KAMK • University of Applied Sciences

Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet

Kompleksiluvut

Taneli Rantaharju
044 7101 253
taneli.rantaharju@kamk.fi
Työhuone TA13H115

Kompleksiluvut

Kompleksilukujen joukko on reaalilukujen luonnollinen laajennus

Kompleksiluku z on muotoa z=a+jb, missä

- a on komplesiluvun reaaliosa
- b on kompleksiluvun imaginaariosa ja
- j on imaginaariyksikkö (käytetään myös merkintää i)

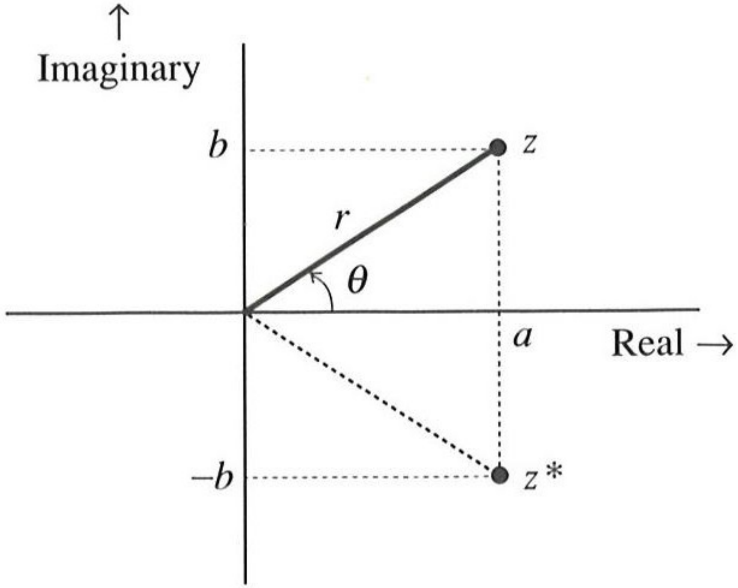
Imaginaariyksikölle pätee $j^2 = -1$ ja $\sqrt{-1} = \pm j$

Esimerkki: Yhtälölle $x^2=-1$ ei ole löydettävissä ratkaisua reaalilukujen joukosta, sillä x^2 on positiivinen kaikilla reaalisilla x:n arvoilla

Sen sijaan kompleksilukujen joukosta yo. yhtälölle löydetään ratkaisut x=+j ja x= -j

Kompleksiluvut, kompleksitaso

- Kompleksiluku z=a+jb voidaan esittää graafisesti kompleksitasossa, jossa sen karteesiset koordinaatit ovat a ja b
- Imaginaariluvut sijaitsevat vertikaaliakselilla (imaginaariakseli)
- Reaaliluvut sijaitsevat horisontaaliakselilla (reaaliakseli)



