ECOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

SECTION DE MATHÉMATIQUES

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

NOTES DE COURS

Prof. Jacques Rappaz

Ass. Dr Michel Flück

Edition 2010

AVERTISSEMENTS

Ce polycopié contient les notes de cours sur le calcul différentiel et intégral enseigné par le professeur Jacques Rappaz aux ingénieurs mathématiciens et physiciens de l'EPFL sous le label "ANALYSE I et II". Inspiré des livres de Jacques Douchet et Bruno Zwahlen [1] et du cours de ce dernier enseigné pendant de nombreuses années, ce polycopié a été conçu de sorte à ce que chaque page présente un verso non imprimé qui permettra à l'étudiant de compléter le texte par des figures, remarques et exercices qui sont volontairement absents de ces notes et qui seront donnés au cours. L'étudiant peut aussi utiliser les pages blanches ajoutées à la fin de ce manuscrit dans le but de le compléter.

Ces notes de cours n'auraient pu exister sans l'excellent travail de typographie que Mme Jacqueline Mosetti a bien voulu entreprendre ; qu'elle en soit ici chaleureusement remerciée. Les auteurs de ces notes tiennent à remercier aussi Chantal Landry, Gilles Steiner et Guillaume Jouvet qui se sont donnés la peine de les lire, corriger et apporter quelques améliorations.

1. Calcul différentiel et intégral, PPUR, Vol. 1 (ISBN 2-88074-196-3) et Vol. 2 (ISBN 2-88074-257-9)

Table des matières

0. Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Les quantificateurs utilisés dans ce polycopié sont essentiellement $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ qui signifient :

- $\forall$: "pour tout"
  Si S est un ensemble de nombres réels, $\forall x \in S$ signifie "pour tout x appartenant à S" ;

- $\exists$: "il existe"
  $\exists x \in S$ signifie "il existe un x appartenant à S" ;

- $\exists!$: "il existe un unique"
  $\exists! x \in S$ signifie "il existe un et un seul x appartenant à S".

Exemple : Si S et T sont des ensembles de nombres réels,
pour tout x appartenant à S et pour tout nombre réel ϵ positif, il existe $y \in T$ tel que $|x - y| \leq \epsilon$ sera écrit :
$\forall x \in S, \forall \epsilon > 0, \exists y \in T$ tel que $|x - y| \leq \epsilon$.

Remarque : La négation de cette affirmation s'écrit :
$\exists x \in S$ et $\exists \epsilon > 0$ tels que $\forall y \in T$ on a $|x - y| > \epsilon$.

1. Suites de nombres réels

1.1. **Nombres réels (rappels sans démonstration).**

On admettra les notions et notations suivantes :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ = ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ = anneau des entiers relatifs,
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ = corps des nombres rationnels,
- $\mathbb{R}$ corps commutatif, ordonné, archimédien des nombres réels.

Ainsi, on a une relation d'<u>ordre total sur $\mathbb{R}$</u> :

- $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$,
- $x \leq y$ et $y \leq x$ est équivalent à $x = y$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$,
- $x \leq y$ et $z \in \mathbb{R}$ impliquent $x + z \leq y + z$,
- $x \geq 0$ et $y \geq 0$ impliquent $xy \geq 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit la <u>valeur absolue</u> de x, notée $|x|$, par :

- si $x \geq 0$, $|x| = x$,
- si $x < 0$, $|x| = -x$,

avec les propriétés :

- $-|x| \leq x \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
- $|x - y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Archimédien (Archimède : -287 - -212 av. J.-C.) signifie : $\forall x > 0, \forall y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $nx > y$.

<u>Notion de coupure</u>. Richard Dedekind (1831-1916) définit de façon axiomatique la notion de coupure des nombres réels.

Soit E et F deux sous-ensembles non-vides de $\mathbb{R}$ qui vérifient

1) $E \cup F = \mathbb{R}$;
2) $E \cap F = \varnothing$;
3) $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, on a $x \leq y$.

Alors il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq z$, $\forall x \in E$ et $z \leq y$, $\forall y \in F$. On dit que les sous-ensembles E et F forment une coupure de $\mathbb{R}$.

On va identifier l'ensemble des nombres réels à la droite géométrique que nous appellerons : droite numérique.

Si $a < b$ on note :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ = intervalle $[a, b]$ fermé,
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ = intervalle fermé à gauche, ouvert à droite,
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ = intervalle fermé à droite, ouvert à gauche,
- $]a, b[$ ou $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ = intervalle ouvert.

On suppose connues les propriétés suivantes de $\mathbb{R}$:

Propriété 1.1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$, on a $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Notation 1.1. On définit les ensembles :

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\qquad \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}_+ : x \neq 0\}$,

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, $\qquad \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R}_- : x \neq 0\}$,

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 1.1. Soit $S \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que S est ouvert si pour tout $x \in S$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta, x + \delta[\subset S$. Si S est vide, il est aussi ouvert.
S est dit fermé si $\mathbb{R} - S = \{x \in \mathbb{R} : x \notin S\}$ est ouvert.
$S = \mathbb{R}$ ou $S = \varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés.

Définition 1.2. Soit $S \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de S si $\forall x \in S$ on a $x \leq M$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de S si $\forall x \in S$ on a $m \leq x$. Si S admet un majorant, on dit que S est majoré ; s'il admet un minorant, on dit que S est minoré ; s'il est majoré et minoré, on dit que S est borné.

Soit $S \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ que l'on suppose majoré. Ainsi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$, $\forall x \in S$. Evidemment, l'intervalle semi-infini $[M, +\infty[$ est un sous-ensemble de l'ensemble F des majorants de S. On définit ainsi

$$\begin{aligned} F &= \{\text{majorants de } S\} \\ E &= \mathbb{R} \setminus F = \{x \in \mathbb{R} : x \notin F\}. \end{aligned}$$

Bien évidemment, E et F sont non vides et $E \cup F = \mathbb{R}$, $E \cap F = \varnothing$. Vérifions encore que si $x \in E$ et $y \in F$, alors $x \leq y$. Par l'absurde, si $x > y$, alors x est un majorant de S puisque y l'est, et ainsi $x \in F$, ce qui est contradictoire. Ainsi on a bien $x \leq y$. Les sous-ensembles E et F forment une coupure de $\mathbb{R}$ et il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} x \leq b, &\quad \forall x \in E, \\ b \leq y, &\quad \forall y \in F. \end{aligned}$$

Si $a \in S$, alors $a \leq b$. En effet, par l'absurde, si on avait $a > b$, il existerait $y \in \mathbb{R}$ tel que $a > y > b$ et ainsi y deviendrait un majorant de S, ce qui est contradictoire avec $a \in S$, $a > y$. Ainsi b est un majorant de S. Remarquons encore que si $x < b$, alors $x \in E$ et donc x ne peut pas être un majorant de S. On conclut que

b est le plus petit majorant de S que l'on appelle borne supérieure de S.

Définition 1.3. Soit $S \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ que l'on suppose majoré. On dit que b est la borne supérieure de S si b est le plus petit majorant de S. On note $b = \sup\ S$ (on dit que b est le supremum de S) et on a les propriétés :

1) $x \leq b,\ \forall x \in S$,
2) $\forall \varepsilon > 0,\ ]b - \varepsilon, b] \cap S \neq \varnothing$.

De même si S est minoré, on dit que a est la borne inférieure de S si a est le plus grand minorant de S. On note $a = \inf\ S$ (on dit que a est l'infimum de S) et on a les propriétés :

3) $x \geq a,\ \forall x \in S$,
4) $\forall \varepsilon > 0,\ [a, a + \varepsilon[\ \cap S \neq \varnothing$.

Exemple 1.1. Si $a < b$, alors $b = \sup[a, b] = \sup[a, b[$ et $a = \inf[a, b] = \inf]a, b]$.

Exemple 1.2. Si $S = \{q \in \mathbb{Q} : e < q < \pi\}$ alors $\inf\ S = e$, $\sup\ S = \pi$.

1.2. **Suites de nombres réels.**

Définition 1.4. Une suite de nombres réels est une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout entier n fait correspondre $f(n) \in \mathbb{R}$.

Notation 1.2. Le $n^{\text{ième}}$ nombre $f(n)$ sera noté x_n (ou y_n ou k_n,...).
La suite $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sera notée $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Définition 1.5. Soit une suite de nombres réels $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. On dit que cette suite converge vers x (ou que x est la limite de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$) et on note $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ lorsque n tend vers l'infini si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |x - x_n| < \varepsilon \text{ lorsque } n > N.$$

Exercice : Montrer que la définition (1.5) est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |x - x_n| \leq \varepsilon \text{ lorsque } n \geq N,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |x - x_n| < \varepsilon \text{ lorsque } n \geq N,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |x - x_n| \leq \varepsilon \text{ lorsque } n > N.$$

Exemple 1.3. $x_n = \frac{1}{n+1}, n = 0, 1, 2, \ldots$. On a $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $N > 0$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$.
Ainsi, si $n > N$, on a $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$.

Remarque 1.1. On dit qu'une suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. On dit que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ne converge pas (ou est divergente) s'il n'existe pas un tel x. Ainsi, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ne converge pas si $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}$ on a l'existence de $n > N$ tel que $|x - x_n| \geq \varepsilon$.

Remarque 1.2. De façon générale, si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente, alors la limite est unique. En effet, supposons $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|y - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N$. On a $|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < \varepsilon$ si $n > N$. Comme x, y sont fixés, on a montré que $\forall \varepsilon > 0$, on a $|x - y| < \varepsilon$ ce qui prouve que $x = y$.

Exemple 1.4. $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, \ldots, x_n = (-1)^n$. La suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ ne converge pas. En effet, si $\varepsilon = \frac{1}{3}$, alors l'intervalle $]x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3}[$ a une longueur inférieure à 1 et ne peut pas contenir -1 et $+1$ à la fois et ceci $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi, il n'est pas possible de trouver N satisfaisant $|x - x_n| < \frac{1}{3}$ si $n > N$.

Définition 1.6. Une suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est majorée ou minorée ou bornée si l'ensemble $S = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ est majoré ou minoré ou borné. On parle de majorant ou de minorant de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$.

Exemple 1.5. $x_n = \frac{1}{n+1}, n = 0, 1, 2, \ldots$. La suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est minorée par $a \leq 0$ et majorée par $b \geq 1$.

Exemple 1.6. $x_n = (-1)^n, n = 0, 1, 2, \ldots$. Alors $a \leq -1$ est un minorant de $(x_n)_{n=0}^\infty$ et $b \geq 1$ est un majorant.

Définition 1.7. Une suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est dite croissante si $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$. (décroissante si $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$). Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Théorème 1.1. Soit $(x_n)_{n=0}^\infty$ une suite monotone et bornée. Alors elle converge.

Démonstration. Supposons que la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ soit croissante et bornée. Puisqu'elle est bornée, elle admet un majorant. On sait que l'ensemble $S = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ admet une borne supérieure b. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, on a

$]b-\varepsilon, b] \cap S \neq \varnothing$. Soit donc $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_N \in]b-\varepsilon, b] \cap S$. Puisque la suite est croissante, on a $x_n \geq x_N, \forall n > N$. Comme b est un majorant de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, on a $x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $x_N \leq x_n \leq b, \forall n > N$. Et puisque $|b - x_N| < \varepsilon$, on obtient bien $|b - x_n| < \varepsilon, \forall n > N$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.
Si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est décroissante, on tient un raisonnement analogue. □

Il est facile de voir que toute suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ convergente est une suite bornée. En effet, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ implique que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $|x-x_n| < \varepsilon$, $\forall n > N$. Ainsi, on a $|x_n| \leq |x_n - x| + |x| \leq \varepsilon + |x|$ si $n > N$. Pour $m = 0, 1, 2, \ldots$, on aura $|x_m| \leq \max\limits_{0\leq j\leq N} |x_j| + \varepsilon + |x|$. A l'inverse, une suite bornée n'est pas nécessairement convergente comme le montre la suite définie par $x_n = (-1)^n$.

Propriétés des suites convergentes. Soient $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ convergeant vers x et y respectivement, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Alors :

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soit N tq $\forall n > N$, on ait $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a $|x+y-(x_n+y_n)| \leq |x-x_n| + |y-y_n| < \varepsilon$ si $n > N$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$. En effet, les suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ sont bornées et on a l'existence de $C > 0$ telle que $|x_n| \leq C$, $|y_n| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit N tel que $\forall n > N$: $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2C}$, $|y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2C}$. On a alors $|xy - x_n y_n| \leq |x(y - y_n)| + |y_n(x - x_n)| \leq |x|\ |y - y_n| + |y_n|$ $|x - x_n| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$ si $n > N$.

(3) Si $x_n \neq 0$ $\forall n$ et si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$. En effet, il existe N_1 tq $\forall n > N_1$, on a $|x - x_n| < \frac{|x|}{2}$. Ainsi $|x| \leq |x - x_n| + |x_n| < \frac{|x|}{2} + |x_n|$ et donc $|x_n| > \frac{|x|}{2}$ si $n > N_1$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit maintenant $N_2 \geq N_1$

tel que $\forall n > N_2$ on ait $|x - x_n| < \frac{\varepsilon |x|^2}{2}$. Pour $n > N_2$ on aura $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_n}| = |\frac{x_n - x}{x x_n}| = \frac{|x - x_n|}{|x|\ |x_n|} \le \frac{|x-x_n|}{\frac{|x|^2}{2}} < \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$.

<u>Corollaire de (2) et (3)</u>. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{y}{x}$ si $x_n \ne 0\ \forall n$ et $x \ne 0$.

(4) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$ (linéarité de la limite d'une suite).

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$. En effet $|\ |x| - |x_n|\ | \le |x - x_n|$.

<u>Quelques exemples</u>.

(1) Soit la suite donnée par récurrence : $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ et $x_0 = 2$. Cette suite est convergente. En effet, en supposant tout d'abord qu'elle converge vers x, on trouve $x = 2 + \frac{1}{x}$, i.e. $x = 1 + \sqrt{2}$. Montrons donc que $x = 1 + \sqrt{2}$ est la limite de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.
$|x_n - x| = |2 + \frac{1}{x_{n-1}} - (2 + \frac{1}{x})| = |\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x}| = \frac{|x_{n-1} - x|}{|x|\ |x_{n-1}|} \le \frac{|x_{n-1}-x|}{4}$ car $x_n \ge 2\ \forall n$ et $x > 2$. En utilisant cette inégalité récursivement, on obtient

$$|x_n - x| \le \frac{|x_0 - x|}{4^n} = \frac{-2 + 1 + \sqrt{2}}{4^n} \le \frac{1}{4^n} \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

(Pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre N tq $\frac{1}{4^N} < \varepsilon$).

(2) Soit p et $q \in \mathbb{N}^*$ et soit $x_n = a_0 + a_1 n + \ldots + a_p n^p$ avec $a_p \ne 0$ et $y_n = b_0 + b_1 n + \ldots + b_q n^q$ avec $b_q \ne 0$. On suppose que $y_n \ne 0\ \forall n$.

<u>Exercices</u> : montrer
– si $p < q$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$

– si $p = q$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a_p}{b_q}$

– si $p > q$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ n'existe pas, la suite $(\frac{x_n}{y_n})_{n=0}^{\infty}$ diverge !

(3) Si $a > 0$ et si $x_n = \sqrt[n]{a}$, si $n \geq 1$ avec x_0 quelconque, on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ (Exercice).

(4) $x_n = \frac{2^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (ici $2^0 = 1, 0! = 1$). On a $x_n = \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}^{n\ fois}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$ $\leq 9\ \frac{2^n}{3^n}$ si $n \geq 3$ et ainsi $0 \leq x_n \leq 9(\frac{2}{3})^n$. Si $\varepsilon > 0$, il existe N tq $n > N$ implique $9(\frac{2}{3})^n < \varepsilon$ et donc $|x_n| < \varepsilon\ \forall n > N$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Remarque 1.3. Si $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ sont telles que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$ et si $y_n \leq x_n \leq z_n$ pour $n \geq N$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (règle des deux gendarmes).

Règle de d'Alembert (Jean Le Rond dit d'Alembert (1717-1783), philosophe et mathématicien).
Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $x_n \neq 0\ \forall n$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \rho$. Si $\rho < 1$ alors la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers zéro et si $\rho > 1$, elle diverge.

Démonstration. Supposons $\rho < 1$. Alors $0 < \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2} < 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1+\rho}{2})^n = 0$. Puisque $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}|$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| \leq \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2}$ et donc $|x_{n+1}| \leq \frac{1+\rho}{2}|x_n|$. Ainsi, si $n \geq N_1$ on a de façon récursive :

$$|x_n| \leq \left(\frac{1+\rho}{2}\right) |x_{n-1}| \leq \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^2 |x_{n-2}| \leq \ldots \leq \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{(n-N_1)} |x_{N_1}|$$

et donc $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$. Puisque $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$, on obtient par la règle des deux gendarmes $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Supposons maintenant $\rho > 1$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\rho \geq 1 + \delta$ et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \rho$, on a l'existence de N_2 tel que si $n \geq N_2$ alors $|x_{n+1}| \geq (\rho - \frac{\delta}{2})|x_n|$. Ainsi $|x_n| \geq (\rho - \frac{\delta}{2})|x_{n-1}| \geq \ldots \geq (\rho - \frac{\delta}{2})^{n-N_2}|x_{N_2}|$,

si $n \geq N_2$. Mais $\rho - \frac{\delta}{2} \geq 1 + \frac{\delta}{2}$ et donc

$$|x_n| \geq (1 + \frac{\delta}{2})^{n-N_2} |x_{N_2}|,$$

ce qui prouve que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ n'est pas bornée, donc non convergente. $\square$

Exemple : $x_n = \frac{2^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \dfrac{n!}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$, ce qui montre par la règle de d'Alembert que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Remarque 1.4. Si $\rho = 1$ on ne peut pas conclure. En effet $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $x_n = \frac{1}{1+n}$ tend vers zéro alors que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+n}{2+n} \to 1$ si $n \to \infty$. Par contre $x_n = (n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$ diverge alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

Limite supérieure et limite inférieure.

Définition 1.8. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite bornée et pour tout $n \geq 0$ posons $y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ (= borne supérieure de $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$). Ainsi $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite décroissante bornée et d'après le théorème 1.1 elle converge. On pose $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ qui est la limite supérieure de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ et on note $y = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.
De même $z = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ si $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ avec $z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$.

Théorème 1.2. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite bornée. Alors $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente si et seulement si $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Démonstration.

1° Supposons que $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ et posons $y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ et $z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n \leq x_n \leq y_n$ et comme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ par le critère des deux gendarmes. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

2° Supposons $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et posons $y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$, $z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, $z = \lim_{n\to\infty} z_n$. On veut montrer que $x = y = z$. Puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N$ on a

$$|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad |y - y_n| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

La suite $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ est décroissante et converge vers y. En outre, de la définition de y_N, il existe $k \geq N$ tel que $|x_k - y_N| < \frac{\varepsilon}{4}$. D'où $|x_k - y| \leq |x_k - y_N| + |y_N - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ et par suite $|x - y| \leq |x - x_k| + |x_k - y| < \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0$ on a $|x - y| < \varepsilon$ ce qui prouve que $x = y$. On fait de même pour montrer que $x = z$.

□

1.3. **Sous-suites de nombres réels.**

Définition 1.9. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite donnée. On appelle sous-suite de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ toute suite obtenue en supprimant dans la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ certains de ses termes (en nombre fini ou infini). Ainsi, soit $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ une suite strictement croissante d'entiers non-négatifs, la suite $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ est une sous-suite (ou suite partielle) de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Il est facile de montrer que toute sous-suite d'une suite convergente est elle-même convergente. La question est maintenant la suivante : est-ce qu'une suite divergente peut contenir des sous-suites convergentes comme par exemple la suite $x_n = (-1)^n$? La réponse est donnée par le

Théorème de Bolzano [2]-Weierstrass [3] (1874). Toute suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bornée contient au moins une sous-suite $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ convergente.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite bornée et $S = \{x \in \mathbb{R} : x_n > x$ pour un nombre infini d'entiers $n\}$. On pose $\lambda = \sup\ S$ et soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de λ on a $\lambda + \varepsilon \notin S$ et donc il existe seulement un nombre fini de x_n pour lesquels $x_n > \lambda + \varepsilon$. Par contre, il existe $x \in S$ tel $x > \lambda - \varepsilon$ et ainsi il existe un nombre infini de x_n qui satisfont $x_n > \lambda - \varepsilon$. Conclusion : il existe une infinité de x_n dans l'intervalle $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$. On choisit $x_{n_1} \in]\lambda - 1, \lambda + 1[$, $x_{n_2} \in]\lambda - \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}[$ avec $n_2 > n_1$, $x_{n_3} \in]\lambda - \frac{1}{3}, \lambda + \frac{1}{3}[$ avec $n_3 > n_2, \ldots$ etc, $\ldots$ $x_{n_k} \in]\lambda - \frac{1}{k}, \lambda + \frac{1}{k}[$ avec $n_k > n_{k-1} > n_{k-2} > \ldots > n_1$. On obtient ainsi $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = \lambda$.

$\square$

Définition 1.10. On dira que λ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ s'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers λ.

Remarque 1.5. La démonstration ci-dessus exhibe le plus grand point d'accumulation de la suite. En fait on obtient $\lambda = \limsup\limits_{n \to \infty} x_n$.

Corollaire du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit une suite bornée $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ telle que toutes les sous-suites $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ convergentes que l'on peut en extraire aient même limite c. Alors on a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

Démonstration. Si la suite converge, alors on a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

Supposons maintenant par l'absurde que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ diverge. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ telle que $|x_{n_k} - c| > \varepsilon$, $\forall k$. Cette sous-suite étant bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une

2. Bernard Bolzano (1781-1848)
3. Karl Weierstrass (1815-1897)

sous-suite $(x_{n_{k_\ell}})_{\ell=0}^\infty$ de la suite $(x_{n_k})_{k=0}^\infty$ qui converge. Cette sous-suite $(x_{n_{k_\ell}})_{\ell=0}^\infty$ est une sous-suite de $(x_n)_{n=0}^\infty$ qui ne converge pas vers c, ce qui est contradictoire avec nos hypothèses. $\square$

1.4. **Suites de Cauchy.**

(Augustin-Louis Cauchy (1789-1857))

Définition 1.11. La suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_m| < \varepsilon$, $\forall n, m > N$.

Théorème 1.3. (Théorème de Cauchy) La suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Remarque 1.6. Le théorème 1.3 permet de donner un critère de convergence sans donner ni connaître la limite.

Démonstration.

1) Démontrons que si $(x_n)_{n=0}^\infty$ converge alors $(x_n)_{n=0}^\infty$ est une suite de Cauchy. Si $(x_n)_{n=0}^\infty$ converge vers x et si $\varepsilon > 0$ est donné, alors il existe N tel que $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N$. On a si $m, n > N$: $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon$.

2) Démontrons que si $(x_n)_{n=0}^\infty$ est une suite de Cauchy alors $(x_n)_{n=0}^\infty$ converge. Commençons par montrer qu'une suite de Cauchy est bornée. En effet, en posant $\varepsilon = 1$ il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_m| < 1$ si $n, m > r$. Lorsque $n > r$ on a $|x_n - x_{r+1}| < 1$ et donc $|x_n| \leq 1 + |x_{r+1}|$ si $n > r$. On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|x_n| \leq \max(1 + |x_{r+1}|, |x_0|, |x_1|, \ldots, |x_r|)$ et ainsi $(x_n)_{n=0}^\infty$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k=0}^\infty$ qui converge

vers c ; i.e. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit N tel que pour tout $p, q > N$ on ait $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit maintenant k suffisamment grand fixé tel que $n_k > N$ et $|c - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$. On aura alors pour $n > N$

$$|c - x_n| \leq |c - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| < \varepsilon$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

$\square$

Exemple 1.7. On définit $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \sin(x_n))$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. On obtient ainsi

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(\sin(x_n) - \sin(x_{n-1})) = \sin\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)\cos\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right).$$

Puisque $|\sin(x)| \leq |x|$ et $|\cos(x)| \leq 1$, on obtient

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2} \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Ainsi $|x_2 - x_1| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{2}$, $|x_3 - x_2| \leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2^2}|x_1 - x_0|, \ldots$ et $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0| = \frac{1}{2^{n+1}}$, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. On conclut que $\forall m > n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-n-1}}}_{\leq 2}\right) \leq \frac{1}{2^n} \to 0 \qquad \text{si } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et soit N tel que $\forall n > N$ on ait $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Alors si $n, m > N$ on obtient $|x_m - x_n| < \varepsilon$ ce qui prouve que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Ainsi elle converge. Si $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ on aura $c = \frac{1}{2}(1 + \sin(c))$.

1.5. **Suites de nombres et virgule flottante.**

Le calcul en nombres décimaux sur un ordinateur est nécessairement exécuté avec un nombre fini de chiffres. Par exemple, le nombre rationnel $c = \frac{1}{3}$ en décimal devient $\widetilde{c} = 0,3333333$.

Définition 1.12. Nous dirons qu'un nombre $\widetilde{c}$ est donné avec M chiffres significatifs (en représentation décimale) s'il est donné avec M chiffres comptés à partir du premier chiffre non nul.

Exemple 1.8. Les nombres suivants sont donnés avec 4 chiffres significatifs :

$$0,3333 \longrightarrow 0,3333 \cdot 10^0$$
$$2,434 \longrightarrow 0,2434 \cdot 10$$
$$0,003256 \longrightarrow 0,3256 \cdot 10^{-2}$$

Définition 1.13. Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $\widetilde{c}$ sa valeur approchée par un calculateur travaillant en virgules flottantes avec M chiffres significatifs en représentation décimale. Alors la quantité $|c - \widetilde{c}|$ est appelée erreur d'arrondis sur c.

Les erreurs d'arrondis jouent un rôle capital lorsqu'on calcule au moyen d'une machine. Par exemple si on veut additionner les deux nombres réels $c_1 = \frac{1}{3}$ et $c_2 = \frac{1}{126}$ avec un calculateur qui travaille avec 4 chiffres significatifs, le calcul devient :

$$c_1 = \frac{1}{3} \longrightarrow \widetilde{c}_1 = 0,3333$$
$$c_2 = \frac{1}{126} \longrightarrow \widetilde{c}_2 = 0,007936 = 0,7936 \cdot 10^{-2}$$

et $\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2 = 0,3333+0,0079 = 0,3412$. Le calcul avec 8 chiffres significatifs donne $0,34126984$. Si $c_3 = \frac{83}{126}$, on aura, avec un calculateur à 4 chiffres significatifs, $\widetilde{c}_3 = 0,6587$ et $(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)+\widetilde{c}_3 = 0,9999$ alors que $c_1+c_2+c_3 = 1$.

Remarque 1.7.

1) Si, avec 4 chiffres significatifs, $c_4 = 0,1000 \cdot 10^{-4}$ on a $\widetilde{c}_4 = c_4$ et $\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_4 = 0,3333 = \widetilde{c}_1$. On dira que la précision relative d'un calculateur est $\eta = 10^{-M}$ où M est le nombre de chiffres significatifs que peut prendre le calculateur. Ainsi si deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $\frac{a}{b} \simeq 10^{-M}$, le calcul $a+b$ n'aura pas de sens avec ce calculateur. Si, au contraire, $\frac{a}{b} \simeq 10^{-p}$ avec $p < M$, en exécutant $a+b$ avec ce calculateur on va perdre environ $M-p$ décimales sur le résultat de l'addition.

2) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, on sait que l'addition est associative, i.e. $(a+b)+c = a+(b+c)$. Il n'en est pas de même en principe sur un calculateur. On peut avoir $(\widetilde{a}+\widetilde{b})+\widetilde{c} \neq \widetilde{a}+(\widetilde{b}+\widetilde{c})$.

<u>Exemple avec $M = 2$</u> : $\widetilde{a} = 0,33$, $\widetilde{b} = 0,0026$, $\widetilde{c} = 0,0086$.

- $\widetilde{a}+\widetilde{b} = 0,33$, $(\widetilde{a}+\widetilde{b})+\widetilde{c} = 0,33$;
- $\widetilde{b}+\widetilde{c} = 0,011$, $\widetilde{a}+(\widetilde{b}+\widetilde{c}) = 0,34$.

Qu'en est-il alors avec les suites ? Prenons la suite suivante :

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{si } n = 1, 2, \ldots, \text{ et } x_0 = 0,$$

et posons-nous la question de sa convergence.

Propriété 1.2. La suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante et bornée, donc convergente.

Démonstration. Rappelons la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)a^{n-k}b^k$$

où $c(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial qui est en fait le nombre de combinaisons de n éléments pris par k. En appliquant cette formule avec $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, on vérifie facilement que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

et par suite $(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (0! = 1)$.
Puisque $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},\ k \geq 1$ et que $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \leq 2$, on obtient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3,$$

ce qui prouve que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est bornée.

Montrons que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante. En reprenant l'expression de $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ développée par le binôme de Newton, on vérifie que

$$x_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \\ + \dots \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ \dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

et ainsi $x_n \leq x_{n+1}$. On conclut que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante et bornée ; par le théorème 1.1 elle est convergente. $\square$

La limite de $(1+\frac{1}{n})^n$ est un nombre important en analyse. On pose

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

On a $e = 2,71828\ldots$.

On peut prendre un calculateur et exécuter, pour un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ donné, le calcul de $(1+\frac{1}{n})^n$. En prenant $n = 10$ on obtient $2,5937\ldots$. En prenant $n = 50$ on obtient $2,6915\ldots$ et, avec $n = 1000$ on obtient $2,7169\ldots$, avec $n = 10^6$ on obtient $2,71828\ldots$. On constate que cette suite converge très lentement vers e.

Remarque 1.8. Si $n = 10^8$ et si le calculateur a une précision relative de $10^{-8}(M = 8)$ alors $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ donnera pour résultat $\widetilde{x}_n = 1,0000000$!

Définition 1.14. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite convergente et soit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. On dira que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers x à l'ordre $\mathrm{O}(\frac{1}{n})^\alpha$ lorsque n tend vers ∞ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$, s'il existe une constante C et un entier N tel que $|x - x_n| \leq C(\frac{1}{n})^\alpha$, $\forall n > N$. On dit encore que $|x - x_n|$ est un grand O de $(\frac{1}{n})^\alpha$ si n tend vers l'infini.

Exemple 1.9. Les deux suites $x_n = \frac{1}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $y_n = \frac{1}{n^2+1}$, $n = 0, 1, \ldots$ tendent toutes les deux vers zéro. On a

$$|0 - x_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |0 - y_n| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, la deuxième suite $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ converge plus vite vers zéro ($\mathrm{O}(\frac{1}{n})^2$) que la première qui est d'ordre $\mathrm{O}(\frac{1}{n})$ lorsque n tend vers ∞.

2. Séries numériques

2.1. Définitions.

Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels et soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ la somme de ses $(n+1)$ premiers termes. On dira que S_n est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

- Si $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers c lorsque n tend vers l'infini, on dit que la série converge, que c est la somme de la série et on note $c = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$.
- Si $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ est divergente, on dit que la série diverge.
- Si la suite $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini (i.e. $\forall C > 0$, il existe N tel que $S_n > C$, $\forall n > N$), alors la série diverge mais on note quand même $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = +\infty$.
- Si la suite $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini (i.e. $\forall C < 0$, il existe N tel que $S_n < C$, $\forall n > N$), alors la série diverge mais on note quand même $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = -\infty$.

Définition 2.1. On dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est <u>absolument convergente</u> si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ est convergente.

Théorème 2.1. Une série absolument convergente est convergente.

Remarque 2.1. On dit qu'une condition suffisante pour que la série converge est qu'elle soit absolument convergente.

Démonstration. Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ converge, c'est-à-dire la suite $C_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ est convergente. Si $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, on a

$|S_m - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} x_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k|$ lorsque $m > n$.
Puisque $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ converge, alors $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy et donc $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ l'est aussi. Ainsi, $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente. $\square$

Théorème 2.2. Une série convergente a nécessairement son terme général x_n qui tend vers zéro lorsque n tend vers ∞, i.e. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Remarque 2.2. On dit qu'une condition nécessaire pour que la série converge est que son terme général tende vers zéro si n tend vers ∞.

Démonstration. Supposons $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ convergente, i.e. $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $n = 0, 1, \ldots$ est une suite convergente. Alors $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $|S_n - S_m| < \varepsilon$, $\forall n, m > N$. Ainsi $|S_{n+1} - S_n| = |x_{n+1}| < \varepsilon$ si $n > N$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

2.2. **La série harmonique.**

Posons $x_0 = 0$ et $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n = 1, 2, \ldots$. On a $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ qui est dite série harmonique.

Théorème 2.3. La série harmonique est divergente ; on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Démonstration. Montrons que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n = 1, 2, \ldots$ n'est pas une suite de Cauchy. On calcule $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ ce qui est en contradiction avec la définition d'une suite de Cauchy. Comme $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite croissante et qu'elle diverge, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. $\square$

Remarque 2.3. Soit n un entier positif et calculons avec un ordinateur la quantité $(\ldots((((1+\frac{1}{2})+\frac{1}{3})+\frac{1}{4})+\ldots)+\frac{1}{n})$ que nous définissons comme $\widetilde{S}_n$. La série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ étant divergente avec $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$, alors pour M entier positif, il existe N tel que $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\geq 10^M$. On voit alors d'emblée que si le calculateur exécute les calculs avec M chiffres significatifs nous aurons $\widetilde{S}_n=\widetilde{S}_N$ pour tout $n>N$. Cet exemple montre que si on veut vraiment calculer $\widetilde{S}_n$, il vaut mieux procéder ainsi $(\ldots((((\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1})+\frac{1}{n-2})+\frac{1}{n-3})+\ldots)+1)$ pour éviter les erreurs d'arrondis trop grandes.

2.3. **Critères de convergence.**

Le théorème de Cauchy du chapitre 1 implique immédiatement :

Théorème 2.4. La série $\sum_{k=0}^{\infty}x_k$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$ il existe N tel que $\forall n>N$, $\forall p\geq 0$ on a $|x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{n+p}|<\varepsilon$.

En utilisant le théorème 2.4, on montre immédiatement :

Théorème 2.5. (Critère de comparaison) Considérons les deux séries $\sum_{k=0}^{\infty}x_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty}y_k$ dont les termes généraux sont x_k et y_k. Alors

- si $0\leq x_k\leq y_k$, $\forall k=0,1,\ldots$ et si $\sum_{k=0}^{\infty}y_k$ converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty}x_k$ converge aussi ;
- si $0\leq x_k\leq y_k$, $\forall k=0,1,\ldots$ et si $\sum_{k=0}^{\infty}x_k$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{\infty}y_k$ diverge aussi.

Exemple 2.1. Considérons la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ où p est un entier ≥ 2. Pour $p=2$, on observe que

$$\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\quad \text{si } k\geq 2.$$

Ainsi pour $N \geq 2$ on a

$$\begin{aligned} 1+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k^2} &\leq 1+\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \\ &= 1+1-\frac{1}{N}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 2. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ est convergente et ainsi pour $p > 2$ on obtient, puisque $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$, la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$.

Théorème 2.6. (Critère de d'Alembert).

Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ existe. Alors

- si $\rho < 1$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ converge absolument ;
- si $\rho > 1$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ diverge.

