Analyse avancée I (PH)

François Genoud

Automne 2020

Préambule

Ces notes sont basées sur le cours du Prof. Tudor Ratiu, que j'ai eu la chance de suivre à l'EPFL durant l'année académique 2000/2001. En tant qu'assistant-étudiant du Prof. Ratiu, j'en ai rédigé le polycopié du 1er semestre (Analyse I) en 2003. La présente version a été quelque peu remaniée, notamment certains sujets concernant les ensembles finis et infinis sont maintenant traités dans le cours d'algèbre linéaire et ne seront pas abordés ici. J'espère avoir été aussi clair que possible dans l'exposé, afin que vous puissiez vous familiariser sans trop de peine avec les nombreux et très riches sujets qui font l'objet de ce cours. Je conçois néanmoins qu'une importante quantité de matière est traitée en un temps assez court et que l'assimilation demande un effort de travail conséquent, notamment dans les exercices. J'ai parfois été volontairement assez succinct dans les démonstrations, pour vous incitez à vous creuser un peu la tête et, si nécessaire, à écrire quelques lignes pour clarifier par vous-mêmes les détails techniques. En effet, comme on entend souvent dire : "Les mathématiques ne s'apprennent pas en lisant, mais en écrivant."

Je tiens à remercier mon collègue-étudiant d'alors, le Prof. Sven Bachmann, pour sa relecture attentive et ses précieux conseils lors de la rédaction du manuscrit original en 2003. Notre solide amitié s'est forgée sur les bancs de l'EPFL, où nous découvrions ensemble avec émerveillement les liens profonds entre les mathématiques et la physique. L'activité de recherche en physique théorique/mathématique repose de manière fondamentale sur les notions et les savoir-faire acquis dans les cours d'analyse de 1ère année. Je suis infiniment reconnaissant au Prof. Ratiu pour son enthousiasme contagieux et sa vision très large de l'analyse. Ses cours ont été, non seulement, parmi les plus passionnants de ma carrière d'étudiant mais, sans doute, les plus utiles dans mon activité quotidienne de mathématicien.

François Genoud

Table des matières

Chapitre 1

Nombres, ensembles, fonctions

Le but de ce chapitre est d'introduire les notions de base concernant l'ensemble des nombres réels et ses sous-ensembles, les notations usuelles du langage ensembliste, ainsi que les propriétés élémentaires des fonctions réelles à une variable réelle.

Nous n'avons pas ici l'ambition de présenter une construction rigoureuse des nombres réels, mais uniquement quelques rappels fondamentaux et nécessaires à la suite du cours.

1.1 L'ensemble des nombres réels

1.1.1 Les entiers positifs

On définit l'ensemble des *entiers positifs* par $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, muni des opérations arithmétiques suivantes :

- addition : $(n, m) \mapsto n + m$,
- multiplication : $(n, m) \mapsto n \cdot m \equiv nm$,

et de la relation d'ordre $n \leq m$, pour $n, m \in \mathbb{N}$. Nous supposons que le lecteur est familier avec les propriétés de base de l'addition et de la multiplication. Par souci de complétude, nous rappelons les propriétés (axiomes) de la relation d'ordre :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq n$; (*réflexivité*)

(ii) si $n, m \in \mathbb{N}$ satisfont $n \leq m$ et $m \leq n$, alors $n = m$; (*antisymétrie*)

(iii) si $n, m, p \in \mathbb{N}$ satisfont $n \leq m$ et $m \leq p$, alors $n \leq p$; (*transitivité*)

(iv) pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a soit $n \leq m$ soit $m \leq n$. (*ordre total*)

On dit que $m \geq n$ si et seulement si $n \leq m$.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des *entiers strictement positifs* (nombres naturels) $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ muni des mêmes opérations et relation d'ordre. On considère dans $\mathbb{N}$ les équations de la forme

- $m + x = n$,
- $mx = n$,

pour $n, m \in \mathbb{N}$ donnés. On remarque par exemple que les équations $2 + x = 7$ et $3x = 9$ admettent des solutions dans $\mathbb{N}$, alors que les équations $7 + x = 2$ et $9x = 3$ n'en admettent pas.

1.1.2 Première extension : les entiers relatifs

On définit $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$, l'ensemble des *entiers relatifs*, ainsi que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, l'ensemble des *entiers non-nuls*, munis tous deux des mêmes opérations et relation d'ordre que $\mathbb{N}$.

On remarque ici que les équations du type $m + x = n$, pour $n, m \in \mathbb{Z}$, admettent toujours une solution unique dans $\mathbb{Z}$. Cependant, les équations de la forme $mx = n$ n'admettent pas toujours de solution dans $\mathbb{Z}$.

1.1.3 Deuxième extension : les nombres rationnels

On définit $\mathbb{Q} = \{p/q\,;\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$, l'ensemble des *nombres rationnels*. Cette définition sous-entend la relation d'équivalence $np/nq \sim p/q$, $n \in \mathbb{Z}^*$, qui est compatible avec les opérations algébriques. Un point crucial est que l'on peut choisir un représentant de la classe d'équivalence $[p/q]$ (cf. cours d'algèbre linéaire pour les notions de relation/classe d'équivalence) tel que le plus grand diviseur commun de p et q soit égal à 1.

On a pour $\mathbb{Q}$ les mêmes opérations arithmétiques et relation d'ordre précédemment définies. Les équations du type

- $a + x = b,\ a, b \in \mathbb{Q}$,
- $ax = b,\ a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0$,

ont toujours une unique solution dans $\mathbb{Q}$.

En résumé, $\mathbb{Q}$ est muni des propriétés suivantes :

- opérations arithmétiques $+, \cdot$ avec les règles de calculs (axiomes) : associativité, distributivité, commutativité, éléments neutres $(0, 1)$, inverses $(-x, x^{-1})$,
- relation d'ordre $\leq$ avec les propriétés (i)–(iv) ci-dessus et les axiomes de compatibilité suivants, pour $a, b \in \mathbb{Q}$:

$$\text{(v)}\quad a \leq b \quad\Longrightarrow\quad a + x \leq b + x, \quad \forall\, x \in \mathbb{Q},$$
$$\text{(vi)}\quad a \leq b \quad\Longrightarrow\quad ax \leq bx, \quad \forall\, x \in \mathbb{Q},\ x \geq 0.$$

On dit que $\mathbb{Q}$ est un *corps (commutatif) ordonné* (cf. cours d'algèbre linéaire).

Noter que, si la définition de $\leq$ sur $\mathbb{Z}$ est évidente (par énumération), elle ne l'est pas a priori sur $\mathbb{Q}$. En utilisant les règles de calcul habituelles (mise au même dénominateur), on montre que (au sens des classes d'équivalence)

$$\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} = \frac{pq' - p'q}{qq'}.$$

On dit alors que $p/q \leq p'/q'$ si et seulement si $p/q - p'/q' = (pq' - p'q)/qq' \leq 0$, soit $qq' > 0$ et $pq' - p'q \leq 0$ ou $qq' < 0$ et $pq' - p'q \geq 0$.

1.1.4 Définition

On rappelle que la *valeur absolue* de $x \in \mathbb{Q}$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0\,, \\ x & \text{si} \quad x \geq 0\,, \end{cases}$$

et la *fonction signe* par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0\,, \\ 1 & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

La fonction signe n'est pas définie pour $x = 0$.

1.1.5 Remarque

On a pour la valeur absolue les propriétés importantes suivantes :

(i) $x \leq |x|$;

(ii) $|x| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$;

(iii) $|xy| = |x||y|$;

(iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)* ;

(v) $|x - y| \geq ||x| - |y||$;

(vi) $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ pour tout $x \neq 0$.

1.1.6 "Définition" de $\mathbb{R}$

Nous nous contenterons dans ce cours de la "définition" intuitive suivante : l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ peut être représenté par une droite (au sens de la géométrie euclidienne) où chaque point correspond à un nombre de façon biunivoque ($\mathbb{R}$ est en bijection avec la droite).

On a de plus les propriétés élémentaires :

- opérations arithmétiques $+, \cdot$ avec les mêmes axiomes,
- relation d'ordre $\leq$ avec les mêmes axiomes,
- mêmes axiomes de compatibilité.

