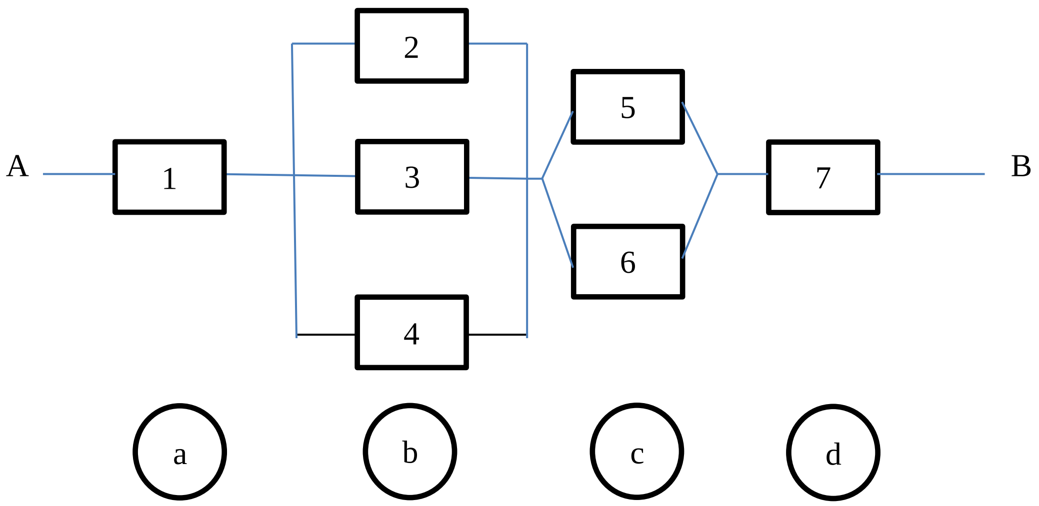
Todennäköisyys, että vesi kulkee viemäristä A viemäriin B, riippuu osien toimivuudesta. Kaikkia mahdollisia reittejä ei kannata lähteä laskemaan vaan hyödynnetään vastatapahtumia. Tehtävän tilanne on seuraava:



Voidaan ajatella, että tilanne muodostuu neljävaiheisesta tilanteesta a,b,c,d (pallot kuvion alla). Eli tiedon pitää läpäistä kaikki vaiheet a,b,c ja d.

<u>Voidaan laskea osien todennäköisyydet:</u>

P(”Läpäisee a”) = 0.98
P(”Läpäisee b”) = 1- P(”ei läpäise b”) = 1 - 0.02*0.02*0.02= 0.999992
P(”Läpäisee c”) = 1- P(”ei läpäise c”) = 1 - 0.05*0.05 = 0.9975
P(”Läpäisee d”) = 0.95

P(”Läpäisee systeemin”)
= P(”Läpäisee a”) * P(”Läpäisee b”) * P(Läpäisee c”) * P(”Läpäisee d”)

= 0.98 * 0.999992 * 0.9975 * 0.95
= 0.928665

Tapahtuman A todennäköisyys on 0.7. Tehdään neljä toistoa. Määritetään pistetodennäköisyys- ja kertymäfunktiot. Määritetään todennäköisyys P(1 < X ≤ 3) kertymäfunktion avulla. Määritetään myös X:n odotusarvo ja keskihajonta.

Kertymäfunktio on helppo muodostaa pistetodennäköisyysfunktiosta. Yksi helppo ratkaista tehtävä on taulukoida pistetodennäköisyydet seuraavasti:

[Käytämme kaavakokoelman kaavoja (12) – (16)]

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Kaavassa n on toistojen määrä, k on A:n tapahtumien määrä ja p on A-tapahtuman todennäköisyys

A:n määrä (X)	Binomitodennäköisyys	P(X)	F(X)
x<0 kpl	-	-	0
x=0 kpl	$\binom{4}{0} 0.7^0 (1-0.7)^{4-0}$	0.0081	0.0081
x=1 kpl	$\binom{4}{1} 0.7^1 (1-0.7)^{4-1}$	0.0756	0.0081+0.0756 = **0.0837**
x=2 kpl	$\binom{4}{2} 0.7^2 (1-0.7)^{4-2}$	0.2646	0.0837+0.2646 = **0.3483**
x=3 kpl	$\binom{4}{3} 0.7^3 (1-0.7)^{4-3}$	0.4116	0.3483+0.4116=**0.7599**
x=4 kpl	$\binom{4}{4} 0.7^4 (1-0.7)^{4-4}$	0.2401	0.7599+0.2401=**1**
x>4 kpl	-	-	1