Démonstration. Supposons $\rho < 1$. Alors il existe $N > 0$ tel que $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq \frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}$, $\forall n \geq N$. Ainsi $|x_{n+1}| \leq (\frac{\rho+1}{2})|x_n|$ si $n \geq N$ et par suite $|x_{n+m}| \leq (\frac{\rho+1}{2})^m|x_n|$, $\forall n \geq N$ et $m \geq 0$. On obtient en posant $r = \frac{\rho+1}{2}$

$$\sum_{j=n}^{n+m}|x_j| = |x_n| + |x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+m}| \leq (1+r+r^2+\ldots+r^m)|x_n|.$$

Puisque $r \in]0,1[$, on a $1+r+r^2+\ldots+r^m = \frac{1-r^{m+1}}{1-r} \leq \frac{1}{1-r}$.
Ainsi pour $n \geq N$ et $m \geq 0$ on a $\sum_{j=n}^{n+m}|x_j| \leq \frac{1}{1-r}|x_n|$. Comme $\rho < 1$, on a, par la règle de d'Alembert du chapitre 1, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et ainsi $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\widetilde{N} \geq N$ tel que $|x_n| < (1-r)\varepsilon$, si $n > \widetilde{N}$. On obtient ainsi pour $n \geq \widetilde{N}$ et $m \geq 0$: $\sum_{j=n}^{n+m}|x_j| < \varepsilon$ ce qui prouve que $\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|$ est convergente en utilisant le théorème 2.4.
Si maintenant $\rho > 1$, la règle de d'Alembert nous dit que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite divergente et donc, par le théorème 2.2, la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est divergente. □

Remarque 2.4. La série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ est divergente et on a $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$. Par contre, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ est convergente et on a aussi $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n^2}{1+(n+1)^2} = 1$. Ainsi, si $\rho = 1$ on ne peut rien dire !

Théorème 2.7. (Critère de la limite supérieure).
Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de $\mathbb{R}$ et $L = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$. Alors, si $L < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ converge absolument ; si $L > 1$ la série diverge.

Démonstration. Supposons que $L < 1$; alors il existe $N > 0$ tel que $\forall n > N$

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1+L}{2} < 1.$$

En posant $r = \frac{1+L}{2} < 1$ on obtient $|x_n| \leq r^n$ et ainsi si $n > N, m \geq 0$:

$$\sum_{j=n}^{n+m} |x_j| \leq r^n + r^{n+1} + \ldots + r^{m+n} = r^n(1 + r + r^2 + \ldots r^m) \leq r^n \frac{1 - r^{m+1}}{1-r}$$

et donc pour $n > N, m \geq 0$: $\sum_{j=n}^{n+m} |x_j| \leq \frac{r^n}{1-r}$. Le critère de Cauchy nous permet de conclure.
Si $L > 1$, alors on n'a pas $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et donc la série diverge. $\square$

Remarque 2.5. Comme dans le cas du critère de d'Alembert lorsque $L = 1$ on ne peut rien dire.

Somme de deux séries convergentes.
Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ deux séries convergentes vers x et y respectivement, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y$.
Alors on vérifie que $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

2.4. **Séries alternées.**

Théorème 2.8. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. On suppose qu'il existe un entier $p > 0$ tel que l'on ait lorsque $n \geq p$:

$$|x_{n+1}| \leq |x_n|$$

et

$$x_{n+1}\, x_n \leq 0 \qquad (x_n \text{ a le signe opposé de } x_{n+1}).$$

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est convergente.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{n+1}\, x_n \leq 0$ et $|x_{n+1}| \leq |x_n|$, $\forall n \geq p$. Si $m \geq 1$ et si $n \geq p$ on a, si $x_n \geq 0$:

- $$\overbrace{x_n + x_{n+1}}^{\geq 0} + \underbrace{x_{n+2} + \ldots}_{} + \ldots \quad\text{i.e.}\quad x_n + \underbrace{x_{n+1} + x_{n+2}}_{\leq 0} + \ldots + \underbrace{x_{n+m-1} + \overbrace{x_{n+m}}^{\geq 0}}_{\leq 0} \leq x_n,$$

  si m est pair ;

- $$\overbrace{x_n + x_{n+1}}^{\geq 0} + x_{n+2} + \ldots + \overbrace{x_{n+m-1} + x_{n+m}}^{\geq 0} \leq x_n, \qquad x_n + \underbrace{x_{n+1} + x_{n+2}}_{\leq 0} + \underbrace{\ldots + x_{n+m-1}}_{\leq 0} + \underbrace{x_{n+m}}_{\leq 0} \leq x_n,$$

  si m est impair.

Donc si $x_n \geq 0$ on a $0 \leq x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m} \leq x_n$.
De la même manière, on montre que si $x_n \leq 0$, on a $x_n \leq x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m} \leq 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, on a nécessairement pour $n \geq p$ et $m \geq 1$: $|\sum_{j=n}^{n+m} x_j| \leq |x_n|$ et à nouveau, en utilisant le critère de Cauchy, on obtient la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$. $\square$

Exemple 2.2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$. On a bien une série alternée qui répond aux hypothèses du théorème 2.8. On en déduit que la série harmonique alternée est convergente.

2.5. **Séries à termes de signe constant.**

Théorème 2.9. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite dont le signe reste constant, i.e. $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ou $x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est convergente. Alors si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$, ce qui signifie que l'on peut permuter les termes de la série sans changer la limite.

Démonstration. Supposons que $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge vers x. Si $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, la suite S_n est croissante et bornée (puisqu'elle converge). Posons $x = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$. On a $x = \sup\{S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$.
Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection et si $T_n = \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)}$, on vérifie facilement que la suite $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante, bornée et donc convergente. Soit donc $y = \lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sup\{T_0, T_1, T_2, \ldots, \}$. Il reste à montrer que $x = y$.
Si on pose $r_n = \max\{\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$, on a bien évidemment $\{0, 1, 2, \ldots, r_n\} \supset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. Ainsi $T_n \leq S_{r_n} \leq x$, ce qui prouve que $y \leq x$. De même, il existe $m_n \in \mathbb{N}$ tel que $\{0, 1, 2 \ldots, n\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(m_n)\}$, ce qui montre que $S_n \leq T_{m_n} \leq y$, ce qui prouve que $x \leq y$. Il en résulte que $x = y$.
Si $x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, il suffit de poser $y_n = -x_n$ et d'utiliser ce qui précède pour obtenir la conclusion du théorème 2.9. □

2.6. **Séries absolument convergentes.**

Théorème 2.10. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ une série numérique absolument convergente. Alors si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$, ce qui signifie que l'on peut permuter les termes de la série sans changer la limite.

Démonstration. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $a^+ = a$ si $a \geq 0$ et $a^+ = 0$ si $a \leq 0$. De même, on pose $a^- = -a$ si $a \leq 0$ et $a^- = 0$ si $a \geq 0$. Ainsi, on peut écrire $a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$, $a^+, a^- \geq 0$.

Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge absolument. On a ainsi la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$.
En remarquant que $x_n^+ \leq |x_n|$ et que $S_n^+ = \sum_{k=0}^{n} x_k^+$ est une suite croissante, bornée, donc convergente, on a l'existence de $x^+ \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^+ = x^+.$$

De même, puisque $x_n^- \leq |x_n|$, $S_n^- = \sum_{k=0}^{n} x_k^-$ est aussi croissante, bornée, donc convergente et on a l'existence de x^- tel que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^- = x^-$.
En utilisant la propriété de sommation de séries convergentes, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} x_n^- = x^+ - x^-.$$

En utilisant la propriété des séries à signe constant, on obtient bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

□

Remarque 2.6. Lorsque la série n'est pas absolument convergente, on ne peut pas procéder à n'importe quelle permutation de ses termes sans en changer sa limite. Par exemple, la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente mais non absolument convergente. On peut permuter des termes pour la rendre divergente. Il suffit de créer des "séquences" dans lesquelles on somme un grand nombre de termes positifs, par exemple avant d'introduire un terme négatif.

Exemple 2.3.

$$-1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4}} - \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}}_{\geq \frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \underbrace{\frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{28}}_{\geq \frac{1}{4}} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

(On a $\sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{2k} \geq \dfrac{n+1}{4n} \geq \dfrac{1}{4}$ et dans la série ci-dessus on regroupe suffisamment de termes positifs ($n+1$ termes) avant d'introduire un terme négatif).

3. Fonctions réelles d'une variable réelle

3.1. Généralités.

Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide de nombres réels. A un nombre $x \in D$ on fait correspondre un nombre $y \in \mathbb{R}$ (et un seul) et on dit que cette correspondance est une application définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou une fonction définie sur D et à valeurs réelles. Dans la suite, on notera cette application par f et sa valeur y en x par $f(x)$:

$$f : \underset{x}{D} \subset \mathbb{R} \underset{\rightsquigarrow}{\rightarrow} \underset{f(x)=y}{\mathbb{R}}.$$

Exemple 3.1. $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Exemple 3.2. $D = \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemple 3.3. $D = \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

On a les définitions suivantes (qui devraient être des rappels !) :

- Image de f notée $\mathcal{R}(f) \underset{déf}{=} \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ tel que } y = f(x)\}$;
- $D =$ domaine de définition de f ;
- x est une variable indépendante, f est une variable dépendante ;
- la représentation graphique de f est reportée dans le plan euclidien comme suit :
  le graphe de f est défini par $\{(x, f(x)) : x \in D\} \underset{déf}{=} G(f)$.

- $f : D \to \mathcal{R}(f)$ est surjective.
  Si ($x_1, x_2 \in D$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$) implique ($x_1 = x_2$), on dit que f est injective.

- Si $A \subset D$, on note $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A$ tel que $y = f(x)\}$ = image de A par f. Si $B \subset \mathcal{R}(f)$, on note $f^{-1}(B) = \{x \in D : f(x) \in B\}$ = image réciproque de B par f.

- Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on dit que $f = g$ si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D$; $f \geq g$ si $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in D$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on dit que $h = \alpha f + \beta g$ si $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, $\forall x \in D$; $\ell = f \cdot g$ si $\ell(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in D$. Si $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$, on définit $k = f/g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in D$.

- Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et si $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\mathcal{R}(f) \subset E$ on définit la composée de g par f notée $g \circ f$ par
$$g \circ f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tel que } (g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \forall x \in D.$$

- Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, la valeur absolue $|f|$ de f est définie par $|f| : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $|f|(x) = |f(x)|$, $\forall x \in D$.

Définition 3.1. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $A \subset D$, $A \neq \varnothing$. On dit que f est majorée sur A ou bornée supérieurement si l'ensemble $f(A)$ est majoré. Elle est minorée sur A ou bornée inférieurement si l'ensemble $f(A)$ est minoré. On vérifie donc que f est majorée sur A (resp. minorée sur A) si et seulement s'il existe une constante M (resp. une constante m) telle que $f(x) \leq M$, $\forall x \in A$ (resp. $f(x) \geq m$, $\forall x \in A$). Si f est majorée sur A et minorée sur A, on dit que f est bornée sur A.

Dans ce cas, on définit

- $\sup\limits_{x \in A} f(x) \underset{déf}{=} \sup \{f(x) : x \in A\}$ appelé supremum ou borne supérieure de f sur A ;

- $\inf\limits_{x \in A} f(x) = \inf \{f(x) : x \in A\}$ appelé infimum ou borne inférieure de f sur A.

Remarque 3.1. Si f n'est pas majorée sur A, on notera souvent $\sup\limits_{x \in A} f(x) = +\infty$. Si f n'est pas minorée sur A, on notera $\inf\limits_{x \in A} f(x) = -\infty$.

Exemple 3.4. $D = \mathbb{R} - \{0\}$, $A =]0, \infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in D$. On aura $\sup\limits_{x \in A} f(x) = +\infty$, $\inf\limits_{x \in A} f(x) = 0$.

Définition 3.2. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, $A \subset D$, $A \neq \varnothing$ et supposons que f soit majorée sur A (resp. minorée sur A). S'il existe $\bar{x} \in A$ tel que $f(\bar{x}) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ (resp. $f(\bar{x}) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$), on dit que f restreinte à A prend son maximum sur A en $x = \bar{x}$ (resp. prend son minimum sur A). On note $f(\bar{x}) = \max\limits_{x \in A} f(x)$ (resp. $f(\bar{x}) = \min\limits_{x \in A} f(x)$). Si $A = D$, on dit tout simplement que f prend son maximum sur D (resp. son minimum sur D). On dit aussi que f atteint son maximum en $x = \bar{x}$ (resp. son minimum en $x = \bar{x}$).

Définition 3.3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in D$. On dit que f admet un maximum local au point x_0 (resp. minimum local) s'il existe $\delta > 0$ tel que f restreinte à $A =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$ prend son maximum sur A (resp. minimum) en $x = x_0$. Un extremum local en $x = x_0$ est soit un maximum local soit un minimum local.

Définition 3.4. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, $A \subset D$, $A \neq \varnothing$.

- f est dite croissante sur A si $\forall x_1, x_2 \in A$ avec $x_1 > x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- f est dite strictement croissante sur A si $\forall x_1, x_2 \in A$ avec $x_1 > x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$.

- f est dite décroissante sur A si $\forall x_1, x_2 \in A$ avec $x_1 > x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.

- f est dite strictement décroissante sur A si $\forall x_1, x_2 \in A$ avec $x_1 > x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$.

- f est dite monotone sur A (resp. strictement monotone sur A) si elle est croissante sur A ou décroissante sur A (resp. strictement croissante sur A ou strictement décroissante sur A).

- Si D est tel que $\forall x \in D$ on a $-x \in D$, on dit que :
  f est paire si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D$,
  f est impaire si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in D$.

  Remarque 3.2. Si D est tel que $\forall x \in D$, on a $-x \in D$ et si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors en posant
  $$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \qquad x \in D,$$
  on constate que $f = g + h$ et g est paire alors que h est impaire. Ainsi, par exemple, toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- Si $D = \mathbb{R}$, on dit que f est périodique s'il existe $P \neq 0$ tel que $f(x) = f(x + P)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, P est appelé une période. On vérifie que nP ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$) est aussi une période.

- $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $x \in D$ est appelée partie positive de f, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$, $x \in D$ est appelée partie négative de f. On vérifie que f^+ et f^- sont ≥ 0 (ici 0 est la fonction identiquement nulle) et que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, $x \in D$.

- Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction et si $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une autre fonction qui vérifie $E \supset D$ et $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D$, on dit que g est un prolongement de f à E. Dans ce cas, on dit aussi que f est la restriction de g à D.

Définition 3.5. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D \cup \{x_0\}$.

Exemple 3.5. $D = \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $x \in D$, ou, autre exemple, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D$. Posons $x_0 = 0$ et soit $\delta > 0$ quelconque. On a bien $]-\delta, +\delta[\subset \mathbb{R}$. Ainsi f est définie au voisinage de $x_0 = 0$ dans les 2 cas ! D'autre part ces deux fonctions sont définies au voisinage de n'importe quel point $x_0 \neq 0$. Ainsi, ces deux fonctions sont définies au voisinage de n'importe quel point de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.6. $D = \mathbb{Q}$, $f(x) = x$, $x \in D$. Ici f n'est définie au voisinage d'aucun point !

Définition 3.6. Soit $D \subset \mathbb{R}, D \neq \varnothing$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point adhérent de D s'il existe une suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.

Remarque 3.3. Si f est définie au voisinage de x_0, alors x_0 n'est pas nécessairement dans D, mais x_0 est nécessairement un point adhérent de D, i.e. $\exists (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. En effet, prenons la suite $a_n = x_0 + \frac{1}{M+n}$, $n \in \mathbb{N}$ avec M tel que $\frac{1}{M} < \delta$. La suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset]x_0-\delta, x_0+\delta[$ et $a_n \neq x_0$ pour tout $n = 0, 1, \ldots$. Puisque $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset D \cup \{x_0\}$, on a nécessairement $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$. De plus, $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.

Définition 3.7. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0. On dira que <u>f admet pour limite ℓ</u> lorsque x tend vers x_0 si : $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in D$, $0 < |x - x_0| \leq \delta$ on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On écrit alors $\lim_{\substack{x\to x_0\\ \neq}} f(x) = \ell$.

Théorème 3.1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Alors f admet pour limite ℓ si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ telle que $a_n \neq x_0$, $\forall n$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

Démonstration. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est définie au voisinage de x_0.

1) Montrons que si f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers x_0 et si $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite dans D telle que $a_n \neq x_0$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ alors on a bien $\ell = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.
   Soit pour ceci $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$, $a_n \neq x_0$, $\forall n$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Soit encore $\varepsilon > 0$. Comme f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers x_0, alors $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \neq x_0$ on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ et $a_n \neq x_0$, il existe N tel que $a_n \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $a_n \neq x_0$, $\forall n > N$. Ainsi $|f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon$, $\forall n > N$, ce qui prouve que $\ell = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

2) Montrons maintenant l'implication inverse. Pour ceci, supposons que $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$, $a_n \neq x_0$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. En raisonnant par l'absurde, on suppose que f n'admet pas pour limite ℓ lorsque x tend vers x_0, ce qui signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on a l'existence (puisque f est définie au voisinage de x_0) de $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$, $x \neq x_0$ tel que $|f(x) - \ell| > \varepsilon$. Construisons alors une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ainsi : pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ dans ce qui précède, on a l'existence de $a_n \in]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[\cap D$, $a_n \neq x_0$ tel que $|f(a_n) - \ell| > \varepsilon$. Clairement on aura $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ et $|f(a_n) - \ell| > \varepsilon$, $\forall n$, ce qui est contradictoire.

$\square$

Remarque 3.4. Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de x_0 et admet pour limite ℓ lorsque x tend vers x_0, alors cette limite est unique (ceci découle de l'unicité de la limite d'une suite et du théorème 3.1).

Remarque 3.5. Si f est définie au voisinage de x_0 et si pour toute suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$, $a_n \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ on a l'existence de $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$, alors f admet pour limite un nombre ℓ lorsque x tend vers x_0. En effet, prenons deux suites $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_n \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ et $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, $b_n \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$ qui satisfont $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell_1$ et $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \ell_2$.
En posant $c_n = a_n$ si n est pair, $c_n = b_n$ si n est impair, on vérifie que $\lim_{n\to\infty} c_n = x_0$. De plus, si $\ell_1 \neq \ell_2$ alors la suite $(f(c_n))_{n=0}^{\infty}$ est divergente, ce qui est une contradiction avec l'existence de $\lim_{n\to\infty} f(c_n)$. Ainsi $\ell_1 = \ell_2$ et par le théorème 3.1, f admet la limite $\ell_1 = \ell_2$ lorsque x tend vers x_0.

3.2. **Critère de Cauchy.**

Théorème 3.2. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0. Alors f admet une limite lorsque x tend vers x_0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2$ satisfaisant $x_1, x_2 \in D$, $0 < |x_1 - x_0| \leq \delta$, $0 < |x_2 - x_0| \leq \delta$ on ait $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.

Démonstration.

1) Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = \ell$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| \leq \delta$ on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$. Ainsi si $x_1, x_2 \in D$, $0 < |x_1 - x_0| \leq \delta$, $0 < |x_2 - x_0| \leq \delta$ on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - \ell| + |f(x_2) - \ell| \leq \varepsilon$.

2) Inversément, on suppose que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in D$, $0 < |x_1 - x_0| \leq \delta$, $0 < |x_2 - x_0| \leq \delta$ on ait $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$. Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$, $a_n \neq x_0$ une suite telle que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$. Alors il existe $N > 0$ tel que $n \geq N$ implique $|a_n - x_0| \leq \delta$. On obtient ainsi $|f(a_n) - f(a_m)| \leq \epsilon$ pour tout $n, m \geq N$, ce qui prouve que $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy et donc elle est convergente. Ainsi, grâce à la remarque 3.5 et le théorème 3.1 lui-même, on peut conclure que f a une limite lorsque x tend vers x_0.

$\square$

Remarque 3.6. Les notions de limite de fonction lorsque x tend vers un point x_0 au voisinage duquel f est définie se laissent étudier au moyen des connaissances que nous avons sur les suites. Ainsi, on obtient les propriétés suivantes :

Si $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 et si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} g(x) = \ell_2$, on a si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$,
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2$,
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} (\frac{f}{g})(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ si $\ell_2 \neq 0$ et $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D - \{x_0\}$;

2) $\ell_1 \geq \ell_2$ si $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in D$ (ce résultat reste vrai même si $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ “petit”) ;

3) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} |f|(x) = |\ell_1|$;

4) $\ell_1 = \ell_2$ si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in D$ et h est telle que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} h(x) = \ell_1$ (résultat valable encore si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ “petit” et si on ne suppose pas a priori que g a une limite si x tend vers x_0).

3.3. **Limite de fonctions composées.**

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une autre fonction avec $\mathcal{R}(f) \subset E$. On considère $h : D \to \mathbb{R}$ définie par $h = g \circ f$. On suppose que f a une limite lorsque x tend vers x_0 au voisinage duquel elle est définie et on pose $y_0 = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x)$. On suppose encore que g a une limite lorsque y tend vers y_0 au voisinage duquel g est définie. On suppose enfin qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, on a $f(x) \neq y_0$. Alors h a une limite lorsque x tend vers x_0 et on a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} h(x) = \lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ \neq}} g(y)$.

Démonstration. Soit une suite $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_n \neq x_0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$. Alors on a $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = y_0$. Par hypothèse, on a $f(a_n) \in \mathcal{R}(f)$ et $f(a_n) \neq y_0$ pour $n \geq N$ (où N est suffisamment grand). Comme g a une limite lorsque $y \to y_0$, on obtient $\lim\limits_{n \to \infty} g(f(a_n)) = \ell$ où $\ell = \lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ \neq}} g(y)$. Ainsi $\lim\limits_{n \to \infty} h(a_n) = \ell$, ce qui prouve par le théorème 3.1 que h a pour limite ℓ lorsque x tend vers x_0. $\square$

⚠ L'hypothèse qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ implique $f(x) \neq y_0$ est importante et elle est utilisée dans la démonstration ci-dessus lorsqu'on dit que $f(a_n) \neq y_0$, $\forall n \geq N$. En effet, si on prend $D = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $g(1) = 1$, on a $h(x) = g(f(x)) = g(1) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x) = 1$ $(x_0 = 0)$, $y_0 = 1$, $\lim\limits_{\substack{y \to 1 \\ \neq}} g(y) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} h(x) = 1$. On remarque ici que $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ \neq}} g(y) \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} h(x)$ et que l'hypothèse $f(x) \neq y_0$ n'est pas satisfaite dans un voisinage de x_0.

3.4. **Limite de fonctions au voisinage de l'infini.**

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, \infty[\subset D$ (on dit que f est définie au voisinage de $+\infty$). On dira alors que f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b > a$ tel que $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, $\forall x \geq b$. On écrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

(Définition analogue pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$).

3.5. **Limite infinie d'une fonction.**

Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de x_0, on définit

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq M$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \neq x_0$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = -\infty$ si $\forall M < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \neq x_0$.

- Si $]a, \infty[\subset D$, on définit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0$ il existe $b > a$ tel que $f(x) \geq M$, $\forall x \geq b$. On définit de même manière $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \ldots$.

Théorème 3.3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors si f est majorée sur $]a, +\infty[$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_{x \in]a, \infty[} f(x).$$

Démonstration. Si f est majorée, alors il existe un $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \sup_{x \in]a,\infty[} f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition du supremum, il existe un $\alpha \in]a, \infty[$ tel que $\ell - \varepsilon \leq f(\alpha) \leq \ell$. Comme f est supposée croissante, alors $f(y) \geq f(\alpha)$, $\forall y \in [\alpha, \infty[$. Mais puisque $\ell = \sup_{x \in]a,\infty[} f(x)$, on a $\ell - \varepsilon \leq f(y) \leq \ell$, $\forall y \in [\alpha, +\infty[$. Ainsi $|f(y) - \ell| \leq \varepsilon$, $\forall y \geq \alpha$, ce qui prouve que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. □

Remarque 3.7. Clairement si f n'est pas majorée dans le théorème 3.3, on aura $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On peut établir le même type de résultat avec f décroissante minorée ($\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf_{x \in]a,\infty[} f(x)$) ou en prenant $-\infty$ au lieu de $+\infty$ (par exemple f croissante, minorée sur $]-\infty, a[$ alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf_{x \in]-\infty,a[} f(x)$).

3.6. **Limite à droite, limite à gauche.**

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que <u>f est définie à droite de x_0</u> s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0, x_0 + \alpha[\subset D$. Dans ce cas, on dit que <u>f admet une limite à droite de x_0</u> s'il existe ℓ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $(\delta < \alpha)$ qui satisfait l'implication

$$x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on pose $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Remarque 3.8. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D, a_n > x_0$ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

On dit aussi que $\underline{f \text{ tend à droite de } x_0 \text{ vers } +\infty}$ (resp. $-\infty$) si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq M$, $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta]$ (resp. $f(x) \leq -M$, $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta]$).
On a des définitions analogues pour $\underline{f \text{ définie à gauche de } x_0}$ et les limites à gauche.

Remarque 3.9. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell.$$

(ℓ peut être un nombre réel ou $\pm\infty$!)

Théorème 3.4. Soit une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et définie au voisinage de x_0. Alors f admet une limite à droite de x_0 et une limite à gauche de x_0 et on a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \geq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$.

Démonstration. Puisque f est définie au voisinage de x_0, elle est définie à gauche de x_0. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0[\subset D$.
Montrons maintenant que f est bornée sur $[x_0 - \delta, x_0[$. En effet, puisque f est croissante, f est minorée par $f(x_0 - \delta)$ sur l'intervalle $[x_0 - \delta, x_0[$. De plus, si $x_1 \in D, x_1 > x_0$ on a $f(x) \leq f(x_1), \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[$ ce qui montre que f est majorée sur $[x_0 - \delta, x_0[$ et donc finalement bornée sur cet intervalle.
Puisque f est bornée sur $[x_0 - \delta, x_0[$ et f est croissante, alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \sup \{f(x) : x \in [x_0 - \delta, x_0[\}$. En effet, puisque f est majorée, alors

$\ell = \sup \{f(x) : x \in [x_0 - \delta, x_0[\}$ existe, ce qui veut dire que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in [x_0 - \delta, x_0[$ tel que $\ell - \varepsilon \leq f(\alpha) \leq \ell$. Comme la fonction est croissante et bornée par ℓ sur $[x_0 - \delta, x_0[$, on obtient $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell$, $\forall x \in [\alpha, x_0[$. Ainsi, on a montré que $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$ et on a bien le résultat $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \sup \{f(x) : x \in [x_0 - \delta, x_0[\}$. De même on montre que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \inf \{f(x) : x \in]x_0, x_0 + \delta]\}$ et on aura bien $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \leq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$ puisque f est croissante. $\square$

Remarque 3.10. Si f est décroissante, définie au voisinage de x_0, on aura $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \leq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$.

3.7. **Fonctions continues.**

Définition 3.8. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in D$. Cette fonction sera dite continue au point x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = f(x_0)$. Ainsi :

- f est continue au point x_0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in D$ satisfaisant $|x - x_0| \leq \delta$.

- f est continue au point x_0 si et seulement si $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

- f est continue au point x_0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ satisfaisant $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$.

Définition 3.9. f est discontinue en x_0 si elle n'est pas continue en x_0. Ainsi :

- f est discontinue en x_0 si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$ satisfaisant $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.

- f est discontinue en x_0 si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(x_0)$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ n'existe pas.

Remarque 3.11. On vérifie que la composée de deux fonctions continues $(g \circ f)$ (f continue en x_0, g continue en $f(x_0)$) est continue. Par contre, la composée de deux fonctions discontinues n'est pas nécessairement discontinue.

Par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et discontinues en $x = 0$. On vérifie que $h(x) = (g \circ f)(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, qui est continue.

Définition 3.10. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie à droite de $x_0 \in D$. On dit alors que $\underline{f \text{ est continue à droite de } x_0}$ si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.

De même on définit la continuité à gauche et on vérifie facilement que f est continue en $x_0 \in D$ (f définie au voisinage de x_0) si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de x_0.

Définition 3.11. Soit $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur $]a, b[$ si elle est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$. On note dans ce cas $f \in C^0(]a, b[)$.

Si f est définie sur $]a, b]$ alors on dit que f est continue sur $]a, b]$ (on note $f \in C^0(]a, b]))$ si f est continue sur $]a, b[$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = f(b)$. (Idem pour $C^0([a, b[)$ ou $C^0([a, b])$).

Remarque 3.12. On montre que $f \in C^0(]a, b])$ si et seulement si $\forall x \in]a, b]$ et $\forall (x_n)_{n=0}^{\infty} \subset]a, b]$ telle que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ alors $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$.

Définition 3.12. (Continuité uniforme). Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. On dit que $\underline{f \text{ est uniformément continue sur } I}$ si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in I$ satisfaisant $|x - y| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Exemple 3.7. Soit $0 < \alpha < 1$ et $I = [\alpha, 1]$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour $x, y \in I$, on a $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{|x-y|}{xy} \leq \dfrac{|x-y|}{\alpha^2}$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta < \epsilon\alpha^2$ pour avoir $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ dès que $x, y \in I$ avec $|x - y| < \delta$. La fonction f est donc uniformément continue sur $[\alpha, 1]$.

Exemple 3.8. Soit $\alpha > 0$ et $I = [-\alpha, \alpha]$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Pour $x, y \in I$, on a $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ et donc $|f(x) - f(y)| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2\alpha|x - y|$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta < \dfrac{\epsilon}{2\alpha}$ pour avoir $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ dès que $x, y \in I$ avec $|x - y| < \delta$. La fonction f est donc uniformément continue sur $[-\alpha, \alpha]$.

Remarque 3.13. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur I s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe $x, y \in I$ satisfaisant $|x - y| \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
Ou encore (en prenant $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots$) f n'est pas uniformément continue sur I s'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ avec $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 3.9. On pose $I =]0, 1[$ et f donné par $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in I$. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$, pour $n = 2, 3, \ldots$. On a $x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ ainsi que $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$, $\forall n = 2, 3, \ldots$. Ce qui prouve que f, bien que continue sur I, n'est pas uniformément continue sur I.

Exemple 3.10. On pose $I = \mathbb{R}$ et f donné par $f(x) = x^2$, $\forall x \in I$. Posons $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien évidemment $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ et $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ce qui prouve que f, bien que continue sur I, n'est pas uniformément continue sur I.

Théorème 3.5. Une fonction définie sur un intervalle fermé borné (i.e. compact) qui est continue est nécessairement uniformément continue.

Démonstration. Ab absurdo supposons que f ne soit pas uniformément continue. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall n = 1, 2, \ldots$ il existe $x_n, y_n \in [a, b]$, $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Puisque la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est bornée, il existe une sous-suite $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ qui converge vers x. Comme $[a, b]$ est fermé, on obtient $x \in [a, b]$. On a $|y_{n_i} - x| \leq |y_{n_i} - x_{n_i}| + |x_{n_i} - x| \leq \frac{1}{n_i} + |x - x_{n_i}| \to 0$ si $i \to \infty$. Ainsi $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i} = x$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, alors f est continue en x et on a $\lim\limits_{i\to\infty} |f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| = 0$, ce qui contredit $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ pour tout n. □

Théorème 3.6. Une fonction continue sur un intervalle fermé, borné prend son maximum et son minimum (on dit aussi atteint son maximum et son minimum).

Démonstration. Supposons $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et montrons tout d'abord que f est bornée. En effet, ab absurdo, si f n'était pas bornée, alors $\forall n > 0$ il existerait $x_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. Puisqu'on peut extraire une sous-suite $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers $x \in [a, b]$ (théorème de Bolzano-Weierstrass et I compact), on obtient :

$$|f(x)| \geq |\underbrace{f(x_{n_i})}_{\geq n_i}| - |\underbrace{f(x) - f(x_{n_i})}_{\substack{\to 0 \\ i\to\infty} \text{ (continuité)}}|,$$

ce qui est une contradiction.

Soit maintenant $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Il existe une suite $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset [a, b]$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = M$. A nouveau, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in [a, b]$ et par continuité $f(z) = M$, ce qui prouve que $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(z) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Idem pour le minimum. □

Théorème 3.7. (Théorème de la valeur intermédiaire) .
Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\mathcal{R}(f) = f([a, b]) = [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$. En d'autres termes, f prend toutes les valeurs entre $\min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle fermé $[a, b]$.

Démonstration. Soit $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ (x_1, x_2 existent ; cf. théorème 3.6).

Si $x_1 = x_2$, la fonction f est constante sur $[a, b]$ et le théorème 3.7 est démontré. Supposons que $x_1 < x_2$ et soit $z \in [f(x_1), f(x_2)]$. Il suffit alors de montrer que $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - z$ possède au moins un zéro dans $[x_1, x_2]$. On a par construction de g que $g(x_1) \leq 0$ et $g(x_2) \geq 0$.

Supposons par l'absurde que g n'a pas de zéro dans $[x_1, x_2]$. Alors $g(x_1)$ est négatif et $g(x_2)$ est positif ce qui implique que $g(x_1)g(x_2) < 0$. Puisque f est uniformément continue (c.f. théorème 3.6), alors g est aussi uniformément continue sur $[x_1, x_2]$. Ainsi, si $N > 0$ est un entier positif, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{N}$ pour tout $x, y \in [x_1, x_2]$ avec $|x - y| \leq \delta$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|x_1-x_2|}{n} \leq \delta$ et posons $a_j^n = x_1 + j\left(\frac{x_2-x_1}{n}\right)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. On a $|a_{j+1}^n - a_j^n| = \frac{x_2-x_1}{n} \leq \delta$ ce qui implique que $|g(a_{j+1}^n) - g(a_j^n)| \leq \frac{1}{N}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Si $g(a_{j+1}^n)$ avait le même signe que $g(a_j^n)$ pour tout $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, alors $g(x_2)$ aurait le même signe que $g(x_1)$ ce qui serait une contradiction avec $g(x_1)g(x_2) < 0$. Ainsi, il existe $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $g(a_j^n) < 0$ et $g(a_{j+1}^n) > 0$. On obtient finalement $|g(a_j^n)| = -g(a_j^n) \leq -g(a_j^n) + g(a_{j+1}^n) = |g(a_{j+1}^n) - g(a_j^n)| \leq \frac{1}{N}$ et donc $\frac{1}{|g(a_j^n)|} \geq N$. Puisque g ne s'annule pas sur $[x_1, x_2]$, la fonction $\frac{1}{g}$ est une fonction uniformément continue sur $[x_1, x_2]$. Par ce qui précède, on a $\max_{x\in[x_1,x_2]} \dfrac{1}{g(x)} \geq N$ pour tout $N > 0$ et donc $\frac{1}{g}$ n'est pas bornée ce qui est absurde ! Cette contradiction montre que g doit s'annuler en un point de $[x_1, x_2]$.
On traite de la même manière le cas $x_1 > x_2$. □

Théorème 3.8. Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction injective et continue sur I. Alors f est strictement monotone sur I.

Démonstration. Supposons que I est l'intervalle compact $I = [a, b]$ et supposons que $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$ se traite de la même manière !). On va montrer que f est strictement croissante.
Ab absurdo, si ce n'est pas vrai, alors il existe $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) \geq f(x_2)$. L'injectivité de f implique que $f(x_1) < f(b)$ ou $f(x_1) > f(b)$. De plus $f(x_1) > f(x_2)$.

- Si $f(x_1) < f(b)$ alors $f(x_2) < f(x_1) < f(b)$ et le théorème 3.7 implique qu'il existe $y \in [x_2, b]$ tel que $f(y) = f(x_1)$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'injectivité de f.

- Si $f(x_1) > f(b)$ alors on a $f(a) < f(b) < f(x_1)$ et donc il existe $z \in [a, x_1]$ tel que $f(z) = f(b)$, ce qui est encore une fois contradictoire. On a ainsi démontré que f est strictement croissante.

Remarquons que si I est un intervalle quelconque, il suffit de prendre $a < b$, $a, b \in I$ et de faire le raisonnement ci-dessus pour montrer la stricte monotonie de f. $\square$

Corollaire du théorème 3.8. Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ injective et continue sur I admet une fonction réciproque $f^{-1} : \mathcal{R}(f) \to I$ qui est continue et strictement monotone.