Kuvan lähde: Kirja, Linear Systems and Signals, B. P. Lathi

KAMK • University of Applied Sciences

Kompleksiluvut, polaarimuoto

- Kompleksiluku z=a+jb voidaan esittää napakoordinaatistossa seuraavasti

  a=r*cosθ

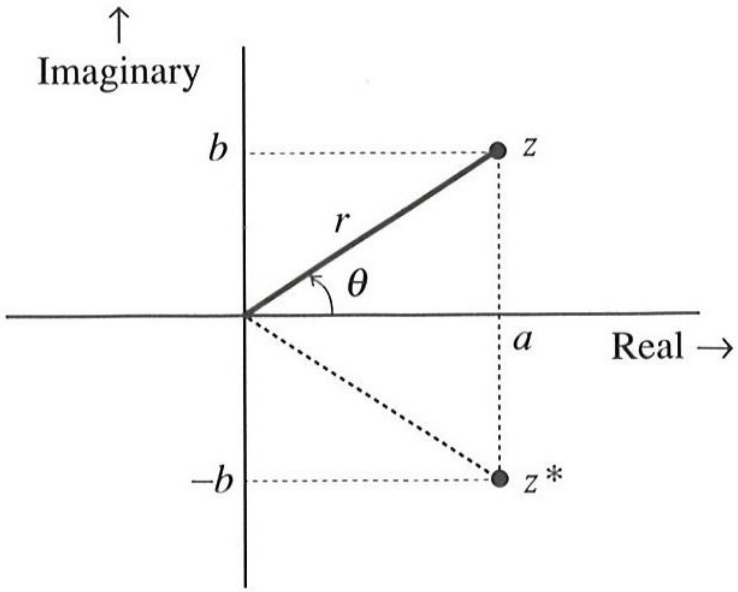
  b=r*sinθ

  missä $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ja $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

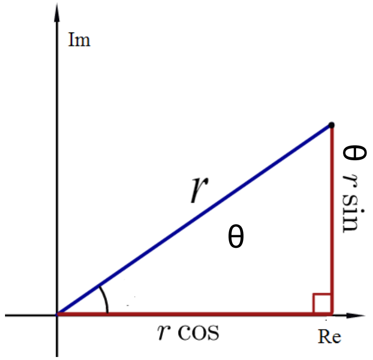
- Napakoordinaatistossa kompleksiluku saa esitysmuodon

  z=a+jb=r*cosθ + j*r*sinθ

  =r(cosθ + j*sinθ)



Kuvan lähde: Kirja, Linear Systems and Signals, B. P. Lathi



Kompleksiluvut, Eulerin lause tai Eulerin kaava

Leonhard Eulerin mukaan nimetty Eulerin lause on kompleksianalyysiin liittyvä matemaattinen kaava, joka ilmaisee kompleksisen eksponenttifunktion ja trigonometristen funktioiden välisen suhteen

Eulerin lauseen mukaan mille tahansa reaaliselle luvulle θ on voimassa

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta,$$

missä e on luonnollisen logaritmin kantaluku (Neperin luku), θ kulma radiaaneina ja j imaginaariyksikkö.

Eulerin lauseen todistus voidaan suorittaa mm. potenssisarjojen avulla

Sijoittamalla yo. tulos kompleksiluvun napakoordinaatiston esitysmuotoon saadaan

$$z = a + jb = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$$

Kompleksiluvut, Eulerin lause tai Eulerin kaava

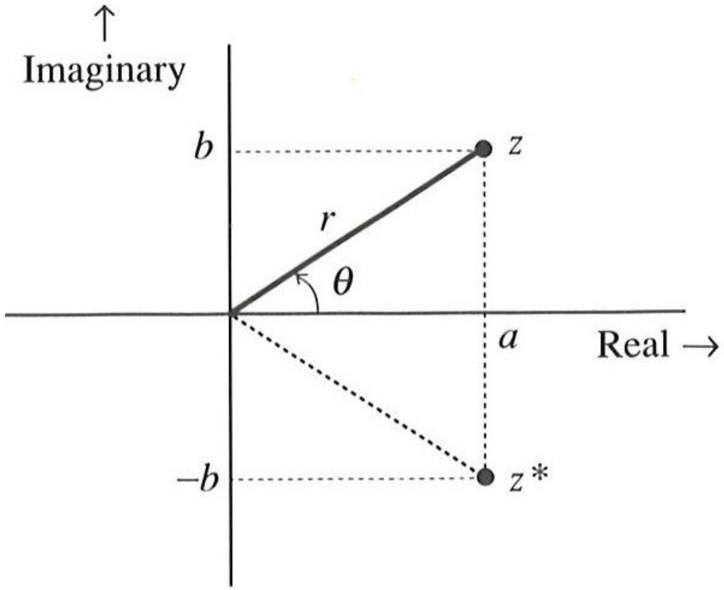
Eulerin lauseen nojalla kompleksiluku voidaan esittää muodossa (osoitinesitys)

$$z = re^{j\theta},$$

$$\text{missä } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ja } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

r on pisteen z etäisyys origosta, minkä vuoksi r on yhtä kuin z:n suuruus tai itseisarvo, merkintänä r=|z|.

