Ensin hieman normaalijakauman ominaisuuksista, joita tarvitsemme demotehtävien ratkaisemisessa. Normaalijakaumaa, jolla on odotusarvo 3 ja varianssi 1 merkitään seuraavasti:

$$X \sim N(3, 1)$$

Yleisesti käytetään merkintätapoja: odotusarvo μ ja varianssi σ^2, jolloin jakauma merkitään seuraavasti:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Tällä kurssilla emme integroi itse normaalijakauman arvoja vaan käytämme taulukkoa, mihin on laskettu joitain normaalijakauman arvoja valmiiksi. Tästä syystä meidän tulee standardoida eri tilanteiden parametreja, jotta voimme käyttää taulukkoa, johon on kirjattu jakauman $X \sim N(0, 1)$ arvoja.

Standardoinnin suoritamme seuraavalla kaavalla:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

huomaa että jakajana on keskihajonta, ei varianssi!

Tällöin: $P(X \le a) = P(Z \le z), \quad = \frac{a-\mu}{\sigma}$

Standardoidun normaalijakauman kertymäfunktiota merkitään symbolilla Φ ja symmetriasta johtuen sille pätee: Φ (-z) = 1 – Φ (z).

a) Tehtävänannosta tiedetään:

Odotusarvo (μ): 31000
Keskihajonta (σ): 4500 **(huom. ei varianssi!)**
Testattava arvo (a): 29500

Voimme sijoittaa tästä suoraan kaavaan:

$$P(x \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(x \geq 29\,500) = P\left(Z \geq \frac{29\,500 - 31\,000}{4\,500}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{29\,500 - 31\,000}{4\,500}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \Phi(0.33333) = 0.6293$$

b) Pyydetään määrittämään $Z_{0.01}$ sekä sille X:n arvo.

Symmetrian perusteella tiedetään: $Z_{0.01} = -Z_{0.99}$ ja $Z_{0.99}$ arvo saadaan taulukosta. $\Phi(2.33) = 0.9901$, joka taulukon arvoista lähinnä oikeaa.

Sijoitetaan kaavaan:

$$\Phi\left(\frac{a-31\,000}{4\,500}\right) = \Phi(2.33)$$

$$\frac{a-31\,000}{4\,500} = 2.33$$

$$a - 31\,000 = 2.33 * 4\,500$$

$$a = 2.33 * 4\,500 + 31\,000 = 41\,485$$

Eli $P(x \leq 41\,485) = 0.9901$

Eli varmuudella 0.99 voidaan sanoa, että rengas kestää alle 41 485 km. Symmetrian perustella voidaan myös päätellä, että

41 485 – 31 000 = 10 485
31 000 – 10 485 = 20 515

0.99 varmuudella voidaan sanoa, että rengas kestää yli 20 515 km.

$\boldsymbol{X \sim N(10, 0.5)}$

a) Määritä $P(X \leq 11.6)$

$$P(x \leq 11.6) = P\left(Z \leq \frac{11.6 - 10}{\sqrt{0.5}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{1.6}{\sqrt{0.5}}\right) = \Phi(2.26) = 0.9881$$

b) Määritä $P(X > 9.1)$

$$P(x > 9.1) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9.1 - 10}{\sqrt{0.5}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-0.9}{\sqrt{0.5}}\right) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{0.9}{\sqrt{0.5}}\right)\right) =$$
$$\Phi(1.27) = 0.8980$$

Samoin jakautuneiden X_i odotusarvot ovat 2.0 ja keskihajonnat ovat 0.2. Oletus: 15 kpl määrä on riittävä normaalijakauma-approksimaatioon eli

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Tässä esimerkissä (Kaava luennon mallitehtävästä):

$$\bar{x} \sim N\left(2.0, \frac{0.2^2}{15}\right)$$

Tehtävänä on testata $P = (\bar{x} > 2.1)$

Suoritetaan testaus tuttuun tapaan:

$$P = (\bar{x} > 2.1) = 1 - P\left(z < \frac{2.1 - 2.0}{\frac{0.2}{\sqrt{15}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1.936) = 1 - 0.9738 = 0.0262$$