Démonstration. Supposons $I =$ intervalle ouvert et f injective et continue. D'après le théorème 3.8, elle est strictement monotone et de plus $f^{-1} : \mathcal{R}(f) \to I$ existe. Il est facile de voir que $\mathcal{R}(f)$ est un intervalle ouvert (cf. exercice) et que f^{-1} est continue (cf. exercice). $\square$

L'étude des fonctions sin, cos, tg et les fonctions réciproques Arcsin, Arccos, Arctg est supposée connue. Par exemple la fonction sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ est injective et continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle admet donc une fonction réciproque Arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3.8. **Fonctions lipschitziennes.**
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Elle est dite lipschitzienne de rapport k (ou de constante k) si $\forall x, y \in D$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Remarque 3.14. Si $D = I =$ intervalle et si $f : D \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport k, alors f est uniformément continue.

- Si $k < 1$, on dit que f est strictement contractante sur D.
- Si $x \in D$ est tel que $x = f(x)$, on dit que x est un point fixe de f.

3.9. **Théorèmes de points fixes.**

Théorème 3.9. (Théorème de Brouwer (1881-1966) dans $\mathbb{R}$).
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, alors f a au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Démonstration. Considérons la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - f(x)$. Bien évidemment g est continue sur $[a, b]$.
De plus $g(a)g(b) = \underbrace{(a - f(a))}_{\leq 0}\underbrace{(b - f(b))}_{\geq 0} \leq 0$. Ainsi, par le théorème 3.7 de la valeur intermédiaire, il existe c tel que $g(c) = 0$. D'où c est un point fixe de f. □

Théorème 3.10. (Théorème du point fixe de Banach (1892-1945)).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement contractante. Alors f admet un et un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$ et construisons la suite $x_0 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Puisque f est strictement contractante, il existe $k < 1$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On obtient $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|$ et en répétant n fois cette inégalité : $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0| = k^n|f(a) - a|$.

Ainsi

$$\begin{aligned}|x_{n+m} - x_n| &\leq |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (k^{n+m-1} + k^{n+m-2} + \ldots + k^n)|f(a) - a| \\ &= k^n(1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-1})|f(a) - a| \\ &= k^n \frac{1 - k^m}{1 - k}|f(a) - a| \leq \frac{k^n}{1 - k}|f(a) - a|.\end{aligned}$$

Il résulte de cette inégalité que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Elle est donc convergente. Soit $c = \lim_{n\to\infty} x_n$. Par continuité de f, on a $c = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(c)$ et donc c est un point fixe de f.
Maintenant si d est un autre point fixe de f, on obtient si $c \neq d$:

$$|c - d| = |f(c) - f(d)| \leq k|c - d| < |c - d|,$$

ce qui est une contradiction. Donc $c = d$. □

Remarque 3.15. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, alors f n'a pas nécessairement un point fixe comme le montre la fonction $f(x) = 1 + x$.

3.10. **Suites de fonctions.**

Soit I un intervalle et soit $C^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I, i.e. si $I = [a, b[$ par exemple et si $f \in C^0(I)$, alors f est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite en a.

Définition 3.13. Si $f_n \in C^0(I)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ définit une suite de fonctions continues sur I, on dit que la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ <u>converge ponctuellement vers f</u>: $I \to \mathbb{R}$ (ou tout simplement converge vers f), et on note $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, si $\forall x \in I$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Exemple 3.11. $I = [0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2(n+2)x & \text{si } x \leq \frac{1}{2(n+2)}; \\ 2 - 2(n+2)x & \text{si } x \in [\frac{1}{2(n+2)}, \frac{1}{n+2}]; \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n+2}. \end{cases}$$

On montre facilement que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Exemple 3.12. $I = [0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ (n+2)(x - \frac{1}{2}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}]; \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}. \end{cases}$$

On montre facilement que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ où $f(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f(x) = 1$ si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$.

Remarque 3.16. L'exemple 3.11 montre que la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers la fonction identiquement nulle alors qu'il existe un point $x_n \in I$ tel que $f_n(x_n) = 1$ (i.e. $x_n = \frac{1}{2(n+2)}$), $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$. L'exemple 3.12 montre que la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ de fonctions continues converge vers une fonction qui n'est pas continue sur I.

Pour éviter les défauts des exemples 3.11 et 3.12, on introduit la définition suivante :

Définition 3.14. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0(I)$ converge uniformément vers f: $I \to \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$ il existe N tel que $\forall n \geq N$ on ait $\sup\limits_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. On note dans ce cas : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformément.

Remarque 3.17. Si $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge ponctuellement vers f, on a bien évidemment : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in I$, il existe N tel que $\forall n \geq N$ on ait $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Ici N dépend a priori de ε et $x \in I$.
Si $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers f, on a bien évidemment : $\forall \varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N$ et $\forall x \in I$ on ait $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Ici N ne dépend pas de $x \in I$ (mais dépend de ε !).

La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle.

Théorème 3.11. Soit $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0(I)$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f. Alors $f \in C^0(I)$ (i.e. f est aussi continue sur I).

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soit un entier n tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x \in I$ (ici n est fixé et il existe car $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformément).
Soit $x_0 \in I$. Montrons que f est continue en x_0. Puisque f_n est continue sur I, il existe $\delta > 0$ tel que $|f_n(x_0) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x \in I$, $|x - x_0| \leq \delta$.

On obtient ainsi pour $|x - x_0| \leq \delta$, $x \in I$:

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |\underbrace{f(x_0) - f_n(x_0)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}| + |\underbrace{f_n(x_0) - f_n(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}|$$
$$+ |\underbrace{f_n(x) - f(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que f est continue en x_0. Comme $x_0 \in I$ est quelconque, f est continue sur I. $\square$

Remarque 3.18. Dans l'exemple 3.11, on n'a pas convergence uniforme car $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in I} |f_n(x)| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dans l'exemple 3.12, on n'a pas convergence uniforme car la limite f n'est pas continue.

Théorème 3.12. (Permutation des limites).

Soit $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0(I)$ qui converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On a $\lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} f_n(x))$.

Démonstration. Puisque $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers f, on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

De plus, comme f est continue par le théorème 3.11, on obtient

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

D'autre part, la convergence de $f_n(x_0)$ vers $f(x_0)$ lorsque n tend vers l'infini et la continuité de f_n implique

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Ainsi on a bien $\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$. $\square$

Remarque 3.19. Si f_n n'est pas continue, mais si on suppose que f_n a une limite en x_0 notée $h_n(x_0)$ et si $(h_n(x_0))_{n=0}^{\infty}$ est convergente, alors si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformément, on a encore

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \text{(exercice).}$$

Théorème 3.13. (Théorème de Dini (1845-1918) (Ulisse Dini de Pise)).

Soit $a < b$ et soit $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions dans $C^0([a,b])$. On suppose que la suite est croissante (i.e. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \geq 0$) et que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ ponctuellement. Alors si $f \in C^0([a,b])$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformément.

Démonstration. Ab absurdo, supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ ne soit pas uniforme. Alors il existe une suite $(x_{n_i})_{i=0}^{\infty} \subset [a,b]$ et $\varepsilon > 0$ telle que $|f(x_{n_i}) - f_{n_i}(x_{n_i})| \geq \varepsilon$, avec $n_{i+1} > n_i$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots$. Comme la suite $(x_{n_i})_{i=0}^{\infty}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente et ainsi renuméroter les suites pour obtenir une suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ et $|f(x_n) - f_n(x_n)| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, il existe N tel que

$$|f_N(c) - f(c)| \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Puisque f et f_N sont continues, il existe $M > N$ tel que $\forall n \geq M$:

$$|f(c) - f(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{6} \qquad \text{et} \qquad |f_N(c) - f_N(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Puisque la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante, on a lorsque $n \geq M$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq f(x_n) - f_n(x_n) \leq f(x_n) - f_N(x_n) \\ \leq |f(x_n) - f(c)| + |f(c) - f_N(c)| + |f_N(c) - f_N(x_n)| \\ \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. $\square$

Remarque 3.20. On obtient la même conclusion si on suppose $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ décroissante au lieu de croissante dans le théorème précédent.

Exemple 3.13. Les polynômes $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x))$ avec $p_0(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$ forment une suite croissante qui converge uniformément vers $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ (exercice).

Remarque 3.21. Les notions de convergence ponctuelle et de convergence uniforme peuvent s'appliquer aussi à une suite de fonctions non nécessairement continues.

3.11. **L'espace $C^0([a,b])$.**

Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé avec $a < b$. On vérifie facilement que $C^0(I)$ est un espace vectoriel. Si $f \in C^0(I)$, on pose $\|f\| = \max_{x\in I} |f(x)|$ et on vérifie facilement les propriétés suivantes :

(i) $\|f\| \geq 0$, $\forall f \in C^0(I)$ et $\|f\| = 0$ implique $f(x) = 0$, $\forall x \in I$;

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha|\ \|f\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall f \in C^0(I)$;

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, $\forall f, g \in C^0(I)$.

Ainsi $\|\cdot\| : C^0(I) \to \mathbb{R}^+$ est une norme sur $C^0(I)$. On dit que $C^0(I)$ muni de $\|\cdot\|$ est un espace vectoriel normé.

Définition 3.15. Soit $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0(I)$ une suite de fonctions continues sur I. On dit que la suite est :

- de Cauchy pour $\|\cdot\|$ si $\forall \varepsilon > 0$ il existe N_0 tel que $\forall n, m \geq N_0$ on a $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$;
- uniformément équicontinue si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tel que $\forall n \geq 0$, $\forall x, y \in I$ avec $|x - y| \leq \delta$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$. (Remarquez que δ ne dépend ni de n, ni de x, y).

Théorème 3.14. Soit $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0(I)$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$. Alors la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ est uniformément équicontinue et elle converge uniformément vers une fonction $f \in C^0(I)$.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0(I)$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $N > 0$ tel que si $m, n \geq N$ on ait :

$$\max_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi, pour $x \in I$ fixé, $(f_n(x))_{n=0}^{\infty}$ est une suite numérique de Cauchy, donc convergente. On définit

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x).$$

Il existe $N_x \geq N$ (N_x dépend de $x \in I$) tel que

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } m \geq N_x.$$

On obtient ainsi pour $n \geq N$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{N_x}(x)| + |f_{N_x}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

On a donc montré, puisque N ne dépend pas de x, que pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall x \in I$ et $\forall n \geq N$, on a :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Ainsi $\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ si $n \geq N$ et donc la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$.

Le théorème 3.11 implique que la fonction f est continue sur I. Comme I est un intervalle compact, f est uniformément continue (voir théorème 3.5).

Montrons encore que la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ est uniformément équicontinue. Soit $\epsilon > 0$ donné. Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in I$, $|x - y| \leq \delta$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Soit $M > 0$ tel que $\forall n \geq M$, $\forall x \in I$ on ait :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

On aura ainsi, pour $n \geq M$ et pour $x, y \in I$, $|x - y| \leq \delta$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \leq \epsilon.$$

Ainsi donc, pour $n \geq M$ et $x, y \in I$, $|x-y| \leq \delta$ on a

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon.$$

Si maintenant on prend $k = 0, 1, 2, \ldots, M-1$, il existe $\delta_k > 0$ tel que si $x, y \in I$, $|x-y| \leq \delta_k$ on ait, puisque f_k est uniformément continue :

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq \epsilon.$$

Il suffit de définir $\hat{\delta} = \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{M-1}, \delta\}$ pour obtenir

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon, \quad \forall x, y \in I, \quad |x-y| \leq \hat{\delta}, \quad \forall n \in N,$$

ce qui prouve l'uniforme équicontinuité de la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$. $\square$

Remarque 3.22. Un espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$ est dit "espace de Banach", si toute suite de Cauchy d'éléments de X converge vers un élément de X (on dit que l'espace est complet). Ainsi, $C^0(I)$ muni de la norme du maximum $\|\cdot\|$ est un espace de Banach.

4. Calcul différentiel

4.1. Généralités.

Définition 4.1. Soit $r : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que r est un grand O de $|x - x_0|^\alpha$ au voisinage de x_0 lorsque x tend vers x_0 (on note $r(x) = O(|x - x_0|^\alpha)$ si $x \to x_0$), s'il existe des constantes C et δ positives telles que $x \in D$, $0 < |x - x_0| \leq \delta$ implique $|r(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha$ (ici $\alpha \in \mathbb{R}$; C dépend de α mais non de x !).

On dit que r est un petit o de $|x - x_0|^\alpha$ au voisinage de x_0 lorsque x tend vers x_0, $\alpha \geq 0$, (on note $r(x) = o(|x - x_0|^\alpha)$ si $x \to x_0$) si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \dfrac{r(x)}{|x - x_0|^\alpha} = 0$.

Remarque 4.1.
1) Les symboles O et o peuvent être facilement adaptés lorsque $x \to \pm\infty$.
2) De façon évidente, si $r(x) = o(|x - x_0|^\alpha)$ si $x \to x_0$, alors $r(x) = O(|x - x_0|^\alpha)$ si $x \to x_0$, $\alpha \geq 0$.

Définition 4.2. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D$. On dit que f est dérivable au point x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. La quantité $f'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est alors appelée dérivée de f en x_0.

Remarque 4.2. Si f est dérivable en x_0 et si on pose pour $x \in D$:

$$r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

on obtient pour x au voisinage de x_0, $x \neq x_0$:

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} - f'(x_0).$$

Ainsi, par définition de $f'(x_0)$, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0$. On a donc, si f est dérivable en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x), \quad \text{où } r(x) = o(|x-x_0|),$$

si $x \to x_0$. Cette relation montre que f doit nécessairement être continue en x_0. Si f vérifie cette relation, on dit aussi que f est différentiable en x_0. Ici, les notions de différentiabilité et de dérivabilité sont les mêmes.

4.2. **Interprétation géométrique de la dérivée.**
En considérant le graphe $G(f)$ de f, i.e. $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\}$, on constate que $f'(x_0)$ est la tangente de l'angle que fait la droite d, tangente à $G(f)$ au point $(x_0, f(x_0))$, avec l'axe Ox.

Remarque 4.3. Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors on obtient une tangente d verticale au graphe $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ en x_0.

4.3. **Propriétés de la dérivabilité.**

- Soit $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en x_0. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

  a) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$ (linéarité de la dérivabilité).

  b) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (facile à vérifier).

c) Si $g(x_0) \neq 0$, alors

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Démonstration : g est continue en x_0 et puisque $g(x_0) \neq 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Ainsi :

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

d) Si $g(x_0) \neq 0$, alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

(conséquence de b) et c)).

- Si $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in D$ et si $g : E \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(x_0)$, où on a supposé $E \supset \mathcal{R}(f)$, alors la fonction $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

(exercice)

- Si D est un intervalle ouvert, si $f : D \to \mathbb{R}$ est injective et continue sur D, alors f admet une fonction réciproque continue $f^{-1} : \mathcal{R}(f) \to D$. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Démonstration : On montre que $\mathcal{R}(f)$ est ouvert (cf. exercices) ; on pose $g(x) = f^{-1}(x)$ pour obtenir $g(f(x)) = x$ dans un voisinage de x_0 ; par dérivation, on a $g'(f(x_0))f'(x_0) = 1$.

4.4. **Quelques exemples.**

1) $f(x) = x^n$ définie pour $x \in \mathbb{R}$. En posant $\ell(x) = x, k(x) = x^{n-1}$, on a $f(x) = \ell(x) \cdot k(x)$ et ensuite $f'(x) = \ell'(x) \cdot k(x) + \ell(x)k'(x) =$

$x^{n-1} + xk'(x)$. Si $n = 1$, on obtient $f'(x) = 1$. Si $n = 2$, on obtient $f'(x) = x + x = 2x$. Si $n = 3$, on obtient $f'(x) = x^2 + 2x^2 = 3x^2, \ldots,$ etc.

On obtient donc si $f(x) = x^n$ avec $n \geq 1$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

2) $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $x \in D = \mathbb{R} - \{0\}$, $n \geq 1$. On a $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$. Ainsi, dans tous les cas, si $p \in \mathbb{Z}$, on a lorsque $f(x) = x^p$, $f'(x) = px^{p-1}$.

3) $f(x) = \sin(x)$. Les formules trigonométriques impliquent

$$f(x) - f(y) = \sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

On a $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ et ainsi $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \cos(x)$. La dérivée de la fonction sin est la fonction cos. La dérivée de la fonction cos est la fonction $-\sin$.

4) $f(x) = \mathrm{tg}(x) = \frac{\sin\ x}{\cos\ x}$; $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5) $f(x) =$ Arctg (x) pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Etant donné que Arctg est la fonction réciproque de tg, on vérifie que la relation suivante est vraie : $f'(x) = \cos^2(\alpha)$ avec $\alpha =$ Arctg(x). Ainsi on a $\mathrm{tg}(\alpha) = x$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4.5. Les espaces $C^m(D)$.

Définition 4.3. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en tout point de D, on définit $f' : D \to \mathbb{R}$ par $f'(x) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ \neq}} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, $\forall x \in D$.

- Si $f' : D \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que f est continûment dérivable (ou continûment différentiable) sur D. On note alors $f \in C^1(D)$. Si $f' : D \to \mathbb{R}$ est elle-même dérivable sur D, on note $f'' : D \to \mathbb{R}$ la dérivée de f'.

- Si $f'' : D \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que f est deux fois continûment dérivable (ou deux fois continûment différentiable) sur D. On note alors $f \in C^2(D)$.

- Plus généralement, on définit de la même manière des fonctions f n fois continûment dérivable (ou différentiable) sur D et on note dans ce cas $f \in C^n(D)$, $n \in \mathbb{N}$.

- Si f est n fois continûment dérivable sur D quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est indéfiniment continûment dérivable sur D et on note $f \in C^\infty(D)$.

On a des inclusions du type :

$$C^\infty(D) \subset \ldots \subset C^{n+1}(D) \subset C^n(D) \subset \ldots \subset C^0(D).$$

Remarque 4.4. La notion de dérivée est a priori définie en un point $x_0 \in D$ et la fonction doit être définie au voisinage de ce point x_0. Ainsi $f' : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie a priori si D est un intervalle ouvert. Supposons maintenant que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle fermé. Si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ existe, alors on dit que cette limite est la dérivée à gauche de f en b et on note $f'_g(b)$. On définit de même la dérivée à droite de f en a notée $f'_d(a)$. Si la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f'(x)$ si $x \in]a,b[$, $g(a) = f'_d(a), g(b) = f'_g(b)$ est continue sur $[a,b]$, on dira que f admet une dérivée continue sur $[a,b]$ et on continuera à noter $g(x) = f'(x)$, $x \in [a,b]$. On dira ainsi que $f \in C^1([a,b])$.

Remarque 4.5. Il peut arriver que $f : D \to \mathbb{R}$ ne soit pas dérivable en $x_0 \in D$ mais par contre qu'il existe des dérivées à droite et à gauche de x_0, i.e. $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existent. Par exemple :

1) $f(x) = |x|$, $x \in D = \mathbb{R}$ n'a pas de dérivée en $x_0 = 0$ mais par contre $f'_g(x_0) = -1$, $f'_d(x_0) = +1$.

2) $f(x) = x$ si $x \geq 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x < 0$ n'a pas de dérivée à gauche en zéro mais $f'_d(0) = 1$.

On vérifie facilement que, si $D \subset \mathbb{R}$ est ouvert, alors $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in D$ si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 4.1. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \in]0,1]$, $f(0) = 0$. On vérifie :

1) f est continue sur $[0,1]$;

2) $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, si $x \in]0,1[$;

3) $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \dfrac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \dfrac{\varepsilon^2 \sin\ 1/\varepsilon}{\varepsilon} = 0$, $f'_g(1) = 2\sin\ 1 - \cos\ 1$.

On a donc $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, si $x \in]0,1]$ et $f'_d(0) = 0$. Ainsi f' n'est pas continue sur $[0,1]$ et donc $f \notin C^1([0,1])$.

Exemple 4.2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 \sin\ \frac{1}{x}$ si $x \in]0,1]$, $f(0) = 0$. On vérifie :

1) f est continue sur $[0,1]$;

2) $f'(x) = 3x^2 \sin\ \frac{1}{x} - x \cos\ \frac{1}{x}$, si $x \in]0,1[$;

3) $f'_d(0) = 0 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x)$, $f'_g(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f'(x)$.

Ainsi $f \in C^1([0,1])$ (mais $f \notin C^2([0,1])$).

4.6. **Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.**

Théorème 4.1. Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ouvert non vide et soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in D$. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que f ait un maximum local en x_0, i.e. $\exists \varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset D$. On a alors :

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ et } f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Puisque $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$, on a nécessairement $f'(x_0) = 0$. □

⚠ Si $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un point stationnaire de f. Les points stationnaires de f ne sont pas nécessairement des extrema locaux !

Théorème 4.2. (Théorème de Rolle (Michel Rolle (1652-1719))) Soit $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Si f est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si $f(x) = f(a) = f(b)$, $\forall x \in [a, b]$, le théorème est évident. Supposons donc que f ne soit pas constante et posons :

$$f_M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \qquad f_m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

On a nécessairement dans ce cas-là $f_m \neq f_M$ et au moins une des deux valeurs est différente de $f(a) = f(b)$. Si c'est f_M, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f_M = f(c) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et donc f admet un maximum local c. Par le théorème 4.1, on obtient $f'(c) = 0$. Même raisonnement si c'est f_m qui est différent de $f(a) = f(b)$. □

Remarque 4.6. On peut étendre ce théorème au cas où $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[$ (donc continue sur $]a, b[$ mais non nécessairement avec extension continue sur $[a,b]$) et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$). Il existe encore $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 4.3. (Théorème des accroissements finis).
Soit $a < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Démonstration. On considère $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Clairement g est continue sur $[a,b]$, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\forall x \in]a,b[$, et $g(a) = g(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui complète la preuve. $\square$

Corollaire 4.1. Soit $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ est bornée. Alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Démonstration. Soit $k = \sup\limits_{x\in]a,b[} |f'(x)|$. Si $x, y \in [a,b]$ on a soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$. Supposons $x < y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$ et ainsi $|f(y) - f(x)| \le k|y-x|$. Si $x = y$ cette relation est évidemment vraie et si $x > y$ il suffit d'échanger les rôles de x et y pour l'obtenir. $\square$

Corollaire 4.2. Soit $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$. Alors f est une fonction constante sur $[a,b]$.

Démonstration. Si on reprend la démonstration du corollaire 4.1, on obtient $k = 0$. Ainsi $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in [a, b]$. $\square$

Remarque 4.7. Une conséquence du corollaire 4.2 est que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a, b[$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x) + c$, $\forall x \in [a, b]$.

Corollaire 4.3. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors

- f est croissante sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, $\forall x \in]a, b[$;
- f est décroissante sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, $\forall x \in]a, b[$;
- $f'(x) > 0$, $\forall x \in\ ]a, b[\ \Rightarrow f$ est strictement croissante ;
- $f'(x) < 0$, $\forall x \in\ ]a, b[\ \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

⚠ Les 2 dernières implications n'ont pas de réciproques ! Par exemple, $f(x) = x^3$, $x \in [-1, +1]$ est strictement croissante, mais on a $f'(0) = 0$!

Démonstration du corollaire 4.3. Immédiate à partir du théorème 4.3.

Théorème 4.4. Soit $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$. On suppose que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x)$ existe. Alors on a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x) = f'_d(a) \underset{déf}{=} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. (Idem pour la dérivée à gauche de b).

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x) = \ell$ existe. Par le théorème 4.3, si $x \in]a, b[$, on a l'existence de $\xi = \xi(x)$ tel que $\xi \in]a, x[$ et

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi).$$

On obtient ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(\xi(x)) = \ell$, ce qui montre que $\ell = f'_d(a)$. $\square$

Corollaire 4.4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant x_0 et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $I - \{x_0\}$. Alors si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f'(x) = \ell$, f est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = \ell$.

⚠ Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 0$. On vérifie que f est continue sur $[0, 1]$. De plus, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ si $x \in]0, 1[$, ce qui montre que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x)$ n'existe pas. Pourtant si $x \in]0, 1]$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que $f'_d(0) = 0$. On obtient un exemple de fonction qui admet une dérivée à droite en un point sans que f' soit extensible continûment en ce point.

4.7. **Règle de Bernoulli-L'Hospital.** (Jean Bernoulli (1667-1748) a fait sa thèse sous la direction de son frère Jacques (1654-1705) ; Guillaume de L'Hospital (1661-1704))

Lemme 4.1. Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, et différentiables sur $]a, b[$. Si g' ne s'annule en aucun point de $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. Si $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$, alors $g(b) \neq g(a)$ (Théorème de Rolle). Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

On a $h(a) = h(b) = 0$ et donc $\exists c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.
En calculant h' on a $h'(x) = f'(x) - g'(x)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et donc $h'(c) = 0$ implique $f'(c) = g'(c)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, d'où le résultat puisque $g'(c) \neq 0$. $\square$

Théorème 4.5. (Règle de Bernoulli-L'Hôspital). Soit $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ et telles que g, g' ne s'annulent en aucun point de $]a,b[$. On suppose

1) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} g(x) = \alpha$ avec $\alpha = 0$ ou $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$;

2) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Alors on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

Démonstration.

1° Supposons $\alpha = 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. En prolongeant f et g en a par zéro, on peut appliquer le lemme précédent sur l'intervalle $[a,x]$. Ainsi $\forall x \in]a,b[$, il existe $c = c(x) \in]a,x[$ tel que $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ et en faisant tendre x vers a on obtient le résultat désiré.

2° Supposons $\alpha = +\infty$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Par l'hypothèse (2), $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \mu| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in]a, x_0[$. Grâce au lemme précédent, si $x \in]a, x_0[$, il existe $\xi = \xi(x) \in]x, x_0[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Ainsi

$$\Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-\mu\Big| = \Big|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\mu\Big| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

ou encore

$$\Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}+|\mu|, \qquad \forall x \in]a,x_0[.$$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = +\infty$, on peut choisir x_0 "suffisamment proche de a" pour que $f(x) \neq f(x_0)$ et $f(x) > 0$, $\forall x \in]a,x_0[$. Soit maintenant $h :]a,x_0[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}$. On a $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} h(x) = 1$ et donc il existe $d \in]a,x_0[$ tel que $\forall x \in]a,d[$ on ait $|h(x)-1| \le \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2|\mu|}$.
Ainsi, lorsque $x \in]a,d[$, on a

$$\begin{aligned}
|\frac{f(x)}{g(x)}-\mu| &= \Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}h(x)-\mu\Big| \\
&\le \Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\Big||h(x)-1| + \Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-\mu\Big| \\
&\le \Big(\frac{\varepsilon}{2}+|\mu|\Big)\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2|\mu|}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$.

3° $\alpha = 0$ ou $\alpha = +\infty$ et $\mu = \infty$. L'hypothèse (2) avec $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} g(x) = \alpha$ implique qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que f et f' ne s'annulent en aucun point de $]a,x_0[$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, on obtient par ce qui précède $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. Comme f et g ne s'annulent pas sur $]a,x_0[$, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

4° Tous les autres cas se déduisent de la même manière.

$\square$

4.8. **Développements limités et formules de Taylor.**

Définition 4.4. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. S'il existe $(n+1)$ constantes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ et une fonction $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ qui satisfont :

1) $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \varepsilon(x), \forall x \in D$;

2) $\varepsilon(x) = o\left(|x - x_0|^n\right)$ si $x \underset{\neq}{\to} x_0$,

on dit que (1) est le <u>développement limité d'ordre n autour de x_0</u> de la fonction f. La fonction polynômiale $p : D \to \mathbb{R}$ définie par $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j$ est dite <u>partie principale</u> du développement limité et $\varepsilon(x)$ est dit <u>le reste</u>.

<u>Propriétés</u>.

1) <u>Le développement limité est unique</u>. Si $f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + \delta(x)$ avec $\delta(x) = o\left(|x - x_0|^n\right)$ si $x \underset{\neq}{\to} x_0$, alors on a $a_j = b_j$, $0 \leq j \leq n$. En effet, en posant $c_j = b_j - a_j$, on obtient $\sum_{j=0}^{n} c_j (x - x_0)^j + \delta(x) - \varepsilon(x) = 0$, $\forall x \in D$. Si on fait tendre x vers x_0, on obtient immédiatement $c_0 = 0$. Supposons maintenant que $c_0 = c_1 = c_2 = c_k = 0$ si $k < n$. Il suffit alors de diviser l'expression par $(x - x_0)^{k+1}$ et faire tendre x vers x_0 pour montrer que $c_{k+1} = 0$. Ainsi $b_j = a_j$, $\forall j = 0, 1, 2, \dots, n$. Il suit naturellement que $\varepsilon(x) = \delta(x)$.

2) Si $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j + \varepsilon(x)$ est le développement limité d'ordre n autour de x_0 de f, alors $f(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j (x - x_0)^j + \delta(x)$ avec $\delta(x) = \sum_{j=p+1}^{n} a_j (x - x_0)^j + \varepsilon(x)$ devient le développement limité d'ordre $p < n$ de f autour de x_0 car $\delta(x) = o\left(|x - x_0|^p\right)$ si $x \underset{\neq}{\to} x_0$.

3) Au départ f n'est pas supposée définie en x_0. Mais, si $x \underset{\neq}{\to} x_0$, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = a_0$. Ainsi, il n'est donc pas restrictif de supposer

$f(x_0) = a_0$ et de poser $\varepsilon(x_0) = 0$. Si $f(x_0) = a_0$ et si f est dérivable en x_0, on obtient $f'(x_0) = a_1$.

4) Si $f : D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $x_0 = 0$, et si, de plus, $x \in D$ implique $-x \in D$, et que $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = o\left(|x|^n\right)$ si $x \underset{\neq}{\to} 0$ est le développement limité d'ordre n de f autour de $x_0 = 0$, alors

- si$f$ est paire alors $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$ (indices impairs) ;
- si f est impaire alors $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$ (indices pairs).

5) Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions admettant les développements limités d'ordre n autour de x_0 suivants :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j + \varepsilon(x);\ g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x - x_0)^j + \delta(x)$$

avec $\varepsilon(x)$ et $\delta(x)$ étant $o\left(|x - x_0|^n\right)$ si $x \underset{\neq}{\to} x_0$, et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{j=0}^{n} (\alpha a_j + \beta b_j)(x - x_0)^j + \chi(x)$ où $\chi(x) = \alpha\varepsilon(x) + \beta\delta(x)$ est $o\left(|x - x_0|^n\right)$ si $x \underset{\neq}{\to} x_0$ (linéarité).

6) Les propriétés des développements limités de $f \cdot g$, f/g, $g \circ f$, $\ldots$ découlent immédiatement des exemples traités. Par exemple si $n = 2$, on a $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \varepsilon(x)$, $g(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \delta(x)$ avec $\varepsilon(x)$ et $\delta(x) = o\left(|x - x_0|^2\right)$. En faisant le produit, on obtient :

$$\begin{aligned}
&f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) \\
&+ (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)(x - x_0)^2 \\
&+ \underbrace{(b_1 a_2 + b_2 a_1)(x - x_0)^3 + a_2 b_2 (x - x_0)^4 + \varepsilon(x)\delta(x) + \varepsilon(x) b_0 + \ldots}_{o(|x - x_0|^2) \text{ si } x \underset{\neq}{\to} x_0}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) \\
&\quad + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)(x - x_0)^2 + \chi(x)
\end{aligned}$$

avec $\chi(x) = o\left(|x-x_0|^2\right)$ si $x \underset{\neq}{\to} x_0$. Remarquons que les termes $b_0\varepsilon(x) + a_0\delta(x)$ à eux seuls nous montrent que l'on ne peut pas obtenir un développement limité d'ordre 3 de fg autour de x_0 !

4.9. Formule de Taylor.

Théorème 4.6. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur I. Si $a \in I$ alors $\forall x \in I$, $\exists \theta_x \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + f^{(n+1)}\left(a+\theta_x(x-a)\right)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

On notera

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left(a+\theta_x(x-a)\right)(x-a)^{n+1}$$

et cette relation est appelée formule de Taylor (ou formule de Mac-Laurin lorsque $a = 0$).

Démonstration. On pose $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k$.

- Si $y > a$ on définit $g(x) = f(x) - p_n(x) + \frac{p_n(y)-f(y)}{(y-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1}$. On a $g(a) = g'(a) = g''(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0$. D'autre part, $g(y) = 0$ et si on applique le théorème de Rolle, il existe $y_1 \in]a,y[$ tel que $g'(y_1) = 0$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à g' puisque $g'(a) = g'(y_1) = 0$. Il existe $y_2 \in]a,y_1[$ tel que $g''(y_2) = 0$. Si on continue, on obtient nécessairement l'existence de $y_n \in]a,y[$ tel que

$$g^{(n)}(y_n) = 0.$$

Comme $g^{(n)}(a) = g^{(n)}(y_n) = 0$, on applique encore une fois le théorème de Rolle pour obtenir l'existence de θ_y tel que $\theta_y \in]0,1[$ et

$$g^{(n+1)}(a + \theta_y(y-a)) = 0.$$

Puisque p_n est un polynôme de degré n, on a $p_n^{(n+1)}(x) = 0$ et ainsi $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) + (n+1)!\frac{p_n(y)-f(y)}{(y-a)^{n+1}}$. Ainsi

$$\frac{f(y)-p_n(y)}{(y-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta_y(y-a)),$$

ce qui implique bien

$$f(y) = p_n(y) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(a + \theta_y(y-a)\right)(y-a)^{n+1}.$$

- Si $y = a$ le résultat est évident.
- Si $y < a$ on a la même démonstration mais par exemple les points y_j sont dans $]y,a[$ au lieu d'être dans $]a,y[$.

□

4.10. **Relation "formule de Taylor" et "développement limité".**

Théorème 4.7. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur I et soit $a \in I$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que $|f^{n+1}(x)| \leq M$, $\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha]$. Alors la formule de Taylor fournit le développement limité d'ordre n de f autour de a.

Démonstration. La formule de Taylor implique que $\forall x \in I$, $\exists \theta_x$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(a + \theta_x(x-a)\right)(x-a)^{n+1}.$$

Si maintenant $x \in I$ et vérifie $|x-a| \leq \alpha$, alors on a

$$\left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(a + \theta_x(x-a)\right)(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} M|x-a|^{n+1}$$

et en posant $\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(a + \theta_x(x-a)\right)(x-a)^{n+1}$, on obtient bien

$$\varepsilon(x) = o\left(|x-a|^n\right) \qquad \text{si } x \underset{\neq}{\to} a$$

et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \varepsilon(x)$ avec $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$. □

Remarque 4.8. Sous l'hypothèse $|f^{n+1}(x)| \leq M$, $\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha]$ on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \mathcal{O}(|x-a|^{n+1}) \quad \text{si} \quad x \to a$$

ou

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + o(|x-a|^n) \quad \text{si} \quad x \underset{\neq}{\to} a.$$

Par contre, si $f \in C^{n+1}(I)$, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + o(|x-a|^{n+1}) \quad \text{si} \quad x \underset{\neq}{\to} a.$$

En effet, si $f \in C^{n+1}(I)$, alors $f^{(n+1)}$ est continue sur I et il existe $\alpha > 0$, $M > 0$ tels que $|f^{n+1}(x)| \leq M$, $\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha]$.
On obtient ainsi

$$\begin{aligned} f(x) = &\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\Big[f^{(n+1)}(a+\theta_x(x-a)) - f^{(n+1)}(a)\Big](x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\frac{\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k\right|}{|x-a|^{n+1}} \\ &\qquad \leq \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(a+\theta_x(x-a)) - f^{(n+1)}(a)\right| \quad \text{si} \quad x \neq a. \end{aligned}$$

Par continuité de $f^{(n+1)}$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \left| f^{(n+1)}(a+\theta_x(x-a)) - f^{(n+1)}(a) \right| = 0$ ce qui prouve que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + o(|x-a|^{n+1}) \quad \text{si} \quad x \underset{\neq}{\to} a.$$

Applications.