Kirjoitetaan lopullinen vastaus puhtaaksi:

Pistetodennäköisyysfunktio

$$P(X) = \begin{cases} 0.0081, & \text{kun } x = 0 \\ 0.0756, & \text{kun } x = 1 \\ 0.2646, & \text{kun } x = 2 \\ 0.4116, & \text{kun } x = 3 \\ 0.2401, & \text{kun } x = 4 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kertymäfunktio

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 0.0081, & \text{kun } 0 \le x < 1 \\ 0.0837, & \text{kun } 1 \le x < 2 \\ 0.3483, & \text{kun } 2 \le x < 3 \\ 0.7599, & \text{kun } 3 \le x < 4 \\ 1, & \text{kun } x \ge 4 \end{cases}$$

Huom! Tentissä vaaditaan tämä esitystapa!

Näin saimme yksinkertaisesti pistetodennäköisyyksiä summaamalla muodostettua myös kertymäfunktion. Tässä taulukossa pistetodennäköisyys (k=2) kertoo mikä on todennäköisyys, että A tapahtuu tasan kaksi kertaa. Kertymäfunktio kertoo meille todennäköisyyden, että A tapahtuu enintään A kertaa.

Määritetään todennäköisyys P(1 < X $\leq$ 3) kertymäfunktion avulla.
$\boldsymbol{P(a < x \leq b)}$ **= F(b) – F(a).**

Sijoitetaan:
P(1 < X $\leq$ 3) = F(3) – F(1) = 0.7599 – 0.0837 = 0.6762

Lasketaan odotusarvo:
0*0.0081+1*0.0756+2*0.2646+3*0.4116+4*0.2401 = 2.8
Tai vaihtoehtoisella (helpommalla) tavalla = 0.7*4 = 2.8

Lasketaan varianssi: $\mathbf{0.0081 * (0 - 2.8)^2 + 0.0756 * (1 - 2.8)^2 + 0.2646 * (2 - 2.8)^2 + 0.4416 * (3 - 2.8)^2 + 0.2401 * (4 - 2.8)^2 = 0.84}$
Tai vaihtoehtoisella tavalla: 0.7 * 4 * (1-0.7) = 0.84
Tästä saadaan keskihajonta : $\mathbf{\sqrt{0.84} \approx 0.917}$

Tehtävään voidaan hyödyntää kertymäfunktiota ja binomijakauman kaavaa:

P(”Kuljetusrekka tulee perille”) = P(X) = 0.75

$\boldsymbol{X \sim BIN}(\mathbf{10, 0.75})$

Perille pääsee vähintään seitsemän: $(\boldsymbol{X} \geq \mathbf{7})$

= P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)

$$= \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{7}} \mathbf{0.75}^{7} (\mathbf{1} - \mathbf{0.75})^{\mathbf{10-7}}$$
$$+ \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{8}} \mathbf{0.75}^{\mathbf{8}} (\mathbf{1} - \mathbf{0.75})^{\mathbf{10-8}}$$
$$+ \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{9}} \mathbf{0.75}^{9} (\mathbf{1} - \mathbf{0.75})^{\mathbf{10-9}}$$

$$+ \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{10}} \mathbf{0.75}^{\mathbf{10}} (\mathbf{1} - \mathbf{0.75})^{\mathbf{10-10}}$$

= 0.25028 + 0.28157+ 0.18771 + 0.05631 = 0.77587

Eli vähintään 7 rekkaa pääsee perille 77,59 % todennäköisyydellä.

Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritetään perille päässeiden kuljetusten odotusarvo ja keskihajonta.