Vastaavasti θ on z:n kulma ja siitä käytetään merkintää $\angle z$.



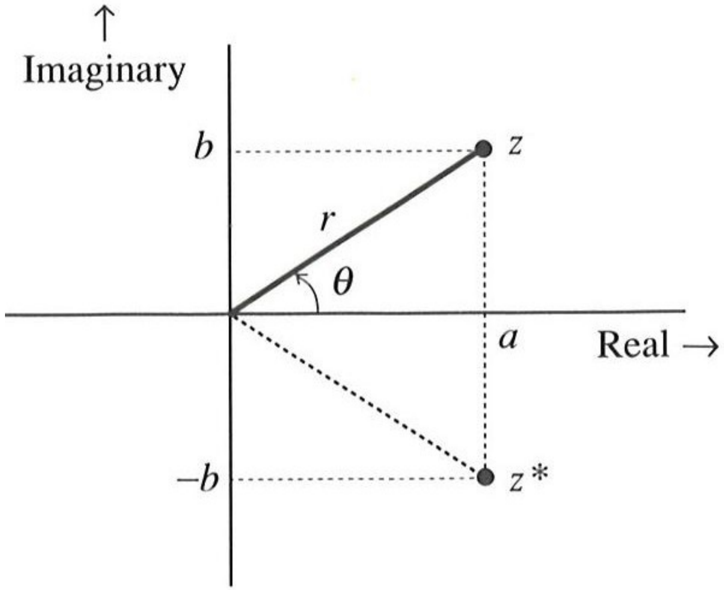
Kuvan lähde: Kirja, Linear Systems and Signals, B. P. Lathi

Kompleksiluvut, kompleksikonjugaatti eli liittoluku

Kompleksiluvun kompleksikonjugaatti eli liittoluku saadaan vaihtamalla sen imaginaariosan etumerkki, mikä vastaa vaiheen merkin vaihtamista.

Kompleksiluvun $z = a + jb$ kompleksikonjugaatti z^* on muotoa

$$z^* = a - jb = re^{-j\theta}$$



Kuvan lähde: Kirja, Linear Systems and Signals, B. P. Lathi

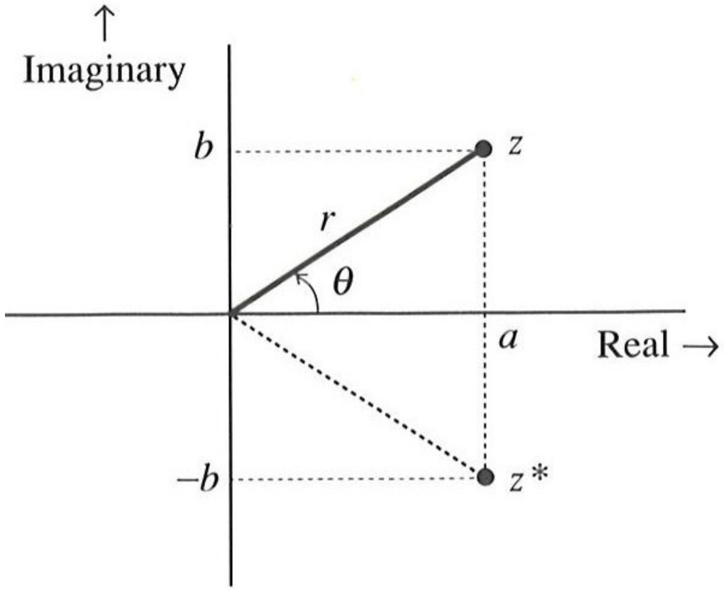
Kompleksiluvut, kompleksikonjugaatti eli liittoluku

Kompleksiluvun ja sen kompleksikonjugaatin summa on reaaliosa kerrottuna kahdella