1) Maximum ou minimum local. Supposons que $f \in C^2(I)$, $a \in I$ et $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$. On sait que $f'(a) = 0$ est une condition nécessaire pour avoir un extremum local, mais cette condition n'est pas suffisante. On va montrer alors que $f''(a) \neq 0$ avec $f'(a) = 0$ donne une condition suffisante pour obtenir un extremum local en $x = a$.
   Le développement de Taylor à l'ordre 1 en a nous donne alors
   $$f(x) = f(a) + \frac{1}{2!} f''\left(a + \theta_x(x-a)\right)(x-a)^2.$$
   Si par exemple $f''(a) > 0$, alors $f(x) - f(a) = f''\left(a + \theta_x(x-a)\right)(x-a)^2$ et comme $f'' \in C^0(I)$, il existe $\alpha > 0$ tel que $x \in I$, $|x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) - f(a) \geq 0$, ce qui montre que f admet un minimum local en a. Si $f''(a) < 0$ on montre de même que f admet un maximum local en a. Ce résultat se généralise à $f \in C^{2n}(I)$ avec $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(2n-1)}(a) = 0$ et $f^{(2n)}(a) \neq 0$ (ici $n \geq 1$).

2) Point d'inflexion.
   - Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et si $c \in]a, b[$ est tel que $f'(c)$ existe, alors la fonction $t :]a, b[\to \mathbb{R}$ définie par $t(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ a pour graphe la tangente au graphe de f au point c. Ainsi, si $\psi(x) = f(x) - t(x)$ change de signe au point c, nous dirons que $(c, f(c))$ est un point d'inflexion du graphe de f au point c.
   - Si f est $(2n+1)$ fois continûment dérivable au point c ($n = 1, 2, \ldots$) et si $f^{(j)}(c) = 0$, $\forall j = 2, 3, \ldots 2n$ et $f^{(2n+1)}(c) \neq 0$, alors $(c, f(c))$ est un point d'inflexion. En effet, on a $\psi(x) = f(x) - f(c) -$

$f'(c)(x-c) = \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}\left(c+\theta_x(x-c)\right)(x-c)^{2n+1}$ avec θ_x dans $]0,1[$. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in]a,b[$ avec $0 < |x-c| \leq \varepsilon$, $f^{(2n+1)}\left(c+\theta_x(x-c)\right)(x-c)^{2n+2}$ a un signe (ce qui montre que $\psi(x)(x-c)$ a un signe) et donc $\psi(x)$ change de signe en $x = c$.

⚠ Si $f \in C^2(I)$ et si $f'(c) = f''(c) = 0$, on ne peut pas déduire que l'on a un extremum local, ni même un point d'inflexion. Si de plus $f \in C^3(I)$ et $f'''(c) \neq 0$, alors on a un point d'inflexion. Si $f'''(c) = 0$, il faut alors regarder les dérivées d'ordre supérieur. Si $f^{(4)}(c) \neq 0$, on aura un extremum local, etc... .

3) Emploi du développement limité pour les formes indéterminées.

Exemple : calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{6\sin(x) + x^3 - 6x}{x^5}$. Clairement, par la formule de Taylor en $x = 0$, on a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cos(\theta_x x)\frac{x^5}{5!}, \qquad \text{avec } \theta_x \in]0,1[.$$

Ainsi

$$\frac{6\sin(x) + x^3 - 6x}{x^5} = \frac{\frac{6}{5!}\cos(\theta_x x)x^5}{x^5} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{6}{5!} = \frac{1}{20}.$$

4.11. **Fonctions convexes.**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 4.5. f est dite <u>convexe</u> si $\forall a, b \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$ on a

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Définition 4.6. f est dite <u>concave</u> si $-f$ est convexe.

Théorème 4.8. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et soit f une fois dérivable sur I. Si f' est croissante dans I, alors f est convexe.

Démonstration. Soit $a, b \in I$ avec $a < b$ et soit $x \in [a, b]$. On a $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ avec $\lambda \in [0,1]$. Le théorème des accroissements finis implique l'existence de x_1, x_2 tels que $a < x_1 < x < x_2 < b$ et

$$f(x) - f(a) = f'(x_1)(x-a); \qquad f(b) - f(x) = f'(x_2)(b-x).$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} &f(x) - \lambda\left(f(x) - f(a)\right) + (1-\lambda)\left(f(b) - f(x)\right) = \\ &\qquad = f(x) - \lambda f'(x_1)(x-a) + (1-\lambda) f'(x_2)(b-x), \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = f(x) - \lambda f'(x_1)(x-a) + (1-\lambda) f'(x_2)(b-x).$$

Puisque $b - x = \lambda(b-a)$ et $x - a = (1-\lambda)(b-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \\ &= f(x) - \lambda f'(x_1)(1-\lambda)(b-a) + (1-\lambda) f'(x_2)\lambda(b-a) \\ &= f(x) + \lambda(1-\lambda)(b-a)\left(\underbrace{f'(x_2) - f'(x_1)}_{\geq 0}\right) \geq f(x). \end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 4.5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert non vide et f deux fois dérivable sur I. Si $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in I$, alors f est convexe.

Démonstration. Si $f'' \geq 0$, on a f' croissante. $\square$

Remarque 4.9. Il existe beaucoup de résultats sur les fonctions convexes dont certains feront l'objet d'exercices. Par exemple, on peut montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors elle est nécessairement continue sur I et admet en tout point de I des dérivées à droite et à gauche. Si de plus f est dérivable, alors nécessairement $f \in C^1(I)$. Dans ce cas, le graphe de f est toujours "au-dessus" de n'importe quelle tangente à ce graphe.

5. Séries entières

5.1. **Généralités.**

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle série entière (ou série de puissance) l'expression

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots .$$

La $N^{\text{ième}}$ somme partielle de la série entière est donc

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n.$$

Définition 5.1. On dit que la série entière converge sur I si la suite S_N est convergente vers une fonction f sur l'intervalle I, i.e. $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Elle converge uniformément sur I si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 > 0$ tel que $\forall x \in I$, $\forall N \geq N_0$, on ait $|f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon$.

La série entière généralise la notion de polynômes.
Dans la suite nous prendrons $x_0 = 0$ pour simplifier l'écriture, sachant qu'il suffit de faire une translation de l'origine de l'axe Ox pour obtenir des résultats analogues lorsque $x_0 \neq 0$.

Théorème 5.1. Supposons qu'il existe $\hat{x} \neq 0$ telle que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n$ soit convergente. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument sur $I =]-\hat{x}, \hat{x}[$ si $\hat{x} > 0$ ou $I =]\hat{x}, -\hat{x}[$ si $\hat{x} < 0$ et donc elle est convergente.

Démonstration. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n \hat{x}^n| = 0$ et ainsi il existe une constante C telle que $|a_n \hat{x}^n| \leq C$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$.

Soit $x \in I = \{x \in \mathbb{R} : |x| < |\hat{x}|\}$. On a $x = \xi\hat{x}$ avec $|\xi| < 1$. Ainsi

$$|a_n x^n| = |a_n|\ |x|^n = |a_n|\ |\hat{x}|^n\ |\xi|^n \leq C|\xi|^n$$

et $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^n < \infty$, ce qui montre que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument ; donc converge sur I. $\square$

Remarque 5.1. Ce résultat justifie la définition suivante :
On appelle rayon de convergence de la série entière le nombre $R = \sup |x|$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge. Ainsi, en supposant $R > 0$, si $|x| < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge et si $|x| > R$, la série diverge. Si $|x| = R$, la situation est plus compliquée et on ne peut rien dire a priori.

Exemple 5.1. $a_n = 1$, $\forall n$ donne lieu à la série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. On obtient $R = 1$ et la limite de la série est $f(x) = \frac{1}{1-x}$. La série est divergente pour $|x| \geq 1$.

Exemple 5.2. $a_0 = 1$, $a_k = \frac{1}{k}$ si $k = 1, 2, \ldots$. La série entière est donc $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{1}{n}x^n + \ldots$ qui a pour rayon de convergence $R = 1$. Si $x = 1$ la série diverge (série harmonique), mais si $x = -1$ la série converge (série harmonique alternée).

Exemple 5.3. $a_n = \frac{1}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (par convention $0! = 1$). Soit $\hat{x} > 0$ quelconque. On considère $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{x}^n$. Si on suit le critère de d'Alembert (théorème 2.6)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}\hat{x}^{n+1}}{\frac{1}{n!}\hat{x}^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\hat{x} = 0,$$

on a $\rho < 1$ et donc la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n$ converge absolument. Ainsi la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ converge sur $\mathbb{R}$. On définit ainsi la fonction exponentielle par

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

et le rayon de convergence de la série est $R = +\infty$.

Exemple 5.4. $a_n = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Soit $\hat{x} \neq 0$ quelconque. On considère $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, \hat{x}^n$. Le critère de d'Alembert donne maintenant

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, |\hat{x}|^{n+1}}{n!\, |\hat{x}|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|\hat{x}| = +\infty,$$

et donc la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n$ diverge.
Ainsi la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ a un rayon de convergenve $R = 0$.

Théorème 5.2. On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors la série entière converge uniformément dans l'intervalle $[-r, +r]$ où $0 < r < R$.

Démonstration. Soit $S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ la $m^{\text{ième}}$ somme partielle de la série. On a si $m > n$ et si $x \in [-r, r]$:

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\ |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| r^k.$$

On sait que pour $x = r$ la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ est absolument convergente, et donc convergente, et donc de Cauchy. Ainsi $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de fonctions continues sur $[-r, +r]$ et de Cauchy pour la norme du maximum (cf. théorème 3.14). Elle est donc convergente uniformément vers une fonction f. Par unicité de la limite, le théorème est démontré. $\square$

Théorème 5.3. (Théorème d'Abel) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est un réel $R > 0$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ pour } |x| < R.$$

Alors,

· si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge, alors $\lim_{\substack{x \to R \\ <}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$;

· si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ converge, alors $\lim_{\substack{x \to -R \\ >}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$.

Démonstration. Posons $b_n = a_n R^n, n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = s$. Il n'est pas restrictif de supposer que $s = 0$ car il suffit de changer b_0 en $b_0 - s$.

Si nous définissons la série entière suivante :

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n, \qquad |w| < 1,$$

dont le rayon de convergence est 1, il suffira alors de démontrer que $\lim_{\substack{w \to 1 \\ <}} g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = s = 0$.

Posons pour cela $s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$. On a bien sûr, $\lim_{n\to\infty} s_n = s = 0$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} b_0 + &b_1 w + b_2 w^2 + \ldots + b_n w^n \\ &= s_0 + (s_1 - s_0)w + (s_2 - s_1)w^2 + \ldots + (s_n - s_{n-1})w^n \\ &= s_0(1-w) + s_1(w - w^2) + \ldots + s_{n-1}(w^{n-1} - w^n) + s_n w^n \\ &= (1-w)\left(s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + \ldots + s_{n-1} w^{n-1}\right) + s_n w^n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $|w| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} s_n w^n = 0$ et donc

$$g(w) = (1-w) \sum_{n=0}^{\infty} s_n w^n.$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } |s_n| \leq \frac{\epsilon}{2},\ \forall n \geq N_0.$$

Il existe $\delta \in]0,1[$ tel que :

$$\left|(1-w)\sum_{n=0}^{N_0} s_n w^n\right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{si } w \in [1-\delta, 1[.$$

Ainsi, si $w \in [1-\delta, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} |g(w)| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \left|(1-w)\sum_{n=N_0+1}^{\infty} s_n w^n\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + (1-w)\frac{\epsilon}{2}\sum_{n=N_0+1}^{\infty} w^n \\ &= \frac{\epsilon}{2}\left(1 + w^{N_0+1}\frac{1}{1-w}(1-w)\right) = \frac{\epsilon}{2}(1 + w^{N_0+1}) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

On aura donc

$$|g(w)| \leq \epsilon,\ \forall w \in [1-\delta, 1[$$

ce qui montre que $\lim_{\substack{w\to 1\\ <}} g(w) = 0$.

On procède de même pour $-R$. □

Ci-après, nous énonçons quelques résultats sans démonstration :

<u>Résultat 1</u>: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} (|a_k|)^{1/k}}.$$

Rappel : $\limsup_{k\to\infty} (|a_k|)^{1/k} = \inf_{n\geq 0} \sup\{|a_k|^{1/k} : k \geq n\}$.

<u>Résultat 2</u> (exercice): Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $x \in]-R, +R[$ la limite d'une série entière qui a pour rayon de convergence $R > 0$. Alors

- $f \in C^\infty(I)$ où $I =]-R, +R[$,
- $f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}$, et le rayon de convergence de sa série entière est encore R,
- $f''(x) = \sum_{k=2}^\infty k(k-1) a_k x^{k-2}$, et le rayon de convergence de sa série entière est encore R,
- $\dots$.

<u>**Résultat 3:**</u> On peut regrouper les termes de n'importe quelle manière

- $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k = \sum_{k=0}^\infty a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^\infty a_{2k+1} x^{2k+1}$,
  lorsque $|x| < R_1$, où R_1 est le rayon de convergence de la série.
- $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^\infty b_k x^k = \sum_{k,j=0}^\infty a_k b_j x^{k+j}$,
  lorsque $|x| < min(R_1, R_2)$ où R_1, R_2 sont les rayons de convergence des deux séries.

<u>Exercice</u> : On a défini l'exponentielle par $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} x^k$. Montrer que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

5.2. **Séries de Taylor.**

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert avec $a < b$ et considérons $f \in C^\infty(I)$. Si $\bar{x} \in I$, on peut considérer la formule de Taylor autour de $\bar{x}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x})(x - \bar{x})^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\big(\bar{x} + \theta_x(x - \bar{x})\big)(x - \bar{x})^{n+1}$$

avec $\theta_x \in]0, 1[$.

Cette formule nous incite à considérer la série entière

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x})(x - \bar{x})^k$$

où ici $(x-\bar{x})$ joue le rôle de x (translation de zéro en $\bar{x}$). Cette série s'appelle série de Taylor en $x=\bar{x}$ de la fonction f.

⚠ Si la série de Taylor $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(\bar{x})(x-\bar{x})^k$ de f en $x=\bar{x}$ a pour rayon de convergence $R>0$, alors cette série converge vers $g:]\bar{x}-R,\bar{x}+R[\to\mathbb{R}$ mais g n'a aucune raison d'être égale à f sur $]\bar{x}-R,\bar{x}+R[$.

Définition 5.2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction $C^{\infty}(\mathbb{R})$ et soit sa série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}\ (\bar{x})(x-\bar{x})^n$ en $x=\bar{x}$. On suppose que le rayon de convergence $R=R(\bar{x})$ est non nul (donc >0). S'il existe $\varepsilon>0$, $\varepsilon<R$ tel que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\bar{x})(x-\bar{x})^n$, $\forall x\in]\bar{x}-\varepsilon,\bar{x}+\varepsilon[$, on dit alors que f est analytique au voisinage de $\bar{x}$. Elle est analytique sur $\mathbb{R}$ si elle est analytique au voisinage de chacun des $\bar{x}\in\mathbb{R}$.

Exemple 5.5. $f(x)=\sin(x)$, $\bar{x}=0$. On a $f'(x)=\cos(x), f''(x)=-\sin(x),\ldots$ et ainsi la série de Taylor de sin en $\bar{x}=0$ devient :

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Soit $\hat{x}>0$ et considérons le critère de d'Alembert :

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+1)!}\hat{x}^{2n+1}}{\frac{1}{(2n-1)!}\hat{x}^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{x}^2}{(2n+1)2n}=0.$$

Ainsi la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge absolument vers une fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. En fait, on peut montrer que cette fonction g est la fonction sinus, et donc cette dernière est analytique sur $\mathbb{R}$.

Remarque 5.2. Il ne faut pas confondre $C^{\infty}(\mathbb{R})$ et analytique sur $\mathbb{R}$. On peut montrer que la fonction $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ est telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^me^{-x}=0$,

$\forall m \in \mathbb{N}$. Ainsi, si on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

on a $f_g^{(n)}(1) = f_d^{(n)}(-1) = 0$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ où $f_g^{(n)}$ et $f_d^{(n)}$ dénotent les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ à gauche et à droite respectivement. On vérifie ainsi que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que la série de Taylor de f en $\bar{x} = -1$ et en $\bar{x} = +1$ est réduite à zéro ; elle ne converge donc pas vers f dans un voisinage de ces 2 points. La fonction f n'est pas analytique au voisinage de $\bar{x} = 1$ et $\bar{x} = -1$. Par contre, f est analytique sur l'intervalle ouvert $]-1, +1[$!

6. Fonctions exponentielle et logarithme

6.1. **Exponentielle et sa réciproque.**

Nous avons vu la définition du nombre $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $x \in \mathbb{R}$, ce qui nous permet de définir la fonction

$$\begin{aligned} \exp\ &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \rightsquigarrow \exp(x) = e^x. \end{aligned}$$

On peut montrer, en regroupant certains termes, que

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x+y)^k,$$

i.e. $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (exercice). Il en découle que :

$1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x}$,

$e^{-x} = 1/e^x$,

et $e^x = e^{x/2+x/2} = (e^{x/2})^2$.

On a ainsi les propriétés suivantes de l'exponentielle :

1) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

2) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

3) $\exp(qx) = \exp(x)^q$, $\forall q$ fractionnaire ($q = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$) ;

4) $\frac{d}{dx} \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp(x)$ et ainsi $\exp(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$; même mieux, exp est analytique sur $\mathbb{R}$;

5) Si $x > 0$: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \geq \frac{x^p}{p!} \underset{x \to \infty}{\to} \infty$ pour $p \in \mathbb{N}$ fixé et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x)} = 0$;

6) On a $\frac{d^m}{dx^m} \exp(x) = \exp(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ exp est une fonction convexe, strictement croissante, strictement positive ;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, car $\forall p > n$, $\dfrac{\exp(x)}{x^n} \geq \dfrac{1}{p!}x^{p-n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$;

8) Le logarithme népérien, noté log (parfois aussi noté ln), est la fonction inverse de exp : $\mathbb{R} \to \mathcal{R}(\exp) = \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$y = \log(x) \Leftrightarrow e^y = x$$

et donc $x = e^{\log(x)}$.

On a les propriétés suivantes de la fonction logarithme :

1) $e^{\log(xy)} = xy = e^{\log(x)} \cdot e^{\log(y)} = e^{\log(x)+\log(y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

2) Si on dérive l'égalité $x = e^{\log(x)}$, on obtient $1 = e^{\log(x)} \cdot \log'(x)$; d'où $1 = x \ \log'(x)$ et par suite $\log'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

3) On a bien évidemment $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \log(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$.

4) On a $\dfrac{\log(x)}{x^n} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si n est un entier positif et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n \log(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5) Si $q = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$, on a si $c \in \mathbb{R}_+^*$:

$$c^q = c^{m/n} = \sqrt[n]{c^m}$$

et donc $c^m = (c^q)^n$. Ainsi $m \ \log(c) = \log(c^m) = \log(c^q)^n = n \ \log(c^q)$ et donc $\log(c^q) = q \ \log(c)$ qui est équivalent à $c^q = e^{q \ \log(c)}$.

Ainsi, pour tout nombre rationnel q et tout $c \in \mathbb{R}_+^*$, on a $c^q = e^{q \ \log(c)}$ et on prolonge cette notion de “puissance rationnelle” à la notion de “puissance réelle x” par

$$c^x = e^{x \ \log(c)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

6.2. **Fonction puissance.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et définissons $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^\alpha \underset{déf}{=} e^{\alpha \ \log(x)}.$$

Cette fonction a pour image $\mathbb{R}_+^*$ et elle est $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

6.3. **Fonctions hyperboliques pour $x \in \mathbb{R}$.**

- sh $x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
- ch $x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
- th $x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;
- coth $x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ si $x \neq 0$.

7. Intégration

7.1. **Intégrale d'une fonction continue.**

Soit $a < b$, $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_j > x_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, n$, et $x_0 = a$, $x_n = b$, une subdivision de $[a, b]$. On pose $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, n$ et $h^\sigma = \max\limits_{1 \le j \le n} h_j$. Si $f \in C^0([a, b])$ et si $M_j = \max\limits_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$, $m_j = \min\limits_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$, on pose :

$$\bar{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} M_j h_j \qquad \text{et} \qquad \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} m_j h_j$$

qui sont appelées somme de Darboux supérieure (respectivement inférieure) de f relativement à σ.

Si $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, on a

$$m(b-a) \le \underline{S}_\sigma(f) \le \bar{S}_\sigma(f) \le M(b-a).$$

On pose

$$\bar{S}(f) = \inf\{\bar{S}_\sigma(f) : \sigma = \text{ subdivision de } [a, b]\},$$

$$\underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}_\sigma(f) : \sigma = \text{ subdivision de } [a, b]\}.$$

Théorème 7.1. Soit $a < b$ et soit $f \in C^0([a, b])$. Alors on a

$$\bar{S}(f) = \underline{S}(f).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \in C^0([a, b])$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in [a, b]$ avec $|x - y| \le \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \le \frac{\epsilon}{3}\frac{1}{b-a}$. En prenant $h^\sigma \le \delta$, on a $0 \le M_j - m_j \le \frac{\epsilon}{3}\frac{1}{b-a}$, $\forall j = 1, \dots, n$ et donc

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} M_j h_j - \sum_{j=1}^{n} m_j h_j \le \frac{\epsilon}{3}\frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^{n} h_j = \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, on a

$$0 \leq \bar{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

si σ est tel que $h^\sigma \leq \delta$. De plus, la définition de $\bar{S}(f)$ et $\underline{S}(f)$ implique qu'il existe σ_1, σ_2 telles que $h^{\sigma_1} \leq \delta$, $h^{\sigma_2} \leq \delta$ et $0 \leq \bar{S}_{\sigma_1}(f) - \bar{S}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $0 \leq \underline{S}(f) - \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Si $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, on obtient nécessairement $h^\sigma \leq \delta$ et

$$0 \leq \bar{S}_\sigma(f) - \bar{S}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}; \qquad 0 \leq \underline{S}(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi $|\bar{S}(f) - \underline{S}(f)| \leq |\bar{S}(f) - \bar{S}_\sigma(f)| + |\bar{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f)| + |\underline{S}_\sigma(f) - \underline{S}(f)| \leq \varepsilon$.

$\square$

On pose :

$$\int_a^b f(x)dx = \bar{S}(f) = \underline{S}(f).$$

Définition 7.1.

- $\int_a^b f(x)dx$ est appelée <u>intégrale de f sur $[a,b]$</u>,
- a est la <u>borne inférieure</u>,
- b est la <u>borne supérieure</u>,
- x est la <u>variable d'intégration</u>,
- $[a,b]$ est <u>l'intervalle d'intégration</u>.

7.2. **Propriétés de $\int_a^b f(x)dx$.**

- $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la variable d'intégration. On dit que x est une variable <u>muette</u> et on a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

- Si $c \in [a,b]$, on a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ avec, pour convention, $\int_c^c f(x)dx = 0$ et $\int_c^a f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx$.

- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ si f et $g \in C^0[a,b]$. L'intégration est une opération linéaire sur $C^0[a,b]$.

- $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ si $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Ainsi si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, on a $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ et si $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a,b]$, on a $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

On déduit :

Théorème 7.2. (Le théorème de la moyenne). Il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Démonstration. Si $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, on a que $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. Puisque f est continue, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ car f prend toutes ses valeurs entre m et M. $\square$

Définition 7.2. Si $[a,b]$ est un intervalle fermé avec $a < b$ et si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de f si F est continue sur $[a,b]$ et si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]a,b[$.

Théorème 7.3. Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, est une primitive de f. De plus, si G est une autre primitive de f, on a $F(x) - G(x) =$ constante, $\forall x \in [a,b]$.

Démonstration. Si $x_0 \in]a,b[$ est fixé et si $x \in]a,b[$, on a, par le théorème de la moyenne, l'existence de $c = c(x)$ dans l'intervalle d'extrémités x_0 et x tel que $\int_{x_0}^x f(t)dt = f(c(x)) \cdot (x - x_0)$.
Ainsi :

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt = f(c(x))(x - x_0)$$

ce qui implique

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c(x)).$$

Par continuité de f, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ et donc $F'(x_0) = f(x_0)$.

Il reste à montrer que F est continue à droite en a et à gauche en b. En prenant $x_0 = a$, on a $\int_a^x f(t)dt = f(d(x))(x - a)$ où $d(x) \in]a, x[$, $x > a$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} F(x) = 0 = F(a)$. Idem en b, on a $F(x) = F(b) - \underbrace{\int_x^b f(t)dt}_{\substack{\to 0 \\ x \to b \\ <}}$.

Si maintenant G est une autre primitive, en posant $H(x) = F(x) - G(x)$, on a $H'(x) = 0$, $\forall x \in]a, b[$ et H est continue sur $[a, b]$. Si $a \leq t < s \leq b$, on a l'existence de $\alpha \in]t, s[$ tel que $H(s) - H(t) = H'(\alpha)(s - t) = 0$, ce qui prouve que $H(t) = H(s)$. Comme H est continue sur $[a, b]$, on a $H(x) =$ constante, $\forall x \in [a, b]$. □

Théorème 7.4. (Théorème fondamental du calcul intégral). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue avec $a < b$ et soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $[a, b]$. Alors on a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration. Par le théorème 7.3, on sait que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f et $F(x) = G(x) + C, \forall x \in [a, b]$, où C est constante. Puisque $G(a) = 0$ on a $F(a) = C$ et donc $F(x) = G(x) + F(a)$. On a ainsi

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = G(b) - \underbrace{G(a)}_{0} = F(b) - F(a).$$

□

Théorème 7.5. (Important !). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue avec $a < b$, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $g, h : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. On suppose que $\mathcal{R}(g)$ et $\mathcal{R}(h)$ sont inclues dans $[a,b]$ et on pose $K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$, $\forall x \in I$. Alors K est différentiable sur I et on a $K'(x) = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x))$, $\forall x \in I$.

Démonstration. Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de f, alors

$$K(x) = F(g(x)) - F(h(x)).$$

Ainsi

$$K'(x) = F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

□

Théorème 7.6. Soit $f \in C^0([a,b])$ avec $a < b$. Alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Démonstration. En posant $f^+(x) = f(x)$ si $f(x) \geq 0$, $f^+(x) = 0$ si $f(x) \leq 0$; $f^-(x) = -f(x)$ si $f(x) \leq 0$, $f^-(x) = 0$ si $f(x) \geq 0$, on a bien sûr $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Ainsi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$ et donc

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

Théorème 7.7. (Inégalité de Cauchy-Schwarz (Cauchy (1789-1857), Hermann Schwarz (1843-1921))). Soit $f, g \in C^0([a,b])$ avec $a < b$. Alors

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Si $f \equiv 0$, l'inégalité est triviale. Supposons f non identiquement nulle et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b (\lambda f + g)^2 (x) dx = \lambda^2 \underbrace{\int_a^b f^2(x)dx}_{\neq 0} + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi le discriminant vérifie $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0.$ □

Remarque 7.1. Si $V = C^0([a,b])$, alors V est un espace vectoriel. Si on pose $(f;g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$, on constate que $(\cdot;\cdot)$ est un produit scalaire sur V dont la norme induite est $\|f\|_0 \underset{déf}{=} \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$. L'espace V muni de $\|\cdot\|_0$ n'est pas complet car il existe des suites de Cauchy dans V (pour la norme $\|\cdot\|_0$) qui ne convergent pas dans V. On dit que V muni de $(\cdot;\cdot)$ est un espace préhilbertien. Si on le complète, on aura affaire à l'espace $L^2(a,b) \supset V$ (espace de fonctions Lebesgue mesurables, de carré intégrable !).

Théorème 7.8. Soit $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0([a,b])$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f. Alors on a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. Puisque $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers f, alors on a $f \in C^0([a,b])$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$ tel que $\forall n \geq N_0 : |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall x \in [a,b]$. Ainsi

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \varepsilon, \qquad \forall n \geq N_0.$$

On a $|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \varepsilon$, $\forall n \geq N_0$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. $\square$

Remarque 7.2. Le théorème 7.8 nous enseigne que si la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0([a,b])$ converge uniformément, alors on peut permuter "limite" et "intégrale", c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$. Par contre, ce résultat est en général faux lorsqu'on n'a que la convergence ponctuelle comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 7.1. Sur l'intervalle $[0,1]$ on définit les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = 4n^2x$ si $x \in [0, \frac{1}{2n}]$, $f_n(x) = 4n - 4n^2x$ si $x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n}, 1]$, avec $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ici, $\forall x \in [0,1]$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$, (convergence ponctuelle mais non uniforme vers zéro !).
On a $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ alors que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Ainsi on ne peut pas permuter "limite" et "intégrale" car :

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Remarque 7.3. Si $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions dans $C^0([a,b])$ qui converge ponctuellement vers $f \in C^0([a,b])$ alors, par le théorème de Dini, on obtient la convergence uniforme de la suite et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. On obtient ainsi, si $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C^0([a,b])$ est une suite monotone et convergente ponctuellement vers $f \in C^0([a,b])$, le résultat suivant :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

7.3. **Changement de variables.**

Théorème 7.9. Soit $f \in C^0([a,b])$ et soit $\varphi \in C^1(I)$ où I est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in I$ tel que $\varphi([\alpha,\beta]) = [a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

Démonstration. Si $t \in [\alpha,\beta]$, on définit

$$G(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

On vérifie (c.f. théorème 7.5) que $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$, $\forall t \in]\alpha,\beta[$ et donc G est une primitive de g sur $[\alpha,\beta]$ car $G \in C^0([\alpha,\beta])$. On obtient donc

$$\int_\alpha^\beta g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

7.4. **Intégration par parties.**

Théorème 7.10. Soit $f, g \in C^1(I)$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $a < b$ deux éléments de I alors on a

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration. Puisque $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, on a

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b (fg)'(x)dx = |fg(x)|_{x=a}^{x=b}$$

où la notation $|h(x)|_{x=a}^{x=b}$ signifie $h(b) - h(a)$. □

Application : Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{f} \underbrace{\sin\ x}_{g'} dx = | - x \ \cos\ x|_{x=0}^{x=\pi/2} - \left(- \int_0^{\pi/2} \cos\ x\ dx \right) =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos\ x\ dx = |\sin\ x|_{x=0}^{x=\pi/2} = 1.$$

7.5. **Formule de Taylor avec reste intégral.**

Théorème 7.11. Soit $f \in C^{n+1}(I)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. Soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration. Clairement si $n = 0$ on a bien $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. Supposons que la formule de Taylor ci-dessus soit vraie et montrons que si $f \in C^{n+2}(I)$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt.$$

On a donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n)!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

En intégrant par parties le second terme ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{(n)!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$
$$= \left| \frac{-1}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \right|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(n)!}\int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt.$$

Ainsi on obtient le résultat attendu. □

7.6. **Décomposition en éléments simples.**

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes n'ayant aucun diviseur commun. On suppose que $Q(x)$ est unitaire, i.e. le coefficient du plus haut degré est 1, et soit $a_1, \ldots, a_n$ les racines réelles de $Q(x)$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit que

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{m} \left(x^2 + 2b_j x + c_j\right)^{\ell_j},$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ sont des entiers positifs, les termes $(x^2 + 2b_j x + c_j)$ sont des diviseurs irréductibles de Q tous distincts. On peut alors démontrer que le quotient $P(x)/Q(x)$ peut toujours s'écrire comme :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{\ell=1}^{k_1} \frac{\alpha_{1\ell}}{(x - a_1)^\ell} + \sum_{\ell=1}^{k_2} \frac{\alpha_{2\ell}}{(x - a_2)^\ell} + \ldots + \sum_{\ell=1}^{k_n} \frac{\alpha_{n\ell}}{(x - a_n)^\ell}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\ell_1} \frac{\beta_{1k} x + \gamma_{1k}}{(x^2 + 2b_1 x + c_1)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{\ell_m} \frac{\beta_{mk} x + \gamma_{mk}}{(x^2 + 2b_m x + c_m)^k}.$$

7.7. **Intégration d'une fonction rationnelle.**

Soit $P(x), Q(x)$ deux polynômes n'ayant pas de diviseur commun et tels que $Q(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle fermé $[x_1, x_2]$. Pour calculer $\int_{x_1}^{x_2} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, il suffit de décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. Ainsi, on a à intégrer des termes du type $\frac{1}{(x-a)^\ell}$ et $\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2bx+c)^k}$ entre a et b. On a :

- Primitive de $\dfrac{1}{(x-a)}$ donnée par $\log|x-a|$;
- Primitive de $\dfrac{1}{(x-a)^\ell}$ avec $\ell > 1$ donnée par $\dfrac{1}{1-\ell}\dfrac{1}{(x-a)^{\ell-1}}$;
- Primitive de $\dfrac{\beta x+\gamma}{(x^2+2bx+c)} = \dfrac{\beta}{2}\dfrac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)} + \dfrac{\gamma - b\beta}{(x^2+2bx+c)}$ donnée par

$$\frac{\beta}{2}\log|x^2+2bx+c| + \frac{\gamma-b\beta}{\sqrt{c-b^2}} \text{ Arctg } \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}.$$

(Remarque : $c - b^2$ est positif car sinon, si $b^2 - c \geq 0$, on aurait $(x^2 + 2bx + c) = (x + b + \sqrt{b^2-c})(x + b - \sqrt{b^2-c})$ et ainsi $x^2 + 2bx + c$ serait un diviseur réductible !).

- Primitive de $\dfrac{\beta x+\gamma}{(x^2+2bx+c)^k}$ avec $k > 1$, on écrit

$$\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2bx+c)^k} = \frac{\beta}{2}\frac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)^k} + \frac{\gamma-b\beta}{(x^2+2bx+c)^k}.$$

Ainsi une primitive de $\dfrac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)^k}$ est donnée par $\dfrac{1}{(1-k)(x^2+2bx+c)^{k-1}}$.
Il reste à trouver une primitive de $\dfrac{1}{(x^2+2bx+c)^k}$. Avec un changement de variables fait comme ci-dessous :

- $x^2+2bx+c = (x+b)^2+c-b^2 = (c-b^2)[\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right)^2+1]$ et si $t = \dfrac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$ on a $x^2+2bx+c = (c-b^2)(t^2+1)$; il suffit de savoir intégrer $\dfrac{1}{(t^2+1)^k}$.

Exercice : Si $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, n entier positif, alors on a

$$2n\ I_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n(x).$$

Indication : Poser $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$, $v(t) = t$. Ainsi, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x u(t)v'(t)dt$ et utiliser la formule d'intégration par parties.

7.8. **Quelques changements de variables.**

Posons $R(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \dfrac{P(s_1, s_2, \ldots, s_k)}{Q(s_1, s_2, \ldots, s_k)}$ où P et Q sont des polynômes à k variables réelles. Si on veut intégrer

- $R(e^x, \text{sh } x, \text{ch } x, \text{th } x, \text{cth } x)$, on fait le changement $x = \log t$, $t > 0$;
- $R(\sin\ x, \cos\ x, \text{tg } x, \text{cotg } x)$, on fait le changement $x = 2\ \text{Arctg } t$, $t \in \mathbb{R}$;
- $R(x, \sqrt{\beta^2x^2+\alpha^2})$, on fait le changement $x = \frac{\alpha}{\beta}\ \text{sh } t$, $t \in \mathbb{R}$;
- $R(x, \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2})$, on fait le changement $x = \frac{\alpha}{\beta} \sin t$, $t \in \mathbb{R}$
- $R(x, \sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2})$, on fait le changement $x = \frac{\alpha}{\beta}\ \text{ch } t$, $t \in \mathbb{R}$;
- etc...

On peut utiliser MAPLE ou MATLAB pour obtenir bon nombre de résultats d'intégration !!!