Cette structure algébrique fait de $\mathbb{R}$ *un corps (commutatif) ordonné.* L'existence de $\mathbb{R}$ est garantie par un important théorème qui affirme que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps, et ayant la *propriété de la borne supérieure.* Cette propriété sera donnée comme axiome à la fin de la section suivante. Une démonstration de ce théorème peut être trouvée, par exemple, dans l'excellent ouvrage de W. Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, ou dans R. Godement, *Analyse mathématique I.* Elle procède d'une construction algébrique rigoureuse des nombres réels à partir des rationnels, qui sort malheureusement du cadre de ce cours. Dans une telle construction (il en existe plusieurs variantes aboutissant au même résultat), les opérations arithmétiques et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ sont héritées de $\mathbb{Q}$, et les axiomes ci-dessus deviennent des théorèmes...

La relation d'ordre donne à la droite une orientation, de $-\infty$ à $+\infty$ (la notion d'infini sera introduite de manière plus précise à la section 2.3).

On a également la notion naturelle de distance entre deux points x, y de la droite, donnée par $|x-y|$ où on étend la définition de la valeur absolue de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$.

Il faut remarquer que $\mathbb{R}$ **est beaucoup plus riche que** $\mathbb{Q}$. En effet, $\mathbb{Q}$ est dénombrable mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas (cf. cours d'algèbre linéaire). Tous les réels qui ne sont pas rationnels sont dits *irrationnels* et sont donc "beaucoup plus nombreux" que les rationnels. Si l'on cherche par exemple à déterminer la longeur (qu'on peut donc mesurer sur la droite) de la diagonale d'un carré de côté 1, on est amené à une équation algébrique dont la solution n'est pas rationnelle.

1.1.7 Exemple

L'équation $x^2 = 2$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions, notées $\pm\sqrt{2}$, mais elle n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, i.e. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration Supposons que l'on peut choisir $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux (i.e. dont le pgcd vaut 1) tel que $p/q = \sqrt{2}$. On a alors $p^2 = 2q^2$, donc p est pair, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Mais alors $2q^2 = p^2 = 4k^2$, $q^2 = 2k^2$, donc q est aussi pair, ce qui contredit l'hypothèse p et q premiers entre eux. ♦

Le fait que $x^2 = 2$ est soluble dans $\mathbb{R}$ (i.e. l'existence de $\sqrt{2}$) sera abordé aux exercices.

1.2 Propriétés des sous-ensembles de $\mathbb{R}$

1.2.1 Notation

On rappelle les notations ensemblistes usuelles :

- Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note $E \subset \mathbb{R}$.
  Pour $x \in \mathbb{R}$, on a toujours $x \in E$ ou $x \notin E$.

  On peut caractériser E par une propriété donnée :
  $E = \{x \in \mathbb{R};\ \textit{propriété caractéristique des éléments de } E\}$.
- Si $\forall x \in \mathbb{R},\ x \notin E$, on écrit $E = \emptyset$ et l'on dit que E est l'*ensemble vide*.
- On dit que E *est inclus dans* F et on note $E \subset F$ si
  $x \in E \ \Rightarrow\ x \in F$.
- Soit $E, F \subset \mathbb{R}$. On définit :

  — *l'intersection* :
  $$E \cap F = \{x \in \mathbb{R};\ x \in E \text{ et } x \in F\},$$
  — *la réunion* :
  $$E \cup F = \{x \in \mathbb{R};\ x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Plus généralement, si $\Lambda \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on définit :

— *l'intersection* :
$$\bigcap_{E\in\Lambda} E = \{x \in \mathbb{R}\,;\ \forall\, E \in \Lambda,\ x \in E\}\,,$$
— *la réunion* :
$$\bigcup_{E\in\Lambda} E = \{x \in \mathbb{R}\,;\ \exists\, E \in \Lambda,\ x \in E\}\,.$$

- Soit $E \subset \mathbb{R}$. On définit le *complémentaire* de E dans $\mathbb{R}$ par
$$E^c = \mathbb{R} \setminus E = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \notin E\}\,.$$
On a $E \cup E^c = \mathbb{R}$ et $E \cap E^c = \emptyset$. On écrit parfois CE au lieu de E^c.

1.2.2 Exemple

(i) On a les inclusions :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\,.$$

(ii) On définit les sous-ensembles de $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \geq 0\}\,,\\
\mathbb{R}_- &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \leq 0\}\,,\\
\mathbb{R}^* &= \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\\
\mathbb{R}_+^* &= \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x > 0\}\,,\\
\mathbb{R}_-^* &= \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < 0\}\,.
\end{aligned}$$
De même pour $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

(iii) On a clairement $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = \emptyset$.

(iv) Pour tout $E \subset \mathbb{R}$, on a $E \subset E$, $E \cup \emptyset = E$, $E \cap \emptyset = \emptyset$.

(v) On a que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}\,; \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset\,; \quad \forall\, E \subset \mathbb{R},\ \bigcup_{x\in E} \{x\} = E\,.$$

1.2.3 Définition

On définit, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ appelés *intervalles* :
$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x \leq b\} \quad (\textit{intervalle fermé})\,,\\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x < b\} \quad (\textit{intervalle ouvert})\,,\\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x < b\} \quad (\textit{intervalle semi-ouvert})\,.
\end{aligned}$$
On a $(a, a) = \emptyset$ et $[a, a] = \{a\}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

On définit également les *intervalles généralisés* :

$$\begin{aligned}
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x\}\,,\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x\}\,,\\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \leq b\}\,,\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < b\}\,.
\end{aligned}$$

On dit d'un intervalle qu'il est *dégénéré* s'il est réduit à un point.

D'autre part, on a clairement $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$.

Attention ! $\pm\infty$ ne sont pas des nombres ; on ne peut pas écrire $[a,\infty]$ ou $[-\infty,b]$.

1.2.4 Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

On dit que E est *borné supérieurement* s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq b$ pour tout $x \in E$. On dit alors que b est un *majorant* de E.

On dit que E est *borné inférieurement* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq x$ pour tout $x \in E$. On dit alors que a est un *minorant* de E.

Finalement, E est *borné* s'il admet un minorant et un majorant.

1.2.5 Exemple

(i) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont bornés inférieurement mais pas supérieurement.

(ii) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ne sont bornés ni inférieurement, ni supérieurement.

(iii) $[a,b)$, pour $a,b \in \mathbb{R}$, est borné.

(iv) $(-\infty,a)$, pour $a \in \mathbb{R}$, est borné supérieurement.

1.2.6 Question

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ et borné supérieurement. Existe-t-il un plus petit majorant ?

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ et borné inférieurement. Existe-t-il un plus grand minorant ?

Si oui, on définit :

1.2.7 Définition

(i) *le supremum* :

$$\sup E = \text{le plus petit majorant de } E\,,$$

(ii) *l'infimum* :

$$\inf E = \text{le plus grand minorant de } E\,.$$

Précision

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\sup E - \varepsilon \leq x \leq \sup E$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\inf E \leq x \leq \inf E + \varepsilon$.

On parle aussi de *borne supérieure* et *inférieure.*

1.2.8 Exemple

(i) $\inf \mathbb{N} = \inf \mathbb{R}_+ = \inf \mathbb{R}_+^* = 0$.
(ii) $\inf \mathbb{N}^* = 1$.
(iii) $\inf (a,b] = \inf [a,b] = a$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

1.2.9 Remarque

(i) On a les deux possibilités :

- $\inf E \in E$ (par exemple $0 \in \mathbb{R}_+$),
- $\inf E \notin E$ (par exemple $0 \notin \mathbb{R}_+^*$).

De même pour le supremum.

(ii) Par convention, $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$.

1.2.10 Exemple

Soit $E = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 < 2\}$ et $A = \{x \in \mathbb{Q}\,;\ x^2 < 2\} = E \cap \mathbb{Q}$. Nous allons voir aux exercices que $\inf E = -\sqrt{2}$ et $\sup E = \sqrt{2}$; en particulier, E est borné. En revanche, $\inf A$ et $\sup A$ n'existent pas dans $\mathbb{Q}$.

Nous donnons maintenant **comme axiome** la propriété de la borne supérieure. Cette propriété se démontre dans le cadre de la construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ (cf. Rudin). L'exemple précédent montre que $\mathbb{Q}$ n'a pas cette propriété.

1.2.11 Axiome *(propriété de la borne supérieure)*

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ et borné supérieurement (resp. inférieurement). Il existe alors $\sup E$ (resp. $\inf E$) $\in \mathbb{R}$.