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a$$

Kompleksiluvun ja sen kompleksikonjugaatin tulo on reaaliluku $|z|^2$

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |z|^2$$



Kuvan lähde: Kirja, Linear Systems and Signals, B. P. Lathi

Kompleksiluvut, laskusäännöt

- Eksponenttifunktion laskukaavat

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

- Kompleksilukujen summa, erotus ja tulo

$$(a + jb) + (x + jy) = (a + x) + (b + y)j$$

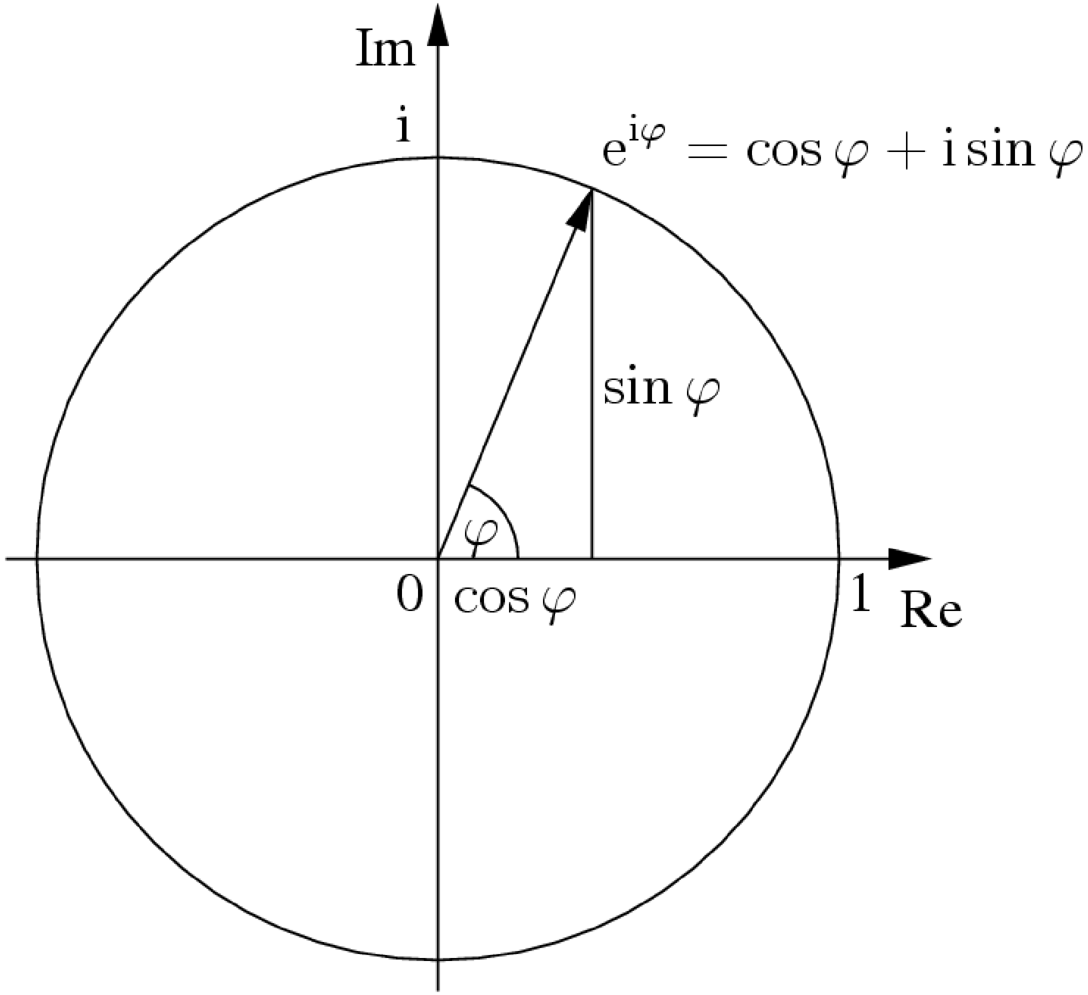
$$(a + jb) - (x + jy) = (a - x) + (b - y)j$$

$$(a + jb)(x + jy) = ax + ayj + xbj + byj^2 = (ax - by) + (ay + x\mathrm{b})\mathrm{j}$$