8. Intégrales généralisées

8.1. Intégrants singuliers sur des intervalles bornés.

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b[$ où $a < b$. Si $x \in [a,b[$, on peut calculer :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Définition 8.1. Si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} F(x)$ existe, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ existe (ou converge) et on pose par définition $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} F(x)$. Si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} F(x)$ n'existe pas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Remarque 8.1. Si $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, où $a < b$, on définit de la même manière $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ avec $x \in]a,b]$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} F(x)$ existe, on pose $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} F(x)$.
Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est continue, on pose $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ si $c \in]a,b[$ et si ces 2 dernières intégrales existent.

Lemme 8.1. Soit $F : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur l'intervalle $[a,b[$ avec $a < b$. Alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} F(x)$ existe.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset [a,b[$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$. Comme F est uniformément continue sur $[a,b[$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in [a,b[$, $|x - y| \leq \delta$, on a $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$. Soit donc $N > 0$ tel que $\forall n \geq N$ on ait $|x_n - b| \leq \frac{\delta}{2}$. Ainsi, $\forall n, m \geq N$, on aura $|x_n - x_m| \leq \delta$ et donc $|F(x_n) - F(x_m)| \leq \varepsilon$. On a donc prouvé que $(F(x_n))_{n=1}^{\infty}$ est une

suite de Cauchy et on pose $s = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$.
Soit $M > 0$ tel que $\forall n \geq M$ on a $|s - F(x_n)| \leq \varepsilon$. En prenant $K = \max(M, N)$ on aura pour $n \geq K$:

$$|b - x_n| \leq \frac{\delta}{2} \qquad \text{et} \qquad |s - F(x_n)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in [b - \frac{\delta}{2}, b[$. On a ainsi $|x - x_K| \leq |b - x| + |b - x_K| \leq \delta$ et donc $|F(x) - F(x_K)| \leq \varepsilon$. Il suit donc que

$$|s - F(x)| \leq |s - F(x_K)| + |F(x_K) - F(x)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre que $\lim_{\substack{x\to b\\ <}} F(x) = s$. □

Corollaire 8.1. Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Démonstration. Pour $x \in [a, b[$ posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors on a pour $x, y \in [a, b[$: $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ où $M = \sup_{t\in[a,b[} |f(t)|$. Ainsi F est uniformément continue et donc $\lim_{\substack{x\to b\\ <}} F(x)$ existe. □

Définition 8.2. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue. On dit que f est absolument intégrable sur $[a, b[$ ou que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

Théorème 8.1. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \displaystyle\int_a^x |f(t)|dt$ existe et montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ existe. On pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et on obtient pour tous $x, y \in [a, b[$, $y \geq x$:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|dt.$$

Si on pose $G(x) = \int_a^x |f(t)|dt$, on obtient

$$|F(x) - F(y)| \leq |G(x) - G(y)|, \qquad \forall x, y \in [a, b[. \tag{8.1}$$

La fonction G est prolongeable sur $[a, b]$ de façon continue, puisque par hypothèse $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} G(x)$ existe. On note encore $G(x)$ ce prolongement continu sur $[a, b]$ et ainsi $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et donc uniformément continue. L'inégalité (8.1) montre que F est uniformément continue sur $[a, b[$ et par le lemme 8.1, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} F(x)$ existe. $\square$

Exemple 8.1. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ est absolument convergente (donc convergente). Puisque $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a pour $x, y \in]0, 2\pi]$

$$\left| \int_x^y |\frac{\sin t}{t^{3/2}}|dt \right| \leq \left| \int_x^y t^{-1/2} dt \right| = |2(\sqrt{y} - \sqrt{x})|.$$

Ce qui prouve que $G(x) = \int_x^{2\pi} |\frac{\sin\ t}{t^{3/2}}|dt$ est uniformément continue sur $]0, 2\pi]$ (Puisque $\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, $G(x)$ l'est aussi !). Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} G(x)$ existe et on conclut que $\frac{\sin\ t}{t^{3/2}}$ est absolument intégrable sur $]0, 2\pi]$.

On donne ci-dessous deux résultats sans démonstration :

- <u>Résultat 1</u> : Si $f : [a, b[\to [0, \infty[$ est une fonction continue, alors
  - · soit $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \int_a^x f(t)dt$ existe,

$\cdot$ soit $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \int_a^x f(t)dt = +\infty$; alors, on note $\int_a^b f(t)dt = +\infty$.

- Résultat 2 : Soient $f, g : [a, b[\to [0, \infty[$ deux fonctions continues telles que $\forall t \in [a, b[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors,

  $\cdot$ si $\int_a^b g(t)dt$ existe alors $\int_a^b f(t)dt$ existe ;

  $\cdot$ si $\int_a^b f(t)dt = +\infty$ alors $\int_a^b g(t)dt = +\infty$.

8.2. Intégrales sur des intervalles non bornés.

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et considérons la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ où $x \in [a, +\infty[$. Si la fonction F admet une limite lorsque $x \to +\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe ou converge. On pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale n'existe pas ou qu'elle diverge. Si on remplace $f(t)$ par $|f(t)|$ dans les expressions ci-dessus, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente (ou absolument divergente).

Exercice : $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ est absolument convergente car $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \mathrm{Arctg}(x) \to \frac{\pi}{2}$ si $x \to +\infty$.

Exercice : $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ est convergente. En effet, si $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$, on intègre par parties pour obtenir

$$F(x) = -\left.\frac{\cos t}{t}\right|_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}dt.$$

On vérifie que $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ existe et $\frac{\cos x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par contre, on peut montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ n'est pas absolument convergente !

⚠ Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente, f n'est pas nécessairement bornée.

Pour $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq n - \frac{1}{n^3}, \\ (n - n^5) + n^4 x, & \text{si } n - \frac{1}{n^3} \leq x \leq n, \\ (n + n^5) - n^4 x, & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{n^3}, \\ 0, & \text{si } x \geq n + \frac{1}{n^3}. \end{cases}$$

Si on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(t)$ où N est un entier, $N > t$, on obtient $F(x) = \int_0^x f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\infty} f_n(t)dt$ où $N > x$ et ainsi on obtient que $F(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. La fonction $F(\cdot)$ est croissante et bornée ; elle est donc convergente. Ainsi $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et pourtant f n'est pas bornée.

<u>Exercice</u> : Démontrer que si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

<u>Exercice</u> : Démontrer que si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

⚠ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la fonction n'est pas nécessairement intégrable. Exemple :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

On donne ci-dessous deux résultats sans démonstration :

- Résultat 1 : Si $f : [a, \infty[\to [0, \infty[$ est une fonction continue, alors

  $\cdot$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe,

  $\cdot$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty$; alors on note $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.

- Résultat 2 : Soient $f, g : [a, \infty[\to [0, \infty[$ deux fonctions continues telles que $\forall t \in [a, \infty[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors,

  $\cdot$ si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ existe alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe ;

  $\cdot$ si $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$.

Soit maintenant une fonction $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$. Si $c \in]a, +\infty[$, on peut écrire $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$ si ces deux intégrales sont convergentes. Il est facile de voir que, dans ce cas-là, la somme de ces deux intégrales est indépendante du choix de $c \in]a, +\infty[$. On dira donc que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ est convergente (ou absolument convergente) si les deux intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ sont convergentes (ou absolument convergentes) et on pose $\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$.

9. Equations différentielles

9.1. Introduction.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné ou non et soit encore $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. On cherche une fonction $u : \underset{t \rightsquigarrow u(t)}{I \to \mathbb{R}}$ différentiable et telle que

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad \forall t \in I, \tag{9.1}$$

où $u'(t) = \frac{du}{dt}(t)$. On notera parfois $u'(t)$ ou $\dot{u}(t)$.

Définition 9.1. L'équation (9.1) est appelée <u>équation différentielle</u>. Une solution u de (9.1) est appelée <u>intégrale de l'équation différentielle</u>.

Exemple 9.1. $I = \mathbb{R}$, $f(t, x) = t^2 + x$. L'équation différentielle devient

$$\dot{u}(t) = t^2 + u(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On vérifie que $u(t) = ce^t - (t^2 + 2t + 2)$ où $c \in \mathbb{R}$ est une intégrale de l'équation différentielle.

Exemple 9.2. $I = [0, \infty[$, $f(t, x) = x^2$. L'équation différentielle devient

$$\dot{u}(t) = u^2(t), \qquad t > 0.$$

On vérifie que $u(t) = \frac{1}{c-t}$ où $c < 0$ est une intégrale de l'équation différentielle. On a aussi $u \equiv 0$.

Exemple 9.3. $I = [0, \infty[$, $f(t, x) = \sqrt[3]{x}$. L'équation différentielle devient

$$\dot{u}(t) = \sqrt[3]{u(t)}, \qquad t \geq 0.$$

On vérifie que $u(t) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}t+c\right)^3}$ où $c \geq 0$ est une intégrale de l'équation différentielle. On a aussi $u \equiv 0$.

9.2. **Problème à valeur initiale.**

Supposons que I soit du type $I = [0,\infty[$, et soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Si on cherche une intégrale de l'équation différentielle $u'(t) = f(t,u(t))$, $\forall t \in I$ qui satisfait $u(0) = u_0$, on dit que l'on a un problème de Cauchy. La condition $u(0) = u_0$ est dite condition de Cauchy.

- Dans l'exemple 9.1, on a $u(0) = c - 2 = u_0$; ainsi c est déterminé car on trouve $c = u_0 + 2$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = t^2 + u(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

  a une solution unique qui est $u(t) = (2+u_0)e^t - (t^2+2t+2)$.

- Dans l'exemple 9.2, si $u_0 > 0$, on n'a pas de solution sur tout $I = [0,\infty[$ car on obtient $u(t) = \frac{1}{u_0^{-1}-t}$, $t \in [0, u_0^{-1}[$ qui "explose" lorsque $t \underset{<}{\rightarrow} \frac{1}{u_o}$. Si $u_0 = 0$, on obtient seulement la solution $u \equiv 0$ et si $u_0 < 0$, alors on obtient une solution sur tout $I = [0,\infty[$ qui est $u(t) = \frac{1}{u_0^{-1}-t}$.

- Dans l'exemple 9.3, si $u_0 = 0$, on obtient trois solutions qui sont $u \equiv 0$, $u(t) = \pm\sqrt{\frac{8}{27}t^3}$.

On doit faire face aux problèmes d'existence de solutions, d'unicité et de propriétés des solutions !

9.3. **Problème de Cauchy.**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de la forme $I = [t_0, T[$ ou $[t_0, T]$ ou $[t_0, \infty[$ avec $T > t_0$. Soit encore $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée que l'on supposera continue (i.e. $\forall\varepsilon > 0$ et $\forall(t,x) \in I \times \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que si $(\widetilde{t},\widetilde{x}) \in I \times \mathbb{R}$ vérifie $|t-\widetilde{t}| + |x-\widetilde{x}| \leq \delta$, alors $|f(t,x) - f(\widetilde{t},\widetilde{x})| \leq \varepsilon$). Si $u_0 \in \mathbb{R}$ est donné, on pose le problème de Cauchy : trouver $u \in C^1(I)$ telle que

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t,u(t)), \quad t \in I, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Remarque 9.1. Si I est un intervalle quelconque et si $t_0 \in I$ n'est pas l'extrémité gauche de I, on peut séparer $I = I_1 \cup I_2$ où I_1 est de la forme $I_1 =]T_1, t_0]$ ou $I_1 = [T_1, t_0]$ ou $I_1 =]-\infty, t_0]$ et I_2 de la forme $I_2 = [t_0, T_2[$ ou $I_2 = [t_0, T_2]$ ou $I_2 = [t_0, \infty[$, et faire un "recollement" en t_0. Le problème de Cauchy sur I_1 est le même que sur I_2 si nous prenons la peine de changer t en $-t$. C'est la raison pour laquelle nous ne prendrons que des intervalles du "type I_2".

Définition 9.2. On appelle <u>solution locale du problème de Cauchy (9.2)</u> le couple $(J, u(t))$ où J est un intervalle du type $[t_0, t_0+\varepsilon[$ ou $[t_0, t_0+\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ ou $[t_0, \infty[$ et $u \in C^1(J)$ qui vérifie $\dot{u}(t) = f(t,u(t))$, $\forall t \in J$, $u(t_0) = u_0$.
On dit que la <u>solution locale $(K, w(t))$ prolonge strictement la solution locale $(J, u(t))$</u> si $J \subset K$, $J \neq K$ et si $u(t) = w(t)$, $\forall t \in J$.

Définition 9.3. On dit que la <u>solution locale $(J, u(t))$ est maximale</u> s'il n'existe pas de solution locale qui la prolonge strictement.

Définition 9.4. On dit que la solution maximale $(J, u(t))$ est une <u>solution globale</u> si $J = I$. On dit que cette solution globale est unique si toute solution locale $(K, w(t))$ est telle que $w(t) = u(t)$, $\forall t \in K$. On parle dans ce cas de solution globale unique $u(t)$. Les trois résultats suivants ne seront pas démontrés dans ce cours.

Théorème 9.1. (Cauchy-Peano) Si $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, le problème de Cauchy a toujours au moins une solution locale $(J, u(t))$. De plus, si $(J, u(t))$ est une solution maximale mais non globale, alors J a nécessairement la forme $J = [t_0, \beta[\subset I$, $J \neq I$ et $\lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ <}} |u(t)| = +\infty$.

Théorème 9.2. On suppose qu'il existe une fonction $\ell : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $x \cdot f(t,x) \leq \ell(t)(1+x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I$. Alors le problème de Cauchy admet au moins une solution globale.

Théorème 9.3. On suppose qu'il existe une fonction $\ell : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $(f(t,x) - f(t,y))(x-y) \leq \ell(t)(x-y)^2$, $\forall t \in I$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Alors le problème de Cauchy a une solution globale unique.

Remarque 9.2. L'hypothèse du théorème (9.3) est plus forte que celle du théorème (9.2). En effet, supposons que $(f(t,x) - f(t,y))(x-y) \leq \ell(t)(x-y)^2$, $\forall t \in I$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et posons $y = 0$. On a alors, $\forall t \in I$, $\forall x \in \mathbb{R} : (f(t,x) - f(t,0))x \leq \ell(t)x^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} xf(t,x) &\leq f(t,0)x + \ell(t)x^2 \\ &\leq |f(t,0)||x| + |\ell(t)|x^2 \\ &\leq |f(t,0)|(1+x^2) + |\ell(t)|(1+x^2) \\ &= (|f(t,0)| + |\ell(t)|)\,(1+x^2) \end{aligned}$$

et donc la fonction f vérifie l'hypothèse du théorème (9.2) avec la fonction $|f(t,0)| + |\ell(t)|$.

Théorème 9.4. (Cauchy-Lipschitz) On suppose que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et de plus qu'il existe une fonction continue $\ell : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \ell(t)|x-y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \forall t \in I.$$

Alors le problème de Cauchy a une solution globale unique.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 9.3. En effet pour tout $t \in I$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$(f(t,x) - f(t,y))\,(x-y) \leq |f(t,x) - f(t,y)| \cdot |x-y| \leq \ell(t)|x-y|^2.$$

□

Remarque 9.3. Le théorème 9.4 est évidemment plus faible que le théorème 9.3. Par exemple si $I = [0, \infty[$ et $f(t,x) = -x^3$, le problème de Cauchy devient $\dot{u}(t) = -u(t)^3$, $t \in I$, $u(0) = u_0$. On vérifie que

$$\begin{aligned} f(t,x) - f(t,y) &= -x^3 + y^3 = -(x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= -(x-y)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (f(t,x) - f(t,y))(x-y) &= -(x-y)^2(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2) \\ &\leq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En posant $\ell(t) = 0$, le théorème 9.3 implique l'existence et l'unicité d'une solution globale $u(t)$ du problème de Cauchy. On peut vérifier que cette solution est donnée par

$$u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 2\,u_0^2\,t}}, \quad t \in [0, \infty[.$$

Par contre, le théorème 9.4 ne peut s'appliquer dans ce cas-ci !

Exemple 9.4. $I = [0, \infty[$, $f(t,x) = t^2 + x$. On a $(f(t,x) - f(t,y))(x-y) = (x-y)^2$ et on prend $\ell(t) = 1$. Ainsi on a une solution globale unique du problème de Cauchy : $\dot{u}(t) = t^2 + u(t)$, $t > 0$, $u(0) = u_0$.

Exemple 9.5. $I = [0, \infty[$, $f(t,x) = x^2$, $u_0 = 1$. $J = [0, 1[$, $u(t) = \frac{1}{1-t}$ qui est une solution maximale.

Exemple 9.6. $I = [0, \infty[$, $f(t,x) = -x^3 + t^2$. On a alors $(f(t,x) - f(t,y))$ $(x-y) = (-x^3 + y^3)(x-y) = -(x^2 + xy + y^2)(x-y)^2 = -\big[(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}})^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\big](x-y)^2 \leq 0$. On prend $\ell(t) \equiv 0$. Ainsi le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = t^2 - u^3(t), & t \in I = [0, \infty[, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

a une unique solution globale.

9.4. Equations différentielles à variables séparées.

Soit $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose $f(t,x) = g(t)k(x)$ et sur $I = [0, \infty[$ on pose le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = g(t)k(u(t)), & t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Supposons $k(u_0) \neq 0$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $k(x)$ possède un signe pour $x \in]u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon[$. On conclut que pour $x \in]u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon[$ la fonction

$$F(x) = \int_{u_0}^{x} \frac{1}{k(s)} ds$$

est bien définie et strictement monotone. On note alors F^{-1} son inverse et on a $F^{-1}(0) = u_0$. Si $G(t) = \int_0^t g(s)ds$, on va vérifier que $u(t) = F^{-1}(G(t))$ est solution du problème de Cauchy lorsque $t \in [0, \delta[$ où $\delta > 0$

est tel que $G(t) \in F(]u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon[)$, $\forall t \in [0, \delta[$. En effet, on a bien $u(0) = F^{-1}(G(0)) = F^{-1}(0) = u_0$.

D'autre part, on a $F(u(t)) = G(t)$, ce qui implique

$$F'(u(t))u'(t) = G'(t)$$

et donc $\frac{1}{k(u(t))}u'(t) = g(t)$. On a donc bien $\dot{u}(t) = g(t)k(u(t))$. On vérifie que cette solution locale $(J, u(t))$ avec $J = [0, \delta[$ et $u(t) = F^{-1}(G(t))$ est unique dans le sens où si on a une autre solution locale $(K, w(t))$, alors $u(t) = w(t)$, $\forall t \in K \cap J$.
Si $k(u_0) = 0$ on vérifie aisément que la solution triviale $u(t) = u_0$, $\forall t \in [0, \infty[$ est une solution globale du problème de Cauchy (9.3). Dans ce cas, il peut exister d'autres solutions comme on peut le voir dans l'exemple 9.3 où $k(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(t) = 1$. Nous avons vu que dans cet exemple, lorsqu'on prend $u_0 = 0$, on obtient les trois solutions $u \equiv 0$ et $u(t) = \pm\sqrt{\frac{8}{27}t^3}$.

Remarque 9.4. Si $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas, alors le problème de Cauchy ci-dessus a une unique solution maximale.

Exemple 9.7.

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = t^2(1 + u^2(t)), \quad t \in [0, \infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

On a $\frac{du}{(1+u^2)} = t^2 dt$ qui, en intégrant, donne Arctg $(u) = \frac{t^3}{3} + c$.
Pour $t = 0$ on a $c =$ Arctg (u_0). Ainsi $u(t) =$ tg $(\frac{t^3}{3} +$ Arctg $u_0)$. Si on pose $\beta = \sqrt[3]{3\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctg } u_0\right)}$ et $J = [0, \beta[$, on obtient la solution locale $(J, u(t))$ qui est une solution maximale.

9.5. **Equations différentielles linéaires du premier ordre.**

Soit $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ et $p : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose $f(t, x) = g(t) - p(t)x$ et le problème de Cauchy devient

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + p(t)u(t) = g(t), & t \in [0, \infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Clairement $(f(t, x) - f(t, y))(x - y) = -p(t)(x - y)^2 \leq |p(t)||x - y|^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ce qui prouve, par le théorème 9.3, que ce problème de Cauchy a une solution unique.

L'équation différentielle de (9.4) est dite <u>équation différentielle linéaire du premier ordre</u>. L'équation

$$\dot{u}(t) + p(t)u(t) = 0, \qquad \forall t \in [0, \infty[$$

est dite équation différentielle linéaire du premier ordre homogène (ou sans second membre : on notera s.s.m.). Si $c \in \mathbb{R}$ et si

$$P(t) = \int_0^t p(s)ds,$$

on vérifie que $u(t) = ce^{-P(t)}$ est une solution de l'équation s.s.m.

On vérifie facilement le principe de superposition suivant. Si g_1 et g_2 sont deux seconds membres de (9.4), i.e.

$$\dot{u}(t) + p(t)u(t) = g_1(t), \quad \forall t \in [0, \infty[,$$
$$\dot{v}(t) + p(t)v(t) = g_2(t), \quad \forall t \in [0, \infty[,$$

alors $w(t) \underset{déf}{=} u(t) + v(t)$ vérifie

$$\dot{w}(t) + p(t)w(t) = g(t), \qquad \forall t \in [0, \infty[$$

avec $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$. Ainsi, en prenant $g_2 = 0$, on vérifie que :

Théorème 9.5. Toute solution de $\dot{u}(t) + p(t)u(t) = g(t)$, $t \in [0, \infty[$ est de la forme

$$u(t) = w(t) + ce^{-P(t)}$$

où w est une solution particulière de l'équation avec second membre et $ce^{-P(t)}$ est la solution générale de l'équation s.s.m.

Exemple 9.8.

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + tu(t) = 1 + t^2, & t \in [0, \infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est $w(t) = t$. La solution générale de l'équation s.s.m. est $ce^{-t^2/2}$. Ainsi on aura $u(t) = ce^{-t^2/2} + t$. La condition $u(0) = u_0$ donne $c = u_0$.

Pour trouver la solution du problème de Cauchy (9.4), on peut utiliser une technique dite "variation de la constante" qui consiste :

1°) A exprimer les solutions générales de l'équation sans second membre, i.e.

$$u(t) = c\, e^{-P(t)} \qquad \text{où } P(t) = \int_0^t p(s)\, ds;$$

2°) A chercher une solution du problème (9.4) sous la forme

$$u(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

où $c(\cdot)$ est une fonction $C^1([0, \infty[)$. En dérivant cette relation, on obtient :

$$\dot{u}(t) = \dot{c}(t)e^{-P(t)} - c(t)p(t)e^{-P(t)}$$

et par suite

$$\dot{u}(t) + p(t)u(t) = \dot{c}(t)e^{-P(t)}.$$

Si u est solution du problème (9.4), alors on a nécessairement

$$\dot{c}(t)e^{-P(t)} = g(t)$$

et par suite, en intégrant et en tenant compte de la condition initiale :

$$c(t) = \int_0^t g(s)e^{P(s)}ds + u_0.$$

Ainsi donc, l'unique solution globale du problème (9.4) est fournie par l'expression suivante :

$$u(t) = \left(u_0 + \int_0^t g(s)e^{P(s)}ds\right) e^{-P(t)}, \qquad t \in [0, \infty[$$

où $P(t) = \int_0^t p(s)\,ds$.

Exemple 9.9. Si on considère à nouveau l'exemple 9.8 dans lequel $p(t) = t$ et $g(t) = 1 + t^2$, on obtient :

$$P(t) = \int_0^t s\ ds = \frac{t^2}{2};$$
$$\int_0^t g(s)e^{P(s)}ds = \int_0^t e^{s^2/2}ds + \int_0^t s^2e^{s^2/2}ds.$$

En intégrant le premier terme de droite par parties, on obtient :

$$\int_0^t e^{s^2/2}ds = \int_0^t \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^{s^2/2}}_{v}ds = t\,e^{t^2/2} - \int_0^t s^2e^{s^2/2}ds.$$

Ainsi, on a finalement

$$\int_0^t g(s)e^{P(s)}ds = t\,e^{t^2/2}$$

et par suite $u(t) = \left(u_0 + t\,e^{t^2/2}\right) e^{-t^2/2} = u_0\,e^{-t^2/2} + t$.

9.6. **Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.**

Dans ce paragraphe, on considère le problème de Cauchy (9.4) lorsque $p(t) = a = constante, \forall t \in [0, \infty[$. Ainsi le problème devient :
Trouver $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dérivable tel que :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + au(t) = g(t), \quad t \in [0, \infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{9.5}$$

Si $a = 0$, on a bien sûr $u(t) = \int_0^t g(s)\, ds + u_0$. Supposons donc dans la suite $a \neq 0$.
En utilisant le théorème (9.5), on vérifie que les solutions de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) + au(t) = g(t), \tag{9.6}$$

sont données par

$$u(t) = ce^{-at} + w(t)$$

où $c \in \mathbb{R}$ et w est une solution particulière de (9.6). Ainsi la solution globale du problème de Cauchy (9.5) est donnée par :

$$u(t) = (u_0 - w(0))e^{-at} + w(t). \tag{9.7}$$

Il suffit donc de trouver une solution particulière w de (9.6) pour obtenir la solution du problème de Cauchy (9.5).
Dans la suite, on étudie trois cas particuliers.

<ins>1^{er} cas</ins> : On suppose que g est une fonction polynômiale de degré n, i.e.

$$g(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1 t + a_0$$

où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont des nombres réels donnés et tels que $a_n \neq 0$.
Cherchons alors une solution particulière w de (9.6) sous la même

forme, i.e., $w =$ polynôme de degré n :

$$w(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \alpha_{n-2} t^{n-2} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$$

où les $\alpha_j, j = 0, 1, 2, \ldots, n$ sont à déterminer.
En écrivant $\dot{w}(t) + aw(t) = g(t)$ et en identifiant les deux polynômes de degré n obtenus de chaque côté de cette égalité, on obtient successivement :

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a}, \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1} - n\alpha_n}{a}, \alpha_{n-2} = \frac{a_{n-2} - (n-1)\alpha_{n-1}}{a},$$
$$\ldots, \alpha_1 = \frac{a_1 - 2\alpha_2}{a}, \alpha_0 = \frac{a_0 - \alpha_1}{a}.$$

Ainsi, si g est un polynôme de degré n, il existe une solution particulière w de (9.6) sous la forme d'un polynôme de degré n.

2^e cas : On suppose que g est de la forme

$$g(t) = b \sin \omega t + c \cos \omega t \qquad \text{où } b, c, \omega \in \mathbb{R} \ (\omega \neq 0)$$

sont donnés, et cherchons une solution particulière de (9.6) sous la forme

$$w(t) = \beta \sin \omega t + \gamma \cos \omega t.$$

En remplaçant dans l'équation $\dot{w}(t) + aw(t) = g(t)$ et en identifiant le membre de gauche à celui de droite de cette égalité, on obtient :

$$a\beta - \gamma\omega = b, \qquad \text{et} \qquad a\gamma + \omega\beta = c,$$

et par suite :

$$\beta = \frac{ab + \omega c}{a^2 + \omega^2}, \qquad \gamma = \frac{ac - \omega b}{a^2 + \omega^2}.$$

Ainsi, si g est de la forme $g(t) = b \sin \omega t + c \cos \omega t$ avec $\omega \neq 0$, il existe une solution particulière w de (9.6) de la même forme, i.e., $w(t) = \beta \sin \omega t + \gamma \cos \omega t$.

Remarque : Si g est un polynôme trigonométrique d'ordre n, i.e., $g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ où les coefficients $a_0, a_k, k =$

$1, 2, \ldots, n$ sont donnés, on cherche une solution particulière w de la même forme $w(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$.

3^e cas : On suppose que g est de la forme

$$g(t) = e^{\omega t}, \qquad \text{où } \omega \in \mathbb{R},\ \omega \neq 0.$$

Si on cherche une solution particulière de (9.6) sous la forme $w(t) = \alpha e^{\omega t}$, on obtient

$$a\alpha + \omega\alpha = 1,$$

c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{a+\omega}$, si $\omega \neq -a$.
Par contre, si $\omega = -a$, on vérifie qu'une solution particulière est $w(t) = te^{-at}$.

Ainsi, si g est de la forme $g(t) = e^{\omega t}$ avec $\omega \neq 0$ et $\omega \neq -a$, on obtient une solution particulière w de (9.6) qui est donnée par $w(t) = (a+\omega)^{-1}e^{\omega t}$. Si $\omega = -a$, on aura $w(t) = te^{-at}$ pour solution particulière.

Exemple 9.10. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + u(t) = t^2 + \sin t + e^{-t}, & t \in [0, \infty[, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{9.8}$$

1^o) On cherche une solution particulière w_1 de

$$\dot{w}_1(t) + w_1(t) = t^2$$

sous la forme $w_1(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$. On obtient $\dot{w}_1(t) = 2\alpha_2 t + \alpha_1$ et par suite

$$\dot{w}_1(t) + w_1(t) = \alpha_2 t^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)t + \alpha_0 + \alpha_1 = t^2.$$

Ainsi, $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = -2\alpha_2 = -2, \alpha_0 = -\alpha_1 = 2$ et

$$w_1(t) = t^2 - 2t + 2.$$

2^o) On cherche une solution particulière w_2 de

$$\dot{w}_2(t) + w_2(t) = \sin t$$

sous la forme $w_2(t) = \beta \sin t + \gamma \cos t$. On obtient $\beta - \gamma = 1$ et $\beta + \gamma = 0$. Ainsi $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$ et

$$w_2(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t).$$

3^o) Une solution particulière de $\dot{w}_3(t) + w_3(t) = e^{-t}$ est donnée par $w_3(t) = te^{-t}$.

En résumé, une solution particulière de

$$\dot{u}(t) + u(t) = t^2 + \sin t + e^{-t}$$

sera donnée par $w(t) = w_1(t) + w_2(t) + w_3(t)$ et la solution générale de (9.8) sera donnée par

$$u(t) = ce^{-t} + t^2 - 2t + 2 + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + te^{-t}.$$

Si $t = 0$, on obtient $u_0 = c + 2 - \frac{1}{2} = 0$ et ainsi $c = -\frac{3}{2}$. La solution du problème de Cauchy proposé dans cet exemple devient :

$$u(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} + t^2 - 2t + 2 + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + te^{-t}.$$

Nous terminons ce chapitre avec les équations différentielles du deuxième ordre qui jouent un rôle important en physique.

9.7. **Equations différentielles linéaires du second ordre.**

Dans ce paragraphe, on pose $I = [0, T[$ où $T \in \mathbb{R}^*$ (ou $T = \infty$) et soit $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues données.

Nous appelons <u>équation différentielle linéaire du deuxième ordre</u> l'équation :

$$\ddot{u}(t) + a(t)\dot{u}(t) + b(t)u(t) = c(t), \qquad t \in I \tag{9.9}$$

où $\ddot{u}(t) = \frac{d^2}{dt^2}u(t)$ et $\dot{u}(t) = \frac{d}{dt}u(t)$.
Nous dirons que l'équation différentielle est sans second membre (s.s.m.) ou homogène si $c \equiv 0$, i.e.

$$\ddot{u}(t) + a(t)\dot{u}(t) + b(t)u(t) = 0, \qquad t \in I. \tag{9.10}$$

Nous admettons sans démonstration le résultat suivant :
Résultat :

Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ deux nombres réels donnés. Alors il existe une et une seule solution $u(t)$ de l'équation différentielle du deuxième ordre (9.9) qui satisfait les deux conditions initiales

$$u(0) = u_0 \qquad \text{et } \dot{u}(0) = v_0.$$

En particulier, si $u_0 = v_0 = 0$, alors l'équation différentielle du deuxième ordre sans second membre (9.10) admet l'unique solution $u(t) = 0$, $\forall t \in I$.

Définition 9.5. Soit u_1, u_2 deux solutions de l'équation s.s.m. Nous dirons que ces deux solutions sont linéairement indépendantes si

$$(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) = 0,\ \forall t \in I) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Elles sont linéairement dépendantes s'il existe α, β non tous les deux nuls tels que $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) = 0$, $\forall t \in I$. Si $\beta \neq 0$, on obtient $u_2(t) = -\frac{\alpha}{\beta}u_1(t)$ et si $\alpha \neq 0$, on obtient $u_1(t) = -\frac{\beta}{\alpha}u_2(t)$.

Théorème 9.6. Soit u_1 une solution de l'équation (9.10) s.s.m. telle que $u_1(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Alors $u_2(t) = \gamma(t)u_1(t)$ où $\gamma(t) = \int_0^t \frac{e^{-A(s)}}{u_1^2(s)}ds$, avec $A(s) = \int_0^s a(\tau)d\tau$, est aussi une solution de l'équation s.s.m. De plus, u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Si on pose $u_2(t) = \gamma(t)u_1(t)$, on a :

$$\begin{aligned}\dot{u}_2(t) &= \dot{\gamma}(t)u_1(t) + \gamma(t)\dot{u}_1(t),\\ \ddot{u}_2(t) &= \ddot{\gamma}(t)u_1(t) + 2\dot{\gamma}(t)\dot{u}_1(t) + \gamma(t)\ddot{u}_1(t).\end{aligned}$$

Calculons

$$\ddot{u}_2(t) + a(t)\dot{u}_2(t) + b(t)u_2(t) = \ddot{\gamma}(t)u_1(t) + (2\dot{u}_1(t) + a(t)u_1(t))\,\dot{\gamma}(t).$$

On a $\dot{\gamma}(t) = \frac{e^{-A(t)}}{u_1^2(t)}$ et $\ddot{\gamma}(t) = -\frac{e^{-A(t)}}{u_1^3(t)}(a(t)u_1(t) + 2\dot{u}_1(t))$ et ainsi
$\ddot{\gamma}(t) = -\frac{\dot{\gamma}(t)}{u_1(t)}(a(t)u_1(t) + 2\dot{u}_1(t))$.
On conclut que $\ddot{u}_2(t) + a(t)\dot{u}_2(t) + b(t)u_2(t) = 0$, $\forall t \in I$. De plus $\gamma(t)$ est strictement croissante ($\dot{\gamma}(t) > 0$, $\forall t \in I$) et donc u_1, u_2 sont linéairement indépendantes. □

Définition 9.6. Soit u_1, u_2 deux solutions de l'équation différentielle du deuxième ordre s.s.m. Le <u>wronskien</u> $W[u_1, u_2]$ de ces deux fonctions est défini par $W[u_1, u_2](t) = u_1(t)\dot{u}_2(t) - u_2(t)\dot{u}_1(t)$.

Théorème 9.7. Deux solutions u_1, u_2 de l'équation s.s.m. sont linéairement indépendantes si et seulement si $W[u_1, u_2](t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Démonstration.

1°) Pour montrer que ($W[u_1, u_2](t) \neq 0$, $\forall t \in I$) implique que u_1, u_2 sont linéairement indépendantes, il suffit de montrer que si u_1, u_2 sont linéairement dépendantes, alors il existe $t \in I$ tel que $W[u_1, u_2](t) = 0$; ce qui est évident si on a $u_1(t) = \chi u_2(t)$ ou $u_2(t) = \chi u_1(t)$ avec $\chi \in \mathbb{R}$.