1.2.12 Proposition *(propriété d'Archimède)*

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Alors il existe un entier $n > 0$ tel que

$$nx > y\,.$$

Démonstration Soit A l'ensemble de tous les nombres de la forme nx, n parcourant l'ensemble des entiers strictement positifs. Supposons par l'absurde que y est un majorant de A. Alors A est borné supérieurement et il existe $\alpha = \sup A$.

Puisque $x > 0 \Rightarrow \alpha - x < \alpha$, $\alpha - x$ n'est pas un majorant de A et ainsi il existe un entier $m > 0$ tel que $\alpha - x < mx \Rightarrow \alpha < (m+1)x \in A$, d'où contradiction, puisque α est un majorant de A. ♦

1.3 Fonctions réelles d'une variable réelle

Nous rappelons dans cette section les notions élémentaires concernant les fonctions réelles d'une variable réelle qui seront nécessaires par la suite pour une étude plus approfondie des propriétés de ces fonctions (continuité, dérivabilité, etc.).

1.3.1 Définition

Une *fonction réelle d'une variable réelle* est définie par les trois objets suivants :

(i) le *domaine de définition* de la fonction $D(f)$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (on dit que la variable est réelle),

(ii) l'*ensemble d'arrivée* A qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (la fonction est dite réelle),

(iii) une règle f qui associe à chaque élément $x \in D(f)$ un **unique** élément y de l'ensemble d'arrivée.

On écrit ça sous la forme compact :

$$f : \ D(f) \longrightarrow A , \quad x \mapsto y = f(x) ,$$

et on dit que x est la *variable indépendante*, la variable y dépendant de x selon l'expression $y = f(x)$.

On désigne souvent, par abus de langage, la fonction par f, mais il faut se rappeler qu'on doit toujours préciser le domaine de définition ! En d'autres termes, une fonction est toujours définie par un triplet $(D(f), A, f)$.

1.3.2 Définition

On rappelle d'abord la notation habituelle :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) ; \ x_i \in \mathbb{R} , \ 1 \leq i \leq n\} , \ n \geq 1 .$$

On appelle *graphe* de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ définit par

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x \in D(f) , \ y = f(x)\} .$$

On définit également l'*image* de f par

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} ; \ \exists \, x \in D(f) \text{ tel que } y = f(x)\} .$$

On appelle *représentation graphique* de f la courbe du plan $\mathbb{R}^2$ définie par $G(f)$. On donne alors une interprétation géométrique de l'unicité dans la définition 1.3.1 (iii) : l'intersection de $G(f)$ avec une droite verticale (i.e. parallèle à l'axe Oy) admet **au plus** un point.

1.3.3 Exemple

Considérons l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 1$ et les fonctions suivantes :

$$f_1 : \; [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}\,,$$

$$f_2 : \; [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_2(x) = +\sqrt{1 - x^2}\,.$$

On voit que le cercle est la réunion des graphes de f_1 et f_2.

1.3.4 Définition

On dit qu'une fonction f est

(i) *injective* si $x_1\,,\ x_2 \in D(f)\,,\ x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)\,,$

(ii) *surjective* si $Im(f) = A\,,$

(iii) *bijective* si f est injective et surjective.

On peut reformuler comme suit : f est

(i) *injective* si $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ (très utile en pratique),

(ii) *surjective* si $\forall\, y \in A,\ f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset\,,$

(iii) *bijective* si $\forall\, y \in A,\ \exists\, x \in D(f),\ f^{-1}(\{y\}) = \{x\}\,.$

1.3.5 Exemple

(i) $f : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^3$ est bijective.

(ii) $f : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^2$ n'est ni injective ni surjective.

(iii) $f : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\,,\ f(x) = x^2$ est surjective.

1.3.6 Définition

Soit $(D(f)\,, A\,, f)$ une fonction.

(i) On dit que $(D(f_1)\,, A_1\,, f_1)$ est une *restriction* de f si

$$D(f_1) \subset D(f)\,,\ A_1 \subset A\,,\ f_1(x) = f(x)\,,\ \forall\, x \in D(f_1)\,.$$

(ii) On dit que $(D(f_2)\,, A_2\,, f_2)$ est une *extension* de f si

$$D(f) \subset D(f_2)\,,\ A \subset A_2\,,\ f(x) = f_2(x)\,,\ \forall\, x \in D(f)\,.$$

1.3.7 Remarque

(i) Si f_1 est une restriction de f, alors f est une extension de f_1.

(ii) Si f_2 est une extension de f, alors f est une restriction de f_2.

1.3.8 Notation

Si f_1 est une restriction de f, on note $f_1 = f\,|_{D(f_1)}$.

Attention ! Si $A_1 = A = A_2 = \mathbb{R}$, alors $f_1 = f\,|_{D(f_1)}$ est unique mais l'extension f_2 n'est pas unique.

1.3.9 Opérations sur les fonctions

Considérons les fonctions $(D(f)\,,\mathbb{R}\,,f)$ et $(D(g)\,,\mathbb{R}\,,g)$. On définit les opérations suivantes :

- la combinaison linéaire :

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)\,,\ \forall\, x \in D(f) \cap D(g)\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,$$

- le produit :

$$(fg)(x) = f(x)g(x)\,,\ \forall\, x \in D(f) \cap D(g)\,,$$

- le quotient :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,,\ \forall\, x \in D(f) \cap D(g) \text{ tel que } g(x) \neq 0\,,$$

- la composition :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))\,,\ \forall\, x \in D(f \circ g) = \{x \in D(g)\,;\ g(x) \in D(f)\}\,.$$

1.3.10 Exemple

(i) Par convention, on pose $x^0 = 1$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et on considère les *fonctions puissance* :

$$f_0(x) = 1\,,\ f_1(x) = x\,,\ f_2(x) = x^2\,, \ldots,\ f_n(x) = x^n\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

On peut alors former une combinaison linéaire :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\,,\ a_i \in \mathbb{R}\ (0 \leq i \leq n)\,,\ a_n \neq 0\,.$$

C'est un polynôme en x de degré n avec $D(P) = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ et on a que $Im(P) \subset \mathbb{R}$, mais $Im(P) \neq \mathbb{R}$ en général. (Par exemple $Im(x^2) = \mathbb{R}_+$.)

Soit $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\,, b_i \in \mathbb{R}\ (0 \leq i \leq m)\,,\ b_m \neq 0$, un polynôme en x de degré m.
Alors la combinaison linéaire $\alpha P + \beta Q$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, est bien sûr un polynôme et vérifie : $\deg(\alpha P + \beta Q) \leq \max\{\deg(P)\,,\deg(Q)\}$.

Pour le produit PQ, on a $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Pour $x \in D(P/Q) = \{x \in \mathbb{R}\,;\ Q(x) \neq 0\}$, on définit la *fonction rationnelle* P/Q. Cette définition sous-entend les simplifications du type $x^n/x^n = 1$.

(ii) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction *partie entière* par

$$\mathrm{E}(x) \equiv [x] = k\,, \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \text{ est tel que} \quad k \leq x < k+1\,.$$

Clairement $D(\mathrm{E}) = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ et $Im(\mathrm{E}) = \mathbb{Z}$.

On définit également $\mathrm{R}(x) = x - \mathrm{E}(x)$, la *partie fractionnaire* de x.

(iii) Considérons les fonctions

$$g:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ g(x) = -x^6\,, \quad f:\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(y) = \sqrt{y}\,.$$

On a alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^6) = \sqrt{-x^6}\,,\ x \in D(f \circ g) = \{0\}$$

et

$$(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(\sqrt{y}) = -y^3\,,\ y \in D(g \circ f) = \mathbb{R}_+ \neq D(f \circ g)\,.$$

On peut trouver une extension de cette fonction à $\mathbb{R}$, par exemple $h(y) = -y^3$, $y \in \mathbb{R}$.
On constate ainsi qu'en général $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

1.3.11 Problème

Soit $(D(f)\,, A\,, f)$ une fonction. Pour $y \in \mathbb{R}$, considérons l'équation

$$f(x) = y\,.$$

(i) On se pose la question de savoir si cette équation possède des solutions, autrement dit, on cherche à la résoudre par rapport à x.
Si f est surjective, on aura au moins une solution.

(ii) La deuxième question qui se pose naturellement est celle de l'unicité d'une éventuelle solution.
On a que si f est injective, la solution, si elle existe, est unique.