Tehtävä on samankaltainen kuin edellinen. Tässä meillä on jo tiedossa että jakaumat ovat samoin jakautuneita sekä riippumattomia eli voimme käyttää kaavoja:

$$S = X_1 + X_2 + X_3$$

$$ES = EX_1 + EX_2 + EX_3$$

$$D^2S = D^2X_1 + D^2X_2 + D^2X_3$$

$$S \sim N(ES, D^2S)$$

Tämän tehtävän tilanteessa:

$$S = X_1 + X_2 + X_3$$

$$ES = 1000 + 2000 + 2500 = 5500$$

$$D^2S = 100^2 + 120^2 + 125^2 = 40025$$

$$S \sim N(5500, 40025)$$

Tätä jakaumaa voidaan testata tuttuun tapaan:

a) $P = (S > 5900) = 1 - P\left(z < \frac{5900-5500}{\sqrt{40025}}\right)$

$= 1 - \Phi(2.00) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

b) $P = (S > x) = 1 - P\left(z < \frac{x-5500}{\sqrt{40025}}\right) = 0.05$

$$P\left(z < \frac{x - 5500}{\sqrt{40025}}\right) = 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{x-5500}{\sqrt{40025}}\right) = \Phi(\,\mathbf{1.65})$$

$$\left(\frac{x-5500}{\sqrt{40025}}\right) = (\,\mathbf{1.65})$$

x = 5830.10

c) $\boldsymbol{P = (S > 5000) = \ 1 - P\left(z < \frac{5000-5500}{\sqrt{40025}}\right)}$

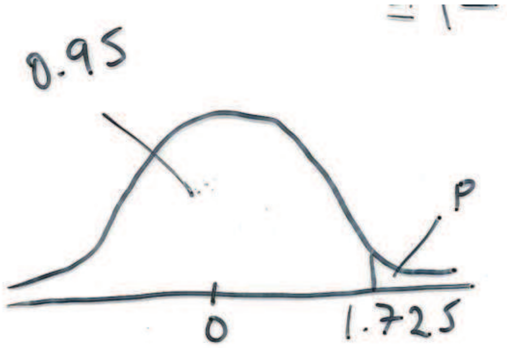
$$\boldsymbol{= \ 1 - (1 - \ \Phi(\,2.4992) = \Phi(\,2.50) = 0.9938}$$

T-jakaumassa on kertymäfunktion komplementteja, eli kuvaa jakauman ”oikeanpuoleista häntää”.

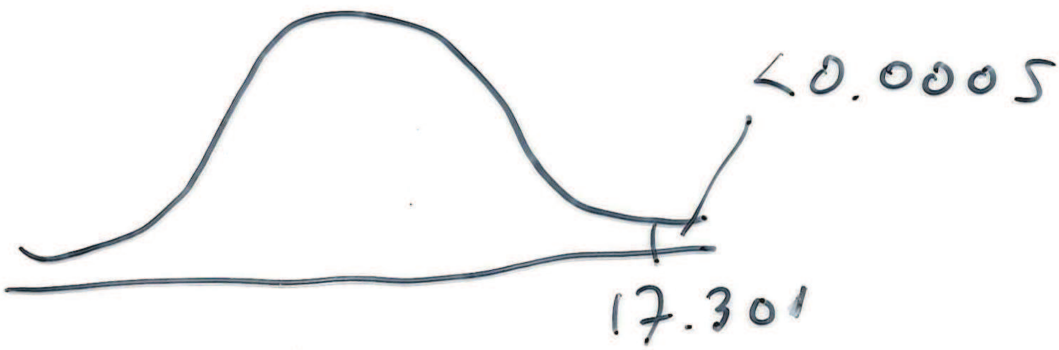
a) $\boldsymbol{P(t^{(20)} < 1.725) = 1 - P(t^{(20)} > 1.725)}$

Katsotaan taulukosta arvo $\boldsymbol{t_{0.05}^{(20)} = 1.725}$

$$\boldsymbol{1 - P(t^{(20)} > 1.725) = 1 - 0.05 = 0.95}$$



b) $\boldsymbol{P(t^{(7)} > 17.301) < 0.0005}$



Hyödynnetään luentoesimerkin tietoa:

$$Z_p = -Z_{1-p}$$

$$t_p^{(v)} = -t_{1-p}^{(v)}$$

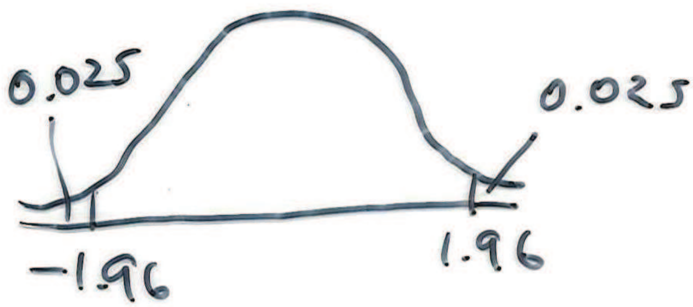
Katsotaan taulukosta:

a) $t_{0.05}^{(11)} = $ **1.796 (eli 5% havainnoista on arvoa 1,796 suurempia)**

b) $Z_{0.975} = -1.96$ **(eli 97,5% havainnoista on arvoa -1,96 suurempia)**

c) $t_{0.025}^{(11)} = $ **2.201(eli 2,5% havainnoista on arvoa 2,201 suurempia)**

d) $Z_{0.025} = $ **1.96 (eli 0,025% havainnoista on arvoa 1,96 suurempia)**



$$z_p = -(z_{1-p})$$

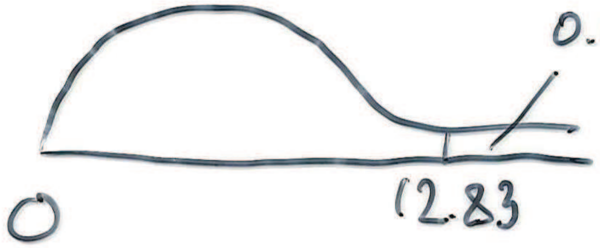
$$t_p^{(\nu)} = -(t_{1-p}^{(\nu)})$$

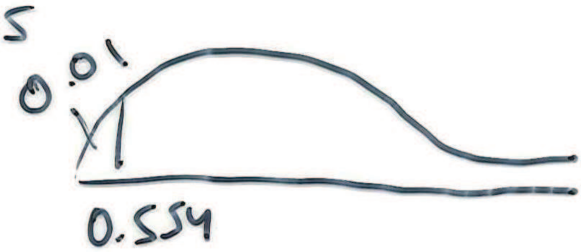
Khii neliöjakauma mittaa jakaumien ”ylähäntää”

a) v=5 eli $\chi^{2\,(5)}_{p}$ Ratkaistaan taulukosta katsomalla:

P($\chi^{2\,(5)}_{p}$> 12.83) = 0.025 (eli 2,5% havainnoista on arvoa 12,83 suurempia)

P($\chi^{2\,(5)}_{p}$ ≤ 0.554) = 1 – P($\chi^{2\,(5)}_{p}$ > 0.554) = 1 – 0.99 = 0.01





b) v=12 eli $\chi^{2\,(12)}_{p}$

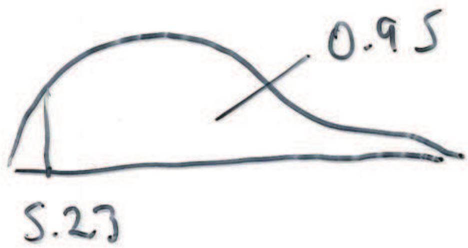
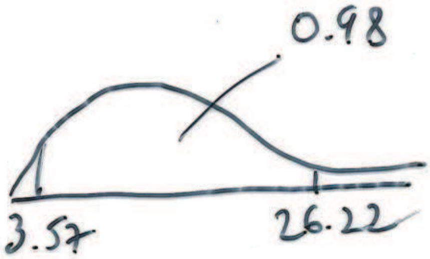
P($\chi^{2\,(12)}_{p} > 5.23$) = 0.95

P($3.57 < \chi^{2\,(12)}_{p} < 26.22$)

$\mathbf{0.01 < P(\chi^{2\,(12)}_{p}) < 0.99}$

eli $\chi^{2\,(12)}_{p} = 0.99 - 0.01 = 0.98$

P($\chi^{2\,(12)}_{p} > 57.15$) < 0.001


0.95
5.23

0.98
3.57
26.22

<0.001
57.15

Katsotaan taulukosta:

a) $\chi^{2\,(12)}_{0.05} = 21.03$

b) $\chi^{2\,(35)}_{0.05} = 43.77 < \chi^{2\,(35)}_{0.05} < 55.76$

c) $\chi^{2\,(12)}_{0.025} = 23.34$

d) $\chi^{2\,(25)}_{0.025} = 40.65$

b-kohdan tarkka arvo (tarkemmasta taulukosta) = 49.80

Katsotaan taulukosta:

a) $F_{0.025}^{(3,15)} = 4.15$

b) $F_{0.025}^{(15,3)} = 14.3$

Hyödennetään tunnettua ominaisuutta (kalvo 52)

$$F_p^{(v1,v2)} = \frac{1}{F_{1-p}^{(v2,v1)}}$$

c) $F_{0.975}^{(3,15)} = \frac{1}{F_{0.025}^{(15,3)}} = \frac{1}{14.3}$

d) $F_{0.975}^{(15,3)} = \frac{1}{F_{0.025}^{(3,15)}} = \frac{1}{4.15}$