2°) Montrons donc maintenant que si u_1, u_2 sont linéairement indépendantes, alors $W[u_1, u_2](t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Par l'absurde, s'il existe $\bar{t} \in I$ tel que $W[u_1, u_2](\bar{t}) = 0$, on a

$$u_1(\bar{t})\dot{u}_2(\bar{t}) - u_2(\bar{t})\dot{u}_1(\bar{t}) = 0.$$

Considérons maintenant $w(t) = \dot{u}_2(\bar{t})u_1(t) - \dot{u}_1(\bar{t})u_2(t)$. On a bien évidemment $\ddot{w}(t) + a(t)\dot{w}(t) + b(t)w(t) = 0$, $\forall t \in I$. De plus $w(\bar{t}) = \dot{w}(\bar{t}) = 0$, ce qui implique $w(t) = 0$, $\forall t \in I$ (il suffit de prendre $\bar{t}$ comme "temps initial" !). Ainsi, si $\dot{u}_1(\bar{t})$ ou $\dot{u}_2(\bar{t})$ est non nul, alors u_1, u_2 sont linéairement dépendantes, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons $\dot{u}_1(\bar{t}) = \dot{u}_2(\bar{t}) = 0$. Alors $u_1(\bar{t})$ et $u_2(\bar{t})$ ne peuvent pas être les deux nulles à la fois car sinon on aurait $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$, ce qui est encore une fois absurde. Supposons donc $u_1(\bar{t}) \neq 0$ et posons $w(t) = \frac{u_2(\bar{t})}{u_1(\bar{t})}u_1(t)$. On a bien évidemment $\ddot{w}(t)+a(t)\dot{w}(t)+b(t)w(t) = 0$, $\forall t \in I$, $w(\bar{t}) = u_2(\bar{t})$, $\dot{w}(\bar{t}) = 0 = \dot{u}_2(\bar{t})$, et donc $w(t) = u_2(t)$, $\forall t \in I$.

Ainsi on obtient $u_2(t) = \frac{u_2(\bar{t})}{u_1(\bar{t})}u_1(t)$, $\forall t \in I$, ce qui est encore une fois contradictoire avec le fait que u_1, u_2 doivent être linéairement indépendantes.

□

Si $u_1(t)$ est une solution de l'équation s.s.m., nous savons construire une solution $u_2(t)$ linéairement indépendante (pour autant que u_1 ne s'annule pas sur I !). L'idée est maintenant de construire, à partir de u_1 et de u_2, une solution de l'équation avec second membre

$$\ddot{u}(t) + a(t)\dot{u}(t) + b(t)u(t) = c(t), \qquad t \in I.$$

Cherchons une solution $u(t)$ sous la forme $u(t) = \gamma_1(t)u_1(t) + \gamma_2(t)u_2(t)$. Si on calcule $\ddot{u}(t) + a(t)\dot{u}(t) + b(t)u(t) = c(t)$, on obtient :

$$c = \dot{\gamma}_1\dot{u}_1 + \dot{\gamma}_2\dot{u}_2 + a\left(\dot{\gamma}_1 u_1 + \dot{\gamma}_2 u_2\right) + \frac{d}{dt}\left(\dot{\gamma}_1 u_1 + \dot{\gamma}_2 u_2\right).$$

On choisit encore de satisfaire l'équation $\dot{\gamma}_1 u_1 + \dot{\gamma}_2 u_2 \equiv 0$ et nous obtenons $\dot{\gamma}_1\dot{u}_1 + \dot{\gamma}_2\dot{u}_2 = c$.

En résumé donc :

Si nous connaissons deux solutions linéairement indépendantes de l'équation s.s.m. $u_1(t)$ et $u_2(t)$ et si nous savons résoudre le système d'équations différentielles du premier ordre pour γ_1, γ_2 :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 u_1 + \dot{\gamma}_2 u_2 = 0, \\ \dot{\gamma}_1 \dot{u}_1 + \dot{\gamma}_2 \dot{u}_2 = c, \end{cases}$$

alors $u(t) = \gamma_1(t)u_1(t) + \gamma_2(t)u_2(t)$ va satisfaire $\ddot{u} + a\dot{u} + bu = c$.

On obtient facilement

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{-cu_2}{w[u_1, u_2]} \qquad \text{et} \qquad \dot{\gamma}_2 = \frac{cu_1}{w[u_1, u_2]}$$

et ainsi donc

$$\gamma_1(t) = \int_0^t \frac{-c(s)u_2(s)}{w[u_1, u_2](s)} ds + c_1$$

et

$$\gamma_2(t) = \int_0^t \frac{c(s)u_1(s)}{w[u_1, u_2](s)} ds + c_2$$

où c_1, c_2 sont deux constantes d'intégration. Ainsi on obtient $u(t)$.

9.8. **Equations différentielles linéaires à coefficients constants.** Supposons que a et $b \in \mathbb{R}$ et qu'on veuille trouver u_1, u_2 linéairement indépendantes de l'équation

$$\ddot{u}(t) + a\dot{u}(t) + bu(t) = 0, \qquad \forall t \in I.$$

En remplaçant $\ddot{u}$ par r^2, $\dot{u}$ par r et u par 1, on obtient une équation dite caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

1er cas : Si $a^2 - 4b > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes qui sont $\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Dans ce cas, on vérifie facilement que $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de $\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$.

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$: Si $a^2 - 4b < 0$, alors en posant $\lambda = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$, on vérifie que $u_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\sin(\lambda t)$ et $u_2(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\cos(\lambda t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de $\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$.

$\underline{3^{\text{ème}}\text{ cas}}$: Si $a^2 = 4b$, on vérifie que $u_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}$ et $u_2(t) = te^{-\frac{a}{2}t}$ sont aussi deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène.

Exercice : Construire les solutions de $\ddot{u}(t) + a\dot{u}(t) + bu(t) = c(t)$ dans les trois cas ci-dessus.

Ici encore, lorsque $c(t)$ prend la forme particulière d'un polynôme, ou d'un polynôme trigonométrique ou d'une exponentielle, on cherchera une solution particulière de l'équation

$$\ddot{u}(t) + a\dot{u}(t) + bu(t) = c(t), \quad t \in I$$

sous la même forme.

- Cas 1 : $c(t) = t^n$. On pose $u(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$ et on a, après remplacement de cette expression dans l'équation :

$$\begin{aligned}
&b\alpha_n = 1,\\
&b\alpha_{n-1} + an\alpha_n = 0,\\
&b\alpha_{n-2} + a(n-1)\alpha_{n-1} + n(n-1)\alpha_n = 0,\\
&b\alpha_{n-3} + a(n-2)\alpha_{n-2} + (n-1)(n-2)\alpha_{n-1} = 0,\\
&\ldots etc.
\end{aligned}$$

  Si $b \neq 0$, on obtient successivement $\alpha_n = \frac{1}{b}$, puis $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots$ etc.
  Si $b = 0$, l'équation différentielle se réduit à l'ordre 1 en posant $w = \dot{u}$.

- <u>Cas 2</u> : $c(t) = \sin \omega t$, avec $\omega \neq 0$ (idem pour $\cos \omega t$). On pose $u(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$ et on obtient, après remplacement de cette expression dans l'équation :

$$\begin{cases} (b-\omega^2)\alpha - a\omega\beta = 1, \\ a\omega\alpha + (b-\omega^2)\beta = 0. \end{cases}$$

On obtient un système de 2 équations à 2 inconnues qui sont α et β. Si D est le déterminant du système, on obtient :

$$D = (b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2.$$

Si $a \neq 0$, ou/et $b \neq \omega^2$, ce système a une solution unique.
Si $a = 0$ et $b = \omega^2$, l'équation est réduite à

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \sin \omega t.$$

En cherchant une solution de la forme $u(t) = \alpha t \sin \omega t + \beta t \cos \omega t$, on obtient $\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{2\omega}$.

- <u>Cas 3</u> : $c(t) = e^{\omega t}$, avec $\omega \neq 0$. On pose $u(t) = \alpha e^{\omega t}$ et, en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$\alpha\left(\omega^2 + a\omega + b\right) = 1.$$

Si $\omega^2 + a\omega + b \neq 0$, on obtient $\alpha = \left(\omega^2 + a\omega + b\right)^{-1}$.
Si $\omega^2 + a\omega + b = 0$, alors ω est une racine de l'équation caractéristique. Deux sous-cas se présentent alors :

  - Ou bien $a^2 - 4b > 0$ et on a la solution particulière

$$u(t) = \frac{1}{a+2\omega} t e^{\omega t}.$$

  - Ou bien $a^2 - 4b = 0$ et dans ce cas, $\omega = -\frac{a}{2}$ et on a la solution particulière

$$u(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{\omega t}.$$

Exemple 9.11.

$$\ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) - 8u(t) = t^2 + 1 + e^t + e^{2t},\ t \in [0, \infty[,$$

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0.$$

L'équation homogène est donnée par

$$\ddot{w}(t) + 2\dot{w}(t) - 8w(t) = 0$$

et l'équation caractéristique devient :

$$r^2 + 2r - 8 = 0$$

dont les deux racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -4$ et on obtient

$$w(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t}, \quad \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si on cherche une solution particulière de l'équation

  $$\ddot{u}_1(t) + 2\dot{u}_1(t) - 8u_1(t) = t^2 + 1$$

  sous la forme $u_1(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, on obtient, après remplacement dans l'équation ci-dessus :

  $$\alpha = -\frac{1}{8},\ \beta = -\frac{1}{16},\ \gamma = -\frac{11}{64}.$$

  Ainsi,

  $$u_1(t) = -\frac{1}{64}(8t^2 + 4t + 11).$$

- Si on cherche une solution particulière de l'équation

  $$\ddot{u}_2(t) + 2\dot{u}_2(t) - 8u_2(t) = e^t$$

  sous la forme $u_2(t) = \alpha e^t$, on obtient, après remplacement, $\alpha = -\frac{1}{5}$ et donc

  $$u_2(t) = -\frac{1}{5}e^t.$$

- Si on cherche une solution particulière de l'équation

  $$\ddot{u}_3(t) + 2\dot{u}_3(t) - 8u_3(t) = e^{2t}$$

sous la forme $u_3(t) = \alpha t e^{2t}$, on obtient, après remplacement, $\alpha = \frac{1}{6}$ et donc

$$u_3(t) = \frac{1}{6} t e^{2t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle de l'exemple est donnée par

$$u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t} - \frac{1}{64}(8t^2 + 4t + 11) - \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{6} t e^{2t}.$$

Pour calculer c_1 et c_2, il suffit de considérer les conditions initiales $u(0) = \dot{u}(0) = 0$. On obtient alors

$$c_1 = \frac{19}{72}, \qquad c_2 = \frac{311}{2880}.$$

10. L'ESPACE $\mathbb{R}^n$

10.1. **Généralités.**

On notera $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$ l'ensemble des n-uples $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres réels x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, muni des deux lois suivantes :

- si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$;
- si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ alors $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

Ainsi $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel. L'élément nul $(0, 0, \ldots, 0)$ est noté encore 0.

Définition 10.1. Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les conditions suivantes :

1) $N(\mathbf{x}) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $N(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$;

2) $N(\lambda\mathbf{x}) = |\lambda| N(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (homogénéité positive) ;

3) $N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (inégalité triangulaire).

Souvent $N(\mathbf{x})$ est noté $\|\mathbf{x}\|$.

Exemple 10.1. On peut montrer que si $1 \leq p < \infty$ alors $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. De même $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ est aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 10.2. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est une application $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions suivantes :

1) b est symétrique, c'est-à-dire $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;

2) b est bilinéaire, i.e. linéaire dans chaque argument, i.e. $b(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z}) = \alpha b(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \beta b(\mathbf{y},\mathbf{z})$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$;

3) $b(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $b(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

Lemme 10.1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Si b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, alors $|b(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 \leq b(\mathbf{x},\mathbf{x}) \cdot b(\mathbf{y},\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on a $0 \leq b(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha^2 b(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2\alpha b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{y})$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a nécessairement que le discriminant est négatif ou nul :

$$b(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - b(\mathbf{x},\mathbf{x}) \cdot b(\mathbf{y},\mathbf{y}) \leq 0$$

et donc $b(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \leq b(\mathbf{x},\mathbf{x}) \cdot b(\mathbf{y},\mathbf{y})$. □

Théorème 10.1. Si $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, alors $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ défini par $\|\mathbf{x}\| = b(\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas complètement triviale. Si $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= b(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = b(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2b(\mathbf{x},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

En tenant compte du lemme ci-dessus, on a bien évidemment :

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 .$$

□

Nous ne démontrerons pas les résultats suivants :

- Sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes, i.e. si $\|\cdot\|$ et $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$, il existe deux constantes c_1, c_2 positives telles que

$$c_1\|\mathbf{x}\| \leq |\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| \leq c_2\|\mathbf{x}\|, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- Seule la norme euclidienne $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ parmi toutes les normes $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$ et $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$, est une norme induite par un produit scalaire. Ce produit scalaire est le produit scalaire euclidien noté $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On a, via notre lemme, l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{y}\|_2, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

  Dans la suite, nous omettrons l'indice 2 pour la norme euclidienne, i.e., $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.

10.2. **Suites dans $\mathbb{R}^n$.**

Définition 10.3. Soit $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$. On dira que cette suite est convergente s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que on ait $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| = 0$. On peut choisir n'importe quelle norme puisqu'elles sont toutes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. On dit alors que cette suite converge vers $\mathbf{x}$ et on note $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

Remarque 10.1. Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| = 0$ implique $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_p = 0$, $\forall p \in [1, \infty]$. Ainsi, si $x_{k,i}$ est la $i^{\text{ième}}$ composante de $\mathbf{x}_k$ et x_i est la $i^{\text{ième}}$ composante de $\mathbf{x}$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} |x_i - x_{k,i}| = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Définition 10.4. La suite $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall k, j \geq N$ on a $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\| \leq \varepsilon$.

En utilisant la remarque ci-dessus et ce que nous savons dans $\mathbb{R}$, il est facile de montrer :

Théorème 10.2. La suite $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$, et en "travaillant composante par composante", on montre facilement :

Théorème 10.3. Soit $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ une suite bornée, i.e. $\exists M$ telle que $\|\mathbf{x}_k\| \leq M$, $\forall k = 0, 1, \ldots$. Alors il existe une sous-suite $(\mathbf{x}_{k_j})_{j=0}^{\infty} \subset (\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$ qui est convergente.

Définition 10.5. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ alors $B(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta\}$ est appelé <u>boule ouverte centrée en $\mathbf{x}$ et de rayon δ</u>. L'ensemble $S(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \delta\}$ est appelé <u>sphère centrée en $\mathbf{x}$ et de rayon δ</u> et l'ensemble $\bar{B}(\mathbf{x}, \delta) = B(\mathbf{x}, \delta) \cup S(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta\}$ est appelé <u>boule fermée centrée en $\mathbf{x}$ et de rayon δ</u>.

Définition 10.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que

- Ω est ouvert si $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, $\exists \delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \Omega$;
- Ω est fermé si son complémentaire $\Omega^c \underset{déf}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \notin \Omega\}$ est ouvert ;
- $\mathbf{x}$ est un point intérieur de Ω s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \Omega$; on note $\mathring{\Omega}$ l'ensemble des points intérieurs à Ω ;
- $\mathbf{x}$ est un point frontière (ou un point du bord) de Ω si pour tout $\delta > 0$ on a $B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega \neq \varnothing$ et $B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega^c \neq \varnothing$; on note $\partial\Omega$ l'ensemble des

points frontière de Ω et on dit que $\partial\Omega$ est la frontière ou le bord de Ω ;

- $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ est appelé l'adhérence de Ω ;
- Ω est borné s'il existe M tel que $\|\mathbf{x}\| \leq M$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$;
- Ω est compact s'il est à la fois borné et fermé.

On peut montrer que

- Toute réunion (même infinie) de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert.

  ⚠ Une intersection d'une infinité de sous-ensembles ouverts n'est pas nécessairement ouverte !
- Toute intersection (même infinie) de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé.

  ⚠ Une réunion d'une infinité de sous-ensembles fermés n'est pas nécessairement fermée !

11. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

11.1. **Définitions et résultats.**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $E \neq \varnothing$; une application f de E dans $\mathbb{R}$, notée $f : E \to \mathbb{R}$, est appelée fonction de E à valeurs réelles. Si $\mathbf{x} \in E$, on note $f(\mathbf{x})$ l'image de $\mathbf{x}$ par f. Comme $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on note aussi $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On dit que $\mathbf{x}$ est une variable indépendante alors que f est dépendante. Le graphe de f est l'ensemble $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in E \times \mathbb{R}\}$, l'image de f, notée $\mathcal{R}(f)$, est donnée par $\mathcal{R}(f) = \{f(x) : x \in E\}$.

Définition 11.1. On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est bornée (ou bornée sur $F \subset E$) s'il existe une constante M telle que $|f(\mathbf{x})| \leq M$, $\forall \mathbf{x} \in E$ (ou $|f(\mathbf{x})| \leq M$, $\forall \mathbf{x} \in F$).
On dit que f est définie au voisinage de $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\mathbf{x}_0\}$. On dit que si f est définie au voisinage de $\mathbf{x}_0$, f admet pour limite ℓ lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{x}_0$ si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, on a $|f(\mathbf{x}) - \ell| \leq \varepsilon$. On écrit alors $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \\ \neq}} f(\mathbf{x}) = \ell$.

On peut voir que bien des définitions adoptées pour des fonctions à une seule variable réelle $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont généralisables à des fonctions à plusieurs variables réelles $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Il suffit de changer :

- D en E ;
- $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ en $B(\mathbf{x}_0, \delta)$;
- $\lim\limits_{\substack{|x - x_0| \to 0 \\ x \neq x_0}} |f(x) - \ell| = 0$ en $\lim\limits_{\substack{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \to 0 \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0}} |f(\mathbf{x}) - \ell|$ ..., etc, etc.

La seule ambiguïté est que lorsque nous avons pris une suite $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^n$ nous prenons aussi une suite $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, mais l'indice k ici n'est pas le numéro de la composante. En fait ici $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n})$. Nous préciserons que k est l'indice se référant à la suite s'il y a vraiment ambiguïté en écrivant $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$. Nous pouvons démontrer de la même manière que nous l'avons fait pour des fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$, les résultats suivants :

Théorème 11.1. Une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\mathbf{x}_0$ admet pour limite ℓ lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{x}_0$ si et seulement si pour toute suite $(\mathbf{a}_k)_{k=0}^{\infty} \subset E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{x}_0$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} |f(\mathbf{a}_k) - \ell| = 0$. La limite est unique.

Définition 11.2. Si $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$ ($\mathbf{x}_0$ est un point intérieur de E) alors f est bien définie au voisinage de $\mathbf{x}_0$. Si f admet pour limite ℓ lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{x}_0$ et si $f(\mathbf{x}_0) = \ell$, alors on dira que $\underline{f \text{ est continue en } \mathbf{x}_0}$.

On montre ainsi que $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$ on a $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \varepsilon$.

⚠ Soit $E = \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \neq 0, \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

En prenant $x_1 = x_2 \neq 0$, on obtient $f(x_2, x_2) = \dfrac{x_2^2}{2x_2^2} = \frac{1}{2}$ ce qui montre que f n'est pas continue en $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. Par contre, si $x_1 \in \mathbb{R}$ est fixé, alors $g(y) = f(x_1, y)$ est bien définie $\forall y \in \mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$. Idem si on se fixe x_2. Ainsi on retiendra :

Une fonction à plusieurs variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut très bien être discontinue en $\mathbf{x}$ bien que la fonction à une seule variable x_j lorsque les autres sont fixées reste continue.

On démontre de la même manière que ce qui a été fait pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

Théorème 11.2. Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\mathbf{x}_0$ si et seulement si pour toute suite $(\mathbf{a}_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$ qui converge vers $\mathbf{x}_0$ la suite $(f(\mathbf{a}_k))_{k=0}^{\infty}$ converge vers $f(\mathbf{x}_0)$.

Théorème 11.3. (Critère de Cauchy) Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$. Alors une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet une limite ℓ lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{x}_0$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\}$ on ait $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \varepsilon$.

On voit donc que plusieurs notions et résultats introduits pour des fonctions à une seule variable restent encore vrais pour des fonctions réelles à plusieurs variables. Bien sûr que les notions de croissance, décroissance, monotonie, limites à gauche et à droite ne peuvent pas être généralisées à des fonctions à plusieurs variables car $\mathbb{R}^n$ n'est pas totalement ordonné. Par contre, les notions de continuité, continuité uniforme, minimum, maximum sont facilement généralisables à des fonctions à plusieurs variables. Ainsi, on obtient :

Définition 11.3. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \varnothing$ et soit $f : E \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est continue sur E si $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \varepsilon$, $\forall \mathbf{y} \in \bar{B}(\mathbf{x}, \delta) \cap E$.

- On dit que f est uniformément continue sur E si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \varepsilon$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ satisfaisant $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta$.

⚠ La différence entre la première et la deuxième définition est que dans la première, δ dépend a priori de $\mathbf{x}$ et ε alors que dans la deuxième, δ est indépendant de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, et ne dépend que de ε.

Remarque 11.1. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue au sens de la définition 11.3 alors f est continue en tout point $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$ au sens de la définition 11.2.

Remarque 11.2.

1) Une fonction continue n'est pas nécessairement uniformément continue comme nous l'avons déjà vu pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre, il est facile de voir qu'une fonction uniformément continue sur E est continue.

2) Dans la notion de continuité (ou continuité uniforme), on peut remplacer les inégalités non strictes par des inégalités strictes. Par exemple, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue si $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$, $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap E$.

Théorème 11.4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Cette fonction est continue sur E si et seulement si $\forall \mathbf{x} \in E$ et $\forall (\mathbf{a}_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{x}$ on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{a}_k) = f(\mathbf{x})$.

Définition 11.4. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \varnothing$ et $f : E \to \mathbb{R}$.

- $M = \sup\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$ si $M = \sup\{f(\mathbf{x}) \text{ tel que } \mathbf{x} \in E\}$. Si $M < \infty$ alors on a $f(\mathbf{x}) \leq M$, $\forall \mathbf{x} \in E$ et il existe $(\mathbf{a}_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$ tel que $\lim\limits_{k \to \infty} f(\mathbf{a}_k) = M$; dans ce cas, on dit que M est la borne supérieure de f.

  Si $M = +\infty$ alors f n'est pas bornée.

  On a une définition du même type pour $m = \inf\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$. Si $m > -\infty$ alors $f(\mathbf{x}) \geq m$, $\forall \mathbf{x} \in E$ et $\exists\ (\mathbf{b}_k)_{k=0}^{\infty}$ tel que $\lim\limits_{k \to \infty} f(\mathbf{b}_k) = m$.

- $M = \max\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$ si M est une borne supérieure de f et s'il existe $\mathbf{x}_0 \in E$ tel que $f(\mathbf{x}_0) = M$.

  De même $m = \min\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$ si $f(\mathbf{x}) \geq m$, $\forall \mathbf{x} \in E$ et $\exists \mathbf{x}_1 \in E$ tel que $f(\mathbf{x}_1) = m$.

Théorème 11.5. Soit $E \neq \varnothing$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ fermé, borné (on dit qu'il est compact). Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est uniformément continue. De plus $\max\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$ et $\min\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$ existent.

Démonstration. Elle est semblable à celle faite pour des fonctions continues sur des intervalles fermés bornés du chapitre 3. $\square$

Définition 11.5. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \varnothing$. On dit que E est <u>connexe</u> ou encore <u>connexe par arcs</u> si pour tout couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E$ il existe <u>n applications continues</u> $\gamma_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, telles que si $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$ on ait $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}$, $\boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{y}$ et $\boldsymbol{\gamma}(t) \in E$, pour tout $t \in [0,1]$.

Théorème 11.6. (Théorème de la valeur intermédiaire) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \varnothing$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ <u>compact et connexe</u>. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors f atteint son maximum M et son minimum m sur E et $\mathcal{R}(f) = [\min_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x}), \max_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})]$.

Démonstration. Puisque E est compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue, on a l'existence de $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}_1 \in E$ tels que $f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$ et $f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$.
Puisque E est connexe, il existe $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ tel que $\gamma_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ et $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{x}_1$.
On pose $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(\boldsymbol{\gamma}(t))$. On vérifie facilement que la composition $g = f \circ \boldsymbol{\gamma}$ est continue sur $[0,1]$. On a, grâce au théorème de la valeur intermédiaire des fonctions à une seule variable réelle : $g([0,1]) = [\min_{t\in[0,1]} g(t), \max_{t\in[0,1]} g(t)] = [f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_0)]$. De plus, puisque $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in E$, on a bien $\mathcal{R}(f) = [\min_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x}), \max_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})]$.
$\square$

11.2. **Intégrales qui dépendent de paramètres.**

Théorème 11.7. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \varnothing$. Si $f : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit $g : E \to \mathbb{R}$ par

$$g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x})\, dt, \ \forall \mathbf{x} \in E.$$

Alors $g : E \to \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration. Pour simplifier la démonstration, nous supposerons que E est ouvert et montrons que g est continue en $\mathbf{x}_0 \in E$ quelconque. Il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \subset E$ et ainsi $\widetilde{f} : [a,b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \to \mathbb{R}$, définie comme la restriction de f à $[a,b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$, i.e., $\widetilde{f}(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x})$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$, est uniformément continue. Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $\widetilde{\delta} \leq \delta$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $\forall \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\delta})$ on ait

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ainsi, si $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\delta})$, on a :

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int_a^b \big(f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0) \big) \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0)| \, dt \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve que g est continue en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. $\square$

11.3. **Prolongement d'une fonction uniformément continue.**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide.

Théorème 11.8. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue sur E alors il existe une unique fonction continue $g : \bar{E} \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f dans E. De plus g est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Puisque $f : E \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ avec $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta$, on a

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \epsilon.$$

Soit $\mathbf{a} \in \bar{E}, \mathbf{a} \notin E$. Par définition de l'adhérence d'un ensemble, il existe une suite $(\mathbf{a}_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}.$$

Puisque $(\mathbf{a}_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite convergente, alors c'est une suite de Cauchy, et ainsi, il existe $N > 0$ tel que $\forall n, m \geq N$ on ait :

$$\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m\| \leq \delta.$$

On obtient ainsi $|f(\mathbf{a}_n) - f(\mathbf{a}_m)| \leq \epsilon$ si $n, m \geq N$ ce qui prouve que la suite $(f(\mathbf{a}_n))_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$; donc, elle est convergente et $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n)$ existe. Montrons que cette limite est indépendante de la suite choisie. On pose

$$\ell = \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n).$$

Si on prend une suite $(\mathbf{b}_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{b}_n = \mathbf{a}$, on montre que $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{b}_n)$ existe et on pose

$$m = \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{b}_n).$$

Soit maintenant $\widetilde{N} > N$ tel que si $n \geq \widetilde{N}$ on ait

$$|\ell - f(\mathbf{a}_n)| \leq \epsilon, \qquad |m - f(\mathbf{b}_n)| \leq \epsilon, \qquad \|\mathbf{a}_n - \mathbf{b}_n\| \leq \delta.$$

On obtient lorsque $n \geq \widetilde{N}$:

$$|\ell - m| \leq |\ell - f(\mathbf{a}_n)| + |f(\mathbf{a}_n) - f(\mathbf{b}_n)| + |m - f(\mathbf{b}_n)| \leq 3\epsilon$$

ce qui prouve que $\ell = m$.
On définit $g : \bar{E} \to \mathbb{R}$ par $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x} \in E$ et si $\mathbf{a} \in \bar{E}$ est tel que $\mathbf{a} \notin E$: $g(\mathbf{a}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n)$ où $(\mathbf{a}_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$. Pour montrer que $g : \bar{E} \to \mathbb{R}$ est uniformément continu, il suffit de prendre $\mathbf{x} \in \bar{E}$ et de montrer que g est continue en $\mathbf{x}$. Soit $\mathbf{y} \in \bar{E}$ tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \frac{\delta}{3}$. Si $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, $(\mathbf{y}_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ sont telles que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}$, alors $\exists M > 0$ tel que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| \leq \frac{\delta}{3} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_n\| \leq \frac{\delta}{3} \quad \text{si} \quad n \geq M.$$

On obtient ainsi $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| \leq \delta$ si $n \geq M$ et donc

$$\begin{aligned}|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| &\leq |g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_n)| + |f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)| + |f(\mathbf{y}_n) - g(\mathbf{y})| \\ &\leq |g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_n)| + |g(\mathbf{y}_n) - g(\mathbf{y})| + \epsilon,\end{aligned}$$

si $n \geq M$. Il suffit de prendre $\widetilde{M} \geq M$ tel que $\forall n \geq \widetilde{M}$

$$|g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_n)| \leq \epsilon \qquad \text{et} \qquad |g(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y}_n)| \leq \epsilon$$

pour obtenir

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| \leq 3\epsilon.$$

Ainsi, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{E}$ et $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \frac{\delta}{3}$, alors $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| \leq 3\epsilon$, ce qui prouve que g est uniformément continue sur $\bar{E}$. $\square$

On dit que g est le <u>prolongement continu de la fonction f</u>.

12. Dérivées partielles

12.1. **Introduction.**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est définie au voisinage de $\mathbf{x} \in E$, i.e. s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset E$, on note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{t \underset{\neq}{\to} x_i} \frac{f(x_1, x_2, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{x})}{t - x_i}$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ si cette limite existe. On dit dans ce cas-là que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ est la dérivée partielle de f par rapport à x_i en $\mathbf{x}$. En fait, c'est la dérivée de $g(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ au point $t = x_i$.

Contrairement aux fonctions d'une seule variable, les fonctions réelles à plusieurs variables peuvent avoir toutes leurs dérivées partielles existantes en un point $\mathbf{x}$ sans qu'elles soient continues en ce point. Par exemple, la fonction $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ si $(x_1, x_2) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$ n'est pas continue en $\mathbf{x} = 0$ et pourtant $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = 0$. Par contre, on peut montrer que si f a toutes ses dérivées partielles continues en $\mathbf{x}$ alors f est continue en $\mathbf{x}$.

Définition 12.1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, et on note $f \in C^1(E)$, si les n dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : E \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, existent en tout point de E et sont continues. Si $f \in C^1(E)$, alors $f : E \to \mathbb{R}$ est continue ($f \in C^0(E)$).

12.2. **Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre.**

Théorème 12.1. Soit $a < b$, soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et soit $f : (t, \mathbf{x}) \in [a, b] \times E \to f(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ une fonction continue telle que toutes ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$, soient des fonctions continues sur $[a, b] \times E$. Alors la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x})\, dt$$

est de classe $C^1(E)$ et on a

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})\, dt,\ \forall \mathbf{x} \in E,\ 1 \leq j \leq n.$$

Démonstration. Soit $1 \leq j \leq n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in E$. Posons, pour $s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}(s) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + s, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. On a bien évidemment

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ \neq}} \mathbf{x}(s) = \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) = \lim_{\substack{s \to 0 \\ \neq}} \frac{f(t, \mathbf{x}(s)) - f(t, \mathbf{x})}{s}.$$

Puisqu'on a supposé que $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est continue sur $[a, b] \times E$ et puisque E est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbf{x}(s) \in E$ pour $|s| \leq \delta$ et la fonction $(t, s) \in [a, b] \times [-\delta, +\delta] \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(s))$ est continue sur le compact $[a, b] \times [-\delta, +\delta]$ et donc uniformément continue. Si $\epsilon > 0$ est donné, il existe $\widetilde{\delta} < \delta$ tel que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(s)) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) \right| \leq \frac{\epsilon}{b - a} \quad \text{si} \quad t \in [a, b], |s| \leq \widetilde{\delta}.$$

Par le théorème des accroissements finis dans la variable s, on obtient l'existence de $\theta = \theta(t, s) \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(t, \mathbf{x}(s)) - f(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j + \theta s, x_{j+1}, \ldots, x_n).s \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(t, \mathbf{x}(\theta s)\big) s \quad \text{si} \quad t \in [a, b], |s| \leq \widetilde{\delta}. \end{aligned}$$

Ainsi pour $s \neq 0, |s| \leq \widetilde{\delta}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{g(\mathbf{x}(s)) - g(\mathbf{x})}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})\, dt \right| \\
&= \left| \int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(\theta s)) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) \Big)\, dt \right| \\
&\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(\theta s)) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) \right| dt \ \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ \neq}} \frac{g(\mathbf{x}(s)) - g(\mathbf{x})}{s} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})\, dt\,.$$

On a ainsi $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})\, dt$, pour $1 \leq j \leq n$.
Comme $\frac{\partial f}{\partial x_j} : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$ est supposé continu $\forall j = 1, \ldots, n$, d'après le théorème précédent, $\frac{\partial g}{\partial x_j} : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$ est continu $\forall j = 1, \ldots, n$. Ainsi $g \in C^1(E)$. □

12.3. **Dérivées partielles d'une composition de fonctions.**
On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et n fonctions $g_k : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ aussi de classe C^1. Ainsi, on peut définir la fonction $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_q) \to F(\mathbf{y}) = f(g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})) \in \mathbb{R}$. On obtient ainsi :

Théorème 12.2. Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in C^1(\mathbb{R}^q)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, alors $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ définie par $F(\mathbf{y}) = f(g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y}))$ est de classe C^1. De plus si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^q$ on a pour $j = 1, 2, \ldots, q$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\,(g_1(\mathbf{a}), \ldots, g_n(\mathbf{a}))\, \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathbf{a}).$$

Démonstration. Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^q, t \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{y} = (a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_q)$. On veut calculer $\frac{F(\mathbf{y})-F(\mathbf{a})}{t-a_j}$ et ensuite sa limite lorsque $t \to a_j$. On a

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{a}) &= f\left(g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) - f\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \ldots, g_n(\mathbf{a})\right) \\
&= f\left(g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) - f\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) \\
&+ f\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) - f\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), g_3(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) \\
&+ f\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), g_3(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) \\
&\qquad - f\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), g_3(\mathbf{a}), g_4(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) \\
&+ \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{n} [f\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \ldots, g_{k-1}(\mathbf{a}), g_k(\mathbf{y}), g_{k+1}(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) \\
&\qquad - f\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \ldots, g_{k-1}(\mathbf{a}), g_k(\mathbf{a}), g_{k+1}(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right)].
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on a l'existence de $\theta_k = \theta_k\left(g_1(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right) \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} &\left(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \ldots, g_{k-1}(\mathbf{a}),\right. \\
&\quad g_k(\mathbf{a}) + \theta_k\left(g_k(\mathbf{y}) - g_k(\mathbf{a})\right), \\
&\quad \left. g_{k+1}(\mathbf{y}), \ldots, g_n(\mathbf{y})\right)\left(g_k(\mathbf{y}) - g_k(\mathbf{a})\right).
\end{aligned}$$

Clairement, puisque g_k est continue en $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$\lim_{t \to a_j} g_k(\mathbf{y}) = g_k(\mathbf{a}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

et puisque g est C^1 on a $\lim\limits_{\substack{t \to a_j \\ \neq}} \dfrac{g_k(\mathbf{y}) - g_k(\mathbf{a})}{t - a_j} = \dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathbf{a})$. Ainsi

$$\lim_{\substack{t \to a_j \\ \neq}} \frac{F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{a})}{t - a_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(g_1(\mathbf{a}), \ldots, g_n(\mathbf{a})\right) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathbf{a}).$$

□

Remarque 12.1. Les hypothèses du théorème 12.2 peuvent être affaiblies. Il suffit de supposer que $\mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^q$, que les fonctions $g_k : A \to \mathbb{R}$ soient continues en $\mathbf{a}$ et que les dérivées partielles $\frac{\partial g_k}{\partial y_j}$ existent en $\mathbf{a}$, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq k \leq n$. De plus, il faudra alors supposer que $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soit continue et que ses dérivées partielles existent au point $(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \ldots, g_n(\mathbf{a}))$ qui, lui, doit appartenir à B.

Notation 12.1. Dans la littérature, on verra souvent la notation $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $x_k(\mathbf{y}) = x_k(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ au lieu de $g_k(\mathbf{y})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Dans $f(\mathbf{x})$, x_k est une variable indépendante. Dans $x_k(\mathbf{y})$, x_k est une variable dépendante (en l'occurrence de $\mathbf{y}$). Ainsi, on notera

$$F(\mathbf{y}) = f(x_1(\mathbf{y}), x_2(\mathbf{y}), \ldots, x_n(\mathbf{y}))$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}(\mathbf{y})) \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(\mathbf{y})$$

où $\mathbf{x}(\mathbf{y}) = (x_1(\mathbf{y}), x_2(\mathbf{y}), \ldots, x_n(\mathbf{y}))$.