Lisämateriaalia kompleksilukujen tulon ja osamäärän laskutoimituksista

http://www.regentsprep.org/regents/math/algtrig/ato6/multlesson.htm

Yksikköympyrä



KAMK • University of Applied Sciences

Yksikköympyrä

Kiertosuunta vastapäivään = positiivinen kulma

Kiertosuunta myötäpäivään = negatiivinen kulma

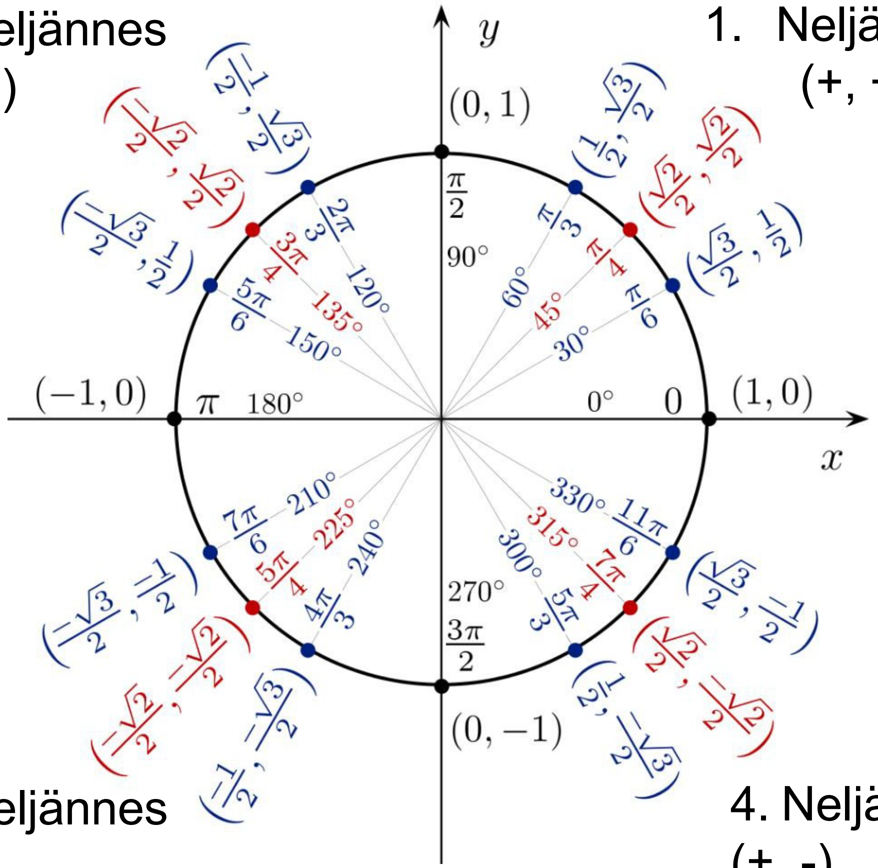
cos(θ)=x
sin(θ)=y

cos²(θ)+sin²(θ)=1, missä θ on kulma

Toinen kirjoitusmuoto yo. yhtälölle on (cos θ)² +(sin θ)²=1

2. Neljännes (- , +)

1. Neljännes (+, +)



3. Neljännes (-, -)

4. Neljännes (+, -)

Lähde: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/4c/Unit_circle_angles_color.svg/1024px-Unit_circle_angles_color.svg.png

Kompleksiluvut, laskusäännöt

Osoitinesitys on erityisesti käyttökelpoinen kompleksilukujen kerto- ja jakolaskun yhteydessä

$$z_1 = |z_1| e^{i\phi_1}$$

$$z_2 = |z_2| e^{i\phi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Kompleksiluvut, laskusäännöt