(iii) On se demande maintenant s'il existe une fonction $(D(g)\,, B\,, g)$ telle que

$$g \circ f = id\,|_{D(f)} \quad \text{et} \quad f \circ g = id\,|_{D(g)}\,.$$

Pour que les expressions ci-dessus aient un sens, on a ainsi les conditions évidentes

$$Im(f) = D(g) \quad \text{et} \quad Im(g) = D(f)\,.$$

Si une telle fonction g existe, notre équation possède une et une seule solution $x = g(y)$ pour chaque $y \in Im(f)$. C'est le cas si et seulement si f est bijective et on appelle alors g la *fonction inverse* de f, notée f^{-1}.

On dit aussi que f est *inversible* et on a ainsi

$$f \circ f^{-1} = id\,|_{Im(f)} \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = id\,|_{D(f)}\,.$$

1.3.12 Exemple

(i) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ est bijective avec $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = y$.

(ii) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ est bijective avec $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

(iii) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ n'est pas injective, donc pas inversible.

(iv) $f: \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ n'est pas surjective, donc pas inversible.

(v) En revanche, $f: \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ est inversible avec $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_-$, $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

1.3.13 Définition

On dit qu'une fonction f est :

- *constante* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$, $\forall x \in D(f)$ (on note $f \equiv c$) ;
- *croissante* si
$$x_1 \leq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in D(f)\,;$$
- *strictement croissante* si
$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in D(f)\,;$$
- *décroissante* si
$$x_1 \leq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in D(f)\,;$$
- *strictement décroissante* si
$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in D(f)\,;$$
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante ;
- *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante ;
- *bornée inférieurement* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$, $\forall x \in D(f)$ (on dit que f est bornée inférieurement par m ou que m est une borne inférieure de f) ;
- *bornée supérieurement* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$, $\forall x \in D(f)$;
- *bornée* si elle est bornée inférieurement et bornée supérieurement ;
- *paire* si $D(f)$ est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$;
- *impaire* si $D(f)$ est symétrique p.r. à 0 et $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$;
- *périodique* si $D(f) = \mathbb{R}$ et s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.3.14 Remarque

Si une fonction est paire ou impaire, il est clair que son domaine de définition est symétrique par rapport à l'origine.

1.3.15 Exemple

(i) La fonction partie entière est croissante mais pas strictement, ni bornée inférieurement ni bornée supérieurement, non périodique.

(ii) La fonction partie fractionnaire est bornée et périodique.

(iii) $f(x) = x^3$ est impaire, strictement croissante, ni bornée inférieurement ni bornée supérieurement, non périodique.

(iv) $f(x) = x^2$ est paire, ni croissante ni décroissante, mais elle est monotone sur certains intervalles (par exemple $\mathbb{R}_-$ ou $\mathbb{R}_+$). Par ailleurs, elle est bornée inférieurement (par 0) mais pas supérieurement, et elle n'est pas périodique.

(v) La fonction $f(x) = \sin(x)$ est bornée et périodique sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Suites numériques

Nous introduisons dans ce chapitre la notion (fondamentale en analyse) de suite numérique. Nous définissons précisément et illustrons par divers exemples les concepts de convergence, de limite infinie, etc.

Les théorèmes et résultats importants relatifs à la convergence et aux opérations algébriques sur les suites sont également énoncés et rigoureusement démontrés.

Nous présentons la notion de suite de Cauchy, ainsi que celle de suite partielle, et nous démontrons le théorème de Bolzano-Weierstrass qui sera un outil puissant pour la suite du cours.

2.1 Limite d'une suite

2.1.1 Définition

On appelle *suite numérique* (ou plus simplement *suite*) toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, et on note

$$f: \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \ f(n) =: x_n\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

On désigne alors la suite par l'ensemble $Im(f) =: (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, et on appelle x_n le *n-ième terme*, ou *terme général* de la suite.

On peut définir une suite de différentes manières, par exemple par une formule explicite du type

$$x_n = f(n)\,, \ n \in \mathbb{N}\,,$$

ou encore par une *relation de récurrence* entre ses termes, de la forme

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_0 \in \mathbb{R} \ \text{donné.}$$

2.1.2 Exemple

(i) $x_n = a \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définit une suite constante,

(ii) $x_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $x_n = n^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iv) $x_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0! = 1$,

(v) $x_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$,

(vi) $x_n = an + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définit une *progression arithmétique* (constante si $a = 0$),

(vii) $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, $r \in \mathbb{R}^*$ fixé, et $x_{n+1} = rx_n \Leftrightarrow x_n = x_0 r^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définit une *suite géométrique* de premier terme x_0 et de *raison* r,

(viii) $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+1} =$ le plus petit nombre premier supérieur à x_n.

2.1.3 Remarque

On a bien sûr pour les suites les mêmes propriétés de croissance, bornitude, périodicité, etc. énoncées précédemment.

2.1.4 Définition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la *limite* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_n - l| < \varepsilon .$$

On écrit alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \quad \text{ou} \quad x_n \longrightarrow l \quad (n \to \infty),$$

et on dit que la suite *converge* vers la limite l.

Cette définition quelque peu abstraite peut être expliquée de façon plus intuitive comme suit.
On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si on peut rendre la distance entre les “points” de la suite et la limite l arbitrairement petite ($\forall \varepsilon > 0$) à partir d'un certain *rang* ($n \geq N \in \mathbb{N}$), i.e. les termes de la suite s'approchent indéfiniment du nombre $l \in \mathbb{R}$.
En d'autres termes, si on choisit un intervalle $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ de largeur 2ε arbitrairement petit autour de l, on a que tous les termes de la suite, sauf **un nombre fini** d'entre eux, se trouveront dans l'intervalle considéré.

2.1.5 Remarque

Dans la définition précédente, le nombre naturel N dépend de ε. On notera parfois explicitement cette dépendance par $N = N(\varepsilon)$.
Si une suite admet une limite, on dit qu'elle est *convergente*, sinon on dit qu'elle *diverge* ou qu'elle est *divergente*.

Attention ! La limite l est un nombre réel, i.e. $l \neq \pm\infty$.

2.1.6 Exemple

(i) Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$. On se convainc aisément que cette suite est divergente.

(ii) Soit $x_n = 1/n^2$, $n \geq 1$. Montrons que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie converge vers 0. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a que

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ainsi, il suffit de choisir $N \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$ dans la définition de la limite.

2.1.7 Proposition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

(i) Si $x_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$ $\quad (n \to \infty)$, alors la limite l est unique.

(ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

(iii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = y_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors les suites sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes.

(iv) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et s'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \geq n_1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Démonstration

(i) Supposons par l'absurde qu'il existe $l' \neq l$ tel que,
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon), N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \text{et} \quad |x_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq N'(\varepsilon).$$

Alors pour tout $n \geq \max\{N(\varepsilon), N'(\varepsilon)\}$, on va avoir

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq |x_n - l| + |x_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.
Donc $l' = l$.

(ii) On suppose que $x_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$ $\quad (n \to \infty)$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - l| < 1$ pour tout $n \geq N$.
Ainsi, en utilisant la remarque 1.1.5 (v), on va avoir

$$|x_n| - |l| \leq ||x_n| - |l|| \leq |x_n - l| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x_n| < 1 + l, \ \forall n \geq N.$$

Posant $M = \max\{1 + |l|, |x_0|, ..., |x_{N-1}|\}$, on a alors que $|x_n| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration des points (iii) et (iv) est laissée au lecteur comme exercice élémentaire. ♦

2.1.8 Corollaire

Toute suite non-bornée est divergente.

Démonstration Enoncé contraposé de la proposition 2.1.7 (ii). ♦

2.1.9 Théorème *(Principe des deux gendarmes)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Supposons que :*

- $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall\, n \geq N$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq N$, tel que

$$x_n - l > -\varepsilon \quad \text{et} \quad z_n - l < \varepsilon\,,\ \forall\, n \geq n_0\,.$$

Alors on a

$$-\varepsilon < x_n - l \leq y_n - l \leq z_n - l < \varepsilon\,,\ \forall\, n \geq n_0\,,$$

et ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$. ♦

2.1.10 Exemple

(i) Considérons la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ définie par $y_n = (1/n)\sin(n^2)$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n^2)}{n} \leq \frac{1}{n}\,,\ \forall\, n \geq 1\,.$$

Ainsi, en posant $x_n = -1/n$ et $z_n = 1/n$, $n \geq 1$, et en remarquant que $x_n, z_n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$, on va avoir que

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \Longrightarrow \quad y_n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

De même pour $y_n = (1/n)\sin(1/n)$.