12.4. **Dérivée d'une intégrale avec intégrant et bornes qui dépendent d'un paramètre.**

Théorème 12.3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $g, h, k \in C^1(I)$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, de dérivée partielle par rapport à la deuxième variable continue. On définit $F : I \to \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(x, k(t))dx.$$

Alors $F \in C^1(I)$ et de plus si $t \in I$ on a

$$F'(t) = g'(t)f(g(t), k(t)) - h'(t)f(h(t), k(t)) + k'(t)\int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, k(t))dx$$

où y est la deuxième variable de $f(x, y)$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$ et posons

$$F_1(t) = \int_a^{g(t)} f(x, k(t))\, dx \quad \text{et} \quad F_2(t) = \int_a^{h(t)} f(x, k(t))\, dx.$$

On obtient évidemment $F(t) = F_1(t) - F_2(t)$ et $F'(t) = F_1'(t) - F_2'(t)$. Calculons $F_1'(t)$ en $t = \overline{t} \in I$. Si

$$L(t) = \int_a^{g(t)} \big(f(x, k(t)) - f(x, k(\overline{t}))\big)\, dx$$

on a $F_1(t) = L(t) + \displaystyle\int_a^{g(t)} f(x, k(\overline{t}))\, dx$ et, en utilisant le théorème (7.5), nous avons

$$F_1'(\overline{t}) = L'(\overline{t}) + g'(\overline{t})\, f(g(\overline{t}), k(\overline{t})).$$

Il suffit donc de calculer $L'(\overline{t})$. Après avoir remarqué que $L(\overline{t}) = 0$, on a l'existence de $\theta = \theta(x, t) \in]0, 1[$ qui satisfait :

$$L(t) - L(\overline{t}) = \int_a^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, k(\overline{t}) + \theta\big(k(t) - k(\overline{t})\big)\Big)\big(k(t) - k(\overline{t})\big)\, dx$$

et donc si $t \neq \overline{t}$:

$$\frac{L(t) - L(\overline{t})}{t - \overline{t}} = \frac{k(t) - k(\overline{t})}{t - \overline{t}} \int_a^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, k(\overline{t}) + \theta\big(k(t) - k(\overline{t})\big)\Big)\, dx.$$

En utilisant un raisonnement de continuité uniforme semblable à celui utilisé pour prouver le théorème (12.1), on obtient :

$$L'(\bar{t}) = \lim_{\substack{t \to \bar{t} \\ \neq}} \frac{L(t) - L(\bar{t})}{t - \bar{t}} = k'(\bar{t}) \int_a^{g(\bar{t})} \frac{\partial f}{\partial y}(x, k(\bar{t}))\, dx$$

ce qui prouve que

$$F_1'(\bar{t}) = k'(\bar{t}) \int_a^{g(\bar{t})} \frac{\partial f}{\partial y}(x, k(\bar{t}))\, dx + g'(\bar{t})\, f(g(\bar{t}), k(\bar{t})).$$

En calculant de la même façon $F_2'(\bar{t})$ on obtient le résultat voulu. $\square$

Remarque 12.2. Dans le théorème 12.3, f n'a pas besoin d'être définie sur tout $\mathbb{R}^2$ mais seulement sur $I_1 \times I_2$ où $I_2 \supset \mathcal{R}(k)$ et I_1 soit tel que $\{(g(t), h(t)) : t \in I\} \subset I_1 \times I_1$.

12.5. **Gradient et théorème des accroissements finis.**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et soit $f \in C^1(E)$. Clairement les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j} : E \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur E, $j = 1, 2, \ldots, n$ et ainsi on peut définir une application continue

$$Df : E \to \mathbb{R}^n$$

par $Df(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$ que l'on appellera gradient de f au point $\mathbf{x} \in E$. On note aussi $Df = \nabla f = \mathbf{grad} f$.

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, on notera encore $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ le segment d'origine $\mathbf{x}$ et d'extrémité $\mathbf{y}$, i.e. $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ t \in [0, 1]\}$.

Théorème 12.4. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f \in C^1(E)$ et soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. On suppose que le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset E$. Alors il existe $\mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}$ tel que $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ où $\cdot$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$, i.e. $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j$ si $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. On pose $g(t) = f(\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))$ avec $t \in [0,1]$. Clairement $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que $g(0) = f(\mathbf{x})$, $g(1) = f(\mathbf{y})$ et $g'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(y_k - x_k)$, $t \in [0,1]$. Par le théorème des accroissements finis pour des fonctions à une seule variable, il existe $\bar{t} \in]0,1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(\bar{t})$. Ainsi

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} (\mathbf{x} + \bar{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\,(y_k - x_k) = Df(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

où $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \bar{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. $\square$

Définition 12.2. $E \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, tels que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, on a $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset E$.

Remarque 12.3. Un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe. Si E est un ouvert convexe et si $f \in C^1(E)$, alors $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Remarque 12.4. Dans la démonstration ci-dessus on a

$$g'(t) = Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Puisque $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt$, on obtient la formule

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \int_0^1 Df\,(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})dt.$$

12.6. **Dérivées partielles d'ordre supérieur à un.**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée partielle par rapport à x_j en tout point $\mathbf{x}$ de E. Ainsi, on peut définir $\frac{\partial f}{\partial x_j} : E \to \mathbb{R}$. Si cette nouvelle fonction admet une dérivée partielle par rapport à x_k en tout point $\mathbf{x}$ de E, on peut définir donc $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) : E \to \mathbb{R}$. Nous noterons cette deuxième dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$. On peut démontrer le résultat suivant :

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ existent et sont continues au point $\mathbf{a} \in E$, alors on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a}).$$

On dira maintenant que $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2(E)$ si toutes les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : E \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, existent et sont continues.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et $p \geq 1$ un entier. On peut ainsi définir par dérivations partielles successives :

$$C^p(E) = \{f : E \to \mathbb{R} \;:\; \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_p}} \in C^0(E),$$
$$\text{pour tous entiers } i_1, i_2, \ldots, i_p \in [1, n]\}.$$

Ainsi, si $f \in C^p(E)$, alors $f \in C^q(E)$ où $q \in \mathbb{N}$, $q \leq p$ et on a

$$C^p(E) \subset C^{p-1}(E) \subset \ldots \subset C^0(E).$$

De plus, si $f \in C^p(E)$, on peut effectuer les dérivations par rapport aux différentes variables jusqu'à l'ordre $q \leq p$ dans n'importe quel ordre.

On dit maintenant que $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est <u>un multi-entier à n variables d'ordre p</u> si $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ et $\sum_{j=1}^n \alpha_j = p$. On note encore $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ et si $f \in C^p(E)$ et $|\boldsymbol{\alpha}| \leq p$:

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

où $\partial x_j^{\alpha_j}$ signifie que l'on dérive α_j fois par rapport à x_j.

Nous avons démontré que si $f \in C^1(E)$ et si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ et $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset E$, alors il existe $\bar{t} \in]0,1[$ tel que

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + Df\left(\mathbf{x} + \bar{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\right) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

c'est-à-dire $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x} + \bar{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(y_k - x_k)$.

De façon générale, on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 12.5. (Formule de Taylor) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f \in C^{p+1}(E)$ où $p \in \mathbb{N}$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et si $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset E$, alors il existe $\bar{t} \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) = & \sum_{0 \leq |\boldsymbol{\alpha}| \leq p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \\ & + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = p+1} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}\left(\mathbf{x} + \bar{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\right)(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}, \end{aligned}$$

où on note $\boldsymbol{\alpha}! = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \alpha_j!$, $|\boldsymbol{\alpha}| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ et $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\boldsymbol{\alpha}} = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^{\alpha_j}$.

Exemple 12.1. $n = 2$, $p = 1$; $f \in C^2(E)$ et $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset E$, alors $\exists \bar{t} \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) = & f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})(y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})(y_2 - x_2) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\mathbf{x} + \bar{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\right)(y_1 - x_1)^2 \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\mathbf{x} + \bar{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\right)(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\mathbf{x} + \bar{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\right)(y_2 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Remarque 12.5. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, si $f \in C^{p+1}(E)$ où $p \in \mathbb{N}$ et si $\mathbf{a} \in E$, alors $\exists \delta > 0$ tel que $B(\mathbf{a}, \delta) \subset E$ et en prenant $\mathbf{z} \in B(0, \delta)$ on a $\exists \bar{t} \in]0,1[$ tel que :

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{z}) = \sum_{0\le|\boldsymbol{\alpha}|\le p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{a})\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=p+1} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{a}+\bar{t}\mathbf{z})\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Ainsi on obtient

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{z}) = \sum_{0\le|\boldsymbol{\alpha}|\le p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{a})\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}} + R(\mathbf{a},\mathbf{z})$$

où $R(\mathbf{a},\mathbf{z})$ est tel que $R(\mathbf{a},\mathbf{z}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=p+1} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{a})\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}} + \rho(\mathbf{a},\mathbf{z})$ avec $|\rho(\mathbf{a},\mathbf{z})| = o\left(\|\mathbf{z}\|^{p+1}\right)$ si $\|\mathbf{z}\| \to 0$.

On pourrait aussi démontrer la formule de Taylor avec reste intégral :

Théorème 12.6. On fait les mêmes hypothèses que pour le théorème 12.5. Alors on a

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) = & \sum_{0\le|\boldsymbol{\alpha}|\le p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} + \\ & + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=p+1} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\int_0^1 (p+1)(1-t)^p \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}dt. \end{aligned}$$

12.7. **Extrema de fonctions à plusieurs variables.**

Définition 12.3. On dit que $\mathbf{a} \in E$ est un point stationnaire de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si f est définie au voisinage de $\mathbf{a}$ et si $Df(\mathbf{a}) = 0$.

On dit que f admet un minimum local au point $\mathbf{a} \in E$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\delta) \cap E$ on a $f(\mathbf{a}) \le f(\mathbf{x})$ (maximum local si $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a})$).

On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en $\mathbf{a} \in E$ si f admet un minimum local ou un maximum local en $\mathbf{a}$.

Théorème 12.7. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et soit $f : E \to \mathbb{R}$ admettant un extremum local en $\mathbf{a} \in E$. Alors si $Df(\mathbf{a})$ existe, $\mathbf{a}$ est un point stationnaire de f, i.e. $Df(\mathbf{a}) = 0$.

Démonstration. Si on pose $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ et si on définit $g_i(x) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ on obtient par hypothèse :

g_i possède un extremum local en a_i et g_i est dérivable en a_i.

Ainsi, on a $g_i'(a_i) = 0$, ce qui implique $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on obtient bien $Df(\mathbf{a}) = 0$. $\square$

Remarque 12.6. ⚠ On vient de voir que si f a un extremum local en $\mathbf{a}$ tel que $Df(\mathbf{a})$ existe, alors $Df(\mathbf{a}) = 0$. Si f est par exemple $C^1(E)$ avec E ouvert, on dit qu'une condition nécessaire pour avoir un extremum de f en $\mathbf{a} \in E$ est que $\mathbf{a}$ soit stationnaire. Cette condition n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple suivant : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ et $\mathbf{a} = (0, 0)$. On a bien $Df(\mathbf{a}) = 0$ et pourtant f n'a pas un extremum en $\mathbf{a} = (0, 0)$.

Définition 12.4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in E$ et supposons que toutes les dérivées secondes de f en $\mathbf{a}$ existent. On pose alors $s_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$, $1 \leq i, j \leq n$. On dit alors que la matrice S de coefficients s_{ij} est la matrice hessienne de f au point $\mathbf{a}$. Si $f \in C^2(E)$, E ouvert, alors la matrice S est symétrique, i.e. $s_{ij} = s_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Théorème 12.8. (Condition suffisante pour obtenir un extremum local) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(E)$, $\mathbf{a} \in E$ un point stationnaire de f, i.e. $Df(\mathbf{a}) = 0$. On suppose que la matrice hessienne de f en $\mathbf{a}$ est définie positive (respectivement définie négative). Alors f a un minimum local en $\mathbf{a}$ (respectivement un maximum local en $\mathbf{a}$).

Démonstration. Rappelons que le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ est $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ que l'on note aussi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Si $\mathbf{a} \in E$, on obtient par la formule de Taylor (théorème 12.5 et la remarque 12.5) :
$\exists \delta > 0$ tel que $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, \delta) \subset E$ on a

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{a}) + (Df(\mathbf{a}), (\mathbf{y} - \mathbf{a})) + \frac{1}{2} (S(\mathbf{a})(\mathbf{y} - \mathbf{a}), (\mathbf{y} - \mathbf{a})) + \rho(\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a}),$$

où $S(\mathbf{a})$ est la matrice hessienne de f en $\mathbf{a}$ et $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a})$ est le reste qui vérifie $|\rho(\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a})| = o(\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2)$ lorsque $\mathbf{y}$ tend vers $\mathbf{a}$. En supposant que $\mathbf{a} \in E$ est un point stationnaire, nous avons

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} (S(\mathbf{a})(\mathbf{y} - \mathbf{a}), (\mathbf{y} - \mathbf{a})) + \rho(\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a})$$

pour tout $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, \delta)$.
Supposons donc que $S(\mathbf{a})$ soit définie positive, i.e. $\exists \beta > 0$ tel que $(S(\mathbf{a})\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \beta \|\mathbf{z}\|^2$, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. On obtient ainsi

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + \rho(\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a}) \geq \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 - |\rho(\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a})|.$$

Puisque $|\rho(\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a})| = o(\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2)$, i.e. $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\widetilde{\delta} > 0$, $\widetilde{\delta} < \delta$ tel que

$$\frac{|\rho(\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \leq \varepsilon, \qquad \forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, \widetilde{\delta}), \mathbf{y} \neq \mathbf{a},$$

on choisit $\varepsilon = \frac{\beta}{4}$. Ainsi pour tout $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, \widetilde{\delta})$ on a

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{\beta}{4} \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2,$$

ce qui montre que f possède un minimum local en $\mathbf{a}$.
Si $S(\mathbf{a})$ est définie négative, il suffit de faire la même démonstration en changeant f en $-f$. $\square$

12.8. **Théorème des fonctions implicites.**

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert non vide et soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1(E)$. Pour simplifier l'écriture, on prendra les variables (x, y) au lieu des variables (x_1, x_2), ce qui évitera de mettre des indices ! Ainsi un point quelconque de E sera noté (x, y).

Théorème 12.9. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(E)$, soit $(a, b) \in E$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ et $f(a, b) = 0$. Alors il existe $\delta > 0$ et une fonction $\varphi :]a - \delta, a + \delta[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifie

$$\begin{cases} f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in]a - \delta, a + \delta[, \\ \varphi(a) = b. \end{cases}$$

Démonstration. Puisque $f \in C^1(E)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, il existe $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ tels que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$, $\forall x \in [a - \beta_1, a + \beta_1]$, $y \in [b - \beta_2, b + \beta_2]$. Si $x \in [a - \beta_1, a + \beta_1]$ est fixé, la fonction $g_x(y) = f(x, y)$ définie lorsque $y \in [b - \beta_2, b + \beta_2]$ est strictement monotone puisque $g'_x(y) \neq 0$.
Lorsqu'on prend $x = a$, la fonction g_a est strictement monotone sur l'intervalle $[b - \beta_2, b + \beta_2]$ et $g_a(b) = f(a, b) = 0$. Ainsi pour $\gamma > 0$, $\gamma < \beta_2$ on a $g_a(b - \gamma) \cdot g_a(b + \gamma) < 0$ et on obtient

$$f(a, b - \gamma) \cdot f(a, b + \gamma) < 0.$$

Puisque f est continue, il existe $\delta > 0$, $\delta < \beta_1$ tel que $\forall x \in]a - \delta, a + \delta[$ on a

$$f(x, b - \gamma) \cdot f(x, b + \gamma) < 0.$$

En remarquant que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ne s'annule pas si $y \in [b - \gamma, b + \gamma]$ pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$, on conclut que

$$\forall x \in]a - \delta, a + \delta[, \qquad \exists! y \in]b - \gamma, b + \gamma[\qquad \text{tel que } f(x, y) = 0.$$

On pose ainsi $\varphi(x) = y$ et on a défini une fonction

$$\varphi :]a-\delta, a+\delta[\to]b-\gamma, b+\gamma[\subset \mathbb{R}$$

tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$.
L'unicité de l'existence de y nous montre que $\varphi(a) = b$. Il reste à montrer que $\varphi \in C^1\left(]a-\delta, a+\delta[\right)$.

Continuité de φ : La continuité de φ en $x = a$ ressort de l'étude que l'on vient de faire. En effet si $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \gamma$, il existe $\widetilde{\delta} > 0$, $\widetilde{\delta} < \delta$ tel que pour tout $x \in [a - \widetilde{\delta}, a + \widetilde{\delta}]$ on a $|\varphi(x) - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| \leq \varepsilon$.
Pour montrer la continuité de φ en $c \in]a-\delta, a+\delta[$, on pose $d = \varphi(c)$ et on a $f(c, d) = 0$. Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(c, d) \neq 0$, on recommence le raisonnement précédent pour obtenir une fonction localement unique $\psi :]c - \bar{\delta}, c + \bar{\delta}[\to]d - \bar{\gamma}, d + \bar{\gamma}[$ telle que $f(x, \psi(x)) = 0$, $\forall x \in]c - \bar{\delta}, c + \bar{\delta}[$ et $\psi(c) = d$. Cette fonction est encore une fois continue en c. Mais l'unicité nous permet de conclure que $\psi(x) = \varphi(x)$ dans un voisinage de c.

Continuité de φ' : Si $x, \widetilde{x} \in]a-\delta, a+\delta[$ on a $f(x, \varphi(x)) = f(\widetilde{x}, \varphi(\widetilde{x})) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
0 = f\left(x, \varphi(x)\right) - f\left(\widetilde{x}, \varphi(\widetilde{x})\right) \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\left(sx + (1-s)\widetilde{x}, s\varphi(x) + (1-s)\varphi(\widetilde{x})\right)(x - \widetilde{x})ds \\
&+ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\left(sx + (1-s)\widetilde{x}, s\varphi(x) + (1-s)\varphi(\widetilde{x})\right)\left(\varphi(x) - \varphi(\widetilde{x})\right)ds.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi, si $x \neq \widetilde{x}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\left(sx + (1-s)\widetilde{x}, s\varphi(x) + (1-s)\varphi(\widetilde{x})\right)\frac{\varphi(x) - \varphi(\widetilde{x})}{x - \widetilde{x}}ds \\
&\qquad = -\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\left(sx + (1-s)\widetilde{x}, s\varphi(x) + (1-s)\varphi(\widetilde{x})\right)ds.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la continuité de φ et du fait que $f \in C^1$, on peut vérifier que si $\widetilde{x}$ tend vers x, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \lim_{\widetilde{x} \to x} \frac{\varphi(x) - \varphi(\widetilde{x})}{x - \widetilde{x}} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)).$$

Ainsi on obtient

$$\varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

ce qui montre que $\varphi'(x)$ existe et est continue puisque f est C^1 et φ est C^0. $\square$

Remarque 12.7. Ce résultat peut être généralisé lorsque

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ contenant $(\mathbf{a}, b)$ où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ et $f(\mathbf{a}, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$. Il est même généralisable pour $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ et plus encore !

12.9. **Une généralisation du théorème des fonctions implicites.** Soit $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un ouvert non vide et soit m fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(E)$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, on notera $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $1 \leq j \leq m$, la valeur de f_j au point $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ldots, f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ alors on a

$$\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m.$$

Notation 12.2. Si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E$, on notera par $D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la $m \times m$ matrice dite <u>matrice jacobienne</u> au point $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ des fonctions $f_j(\mathbf{x}, \cdot)$, $1 \leq j \leq m$

$$D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{bmatrix}.$$

Le jacobien de ces m fonctions au point $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est défini par

$$\det\ (D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\,.$$

Théorème 12.10. On suppose $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1(E)$ (i.e. $f_j \in C^1(E)$, $1 \leq j \leq m$). Si $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in E$ est tel que $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ et $\det\left(D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \right) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ et m fonctions

$$\varphi_j : B(\mathbf{a},\delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

de classe $C^1(B(\mathbf{a},\delta))$ qui vérifient, si on note $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, les relations

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$$

et

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\right) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\delta).$$

12.10. **Extrema liés. Méthode des multiplicateurs de Lagrange.** Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^1(E)$ et soit $(a,b) \in E$. On suppose que

$$g(a,b) = 0 \qquad \text{et} \qquad Dg(a,b) \neq 0.$$

On considère alors l'ensemble

$$\Omega = \{(x, y) \in E : g(x, y) = 0\}$$

et bien évidemment $(a, b) \in \Omega$.

A ce stade, le problème d'extrema liés que nous pouvons poser est le suivant :

> Est-ce que la restriction de la fonction f à Ω possède un extremum local en (a, b) ? Cette question peut être traduite par : existe-t-il $\varepsilon > 0$ tel que
>
> $$f(a, b) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in B((a, b), \varepsilon) \cap \Omega\,?$$
>
> ou bien
>
> $$f(a, b) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in B((a, b), \varepsilon) \cap \Omega\,?$$

En posant cette question, nous dirons que l'on cherche des extrema locaux de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Nous n'allons pas répondre à cette question, mais par contre nous allons donner une condition nécessaire sur f pour qu'elle possède un extremum local en (a, b) sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
Puisque nous supposons que $Dg(a, b) \neq 0$, alors $\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)$ ou/et $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)$ est non nul. Supposons à ce stade que $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Puisque $g(a, b) = 0$, le théorème des fonctions implicites (théorème 12.9) permet d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et $\varphi :]a - \delta, a + \delta[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$g\left(x, \varphi(x)\right) = 0, \quad \forall x \in]a - \delta, a + \delta[$$

et

$$\varphi(a) = b.$$

Ainsi, dans un voisinage de (a, b), on cherche un extremum de $f(x, y)$ sous la contrainte $y = \varphi(x)$; ce qui revient à chercher un extremum de $h(x) = f(x, \varphi(x))$ dans un voisinage de a.

Supposons donc maintenant que f ait un extremum local en (a, b) sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Alors on a $h'(a) = 0$. On calcule alors

$$\begin{aligned} h'(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, \varphi(a))\, \varphi'(a), \\ \text{et donc } & \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\varphi'(a) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, la relation $g(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in]a - \delta, a + \delta[$ nous permet d'écrire

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\varphi'(a) = 0.$$

Et puisqu'on a supposé $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$, on obtient $\varphi'(a) = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}$, ce qui implique

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}\, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

On pose $\bar{\lambda} = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}$ et nous obtenons avec cette définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \bar{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = 0,$$

et bien sûr, par définition de $\bar{\lambda}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \bar{\lambda}\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Définissons maintenant $F : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}$ par

$$F(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

On vérifie donc que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\bar{\lambda}, a, b) &= g(a, b) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\lambda}, a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \bar{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{\lambda}, a, b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \bar{\lambda}\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0. \end{aligned}$$

Si nous avions supposé que $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$, au lieu de $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$, on aurait pu faire le même raisonnement en exprimant par le théorème des fonctions implicites x comme fonction de y. Dans tous les cas, on obtient :

> Si $f(x,y)$ possède un extremum en (a,b) sous la contrainte $g(x,y) = 0$ avec $Dg(a,b) \neq 0$, alors $(\bar{\lambda}, a, b)$ est un point stationnaire de $F(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, où $\bar{\lambda} = -\left(\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ si $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ et $\bar{\lambda} = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$ si $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$. <u>On dit que λ est un multiplicateur de Lagrange et que F est le Lagrangien du problème de minimisation sous contrainte</u>.

On peut généraliser le résultat précédemment établi en énonçant le théorème suivant :

Théorème 12.11. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1(E)$ où $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un ouvert non vide et soit $g_1, g_2, \ldots, g_m : E \to \mathbb{R}$ m fonctions de classe $C^1(E)$ et on écrit $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ldots, g_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. On suppose que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$ est tel que

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \det\left(\ D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ \right) \neq 0$$

et on pose $\Omega = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E : \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$. Alors une condition nécessaire pour que f restreinte à Ω prenne un extremum local au point $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est que $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^m \times E$ soit un point stationnaire de $F(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ où $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^m$ et $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = -D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-T} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Ici $D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est une $m \times m$ matrice régulière puisqu'on a supposé $\det\left(\ D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ \right) \neq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dénote le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right)$. Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ qui forment $\boldsymbol{\lambda}$ sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

13. Intégrales multiples

13.1. **Intégrales doubles sur un rectangle fermé.**

On considère le rectangle $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ où $a < b$, $c < d$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Un point dans D est noté (x, y). On a alors le résultat suivant :

Théorème 13.1. (Fubini (1879-1943))

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Idée de la démonstration de ce théorème

Démonstration. Soit $N > 0$, $M > 0$ deux entiers et soit $x_j = a + j\frac{b-a}{N}$, $j = 0, 1, \ldots, N$ et $y_k = c + k\frac{d-c}{M}$, $k = 0, 1, \ldots, M$. Puisque f est continue sur le rectangle fermé D, elle est uniformément continue et on pose pour $0 \le i \le N-1$, $0 \le j \le M-1$:

$$M_{ij} = \max_{\substack{x_i \le x \le x_{i+1} \\ y_j \le y \le y_{j+1}}} f(x,y), \qquad m_{ij} = \min_{\substack{x_i \le x \le x_{i+1} \\ y_j \le y \le y_{j+1}}} f(x,y).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit M et N tels que

$$M_{ij} - m_{ij} \le \varepsilon, \qquad \forall i = 0, \ldots, N-1, j = 0, \ldots, M-1.$$

Si $g(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx$ on a

$$\begin{aligned}\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy &= \sum_{j=0}^{M-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} g(y)dy \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \right) dy\end{aligned}$$

et ainsi

$$\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1} m_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) \leq \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$
$$\leq \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1} M_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

On fait de même avec $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$ et on obtient

$$\left|\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx\right| \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1} \left(M_{ij}-m_{ij}\right)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$
$$\leq \varepsilon(b-a)(d-c).$$

Comme $\varepsilon > 0$ était choisi arbitrairement petit, on obtient le résultat voulu. $\square$

Définition 13.1. On note $\displaystyle\iint_D f(x,y)dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$ que l'on appelle intégrale double de f sur D. On peut permuter les rôles de x et y.

On montre facilement les propriétés suivantes :

1) L'intégrale double est linéaire, i.e.

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dx\ dy$$
$$= \alpha \iint_D f(x,y)dx\ dy + \beta \iint_D g(x,y)dx\ dy$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour toutes $f, g : D \to \mathbb{R}$ continues.

2) Si $D_1, D_2, \ldots, D_\kappa$ sont des rectangles tels que $D = \cup_{j=1}^{\kappa} D_j$ et $\text{aire}(D) = \sum_{j=1}^{\kappa} \text{aire } (D_j)$, alors on a

$$\iint_D f(x,y)dx\ dy = \sum_{j=1}^{\kappa} \iint_{D_j} f(x,y)dx\ dy.$$

3) Si $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in D$ on a $\iint_D f(x,y)dx\ dy \geq 0$. De plus si $\iint_D f(x,y)dx\ dy = 0$, alors $f(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in D$.

4) Si $f(x,y) \leq g(x,y), \forall (x,y) \in D$ alors $\iint_D f(x,y)dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)dx\,dy.$

5) $\left| \iint_D f(x,y)dx\ dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|dx\ dy.$

6) <u>Théorème de la moyenne</u> : $\exists (x_0, y_0) \in D$ tel que

$$\iint_D f(x,y)dx\ dy = f(x_0,y_0) \cdot \text{aire } (D).$$

13.2. **Intégrales doubles sur des domaines ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$.** Nous ne ferons pas ici une théorie de l'intégration qui dépasse le propos de ce cours. Les domaines ouverts bornés D de $\mathbb{R}^2$ peuvent avoir des frontières très "compliquées". Pour exemple

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\ \sin(\frac{1}{x}) < y < 2, \qquad 0 < x < 1\}.$$

Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, comment définir alors $\iint_D f(x,y)dx\ dy$? On peut montrer qu'il existe une famille dénombrable de rectangles fermés $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ qui recouvrent D, i.e. $\mathring{D}_j \cap \mathring{D}_k = \varnothing$ si $j \neq k$ et $\cup_{j=1}^{\infty} D_j = D$.

On peut alors définir $\displaystyle\iint_D f(x,y)dx\ dy = \sum_{j=1}^{\infty}\iint_{D_j} f(x,y)dx\ dy$ pour autant que l'on ait montré que cette série converge et que sa limite est indépendante de la famille de rectangles qui recouvrent D. Nous n'allons pas entrer ici dans de telles considérations qui nécessitent une théorie élaborée, laquelle ne permet pas souvent de faire des calculs concrets. Par exemple, il n'est pas facile de donner un recouvrement en rectangles du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\ \sin(\frac{1}{x}) < y < 2,\ 0 < x < 1\}$. Cependant, si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, nous calculerons

$$\iint_D f(x,y)dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_{x\ \sin(\frac{1}{x})}^{2} f(x,y)dy\right) dx$$

où nous posons $x\ \sin(\frac{1}{x}) = 0$ si $x = 0$. En utilisant MATLAB, nous pouvons voir que $\displaystyle\iint_D xy\ dx\ dy = 0.8962$ après avoir fait successivement ces deux intégrales.

Prenons un autre exemple. Soit le triangle D de sommets $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (2,0)$ et $A_3 = (1,1)$. Clairement ce triangle D se laisse décrire par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x < 2-y,\ 0 < y < 1\}$ et on aura

$$\iint_D f(x,y)dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} f(x,y)dx\right) dy.$$

On peut voir que les propriétés énoncées pour l'intégrale double sur des rectangles sont encore vraies ici.

<u>Aire de D</u> :

Il suffit de prendre $f \equiv 1$ et donc aire $(D) = \iint_D dx\ dy$. Par exemple, l'aire du triangle ci-dessus est donnée par

$$\int_0^1 \left(\int_y^{2-y} dx\right) dy = \int_0^1 (2-2y)dy = |2y - y^2|_{y=0}^{y=1} = 1.$$

On pourrait montrer les propriétés suivantes (voir quelques exercices) :
Si D est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, alors

- $\displaystyle \left|\iint_D f(x,y)dx\ dy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dx\ dy\,;$

- si $f(x,y) \ge 0$, $\forall (x,y) \in D$ alors $\displaystyle \iint_D f(x,y)dx\ dy \ge 0\,;$

- si $f(x,y) \ge 0$, $\forall (x,y) \in D$ et si $\displaystyle \iint_D f(x,y)dx\ dy = 0$, alors $f(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in D\,;$

- si $m = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in D\}$ et $M = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in D\}$, alors m aire $(D) \le \displaystyle \iint_D f(x,y)dx\ dy \le M$ aire $(D)\,;$

- $$\iint_D |f(x,y)g(x,y)|dx\ dy \le \left(\iint_D |f(x,y)|^p dx\ dy\right)^{1/p} \left(\iint_D |g(x,y)|^q dx\ dy\right)^{1/q}$$

  où p et q sont tels que $p, q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $g : D \to \mathbb{R}$ est aussi une fonction continue bornée (Inégalité de Hölder) ;

- $$\left(\iint_D |f(x,y)+g(x,y)|^p dx\ dy\right)^{1/p} \le \left(\iint_D |f(x,y)|^p dx\ dy\right)^{1/p} + \left(\iint_D |g(x,y)|^p dx\ dy\right)^{1/p}$$

  où $p \ge 1$ (Inégalité de Minkowski).

13.3. **Changement de variables dans une intégrale double.**
Soit D et E deux sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ et soit $F : E \to D$ une bijection de E sur D. En supposant que E est dans le plan Ouv et

D dans le plan Oxy, on décrit F par

$$\begin{cases} x = F_1(u,v) \\ y = F_2(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in E.$$

Si on suppose que F_1 et F_2 sont de classe C^1, on définit la matrice jacobienne de F au point (u,v) par

$$D_{(u,v)}F(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$$

ainsi que son déterminant appelé jacobien

$$J(u,v) = \det\left(D_{(u,v)}F(u,v)\right).$$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et posons $g(u,v) = f(F_1(u,v), F_2(u,v))$, $(u,v) \in E$. Ainsi $g : E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée sur E qui est telle que $g(u,v) = f(x,y)$ lorsque (x,y) est l'image par F du point $(u,v) \in E$. On ne démontrera pas le résultat suivant, mais on y donnera une interprétation géométrique.

Théorème 13.2. On suppose que le jacobien $J(u,v)$ de F au point $(u,v) \in E$ ne s'annule pas dans E. Alors on a

$$\iint_D f(x,y)dx\ dy = \iint_E g(u,v)|J(u,v)|du\ dv.$$

Interprétation :

Supposons que E soit le carré unité, i.e. $E = (0,1) \times (0,1)$ et que D soit le rectangle $(a,b) \times (c,d) = D$. Soit maintenant $F : E \to D$ bijective donnée par

$$\begin{cases} F_1(u,v) = a + u(b-a), \\ F_2(u,v) = c + v(d-c), \end{cases} \qquad (u,v) \in E.$$

On a

$$\iint_D f(x,y)dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

et en faisant le changement de variable $y = c + v(d-c)$ avec $v \in [0,1]$, on obtient $dy = (d-c)dv$ et

$$\iint_D f(x,y)dx\ dy = \int_a^b \left(\int_0^1 f(x, c + v(d-c))(d-c)dv \right) dx.$$

En faisant le changement de variable $x = a + u(b-a)$ avec $u \in [0,1]$, on obtient finalement :

$$\iint_D f(x,y)dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(a + u(b-a), c + v(d-c))(d-c)dv \right) \cdot (b-a)du.$$

Mais $D_{(u,v)}F(u,v) = \begin{bmatrix} (b-a) & 0 \\ 0 & (d-c) \end{bmatrix}$ et $J(u,v) = (b-a)(d-c)$.
Ainsi, on voit dans ce cas-là que $\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_E g(u,v)|J(u,v)|du\,dv$ où $g(u,v) = f(a+u(b-a), c+v(d-c))$, $(u,v) \in E$.

L'interprétation géométrique de ce changement de variables est le suivant :

Si on se rapporte à la démonstration du théorème de Fubini, on peut voir que $\displaystyle\iint_D f(x,y)dx\ dy \simeq \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(x_i,y_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ où $x_i = a + i\frac{b-a}{N}$, $i = 0,1,\ldots,N$, $y_j = c + j\frac{d-c}{M}$, $j = 0,1,\ldots,M$, N et M étant des entiers positifs tels que

$$\max_{\substack{x\in[x_i,x_{i+1}] \\ y\in[y_j,y_{j+1}]}} f(x,y) - \min_{\substack{x\in[x_i,x_{i+1}] \\ y\in[y_j,y_{j+1}]}} f(x,y)$$

soit plus petit qu'un $\varepsilon > 0$ donné, indépendant de i et j. Le changement de variables $(u,v) \to F(u,v)$ est tel que $u_i = \frac{i}{N}$, $v_j = \frac{j}{M}$ satisfait $(x_i,y_j) = F(u_i,v_j)$, $i = 0,1,\ldots,N$, $j = 0,1,\ldots,M$. Ainsi, en posant D_{ij} = aire du rectangle $(x_{i+1}-x_i) \times (y_{j+1}-y_j)$ et E_{ij} = aire du rectangle $(u_{i+1}-u_i)\times(v_{j+1}-v_j)$, on voit que $|J(u_i,v_j)| = \frac{D_{ij}}{E_{ij}}$ ou, si on préfère $D_{ij} = |J(u_i,v_j)|E_{ij}$. Ainsi

$$\sum_{i,j} f(x_i,y_j)D_{ij} = \sum_{i,j} f\left(F(u_i,v_i)\right)|J(u_i,v_j)|E_{ij}.$$

De façon générale, si $F : E \to D$ est une bijection C^1, la valeur absolue du jacobien $|\det D_{(u,v)}F(u,v)|$ représente le rapport entre deux aires : celle d'un rectangle "infinitésimal" et celle de son image par F^{-1}.