- Kompleksilukujen jakolasku muodossa $a+bi$ tapahtuu seuraavasti

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(c-di)(a+bi)}{(c-di)(c+di)}$$

$$= \frac{ac+bd+bci-adi}{c^2+d^2}$$

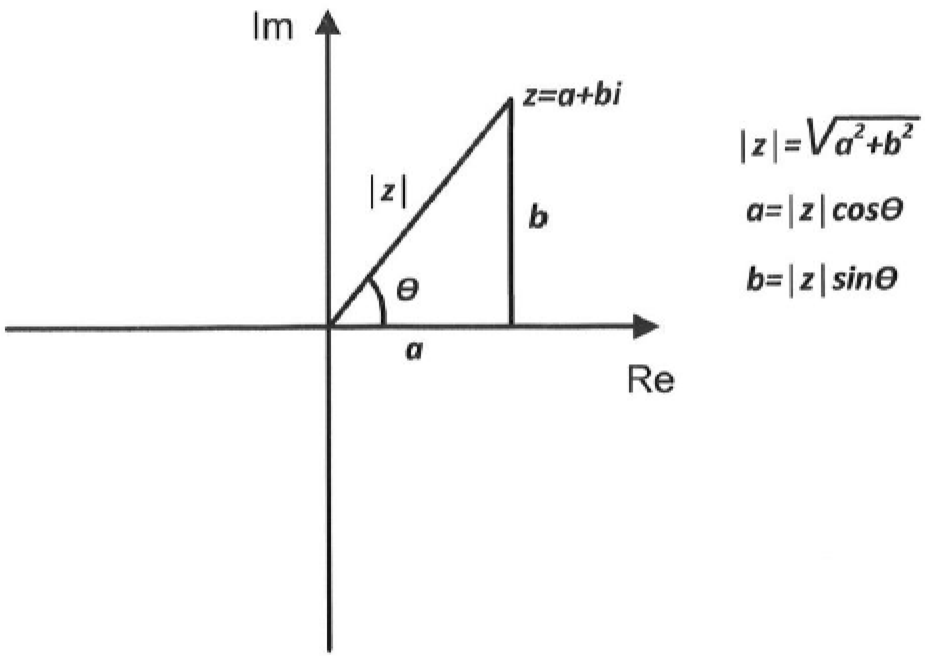
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

Kompleksiluvut, Eulerin lauseen avulla johdettua

- Eulerin lauseen $e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$ avulla voidaan johtaa yhtäpitävyydet

$$cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \text{ ja}$$

$$sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$



Sini- ja kosinisignaali ovat siis esitettävissä kompleksisten eksponentiaalifunktioiden (signaalien) avulla

YHTEENVETO

$$z = a + jb = |z|(cos\theta + jsin\theta) = |z|e^{j\theta}$$
$$z^* = a - jb = |z|(cos\theta - jsin\theta) = |z|e^{-j\theta}$$

Kompleksisen eksponentiaalifunktion ominaisuuksia

Huom! Kun $x(t) = Ae^{\omega t}$, ω = vakio

$x(t) \longrightarrow \infty$, kun $t \to \infty$

Havainto: Tavallinen eksponentiaalifunktio, joka kasvaa tai pienenee eksponentiaalisesti riippuen eksponentin etumerkistä

Kompleksisen eksponentiaalifunktion ominaisuuksia

Sen sijaan kun $x(t) = Ae^{i\omega t}$ $\omega = \text{vakio}$

$x(t)$ pysyy äärellisenä, kun $t \to \infty$

Havainto: Kompleksinen eksponentiaalifunktio saa arvoja ympyrän kehältä, jonka säteen määrää termi A

Kompleksisen eksponentiaalifunktion ominaisuuksia

Tarkastellaan tilannetta, jossa kaksi kompleksista eksponettifunktiota, jotka ovat toistensa konjugaateja, kerrotaan kompleksiluvuilla, jotka ovat toistensa konjugaatteja.

