Kaikissa alla olevissa tehtävissä voit käyttää apuna tietokonetta ja haluamiasi apuohjelmia. Harjoituksissa esitän ratkaisut käyttämällä Python-ohjelmointia, Visual studio codea ja ChatGPT:tä.

1. Huom: ”puolitusmenetelmä” on ”bisection method” englanniksi.

Etsi seuraavien funktioiden nollakohdat annetulla välillä yhden desimaalin tarkkuudella käyttäen puolitusmenetelmää.

a) $f(x) = x^3 - 3$, $[a, b] = [0, 3]$
b) $f(x) = \ln x + x$, $[a, b] = [\frac{1}{10}, 1]$
c) $f(x) = x - e^{-x^2}$, $[a, b] = [0, 1]$.

ks. avuksi myös https://en.wikipedia.org/wiki/Bisection_method

2. Huom: kiintopistemenetelmä on ”fixed-point method” englanniksi.

Ratkaise kiintopistemenetelmällä seuraavat yhtälöt.

a) $x^3 - x - 1 = 0$ välillä $[1, 2]$
b) $3x^2 = e^x$, positiivinen ratkaisu.

ks. avuksi myös https://en.wikipedia.org/wiki/Fixed-point_iteration

Jatkuu seuraavalla sivulla!

3. Toteuta koodina ratkaisu, joka johtaa samaan lopputulokseen.

(Tehtävä on Aalto-yliopiston kurssimateriaaleista, osoitteesta http://math.aalto.fi/opetus/k2/luentosisalto/esim4.pdf)

1. Miten Newtonin menetelmällä voidaan likimääräisesti ratkaista yhtälösysteemi $x^3y - xy^2 = -2$, $x + y + xy = 5$. Laske yksi iteraatioaskel alkuarvolla $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Ratkaisu: Jos merkitään

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^3y - xy^2 + 2 \\ x + y + xy - 5 \end{pmatrix},$$

niin on löydettävä yhtälön $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ratkaisu. Newtonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ ja $\mathbf{x}_0$ on annettu. Tässä tapauksessa

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2y - y^2 & x^3 - 2xy \\ 1 + y & 1 + x \end{pmatrix}$$

joten jos $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ niin lasketaan

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{f}'\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

ja saadaan

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Jos jatketaan saadaan

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.179026217 \\ 1.575280899 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.9824035938 \\ 1.985901884 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1.000278149 \\ 1.99970619 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1.000000052 \\ 1.999999881 \end{pmatrix}$$