Exemple 13.1. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dx\ dy$ où $D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$. On choisit le changement de variables

$$F \equiv \begin{cases} x = u\ \cos\ v \\ y = u\ \sin\ v \end{cases}$$

où $u \in [0,1[$ et $v \in [0,2\pi[$. Clairement $E = [0,1[\times[0,2\pi[$ et F n'est pas une bijection puisque $u=0$, $v \in [0,2\pi[$ donne $F(0,v)=0$. Ceci dit, on verra que ce n'est pas important ; il suffit de prendre $0<\varepsilon<u<1$ et de faire tendre ε vers zéro !
On a donc

$$D_{(u,v)}F(u,v) = \begin{bmatrix} \cos\ v & -u\ \sin\ v \\ \sin\ v & u\ \cos\ v \end{bmatrix} \qquad \text{et } J(u,v) = u.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dx\ dy &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 e^{-u^2}u\ du = \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{2}|e^{-u^2}|_{u=0}^{u=1}\right) = \pi\left(1-e^{-1}\right) = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

13.4. **Intégrale double sur un domaine infini.**
Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$, non borné et soit $D_n \subset D$, $n = 1, 2, \dots$ une suite de domaines ouverts bornés emboîtés, i.e. $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \dots$ telle que $\cup_{j=1}^{\infty} D_j = D$.

Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle qu'il existe $M > 0$ qui satisfait $\iint_{D'} |f(x,y)| dx\ dy \le M$, $\forall D' \subset D$, D' borné, alors on peut décomposer $f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$ où $f^+(x,y) = \max(f(x,y), 0)$ et $f^-(x,y) = \max(-f(x,y), 0)$. Ainsi on obtient

$$\iint_{D_n} f(x,y) dx\ dy = \iint_{D_n} f^+(x,y) dx\ dy - \iint_{D_n} f^-(x,y) dx\ dy.$$

Mais $\iint_{D_n} f^+(x,y) dx\ dy$ est une suite croissante et bornée lorsque $n \to \infty$. Ainsi elle est convergente et on posera

$$\iint_{D} f^+(x,y) dx\ dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f^+(x,y) dx\ dy;$$

encore faut-il montrer que cette limite est indépendante de la suite $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ choisie ; ce qui est vrai !

De même, on a $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f^-(x,y) dx\ dy \underset{déf}{=} \iint_{D} f^-(x,y) dx\ dy$. On pose ainsi

$$\iint_{D} f(x,y) dx\ dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f^+(x,y) dx\ dy - \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f^-(x,y) dx\ dy.$$

Exemple 13.2. $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. On a $1 \ge f(x,y) \ge 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $D_n = \{(x,y) : x^2 + y^2 < n^2\}$, on a

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} f(x,y) dx\ dy &= 2\pi \int_0^n e^{-r^2} r\ dr \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right)_{r=0}^{r=n} = -\pi \left(e^{-n^2} - 1 \right) = \left(1 - e^{-n^2} \right) \pi.\end{aligned}$$

Ainsi $\iint_{D_n} f(x,y) dx\ dy \to \pi$ si $n \to \infty$.

13.5. **Intégrales multiples.**

Les paragraphes qui précèdent peuvent être généralisés à des domaines ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Considérons par exemple un parallélotope de $\mathbb{R}^n$ donné par $D = \Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]$ où $a_i < b_i$, $1 \leq i \leq n$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On obtient (Thm. de Fubini) :

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$\int_{a_{\sigma_1}}^{b_{\sigma_1}} dx_{\sigma_1} \int_{a_{\sigma_2}}^{b_{\sigma_2}} dx_{\sigma_2} \int_{a_{\sigma_3}}^{b_{\sigma_3}} dx_{\sigma_3} \ldots \int_{a_{\sigma_n}}^{b_{\sigma_n}} dx_{\sigma_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pour toute permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ des n premiers entiers $(1, 2, \ldots, n)$. Ainsi ou peut définir

$$\underbrace{\iiint_D \ldots \int}_{n \text{ fois}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

On utilise aussi la notation simplifiée $\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ pour l'intégrale ci-dessus. Les résultats énoncés sur les intégrales doubles se généralisent facilement à ces intégrales multiples. Nous prendrons seulement par exemple un changement de variables dans un volume de $\mathbb{R}^3$.

Soit D et E deux sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$ et soit $F : E \to D$ une bijection de E sur D. Pour éviter de mettre des indices aux différentes variables, nous supposons que E est dans $\mathbb{R}^3$ repéré par $Ouvw$ et D dans $\mathbb{R}^3$ repéré par $Oxyz$. On décrit F par :

$$\begin{cases} x = F_1(u, v, w), \\ y = F_2(u, v, w), \\ z = F_3(u, v, w), \end{cases} , \qquad (u, v, w) \in E.$$

En supposant F de classe C^1 (i.e. $F_i \in C^1(E), i = 1, 2, 3$) on définit la matrice jacobienne :

$$D_{(u,v,w)}F(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial F_1}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial F_2}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial F_3}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix}$$

et le jacobien :

$$J(u,v,w) = det\left(\ D_{(u,v,w)}F(u,v,w)\ \right).$$

Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée et si $g(u,v,w) = f(F_1(u,v,w), F_2(u,v,w), F_3(u,v,w))$ nous obtenons :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_E g(u,v,w)\,|J(u,v,w)|du\,dv\,dw.$$

Exemple 13.3. $D = \{(x,y,z) : 0 < z < 1 - \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 < 1\}$ et $f(x,y,z) = x^2 + y^2$. En définissant F (coordonnées cylindriques) par

$$\begin{cases} x = u\cos(v), \\ y = u\sin(v), \\ z = w, \end{cases}$$

avec $0 < w < 1 - u$, $u \in [0,1[$, $v \in [0, 2\pi]$, nous aurons

$$D_{(u,v,w)}F(u,v,w) = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & u\cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$J(u,v,w) = u.$$

Ainsi $g(u,v,w) = u^2$ et

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \int_0^{1-u} dw u^3 \\ &= 2\pi \int_0^1 u^3(1-u)du \\ &= 2\pi \left| \frac{u^4}{4} - \frac{u^5}{5} \right|_{u=0}^{u=1} = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

Remarquons encore que D est un tronc de cône et que son volume est donné par $\iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \int_0^{1-u} u\,dw = 2\pi \int_0^1 u(1-u)du = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$.

Exemple 13.4. $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 4\}$ et $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. En définissant F (coordonnées sphériques) par

$$\begin{cases} x = u \sin v \cos w, \\ y = u \sin v \sin w, \\ z = u \cos v, \end{cases}$$

avec $0 \leq u < 2$, $0 \leq v \leq \pi$, $0 \leq w \leq 2\pi$, nous aurons

$$D_{(u,v,w)}F(u,v,w) = \begin{pmatrix} \sin v \cos w & u \cos v \cos w & -u \sin v \sin w \\ \sin v \sin w & u \cos v \sin w & u \sin v \cos w \\ \cos v & -u \sin v & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$J(u,v,w) = u^2 \sin v.$$

Ainsi $J(u,v,w) \geq 0$ car $v \in [0,\pi]$ et on obtient

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^2 du \int_0^{\pi} dv \int_0^{2\pi} dw\ u^3 \sin v \\ &= 2\pi \left| \frac{u^4}{4} \right|_{u=0}^{u=2} \left| -\cos v \right|_{v=0}^{v=\pi} = 16\pi.\end{aligned}$$

Exemple 13.5. Si $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ sont 3 nombres positifs donnés, on sait que l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ est l'équation d'un ellipsoïde de demi-axes a, b et c respectivement suivant Ox, Oy et Oz.
Si $D \subset \mathbb{R}^3$ est le domaine admettant cet ellipsoïde pour frontière, i.e.

$$D = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\},$$

on demande de calculer le volume de D. On a $vol(D) = \iiint_D dxdydz$. En faisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = au \sin v \cos w, \\ y = bu \sin v \sin w, \\ z = cu \cos v, \end{cases}$$

où $u \in [0, 1[$, $v \in [0, \pi]$, $w \in [0, 2\pi]$ on obtient

$$J(u, v, w) = abc\ u^2 \sin v$$

et donc

$$vol(D) = \int_0^1 du \int_0^\pi dv \int_0^{2\pi} dw\ abc\ u^2 \sin v = \frac{abc}{3}.2\pi.2 = \frac{4\pi}{3}abc.$$

Remarque 13.1. Si D est la boule de rayon $r > 0$ centrée en 0, i.e., $a = b = c = r$, on a $vol(D) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

14. Nombres complexes

14.1. **Rappel sur les nombres complexes.** Si z est un nombre complexe, il peut être représenté par sa partie réelle notée $\mathbb{R}e(z)$ et sa partie imaginaire notée $\mathbb{I}m(z)$. Ainsi, en posant $x = \mathbb{R}e(z) \in \mathbb{R}$ et $y = \mathbb{I}m(z) \in \mathbb{R}$, on a $z = x + iy$ où i est l'unité imaginaire. Si $y = 0$, on dit que z est <u>purement réel</u>, si $x = 0$, on dit que z est <u>purement imaginaire</u>.

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ où $x_j = \mathbb{R}e(z_j)$, $y_j = \mathbb{I}m(z_j)$, $j = 1, 2$, on peut définir

- la somme $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
- le produit $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Si $x_1 = x_2 = 0$ et $y_1 = y_2 = 1$, on obtient $i \cdot i = i^2 = -1$. On vérifie que l'addition est commutative et associative et que la multiplication est commutative et associative, et distributive par rapport à l'addition. L'addition a pour élément neutre $0 = 0+i0$ et la multiplication $1 = 1+i0$. La différence et la division sont les opérations inverses de l'addition et la multiplication, i.e.

- la différence $z_1 - z_2 = w \Leftrightarrow z_1 = z_2 + w$;
- la division $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = w \Leftrightarrow z_1 = z_2 \cdot w$ (définie pour $z_2 \neq 0$).

Ainsi, les nombres complexes peuvent être traités comme les nombres réels relativement aux opérations : somme, différence, produit, division, avec la seule règle supplémentaire selon laquelle on remplace le carré de i par -1.

Les nombres complexes forment un corps appelé <u>corps des complexes</u> et noté $\mathbb{C}$. De nombreuses formules établies dans le cadre des nombres réels restent encore valables pour les nombres complexes ; par exemple, la formule du binôme de Newton. Si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors le conjugué complexe est noté $\bar{z} = x - iy$. On remarque que $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, qui est un nombre réel, et qui est le module $|z|$ de z au carré lorsqu'on représente $z = x + iy$ dans le plan Oxy. On a donc

- module de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- argument de z : $\arg(z) = \varphi$ tel que $x = |z| \cos\ \varphi$, $y = |z| \sin\ \varphi$; l'argument de z est l'angle défini à $k2\pi$ près, formé avec l'axe réel Ox et le vecteur reliant l'origine au point P lorsque le vecteur $\overrightarrow{OP}$ représente $z \in \mathbb{C}$ (identification du plan complexe à $\mathbb{R}^2$).

On a donc

$$z = |z| \left(\cos(\arg(z)) + i\ \sin(\arg(z)) \right).$$

Rappelons encore que lorsque z est représenté sous forme de vecteur dans le plan Oxy (de composantes x et y selon les axes Ox, Oy respectivement), l'addition de $z_1 + z_2$ est une addition vectorielle alors que le produit de z_1 par z_2 a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments. On a donc si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\ |z_2| [\cos\left(\arg(z_1) + \arg(z_2)\right) + i\ \sin\left(\arg(z_1) + \arg(z_2)\right)].$$

Il en découle immédiatement la <u>formule de Moivre</u>

$$(\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\ \sin(n\varphi).$$

14.2. **Séries entières.**

Si $z \in \mathbb{C}$, on définit $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n\ fois}$ et par suite si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont des coefficients donnés (réels ou complexes) et si z est une variable complexe, on peut définir la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \ .$$

Si S_N est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle, i.e. $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, et si $w \in \mathbb{C}$ est tel que $\lim\limits_{N\to\infty} |w - S_N| = 0$, on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est convergente et qu'elle converge vers w.

Si $A_n = |a_n|$ et $r = |z|$, alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n$ est une série réelle et on a vu qu'il existe R (au besoin $R = \infty$) tel que si $0 \leq r < R$ la série converge et pour $r > R$, elle diverge. On dit alors que si $|z| < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument. On peut montrer que si elle converge absolument, alors elle converge. On peut aussi montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$, $|z| = R$ tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge. Il en va de même pour $|z| > R$. Si $\widetilde{R} < R$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement dans le disque $\widetilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \widetilde{R}\}$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \widetilde{R}^n$ est convergente. Dans ce cas, on peut montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément vers $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dans $\widetilde{D}$, ce qui veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right| \leq \varepsilon, \qquad \forall N \geq N_0,\ \forall z \in \widetilde{D}.$$

Dans ce cas $f : \widetilde{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction complexe dite analytique (ou holomorphe) dans $\widetilde{D}$. L'étude de telles fonctions fera l'objet du cours Analyse IV. Pour l'instant, nous nous restreindrons à une seule fonction.

14.3. **La fonction exponentielle.**

On définit l'exponentielle complexe par

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

On a vu que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et définit ainsi e^x ; il en est de même pour $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ qui converge donc absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ (on a même la convergence uniforme dans tout borné de $\mathbb{C}$). Cette définition implique les propriétés suivantes :

1) $e^z = e^x$ si $z = x \in \mathbb{R}$;

2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (démonstration identique à celle faite dans les réels) ;

3) $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ si $z = x + iy$ où $x = \mathbb{R}e(z)$, $y = \mathbb{I}m(z)$;

4) $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} \dots$
   $= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right)$
   $= \cos\ y + i\ \sin\ y,$ lorsque $y \in \mathbb{R}$.
   Ainsi $e^z = e^x(\cos\ y + i\ \sin\ y)$ si $z \in \mathbb{C}$ et $x = \mathbb{R}e(z)$, $y = \mathbb{I}m(z)$.

5) Puisque $e^{iy} = \cos(y) + i\ \sin(y)$ et $e^{-iy} = \cos(y) - i\ \sin(y)$ où $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad \forall y \in \mathbb{R};$$

   ce sont les formules d'Euler.

14.4. **La fonction logarithme.**

La fonction exponentielle $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ est périodique de période imaginaire $2\pi i$ car $e^z = e^{z+k2\pi i}, \forall z \in \mathbb{C}$

et $\forall k \in \mathbb{Z}$. Elle n'est donc pas injective et n'a pas d'inverse a priori. Cependant, si nous désirons chercher une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $e^{f(z)} = z$, nous posons alors $w = f(z)$ pour obtenir

$$e^w = z.$$

Si $w = w_1 + iw_2$ avec $w_1 = \mathbb{R}e(w), w_2 = \mathbb{I}m(w)$, nous obtenons

$$e^{w_1} (\cos w_2 + i \sin w_2) = z$$

c'est-à-dire $e^{w_1} = |z|$ et $w_2 = arg(z) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dans le but de définir univoquement w à partir de z, nous définissons, si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, $Arg(z) = arg(z) + k2\pi$ où k est choisi tel que $Arg(z) \in]-\pi, +\pi[$. Ainsi, si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, on choisit de façon univoque $w_2 = Arg(z)$, et on obtient $w_1 = \ln|z|, w_2 = Arg(z)$.

La quantité $w_1 + iw_2 = \ln|z| + iArg(z)$ sera ainsi appelée <u>détermination principale</u> du logarithme et sera notée $Ln(z)$. On a donc finalement défini la fonction

$$Ln : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$$

par $Ln(z) = \ln|z| + iArg(z)$ qui est telle que $e^{Ln(z)} = z, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.

Cette définition implique les propriétés suivantes :

1) $Ln(z) = \ln(x)$ si $z = x \in \mathbb{R}_+^*$;
2) Ln est injective et $\mathcal{R}(Ln) = \{w \in \mathbb{C} : \mathbb{I}m(w) \in]-\pi, +\pi[\}$. La fonction exp restreinte à $\mathcal{R}(Ln)$ est la fonction inverse de Ln.
3) Si $z = i^3$, on a $Ln(i^3) = Ln(-i) = \ln(1) - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}$ bien que $3Ln(i) = i\frac{3\pi}{2}$ ce qui montre que $Ln(i^3) \neq 3Ln(i)$. Ainsi les relations $Ln(z^\alpha) = \alpha Ln(z)$ et $Ln(z_1 z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_2)$ <u>ne sont pas nécessairement vraies</u> et donc <u>à prohiber</u> !

14.5. **La fonction "puissance".**

Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ et soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit z à la puissance α par

$$z^\alpha = e^{\alpha Ln(z)}.$$

On obtient les propriétés suivantes :

1) Si $z = e, \alpha \in \mathbb{C}$, on obtient $z^\alpha = e^{\alpha Ln(e)} = e^{\alpha \ln(e)} = e^\alpha$;

2) Si $z = x \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient $z^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} = x^\alpha$. De plus, si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ on obtient $z^\alpha = x^\alpha = \underbrace{x.x.x \ldots .x}_{\alpha \text{ fois}}.$;

3) Si $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ avec $\alpha_1 = \mathbb{R}e(\alpha), \alpha_2 = \mathbb{I}m(\alpha)$ et si $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $x^\alpha = x^{\alpha_1}\left(\cos(\ln(x^{\alpha_2}) + i\sin(\ln(x^{\alpha_2}))\right.$;

4) Si $z \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, on a $z^{\alpha_1+\alpha_2} = z^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$.

14.6. **Les fonctions trigonométriques.**

Si $x \in \mathbb{R}$, on a vu que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

et que ces deux séries convergent absolument sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Ainsi, on peut définir, lorsque $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

qui sont deux séries qui convergent uniformément sur tout borné de $\mathbb{C}$. On remarque alors que les formules d'Euler sont encore vraies dans $\mathbb{C}$, i.e. :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{et} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

et que lorsque z est un réel pur, on retrouve ce que l'on connaît !
Prenons maintenant $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\sin(iy) = i\, \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos(iy) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}.$$

En définissant les fonctions hyperboliques $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{sh}(y) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}(y) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}.$$

on constate que :

$$\mathrm{sh}(y) = -i\ \sin(iy) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}(y) = \cos(iy), \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

De même la tangente hyperbolique devient :

$$\mathrm{th}(y) = \frac{\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{ch}(y)} = -i\ \mathrm{tg}(iy), \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

où $\mathrm{tg}(z)$ est définie par $\mathrm{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

14.7. **La fonction gamma.**

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbb{R}e(z) > 0$. On pose $z = x + iy$ avec $x = \mathbb{R}e(z) > 0$ et $y = \mathbb{I}m(z)$. Soit encore $t \in]0, \infty[$. En utilisant la propriété (3) du paragraphe 14.5, on obtient :

$$t^{z-1}e^{-t} = t^{(x-1)}e^{-t}(\cos(\ln t^{y}) + i\ \sin(\ln t^{y})).$$

Si x est positif, on a $t^{x-1}e^{-t} = O(t^{x-1})$ si t tend vers zéro et donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt < \infty$.

De plus $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt < \infty$ et donc $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ a un sens si $\mathbb{R}e(z) > 0$.

Définition 14.1. La fonction Γ (gamma) est définie sur le demi-plan complexe droite $\{z \in \mathbb{C} : \mathbb{R}e(z) > 0\}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Cette formule est une formule d'Euler (1707-1783).

Propriétés

1) Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   En effet, en intégrant par partie, on obtient :
$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -|t^x e^{-t}|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty x t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

2) Si n est un entier positif, on a $\Gamma(n+1) = n!$ et la fonction Γ généralise la notion de factorielle.
   En effet, on vérifie facilement que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ et en utilisant la première propriété :
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = 1$.
   (exercice obtenu à partir de la formule de Stirling (1692-1770) :
   $n! \simeq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n} = 1$).

4) $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$.
En effet, en utilisant la propriété (1), on a

$$\begin{aligned}\Gamma(x+n+1) &= (x+n)\Gamma(x+n)\\ &= (x+n)(x+n-1)\Gamma(x+n-1) =\\ &= \dots = (x+n)(x+n-1)\dots(x+1)x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} =\\ &= \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\left(\frac{\Gamma(x+n+1)}{(n+1)^x\,\Gamma(n+1)}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\end{aligned}$$

et donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

15. Intégrales curvilignes. Différentielle totale

Dans ce chapitre, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, i.e.

$$\mathbf{e}_j = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\uparrow j^{\text{ième}} \text{ place}}{1}, 0, \ldots, 0), \;\; j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

15.1. Arcs dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $a < b$ deux nombres réels et soit $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ et non constante. Clairement $\mathbf{r}$ est donnée par n fonctions continues $r_j : [a, b] \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, et on note

$$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t)), \qquad t \in [a, b].$$

On a donc $\mathbf{r}(t) = \sum_{j=1}^{n} r_j(t)\mathbf{e}_j$, $t \in [a, b]$, qui va décrire une courbe continue dans $\mathbb{R}^n$, d'origine $\mathbf{r}(a)$, d'extrémité $\mathbf{r}(b)$, et parcourue de $\mathbf{r}(a)$ à $\mathbf{r}(b)$ lorsque t croît de a à b. On dira alors que $\Gamma \underset{déf}{=} \{\mathbf{r}(t) : t \in [a, b]\}$ est un arc orienté d'origine $\mathbf{r}(a)$ et d'extrémité $\mathbf{r}(b)$.

Exemple 15.1. $n = 2$, $a = 0$, $b = \pi$, $r_1(t) = \cos(t)$, $r_2(t) = \sin(t)$. Ainsi $\{\mathbf{r}(t) : t \in [0, \pi]\}$ représente un demi-cercle de rayon 1, centré à l'origine et dans le demi-plan supérieur du plan Ox_1x_2.

Exemple 15.2. $n = 3$, $a = 0$, $b = \pi$, $r_1(t) = \cos(t)$, $r_2(t) = \sin(t)$, $r_3(t) = t$. Ainsi $\{\mathbf{r}(t) : t \in [0, \pi]\}$ a pour représentation une partie d'hélice dont la projection orthogonale sur le plan Ox_1x_2 est la courbe de l'exemple 15.1.

Définition 15.1. On dira que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est un arc lisse orienté d'origine P et d'extrémité Q s'il existe une application $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie

(i) $\Gamma = \{\mathbf{r}(t) : t \in [a,b]\}$ avec $P = \mathbf{r}(a), Q = \mathbf{r}(b)$;

(ii) $\mathbf{r} : [a,b] \to \Gamma$ est bijective ;

(iii) $r_j \in C^1[a,b]$, $j = 1,2,\ldots,n$ et $\mathbf{r}'(t) \underset{déf}{=} \sum_{j=1}^{n} r_j'(t)\mathbf{e}_j \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$.

Le vecteur $\mathbf{r}'(t)$ est appelé <u>tangente</u> au point $\mathbf{r}(t) \in \Gamma$. L'application $t \to \mathbf{r}(t)$, $t \in [a,b]$ est appelée paramétrisation lisse de Γ.

Soit Γ un arc lisse orienté et soit $\mathbf{r} : [a,b] \to \Gamma$ et $\boldsymbol{\rho} : [\alpha,\beta] \to \Gamma$ deux paramétrisations lisses de Γ.
Si $\boldsymbol{\rho}^{-1} : \Gamma \to [\alpha,\beta]$ est l'application inverse de $\boldsymbol{\rho}$, i.e.

$$\boldsymbol{\rho}^{-1}(\boldsymbol{\rho}(\tau)) = \tau, \qquad \forall \tau \in [\alpha,\beta],$$

on construit $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ par

$$\varphi(t) = \boldsymbol{\rho}^{-1}(\mathbf{r}(t)).$$

On a $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho}(\varphi(t))$ et donc $\mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\boldsymbol{\rho}'(\varphi(t))$ où $\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$ et $\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\tau}$ avec $\tau = \varphi(t)$. On constate immédiatement que

$$\varphi'(t) > 0 \qquad \forall t \in [a,b].$$

Soit maintenant une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un point de $\mathbb{R}^n$, alors $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un nombre réel. On veut calculer

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|dt$$

où $|\mathbf{r}'(t)|$ est la norme euclidienne de $\mathbf{r}'(t)$, i.e.

$$|\mathbf{r}'(t)| = \left(\sum_{j=1}^{n} (r_j'(t))^2\right)^{1/2}.$$

Puisque $|\mathbf{r}'(t)| = |\boldsymbol{\rho}'(\varphi(t))|\varphi'(t)$, on obtient par changement de variables

$$\begin{aligned} \tau &= \varphi(t), \qquad t \in [a,b], \\ d\tau &= \varphi'(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{\rho}(\tau))|\boldsymbol{\rho}'(\tau)|d\tau.$$

Définition 15.2. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est un arc lisse orienté, on appelle intégrale curviligne de f sur Γ la quantité

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt \underset{notation}{=} \int_\Gamma f \; d\gamma,$$

où $\mathbf{r} : [a,b] \to \Gamma$ est une paramétrisation lisse de Γ.

Les calculs qui précèdent montrent que cette définition est intrinsèque, i.e. indépendante de la paramétrisation lisse choisie. Il est facile de voir dans ce cas que $\int_\Gamma f \; d\gamma$ ne dépend pas de l'orientation de Γ. Il est facile d'interpréter $\int_\Gamma f \; d\gamma$ si on découpe l'intervalle $[a,b]$ en N parties et si on pose

$$t_k = a + k\frac{b-a}{N}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

On a bien évidemment

$$\mathbf{r}'(t_k) \simeq \frac{\mathbf{r}(t_{k+1}) - \mathbf{r}(t_k)}{\Delta t} \qquad \text{où } \Delta t = \frac{b-a}{N}$$

et ainsi

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt \simeq \sum_{k=0}^{N-1} f(\mathbf{r}(t_k)) \left|\mathbf{r}(t_{k+1}) - \mathbf{r}(t_k)\right|.$$

En particulier si $f \equiv 1$ on devrait trouver la longueur de Γ lorsqu'on calcule $\int_\Gamma d\gamma$.

Définition 15.3. Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est un arc lisse, la longueur de Γ est définie par $|\Gamma| = \int_\Gamma d\gamma$.

Définition 15.4. Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est un arc lisse orienté et si $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$ est sa tangente unité orientée dans le sens du parcours de l'arc, alors on pose

$$\int_\Gamma f \; dx_j \underset{déf}{=} \int_\Gamma f \tau_j \; d\gamma$$

où τ_j est la $j^{\text{ième}}$ composante de $\boldsymbol{\tau}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Remarque 15.1. Si $\mathbf{r} : t \in [a, b] \to \mathbf{r}(t) \in \Gamma$ est une paramétrisation lisse de Γ telle que Γ soit parcouru dans le sens croissant des $t \in [a, b]$, alors $\mathbf{r}'(t) = \sum_{j=1}^n r'_j(t)\mathbf{e}_j$ est l'expression d'un vecteur tangent à Γ au point $\mathbf{r}(t)$ et de même orientation que Γ. Ainsi, $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \sum_{j=1}^n r'_j(t)\mathbf{e}_j$ est la tangente unité à Γ au point $\mathbf{r}(t)$. On a donc

$$\tau_j = \frac{r'_j(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

et par suite

$$\int_\Gamma f \; dx_j = \int_a^b f\left(\mathbf{r}(t)\right) r'_j(t) \; dt.$$

Définition 15.5. Soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_N$, N arcs lisses de $\mathbb{R}^n$ et soit $P_0, \ldots, P_N$ $(N+1)$ points de $\mathbb{R}^n$ tels que P_{j-1} et P_j soient respectivement l'origine et l'extrémité de Γ_j. L'union des Γ_j, $1 \le j \le N$, est appelée un <u>arc lisse par morceaux</u> et notée $\Gamma = \cup_{j=1}^N \Gamma_j$. L'orientation des Γ_j donne une orientation à Γ.

Si $P_0 = P_N$, on dit que l'arc Γ est <u>fermé</u>. Il est dit <u>fermé simple</u> si la relation $P \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$ avec $i \neq j$ implique que $j = i + 1$ et $P = P_i$ ou bien que $i = 1$, $j = N$ et $P = P_0 = P_N$.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est un arc lisse par morceaux ($\Gamma = \cup_{j=1}^N \Gamma_j$ où les Γ_j sont lisses), alors on définit

$$\int_\Gamma f\ d\gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} f\ d\gamma \qquad \text{et} \qquad \int_\Gamma f\ dx_k = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} f\ dx_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

15.2. **Formule de Green-Riemann.**

Commençons par donner deux définitions dans $\mathbb{R}^n$ et ensuite nous nous placerons plus spécifiquement dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 15.6. Un sous-ensemble non vide $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit connexe par arcs si $\forall P, Q \in D$, il existe un arc $\Gamma \subset D$ d'origine P et d'extrémité Q (on dit que P, Q peuvent être joints par un arc de E).

Définition 15.7. Un sous-ensemble non vide $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit simplement connexe par arcs (ou simplement connexe) si

(i) D est connexe par arcs ;

(ii) pour tout arc fermé simple $\Gamma \subset D$ paramétré par $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, et pour tout point $P \in D$, il existe une application continue

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to D$$

telle que $\mathbf{r}(t) = H(t, 0)$ et $P = H(t, 1)$, $t \in [a, b]$ (H est appelée homotopie qui envoie Γ sur P).

Plaçons-nous pour la suite dans le plan Ox_1, x_2 que nous noterons pour simplifier l'écriture Oxy, $(x = x_1, y = x_2)$. Soit Γ_1 un arc lisse du plan Oxy que nous supposerons paramétré de façon lisse par $t = x$. Ainsi Γ_1

sera décrit par

$$\mathbf{r}_1(x) = (x, \varphi(x)), \qquad x \in [a, b]$$

où $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1. L'origine de Γ_1 est $(a, \varphi(a))$ et son extrémité est $(b, \varphi(b))$. Soit encore Γ_2 un autre arc lisse dont l'origine est l'extrémité de Γ_1 et l'extrémité est l'origine de Γ_1.
En notant $-\Gamma_2$ le même arc Γ_2 mais orienté de façon à aller de l'extrémité à l'origine, alors $-\Gamma_2$ est aussi un arc lisse que nous supposerons paramétré par $x \in [a, b]$. Ainsi, $-\Gamma_2$ sera décrit par

$$\mathbf{r}_2(x) = (x, \psi(x)), \qquad x \in [a, b]$$

où $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1. On a $\varphi(a) = \psi(a)$, $\varphi(b) = \psi(b)$.
On suppose que $\varphi(x) < \psi(x)$, $\forall x \in]a, b[$ et donc $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est un arc lisse par morceaux du plan Oxy et fermé simple. On considère le domaine ouvert simplement connexe :

$$D = \{(x, y) : \varphi(x) < y < \psi(x), \qquad a < x < b\}.$$

La frontière de D est ainsi donnée par l'arc Γ.

Théorème 15.1. Soit D décrit ci-dessus, $\bar{D}$ son adhérence, $\widetilde{D}$ un ouvert tel que $\bar{D} \subset \widetilde{D}$ et soit $f : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1(\widetilde{D})$. Alors on a

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx\ dy = -\int_\Gamma f\ dx.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx\ dy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \right) dx \\ &= \int_a^b (f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x))dx.\end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma_1} f\ dx$. Par définition, on a

$$\int_{\Gamma_1} f\ dx = \int_a^b f(x, \varphi(x))dx.$$

De même, on aura

$$\int_{-\Gamma_2} f\ dx = \int_a^b f(x, \psi(x))dx$$

et donc, puisque Γ_2 et $-\Gamma_2$ ont des orientations différentes

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f\ dx &= \int_{\Gamma_1} f\ dx + \int_{\Gamma_2} f\ dx \\ &= \int_{\Gamma_1} f\ dx - \int_{-\Gamma_2} f\ dx = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\ dx\ dy.\end{aligned}$$

□

En échangeant les rôles de x et y dans tout ce qui précède et en prenant garde aux changements d'orientation, on obtient aussi

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx\ dy = \int_\Gamma f\ dy.$$

On peut démontrer que ces résultats restent vrais lorsque $D \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné simplement connexe dont la frontière Γ est un arc fermé simple lisse par morceaux.

15.3. **Différentielle totale.**

Définition 15.8. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et soit $f \in C^1(E)$. On appelle différentielle totale l'expression symbolique

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

On dit que $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ sont des accroissements infinitésimaux de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pour l'instant, cette expression reste symbolique et permet de faire des calculs formels comme par exemple le produit scalaire du gradient de f au point $\mathbf{x} \in E$, noté $Df(\mathbf{x})$, avec le vecteur formel $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$. On a ainsi $df(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$.

Théorème 15.2. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et soit $\Gamma \subset E$ un arc lisse d'origine P et d'extrémité Q. Soit $f \in C^1(E)$ une fonction donnée. Alors

$$\int_\Gamma df = f(Q) - f(P).$$

Démonstration. Soit $\mathbf{r} : t \in [a, b] \to \mathbf{r}(t) \in \Gamma$ une paramétrisation lisse de Γ. On a ainsi $\mathbf{r}(t) = \sum_{j=1}^n r_j(t)\mathbf{e}_j$ et $\mathbf{r}'(t) = \sum_{j=1}^n r'_j(t)\mathbf{e}_j$. Ainsi

$$\int_\Gamma df = \sum_{j=1}^n \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j} (\mathbf{r}(t))\, r'_j(t) dt.$$

Si on pose

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t), \ldots, r_n(t)\right),$$

on obtient

$$g'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} (\mathbf{r}(t))\, r'_j(t).$$

Ainsi, on a

$$\int_\Gamma df = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a).$$

Clairement, puisque P et Q sont l'origine et l'extrémité de Γ, on obtient $g(b) = f(Q)$ et $g(a) = f(P)$, ce qui complète la preuve. $\square$

Corollaire 15.1. Si Γ est un arc lisse par morceaux dans E d'origine P et d'extrémité Q alors $\int_\Gamma df = f(Q) - f(P)$. Si Γ est un arc lisse par morceaux et fermé, on a $\int_\Gamma df = 0$.

Remarque 15.2. La notion de différentielles totales permet de procéder à des calculs formels qui trouvent leur justification dans la théorie des formes différentielles (c.f. cours Analyse III).
Soit par exemple $f \in C^1(E)$ dont la différentielle totale est

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Si les variables x_j sont à leur tour fonctions de m variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$, c'est-à-dire s'il existe des applications $r_j \in C^1(F), j = 1, 2, \ldots, n$, où $F \subset \mathbb{R}^m$ est un ouvert non vide et $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = (r_1(\mathbf{y}), r_2(\mathbf{y}), \ldots, r_n(\mathbf{y})) \in E$ pour tout $\mathbf{y} \in F$, on peut écrire

$$x_j = r_j(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

et

$$dx_j = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial r_j}{\partial y_k} dy_k, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

On obtient ainsi (du moins formellement)

$$df = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial r_j}{\partial y_k} dy_k.$$

Si maintenant on compose $f \circ r$, i.e., si on définit $g \in C^1(F)$ par

$$g(\mathbf{y}) = f(r_1(\mathbf{y}), r_2(\mathbf{y}), \ldots, r_n(\mathbf{y}))$$

on obtient

$$dg = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k} dy_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial r_j}{\partial y_k} dy_k$$

et par suite

$$df = dg.$$

Comme application, si on reprend la démonstration du théorème 15.2 où ici on pose $F \subset \mathbb{R}, F \supset [a, b]$ et $y_1 = t$, on obtient

$$dg = g'(t) dt$$

et on a bien $f(Q) - f(P) = \displaystyle\int_\Gamma df = \int_a^b dg = g(b) - g(a).$

Index