Odotusarvo saadaan myös laskettua yksinkertaisellakin tavalla:

$$E(X) = n * p = 10 * 0.75 = 7.5$$

Myös varianssin laskemiseeen on yksinkertainen ratkaisutapa:

$$D^2X = n * p * (1-p) = 10 * (0.75) * (0.25) = 1.875$$

= > keskihajonta = $\sqrt{1.875} \approx 1.3693$

Odotusarvo voidaan laskea myös määritelmän kautta

$\binom{10}{0}0.75^0(1-0.75)^{10-0} * 0 + \binom{10}{1}0.75^1(1-0.75)^{10-1} * 1 +$
$\binom{10}{2}0.75^2(1-0.75)^{10-2} * 2 + \binom{10}{3}0.75^3(1-0.75)^{10-3} * 3 +$
$\binom{10}{4}0.75^4(1-0.75)^{10-4} * 4 + \binom{10}{5}0.75^5(1-0.75)^{10-5} * 5 +$
$\binom{10}{6}0.75^6(1-0.75)^{10-6} * 6 + \binom{10}{7}0.75^7(1-0.75)^{10-7} * 7 +$
$\binom{10}{8}0.75^8(1-0.75)^{10-8} * 8 + \binom{10}{9}0.75^9(1-0.75)^{10-9} * 9 +$
$\binom{10}{10}0.75^{10}(1-0.75)^{10-10} * 10$

= 7.5 [Odotusarvo]

Varianssi lasku määritelmän avulla:

$\binom{10}{0}0.75^0(1-0.75)^{10-0} * (0-7.5)^2 + \binom{10}{1}0.75^1(1-0.75)^{10-1}(1-7.5)^2$
$+ \binom{10}{2}0.75^2(1-0.75)^{10-2}(2-7.5)^2 + \binom{10}{3}0.75^3(1-0.75)^{10-3}(3-7.5)^2 +$
$\binom{10}{4}0.75^4(1-0.75)^{10-4}(4-7.5)^2 + \binom{10}{5}0.75^5(1-0.75)^{10-5}(5-7.5)^2 +$
$\binom{10}{6}0.75^6(1-0.75)^{10-6}(6-7.5)^2 + \binom{10}{7}0.75^7(1-0.75)^{10-7}(7-7.5)^2 +$
$\binom{10}{8}0.75^8(1-0.75)^{10-8}(8-7.5)^2 + \binom{10}{9}0.75^9(1-0.75)^{10-9}(9-7.5)^2 +$
$\binom{10}{10}0.75^{10}(1-0.75)^{10-10}(10-7.5)^2$

= 1.875 [Varianssi]

Jatkoa tehtäviin 3 ja 4. Ratkaistaan tehtävä pistetodennäköisyyden avulla. Lähdetään laskemaan todennäköisyyksiä kunnes saamme halutun varmuuden (0.99).

Eli kuinka monta rekkaa pitää lähettää, että todennäköisyys, että vähintään yksi pääsee perille, on vähintään 0,99? Lasketaan eri tilanteissa suotuisten tapausten pistetodennäköisyydet:

Tapa 1)

Lähetetään yksi:

$\binom{1}{1}0.75^1(1-0.75)^{1-1}$ = **0,75**

Lähetetään kaksi (jolloin perille pääsee 0,1 tai 2):

$\binom{2}{1}0.75^1(1-0.75)^{2-1} + \binom{2}{2}0.75^2(1-0.75)^{2-2}$ = **0.375 +0.5625 =0.9375**

Lähetetään kolme (jolloin perille pääsee 0,1,2 tai 3):

$$\binom{3}{1}0.75^1(1-0.75)^{3-1} + \binom{3}{2}0.75^2(1-0.75)^{3-2} + \binom{3}{3}0.75^3(1-0.75)^{3-3}$$

= 0.140625 +0.421875 + 0.421875 = 0.984375

Lähetetään neljä (jolloin perille pääsee 0,1,2,3 tai 4):

$$\binom{4}{1}0.75^1(1-0.75)^{4-1} + \binom{4}{2}0.75^2(1-0.75)^{4-2} + \binom{4}{3}0.75^3(1-0.75)^{4-3} + \binom{4}{4}0.75^4(1-0.75)^{4-4}$$

= 0.046875 + 0.2109375 + 0.421875 + 0.31640625
<u>= 0.99609375 (riittävä varmuus)</u>

Eli meidän tulee lähettää vähintään 4 rekkaa, että ainakin yksi niistä saapuu perille 99 % varmuudella.