(ii) On considère maintenant la suite de terme général

$$y_n = \frac{\cos^2(n)}{n + \sin(n)}\,,\ n \geq 2\,.$$

On a

$$n - 1 \leq n + \sin(n) \leq n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n + \sin(n)} \leq \frac{1}{n-1}\,,\ n \geq 2\,,$$

et donc, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n + \sin(n)} \leq \frac{1}{n-1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

2.1.11 Théorème

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *. Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante (resp. décroissante) et bornée supérieurement (resp. bornée inférieurement), alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Démonstration Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et bornée supérieurement $\Longrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, la démonstration de l'autre cas étant tout à fait analogue.

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée supérieurement, il existe $b = \sup\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Maintenant, par définition du supremum, on a que

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \tilde{n} \quad \text{tel que} \quad b - \varepsilon \leq x_{\tilde{n}} \leq b\,.$$

Mais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et on a donc

$$b - \varepsilon \leq x_{\tilde{n}} \leq x_{\tilde{n}+1} \leq \ldots \leq b\,,$$

et ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b = \sup\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. ♦

2.1.12 Exemple

Pour les exemples ci-dessous, on rappelle la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,$$

valable pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, où $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, $\forall\, p \leq n$.

(i) Pour $a > 0$, posons $x_n = \sqrt[n]{a}$, $n \geq 2$ et $x_0 = x_1 = a$.
On distingue alors les trois cas suivants :

- $a = 1$: $x_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
- $a > 1$: $x_n = \sqrt[n]{a} > 1$ pour tout $n \geq 2$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par 1.
  D'autre part, pour $n \geq 2$,

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = a^{-\frac{1}{n(n+1)}} < 1\,,$$

  ce qui montre que $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

  Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrons que sa limite est 1 :

  Soit $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\} \geq 1$, et posons
  $l = 1 + c$ pour $c \geq 0$.

  Alors pour $n \geq 2$,

  $$1 + c = l \leq \sqrt[n]{a} \Longrightarrow 1 + nc \leq 1 + nc + \binom{n}{2} c^2 + \ldots + c^n = (1+c)^n = l^n \leq a\,,$$

par la formule du binôme de Newton.
On a donc que $1 + nc \leq a$ pour tout $n \geq 2$, ce qui est absurde si $c > 0$.
Donc $c = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour $a \geq 1$.

- $0 < a < 1$: Posons $b = 1/a > 1$.
  Alors $x_n = \sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{b}$, où la suite $(\sqrt[n]{b})_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et bornée inférieurement.
  Donc $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante et bornée supérieurement, et ainsi $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\} = 1$.

On a donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,,\ \forall\, a > 0\,.$$

(ii) Considérons la suite définie par

$$x_0 = 1\,,\ x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,,\ \forall\, n \geq 1\,.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
x_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots \\
&\quad \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + n\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} + \ldots \\
&\quad \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\,,
\end{aligned}$$

car

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \leq 1\,,\ \forall\, k \leq n\,.$$

D'autre part, pour tout $k \geq 2$, $k! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots k \geq 1\cdot 2\cdot 2\ldots 2 = 2^{k-1}$, et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \Longrightarrow \quad x_n &\leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{série géométrique}} \\
&= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\,,\ \forall\, n \geq 1\,,
\end{aligned}$$

puisque la formule bien connue pour la série géométrique donne

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}\,,\ \forall\, q \neq 1\,.$$

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée supérieurement par 3.
Nous allons montrer qu'elle est croissante.
En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} \\
&\quad ... + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + ... + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + ... + \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} + ... \\
&\quad ... + \frac{1}{(n-1)!}\frac{n(n-1)...2\cdot 1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... \\
&\quad ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + ... \\
&\quad ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + ... \\
&\quad ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + ... \\
&\quad ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&= 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + ... \\
&\quad ... + \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} + ... + \binom{n+1}{n}\frac{1}{(n+1)^n} \\
&\leq 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + ... \\
&\quad ... + \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} + ... + \binom{n+1}{n}\frac{1}{(n+1)^n} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}_{\text{on ajoute ce terme “gratuitement”}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée supérieurement, donc convergente.
On définit alors

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

(iii) Montrons que la suite de terme général $y_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$, converge vers 1.
On a clairement $y_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, d'après l'exemple précédent,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3 \leq n\,,\ \forall\, n \geq 3\,.$$

Donc

$$(n+1)^n \leq n^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad y_{n+1} = \sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} = y_n\,,$$

en élevant les deux membres de l'inégalité à la puissance $\frac{1}{n(n+1)}$.
Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers une limite $l \geq 1$.

Posons $l = 1 + c = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$, $c \geq 0$.
On a alors $l = 1 + c \leq \sqrt[n]{n} \Rightarrow l^n = (1+c)^n \leq n$.
Mais $(1+c)^n = 1 + nc + \binom{n}{2} c^2 + \ldots + c^n$ et donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{n(n-1)}{2}c^2 \leq (1+c)^n \leq n \quad \Longrightarrow \quad \frac{(n-1)}{2}c^2 \leq 1\,,\ \forall\, n \geq 2\,,$$

ce qui est absurde si $c \neq 0$.
Donc $c = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
C'est un bon exercice de montrer ce résultat directement à l'aide de la définition de la limite.

2.2 Opérations sur les suites

Le but de cette section est d'étudier la convergence de nouvelles suites définies au moyen de deux suites données et des opérations algébriques élémentaires.

Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on définit :

- la combinaison linéaire :

$$(\alpha x_n + \beta y_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \alpha\,,\beta \in \mathbb{R} \text{ fixés}\,,$$

- le produit :

$$(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

- le quotient :

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq n_0} \qquad \text{si } y_n \neq 0\,,\ \forall\, n \geq n_0 \in \mathbb{N}\,.$$

2.2.1 Proposition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.
S'il existe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y\,,$$

alors

(i) $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y\,,\ \forall\,\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy\,,$

(iii) $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = x/y \quad \textit{si} \quad y \neq 0\,.$

Démonstration Par définition

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,\varepsilon_1 > 0\,,\ \exists\, n_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que}$$

$$|x_n - x| < \varepsilon_1\,,\ \forall\, n \geq n_1\,, \quad \text{et}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,\varepsilon_2 > 0\,,\ \exists\, n_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que}$$

$$|y_n - y| < \varepsilon_2\,,\ \forall\, n \geq n_2\,.$$

(i) Soit $\varepsilon > 0$ et prenons $\varepsilon_1\,,\varepsilon_2 < \min\{\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\}$.
Posant $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}$ on a, pour tout $n \geq n(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} |\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)| &\leq |\alpha||x_n - x| + |\beta||y_n - y| \\ &\leq |\alpha|\varepsilon_1 + |\beta|\varepsilon_2 < |\alpha|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta|\frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

(ii) Puisque

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - x_n y + x_n y - xy = x_n(y_n - y) + (x_n - x)y\,,$$

on a que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| \\ &\leq c\,|y_n - y| + |x_n - x||y| \quad \text{pour un } c \geq 0\,, \end{aligned}$$

car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Soit $\varepsilon > 0$ et prenons $\varepsilon_1\,,\varepsilon_2$ tels que $c\,\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1 < \varepsilon$.
Alors pour $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}$, on a

$$|x_n y_n - xy| \leq c\,\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1 < \varepsilon\,,\ \forall\, n \geq n(\varepsilon)\,.$$

(iii) Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergentes, elles sont donc bornées, mettons par deux constantes $c_1, c_2 \geq 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right| = \left|\frac{x_n y - x_n y_n + x_n y_n - x y_n}{y_n y}\right| \\ &\leq \frac{|x_n||y - y_n|}{|y_n||y|} + \frac{|y_n||x_n - x|}{|y_n||y|} \leq \frac{c_1\,|y - y_n|}{|y_n||y|} + \frac{c_2\,|x_n - x|}{|y_n||y|}\,.\end{aligned}$$

Pour $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}$, on a donc

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| < \frac{c_1\,\varepsilon_2}{|y_n||y|} + \frac{c_2\,\varepsilon_1}{|y_n||y|}\,,\ \forall\, n \geq n(\varepsilon)\,.$$

Par définition de la limite, on a, pour tout $n \geq n_2(\varepsilon_2)$,

$$|y_n - y| < \varepsilon_2 \quad \Longleftrightarrow \quad y - \varepsilon_2 < y_n < y + \varepsilon_2\,.$$

