi näkevänsä yhtään osiota, joka on vielä keskeneräinen.

a) Mikä on todennäköisyys, että tasan yksi keskeneräinen kokonaisuus tulee valituksi?

b) Mikä on todennäköisyys, ettei yksikään keskeneräinen kokonaisuus tule valituksi?

c) Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi keskeneräinen kokonaisuus tulee valituksi?

d) Laske myös jakauman odotusarvo ja varianssi.

Vastaukset:

$X \sim \text{Hypergeo}(10, 3, 3)$

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{10-3}{3-k}}{\binom{10}{3}}$$

a) Mikä on todennäköisyys, että tasan yksi keskeneräinen kokonaisuus tulee valituksi?

$$a) P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} * \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = 0,525$$

b) Mikä on todennäköisyys, ettei yksikään keskeneräinen kokonaisuus tule valituksi?

$$b) P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0} * \binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = 0,2917$$

c) Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi keskeneräinen kokonaisuus tulee valituksi?

$$c) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,2917 = 0,7083$$

tai ”pidemmän kautta”:

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{\binom{3}{1} * \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{2} * \binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{3} * \binom{7}{0}}{\binom{10}{3}} = 0,7083$$

d) Laske myös jakauman odotusarvo ja varianssi.

$$E(X) = \frac{n * K}{N} = \frac{3 * 3}{10} = 0,9$$

$$D^2(X) = \frac{n * K}{N} * \left(1 - \frac{K}{N}\right) * \frac{N - n}{N - 1} = \frac{3 * 3}{10} * \left(1 - \frac{3}{10}\right) * \frac{10 - 3}{10 - 1} = 0,49$$