Olkoot funktiot

$$x_1(t) = e^{i\omega t} \quad \text{ja}$$
$$x_2(t) = e^{-i\omega t}$$

Olkoot kompleksiluvut

$$z_1 = |z|e^{i\alpha} \quad \text{ja}$$
$$z_2 = |z|e^{-i\alpha}$$

Kompleksisen eksponentiaalifunktion ominaisuuksia

Muodostetaan

$$z_1 x_1(t) + z_2 x_2(t) = |z| e^{i\alpha}\, e^{i\omega t} + \; |z| e^{-i\alpha}\, e^{-i\omega t}$$

$$= |z|\left(e^{i(\omega t+\alpha)} + e^{-i(\omega t+\alpha)}\right)$$

$$= 2|z| \cos(\omega t + \alpha)$$

Tulos on siis reaalinen kosinifunktio

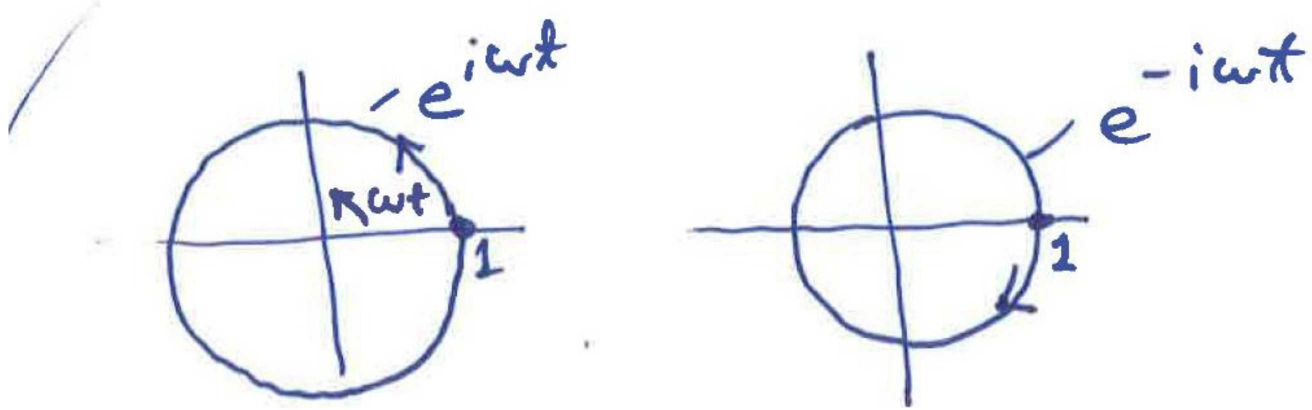
Kompleksisen eksponentiaalifunktion ominaisuuksia (edellinen tilanne eri tavalla esitettynä)

Olkoon $z = a + bi$ jolloin $z^* = a - bi$

Tällöin $z = |z| e^{i\phi}$ ja $z^* = |z| e^{-i\phi}$

Muodostetaan signaali

$$z e^{i\omega t} + z^* e^{-i\omega t}$$



KAMK • University of Applied Sciences

Kompleksisen eksponentiaalifunktion ominaisuuksia (edellinen tilanne eri tavalla esitettynä)

$$z e^{i\omega t} + z^* e^{-i\omega t}$$

$$= |z| e^{i\phi} e^{i\omega t} + |z| e^{-i\phi} e^{-i\omega t}$$

$$= |z| e^{i(\phi+\omega t)} + |z| e^{-i(\phi+\omega t)}$$

$$= 2|z| \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i(\phi+\omega t)} + e^{-i(\phi+\omega t)}\right)$$

$$= 2|z| \cos(\omega t + \phi)$$

KAMK • University of Applied Sciences

www.kamk.fi