Pour fixer les idées, supposons $y > 0$, le cas $y < 0$ se traitant de manière analogue.
Si on prend alors $0 < \varepsilon_2 < y/2$, on va avoir

$$0 < y/2 < y - \varepsilon_2 < y_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y_n} < \frac{2}{y}\,,$$

et ainsi

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| < \frac{2}{y^2}(c_1\,\varepsilon_2 + c_2\,\varepsilon_1) < \varepsilon\,,\ \forall\, n \geq n(\varepsilon)\,,$$

si on choisit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ satisfaisant cette inégalité. ♦

2.2.2 Exemple

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{127n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{127} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1\,.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = (\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^3 = 1\,.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 + 2n^2 + n - 1}{7n^3 - 5n^2 + 12n - 9} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3(3 + 2/n + 1/n^2 - 1/n^3)}{n^3(7 - 5/n + 12/n^2 - 9/n^3)} = 3/7\,.$

(iv) Considérons les deux suites divergentes (non bornées) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général respectivement

$$x_n = n \quad \text{et} \quad y_n = n + 1\,.$$

Posons alors $z_n = \alpha x_n + \beta y_n = \alpha n + \beta n + \beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On a alors que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente sauf si $\alpha = -\beta$, auquel cas $z_n = \beta = -\alpha \longrightarrow -\alpha \quad (n \to \infty)$.

2.3 Extension du concept de limite : limite infinie

2.3.1 Définition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On dit que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

si

$$\forall\, M > 0\,,\ \exists\, N = N(M) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad x_n \geq M\,,\ \forall\, n \geq N\,.$$

On dit de même que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

si

$$\forall\, M > 0\,,\ \exists\, N = N(M) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad x_n \leq -M\,,\ \forall\, n \geq N\,.$$

2.3.2 Exemple

(i) $x_n = n! \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty)$.

(ii) Posons

$$x_n = \frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_q n^q}\,,\ a_p\,, b_q \neq 0\,,\ n \geq 1\,.$$

On a alors que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q > p\,, \\ a_p/b_p & \text{si} \quad q = p\,, \\ \pm\infty & \text{si} \quad q < p\,, \text{ le signe étant celui de } a_p/b_q. \end{cases}$$

Le calcul est analogue à celui de l'exemple 2.2.2 (iii).

2.3.3 Remarque

$\pm\infty$ ne sont pas des nombres réels ; les résultats de la proposition 2.2.1 ne sont, en général, pas valables dans le cas de limites infinies !

2.3.4 Proposition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(i) S'il existe $\delta > 0$ *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \geq \delta$ *pour tout* $n \geq n_0$, *et si* $y_n \longrightarrow \pm\infty$, *alors* $x_n y_n \longrightarrow \pm\infty$ *lorsque* $n \to \infty$.

(ii) Si $x_n \longrightarrow a \neq 0$ *et* $y_n \longrightarrow \pm\infty$, *alors* $x_n y_n \longrightarrow \pm\,\mathrm{sgn}(a)\infty$ *et* $x_n/y_n \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

(iii) Si $a > 1$ *et* $x_n \longrightarrow +\infty$, *alors* $a^{x_n} \to +\infty$ *lorsque* $n \to \infty$.

Démonstration Cf. exercices. ♦

2.4 Suites partielles (sous-suites)

2.4.1 Définition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\varphi:\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction **strictement croissante**. On dit alors que la suite définie par

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad n_k = \varphi(k)\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,,$$

est une *suite partielle* (ou *sous-suite*) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En notant $x_n = f(n)$, on peut se représenter les choses de la façon suivante :

$$x_{n_k} = f(n_k) = f(\varphi(k))\,, \quad \text{i.e.} \quad k \mapsto x_{n_k} = (f\circ\varphi)(k)\,.$$

2.4.2 Exemple

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$, $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$, et soit $\varphi:\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $k \mapsto 2k$. Alors la sous-suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $y_k = x_{n_k}$, $n_k = \varphi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est telle que

$$y_k = x_{2k} = (-1)^{2k} = 1\,,\ \forall\, k \geq 1\,,\ y_0 = x_0 = 1\,.$$

On peut de même considérer la suite partielle $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n = x_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (remarquez qu'on a ici écrit n à la place de k puisque la lettre choisie pour l'indexation n'a pas d'importance). On a alors clairement $z_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On constate ainsi que les suites partielles $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

2.4.3 Proposition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $x_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ $(n\to\infty)$.
Alors toute suite partielle $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $x_{n_k} \longrightarrow l$ $(k\to\infty)$.

Démonstration Trivial. ♦

Nous allons énoncer maintenant un théorème majeur, qui se révèlera très important dans la suite du cours, notamment en ce qui concerne les propriétés des fonctions continues.

2.4.4 Théorème *(Bolzano-Weierstrass)*

Tout suite réelle bornée admet au moins une sous-suite convergente.

La démonstration que nous proposons nécessite le lemme suivant :

2.4.5 Lemme *(Principe des intervalles emboîtés)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles, respectivement croissante et décroissante. On suppose de plus que* $a_n \leq b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *. Considérons alors la famille d'intervalles fermés*

$$I_n = [a_n, b_n]\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 0$ *, il existe alors* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{c\}$ *.*

Démonstration La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et bornée supérieurement (par exemple par b_0), il existe $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. De manière analogue, $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ existe également. Puisque

$$0 = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a\,,$$

on a donc $a = b$.

Montrons alors que $c := a = b$ satisfait $\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{c\}$. Premièrement, $\{c\} \subset \bigcap_{n\geq 0} I_n$ car $a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n\geq 0} I_n$. On a alors que $a_n \leq x \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, le principe des deux gendarmes montre que $x = c$, d'où $\bigcap_{n\geq 0} I_n \subset \{c\}$. ♦

2.4.6 Remarque

Remarquons que

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+1} \subset I_n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Ainsi, $\bigcap_{n\geq 0} I_n$ représente “la limite de I_n lorsque $n \to \infty$”. C'est la bonne manière de formaliser cette idée.

2.4.7 Remarque

Le principe n'est pas vrai pour les intervalles ouverts. Considérons par exemple la famille d'intervalles ouverts

$$I_n = (0, 1/n)\,,\ \forall\, n \geq 1\,, \quad \text{et} \quad I_0 = (0,1)\,.$$

On a bien une famille d'intervalles emboîtés et $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, mais pourtant $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = \emptyset$.

Démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée :

$$a \leq x_n \leq b\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ a < b\,.$$

— Etape 1 : Construisons une famille d'intervalles emboîtés.

Posons

$$I_0 = [a_0, b_0]\,,\ a_0 = a\,,\ b_0 = b\,,\ l_0 = b_0 - a_0\,.$$

Clairement $x_n \in I_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, au moins un des deux intervalles

$$[a_0, (a_0 + b_0)/2]\,, \quad [(a_0 + b_0)/2, b_0]$$

contient une infinité de termes de la suite. On choisit celui-ci et on le note

$$I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0\,, \quad l_1 = b_1 - a_1 = \frac{l_0}{2}\,.$$

On procède de la même manière pour choisir I_2 parmi les intervalles

$$[a_1, (a_1 + b_1)/2]\,, \quad [(a_1 + b_1)/2, b_1]\,,$$

et on a $l_2 = l_1/2 = l_0/2^2$.

En itérant ce procédé, on obtient une famille d'intervalles emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la suite des longueurs $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \frac{l_0}{2^n} = 0\,.$$

On applique alors le lemme 2.4.5 qui nous assure l'existence d'un $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{c\}\,, \; c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

— Etape 2 : Construisons à présent une sous-suite qui converge vers c.

On choisit $y_0 = x_0$, puis $y_1 = x_{n_1} \in I_1$, où n_1 est le plus petit indice strictement positif tel que $x_{n_1} \in I_1$. On pose ensuite $y_2 = x_{n_2} \in I_2$, où n_2 est le plus petit indice strictement supérieur à n_1 tel que $x_{n_2} \in I_2$, etc.

Ainsi $y_k = x_{n_k} \in I_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = c$. ♦

2.5 Suites de Cauchy

2.5.1 Définition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m \geq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |x_n - x_m| < \varepsilon\,.$$

On écrira parfois simplement $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0$ ou $|x_n - x_m| \longrightarrow 0 \quad (n, m \to \infty)$.