Tapa 2) vastatapahtuman avulla:

P("Vähintään yksi pääsee perille") = 1 – P("Ei yksikään pääse perille)

1 - $\binom{1}{0}\mathbf{0.75^0(1-0.75)^{1-0}}$ = $\mathbf{1-\ 0.25^1}$ = 1- 0.25 = 0.75

1 - $\binom{2}{0}\mathbf{0.75^0(1-0.75)^{2-0}}$ = $\mathbf{1-\ 0.25^2}$ =1- 0.0625 = 0.9375

1 - $\binom{3}{0}\mathbf{0.75^0(1-0.75)^{3-0}}$ = $\mathbf{1-\ 0.25^3}$=1- 0.015625 = 0.984375

1 - $\binom{4}{0}\mathbf{0.75^0(1-0.75)^{4-0}}$ = $\mathbf{1-\ 0.25^4}$ =1- 0.00390625 = 0.99609375

- ➔ **Eli riittävä varmuus saavutetaan kun lähetetään 4 rekkaa.**

Tapa 3) Tehtävä voidaan myös ratkaista yhtälönratkaisulla, jossa tuntemattomaksi asetetaan rekkojen määrä (n) ja lasketaan tapahtuma vastatapahtuman kautta:

P("Vähintään yksi rekka perille") = 1 – P("Ei yhtään rekkaa perille")

$\binom{n}{1}\mathbf{0.75^1(1-0.75)^{n-1}}$ = **0,99**

Joten:

$\mathbf{1-\ \binom{n}{0}0.75^0(1-0.75)^{n-0}} \geq$ **1 – (1 - 0,99)**

$\mathbf{1-\ \binom{n}{0}0.75^0(1-0.75)^{n}} \geq$ **0,99**

$\mathbf{-\binom{n}{0}0.75^0(1-0.75)^{n}} \geq$ **- 0.01**

$\mathbf{\binom{n}{0}0.75^0(1-0.75)^{n}} \leq$ **0.01** [$\mathbf{\binom{n}{0} = 1}$] **ja** $\mathbf{0.75^0 = 1}$]

$\mathbf{(1-0.75)^{n}} \leq$ **0.01**

$\boldsymbol{ln}\ \mathbf{(1-0.75)^{n}} \leq$ **ln (0.01)**

$\boldsymbol{n*ln}\ \mathbf{(1-0.75)}\leq$ **ln (0.01)** [$\boldsymbol{ln}\ \mathbf{(1-0.75)<0}$]

n $\geq \frac{\boldsymbol{ln}\ \mathbf{(0.01)}}{\boldsymbol{ln}\mathbf{(1-0.75)}} \approx \mathbf{3.3219 \rightarrow 4}$

Eli tarvitsee lähettää vähintään 4 rekkaa.

Koska arpa palautetaan, ei todennäköisyys muutu ja voidaan yhä laskea binomitodennäköisyyden avulla. Voittoarvon todennäköisyys on 80 / 230. Lasketaan tuttuun tapaan todennäköisyys, että korkeintaan kolme arpaa voittaa eli F(3).

P(”korkeintaan 3 voittavaa arpaa”)

= P(” 0 voittoa”) + P(” 1 voitto”) + P(” 2 voittoa”) + P(”3 voittoa”)

P(”0 voittoa”) = $\binom{10}{0}\left(\frac{80}{230}\right)^{0}(150/230)^{10-0}$ **=0.01392**

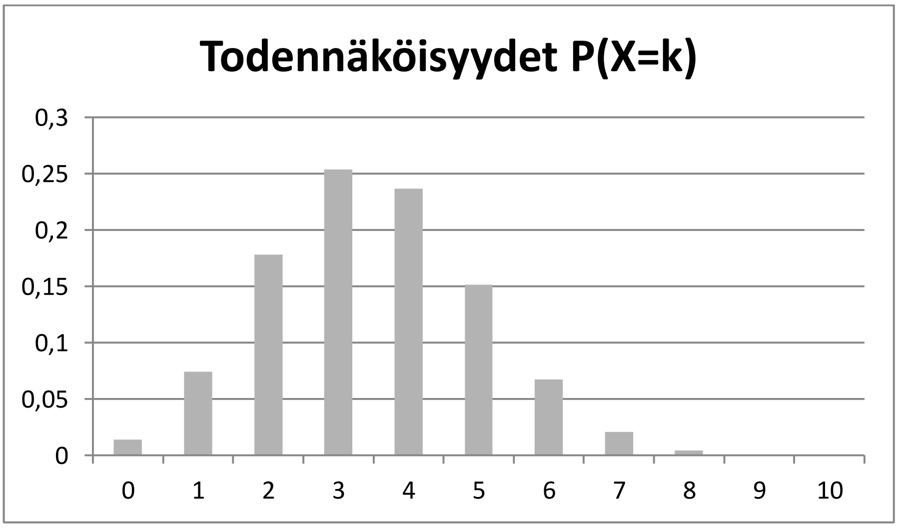
P(”1 voittoa”) = $\binom{10}{1}\left(\frac{80}{230}\right)^{1}(150/230)^{10-1}$ **= 0.074239**

P(”2 voittoa”) = $\binom{10}{2}\left(\frac{80}{230}\right)^{2}(150/230)^{10-2}$ **= 0.178174**

P(”3 voittoa”) = $\binom{10}{3}\left(\frac{80}{230}\right)^{3}(150/230)^{10-3}$ **= 0.253403**

P(” korkeintaan 3 voittavaa arpaa”) = 0.519736

Eli 51,97 % todennäköisyys että korkeintaan 3 arpaa voittaa.



Odotusarvo = 10*(80/230) = 3,47826
(kaava 16, EX = n*p)

Varianssi = 10*(80/230) * (1 – 80/230) = 2.26843
(kaava 17, $\boldsymbol{D^2}$X = n*p*(1-p))

- ⇨ **keskihajonta =** $\sqrt{\mathbf{2.2684}} = \mathbf{1.50613}$

Siirrytään käyttämään hypergeometrista jakaumaa (luentomonisteen kalvo 37). Näin voidaan tarkastella tilannetta, jossa arpalipuketta ei palauteta otokseen.

$$X \sim Hyperg\ (N, K, n)$$

Jossa N on kaikkien alkioiden lukumäärä (tässä kaikkien arpojen lukumäärä), K on tietyn joukon lukumäärä (tässä voittavat arvot) ja n on toistojen lukumäärä (tässä arpojen poiminnan lukumäärä):

$$X \sim Hyperg\ (230, 80, 10)$$

$$P(x = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{80}{k}\binom{150}{10-k}}{\binom{230}{10}}$$

P("korkeintaan 3 voittavaa arpaa")
= P(" 0 voittoa") + P(" 1 voitto") + P(" 2 voittoa") + P("3 voittoa")

$$P(x = 0) = \frac{\binom{80}{0}\binom{230-80}{10-0}}{\binom{230}{10}} = \frac{\binom{80}{0}\binom{150}{10}}{\binom{230}{10}} = 0.012493$$

$$P(x = 1) = \frac{\binom{80}{1}\binom{230-80}{10-1}}{\binom{230}{10}} = \frac{\binom{80}{1}\binom{150}{9}}{\binom{230}{10}} = 0.070883$$

$$P(x = 2) = \frac{\binom{80}{2}\binom{230-80}{10-2}}{\binom{230}{10}} = \frac{\binom{80}{2}\binom{150}{8}}{\binom{230}{10}} = 0.177456$$

$$\boldsymbol{P(x=3)} = \frac{\binom{80}{3}\binom{230-80}{10-3}}{\binom{230}{10}} = \frac{\binom{80}{3}\binom{150}{7}}{\binom{230}{10}} = \mathbf{0.2581189}$$

P(”korkeintaan 3 voittavaa arpaa”) =

0.012493 + 0.070883 + 0.177456 + 0.2581189
= 0.5189509 ≈ $\mathbf{51,89\%}$

Odotusarvo: E(X) = n * K/N = 10 * 80/230 ≈ 3.48

Keskihajonta: D(X) = $\sqrt{\boldsymbol{n} * \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{N}} * \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{N}}\right) * \frac{\boldsymbol{N-n}}{\boldsymbol{N-1}}}$

= $\sqrt{\mathbf{10} * \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{230}} * \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{230}}\right) * \frac{\mathbf{230-10}}{\mathbf{230-1}}}$ **≈ 1.48**