2.5.2 Théorème

Une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Démonstration Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$:
Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et posons $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Alors

$$\forall\,\varepsilon > 0\,,\ \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ainsi pour tout $n, m \geq N(\varepsilon)$, on va avoir

$$|x_n - x_m| = |(x_n - l) - (x_m - l)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy.
$\Leftarrow$:
Supposons à présent que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
On a alors que

$$\forall\,\varepsilon_1 > 0\,,\ \exists\,N(\varepsilon_1) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |x_n - x_m| < \varepsilon_1\,,\ \forall\,n, m \geq N(\varepsilon_1)\,.$$

La suite de la preuve se déroule en deux étapes.

— Etape 1 : Nous montrons dans un premier temps que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Choisissant $m = N(\varepsilon_1)$, on va avoir, pour tout $n > m$,

$$x_m - \varepsilon_1 < x_n < x_m + \varepsilon_1\,.$$

En posant

$$a = \min\{x_0, x_1, ..., x_m, x_m - \varepsilon_1\} \quad \text{et} \quad b = \max\{x_0, x_1, ..., x_m, x_m + \varepsilon_1\}\,,$$

on a alors que $a \leq x_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

— Etape 2 : On peut maintenant utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass pour montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on sait qu'elle admet une sous-suite convergente $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y_k = x_{n_k}$. Notons l sa limite.
On a donc que

$$\forall\,\varepsilon_2 > 0\,,\ \exists\,K(\varepsilon_2) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad k \geq K(\varepsilon_2) \quad \Longrightarrow \quad |y_k - l| = |x_{n_k} - l| < \varepsilon_2\,.$$

Alors pour tout $n, n_k \geq N(\varepsilon_1)$ et $k \geq K(\varepsilon_2)$,

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2\,.$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$ fixé, si on choisit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$, et qu'on définit $N'(\varepsilon_2) = n_{K(\varepsilon_2)}$, on va avoir que

$$|x_n - l| < \varepsilon\,,\ \forall\,n \geq \max\{N(\varepsilon_1), N'(\varepsilon_2)\}\,, \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = l\,,$$

ce qui achève la démonstration. ♦

2.5.3 Remarque

Le théorème précédent illustre ici dans le cas particulier des nombres réels une notion topologique très importante en analyse : la *complétude*.

On considère en topologie des ensembles caractérisés par des propriétés très peu restrictives. Certains d'entre eux ont l'agréable avantage de pouvoir être munis d'une *métrique*.

Si M est un ensemble, on appelle métrique (ou distance) une application $d: \ M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

(i) $d(x,y) \geq 0\,,\ \forall\, x,y \in M\,,$

(ii) $d(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y\,,$

(iii) $d(y,x) = d(x,y)\,,\ \forall\, x,y \in M\,,$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\,,\ \forall\, x,y,z \in M\,.$

S'il existe une telle application, on dit que (M,d) est un *espace métrique*.

On peut considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ et on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in M$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad d(x_n, l) < \varepsilon\,,\ \forall\, n \geq N\,.$$

De manière analogue, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ est dite *de Cauchy* si

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon\,,\ \forall\, n,m \geq N\,.$$

On dit que M est un espace métrique *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de M possède une limite dans M. (On montre aisément en utilisant l'inégalité triangulaire que toute suite convergente d'un espace métrique quelconque est une suite de Cauchy ; cf. cas réel.)

On vérifie facilement que $\mathbb{R}$, muni de la *distance euclidienne* $d(x,y) = |x-y|$, est un espace métrique, et le théorème 2.5.2 affirme qu'il est complet. En revanche, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas complet pour la distance $|x-y|$. Par exemple, n'importe quelle suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$ est de Cauchy mais n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

Finalement, la complétude de $\mathbb{R}$ a pour nous un intérêt très pratique : on peut vérifier qu'une suite est convergente sans connaître sa limite.

2.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les propriétés suivantes décrivent les relations fondamentales entre nombres rationnels et irrationnels.

2.6.1 Proposition *(densité par rapport à l'ordre 1)*

Soit $a,b \in \mathbb{R}\,,\ a < b\,.$
Alors il existe $c \in \mathbb{Q}$ *tel que* $a < c < b\,.$

Démonstration Cf. exercices. ♦

2.6.2 Proposition *(densité par rapport à l'ordre 2)*

Soit $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. *Alors il existe* $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *tel que* $a < c < b$.

Démonstration Montrons que $c = a + \frac{b-a}{3}\sqrt{2}$ est un bon candidat.

On vérifie aisément que $a < a + \frac{b-a}{3}\sqrt{2} < b \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2} < 3$, ce qui est vrai, donc c est bien entre a et b. D'autre part, si c était rationnel, on aurait que $\sqrt{2} = 3\,\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{Q}$, puisque a et b sont aussi rationnels. Ainsi c est bien irrationnel. ♦

Ainsi, on peut trouver toujours un rationnel entre deux irrationnels, aussi proches soient-ils, et réciproquement.

2.6.3 Proposition *(densité par rapport aux suites 1)*

Soit $l \in \mathbb{R}$. *Alors il existe une suite* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, *telle que* $\lim_{n\to\infty} r_n = l$.

Démonstration Puisque $\mathbb{R}$ est équipotent à $[0,1]$ (i.e. est en bijection avec cet intervalle, cf. cours d'algèbre linéaire), on peut restreindre la démonstration à $[0,1]$.

Soit $l \in [0,1]$. On distingue deux cas :

- Si $l \in \mathbb{Q}$, alors on prend la suite constante définie par $r_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et que $l = 0,\delta_1\delta_2...$ est le développement décimal de l, on prend la suite de terme général $r_n = 0,\delta_1\delta_2...\delta_n 0...0...$ et on a bien que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = l \quad \text{et} \quad r_n \in \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \ ♦$$

2.6.4 Proposition *(densité par rapport aux suites 2)*

Soit $l \in \mathbb{R}$. *Alors il existe une suite* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *telle que* $\lim_{n\to\infty} r_n = l$.

Démonstration On peut à nouveau restreindre la démonstration à $[0,1]$.

Soit $l \in [0,1]$. On distingue deux cas :

- Si $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors on prend la suite constante définie par $r_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $l \in \mathbb{Q}$, on prend la suite de terme général $r_n = l + \sqrt{2}/n$, $n \geq 1$, et on a bien que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = l \quad \text{et} \quad r_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall n \geq 1. \ ♦$$

Les deux résultats précédents, qui ont des conséquences importantes sur les propriétés des fonctions continues, sont souvent formulés de la façon suivante : on dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$, ce qui exprime le fait que tout nombre réel peut être approché aussi près qu'on veut par un rationnel ou un irrationnel.

On peut maintenant résumer les propriétés principales de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres réels est un corps commutatif ordonné non-dénombrable ayant la propriété d'Archimède et la propriété de la borne supérieure. De plus, le sous-corps des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Finalement, $\mathbb{R}$ est complet, dans le sens que toute suite de Cauchy de réels a une limite.

Chapitre 3

Séries numériques

Nous exposons ici la notion importante de série numérique qui devra être bien maîtrisée lorsque l'on abordera par la suite l'étude des séries entières et des fonctions analytiques. Nous énonçons et démontrons les résultats de convergence les plus importants.

3.1 Définitions et exemples

3.1.1 Définition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On forme une nouvelle suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} s_0 & = & x_0 \,, \\ s_1 & = & x_0 + x_1 \,, \\ s_2 & = & x_0 + x_1 + x_2 \,, \\ \ldots & = & \ldots \,, \\ s_n & = & x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \,, \\ \ldots & = & \ldots \,. \end{array}$$

Autrement dit, $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle *suite des sommes partielles* la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $s \in \mathbb{R}$, on écrit alors

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

et on dit que la *série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *convergente.* On appelle s la *valeur* ou la *somme* de la série.

Si ce n'est pas le cas, on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *divergente.*

On peut d'ores et déjà énoncer une condition nécessaire (mais pas suffisante !) de convergence.

3.1.2 Proposition

Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est une série convergente, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Démonstration On a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ convergente} \quad \Longleftrightarrow \quad (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente} \quad \Longleftrightarrow \quad (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy.}$$

En particulier, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varepsilon > |s_n - s_{n-1}| = |x_n| \,, \ \forall n \geq N(\varepsilon) \,,$$

et donc $|x_n| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$. ♦

Nous donnons maintenant une condition de convergence nécessaire et suffisante.

3.1.3 Proposition

La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est convergente si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad |x_n + ... + x_{n+p}| < \varepsilon \,,\ \forall n \geq N(\varepsilon) \,,\ \forall p \in \mathbb{N} \,.$$

Démonstration La série est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est de Cauchy, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon \,,\ \forall n \geq N(\varepsilon) \,,\ \forall p \in \mathbb{N} \,,$$

ce qui donne bien le résultat proposé. ♦

3.1.4 Remarque

(i) On déduite de la proposition 3.1.3 que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est convergente si et seulement si

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=n}^{m} x_k = 0 \,. \tag{3.1}$$

On dit que “la queue de la série” tend vers zéro.

(ii) Si, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$ donné, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ converge (i.e. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} x_k$ existe), alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge également. Ceci se voit aisément en appliquant la proposition 3.1.3, ou simplement en écrivant

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$$

et en remarquant que la somme $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n_0-1}$ n'a pas d'influence sur la convergence ou non de la série. En d'autres termes, ajouter **un nombre fini de termes** ne change pas la convergence de la série.

(iii) Pour une série à termes positifs, la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a donc l'alternative : soit $s_n \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty)$, soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et converge vers $s := \sup(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.1.5 Exemple

(i) <u>série télescopique</u> : Considérons la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ de terme général

$$x_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\,.$$

Pour étudier la convergence, on utilise la décomposition de la fraction en éléments simples, de sorte que tous les termes de la n-ième somme partielle s'annulent deux à deux sauf le premier et le dernier (d'où le nom de série télescopique).
La suite des sommes partielles est

$$s_n = x_2 + ... + x_n = \sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)\,,$$

et donc $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

(ii) <u>série géométrique</u> : Posons, pour $q \in \mathbb{R}$, $x_0 = 1$, $x_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite des sommes partielles est données par

$$s_n = 1 + q + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}\,, \text{ pour } q \neq 1\,.$$

Si $|q| < 1$, on va avoir

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}\,.$$

Si $|q| \geq 1$, on a que $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$, ce qui implique que la série est divergente par la proposition 3.1.2.

En résumé, on a que la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \begin{cases} \text{converge vers } \frac{1}{1-q} & \text{si} \quad |q| < 1\,, \\ \text{diverge} & \text{si} \quad |q| \geq 1\,. \end{cases}$$

(iii) <u>série harmonique</u> : On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, soit à la convergence de la suite des sommes partielles de terme général $s_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n$.
On constate tout d'abord que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, ce qui implique que la série est **peut-être** convergente ; nous pouvons donc poursuivre notre étude.

Pusique $1/n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Faisons maintenant une estimation :

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1\,,\\
s_2 &= 1+\frac{1}{2} = s_1+\frac{1}{2}\,,\\
s_3 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,,\\
s_4 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = s_2+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} > s_2+\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

De manière analogue, on va trouver pour s_8 :

$$s_8 = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{=s_4}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{>4\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} > s_4+\frac{1}{2}\,.$$

En s'inspirant de ce qui précède, on montre aisément par récurrence que

$$s_{2^m} > s_{2^{m-1}}+\frac{1}{2}\,,\ \forall\, m\in\mathbb{N}^*\,.$$

On utilise maintenant un raisonnement itératif pour voir que

$$s_{2^m} > s_{2^{m-1}}+\frac{1}{2} > s_{2^{m-2}}+2\frac{1}{2} > \ldots > s_1+m\frac{1}{2}\,,$$

d'où l'on déduit que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2^m} = \infty$.

Maintenant, puisque $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on obtient par ce qui précède que, pour tout $M>0$, il existe $m_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq N_0 := 2^{m_0}$, $s_n\geq s_{N_0}\geq M$, ce qui montre que $s_n\to\infty$.

3.1.6 Remarque

On constate que $|s_{n+1}-s_n| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$, mais pourtant $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy car elle est divergente.

Il faut bien comprendre que la condition $|x_{n+1}-x_n| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$ n'est pas suffisante pour qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy ; on doit avoir que $|x_{n+p}-x_n| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$ pour tout $p\in\mathbb{N}$, condition équivalente à la définiton d'une suite de Cauchy donnée précédemment.

3.1.7 Définition

On dit qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *absolument convergente* si la série des valeurs absolues $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est convergente.

3.1.8 Proposition

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration Posons $s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ et $\tilde{s}_n = \sum_{i=0}^{n} |x_i|$. Alors par hypothèse, $(\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que,} \quad \forall\, n \geq N\,,\ \forall\, p \in \mathbb{N}\,,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon > |\tilde{s}_{n+p} - \tilde{s}_n| &= ||x_{n+p}| + |x_{n+p-1}| + ... + |x_{n+1}|| \\ &\geq |x_{n+p} + x_{n+p-1} + ... + x_{n+1}| \\ &= |s_{n+p} - s_n|\,. \end{aligned}$$

Donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et la série est bien convergente. ♦

On s'apercevra bientôt que la réciproque n'est pas vraie.

3.2 Critères de convergence

3.2.1 Définition

On dit qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *alternée* si $x_n x_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Théorème *(critère de Leibniz pour les séries alternées)*

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *une série alternée vérifiant*

- $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Alors la série est convergente.

Démonstration On suppose sans perte de généralité que $x_0 > 0$. On a alors que $x_{2n} > 0$, $x_{2n+1} < 0$, $n \in \mathbb{N}$. Considérons la sous-suite des sommes partielles d'indices impairs $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\begin{aligned} s_{2n+3} &= s_{2n+1} + x_{2n+2} + x_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} + \underbrace{(x_{2n+2} - |x_{2n+3}|)}_{\geq 0} \geq s_{2n+1}\,, \end{aligned}$$

et donc $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite croissante. Un raisonnement analogue montre que $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On remarque aussi que $s_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n+1} = s_{2n} - |x_{2n+1}| < s_{2n}$ et que $s_{2n} - s_{2n+1} = -x_{2n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$, par hypothèse. Le principe des intervalles emboîtés (lemme 2.4.5), appliqué aux intervalles $[s_{2n+1}, s_{2n}]$, $n \in \mathbb{N}$, nous assure alors l'existence d'un $s \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = s\,,$$

ce qui achève la démonstration. ♦

L'exemple suivant illustre bien l'utilité de ce critère tout en donnant un contre-exemple à la réciproque de la proposition 3.1.8.

3.2.3 Exemple

La série harmonique alternée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ satisfait aux hypothèses du critère de Leibniz, elle est donc convergente. En revanche, comme on l'a vu, elle n'est pas absolument convergente.

3.2.4 Théorème *(1er critère de comparaison)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *avec* $p_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
On a alors les deux critères :

(i) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|x_n| \leq p_n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *et si la série* $\sum_{n=n_0}^{\infty} p_n$ *est convergente, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge absolument.*

(ii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|x_n| \geq p_n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *et si la série* $\sum_{n=n_0}^{\infty} p_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *diverge.*

Démonstration On définit, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n &= |x_{n_0}| + \ldots + |x_n| , \\ \hat{s}_n &= p_{n_0} + \ldots + p_n . \end{aligned}$$

(i) Puisque $(\hat{s}_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, il existe un $\hat{s} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\hat{s} = \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} p_n = \sup(\hat{s}_n)_{n\geq n_0} .$$

L'hypothèse $|x_n| \leq p_n \ \forall n \geq n_0$ entraîne alors que $(\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\hat{s}$ et croissante, donc convergente.

(ii) On a $\lim_{n\to\infty} \hat{s}_n = \infty$. Mais alors $\tilde{s}_n \geq \hat{s}_n \ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = \infty$. ♦

3.2.5 Remarque

Dans le cas (ii), on peut néanmoins avoir que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge. On s'en convainc aisément en prenant, par exemple, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $p_n = \frac{1}{n}$ et $n_0 = 0$.

3.2.6 Théorème *(2ème critère de comparaison)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *avec* $p_n > 0$, $x_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(i) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq \frac{p_{n+1}}{p_n} , \ \forall n \geq n_0 - 1 .$$

et si $\sum_{n=n_0}^{\infty} p_n$ *est convergente, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge absolument.*

(ii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq \frac{p_{n+1}}{p_n}\,,\ \forall\, n \geq n_0 - 1\,.$$

et si la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} p_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *diverge.*

Démonstration Nous prouvons (i), la preuve de (ii) est analogue. En raisonnant par itération, on a

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \frac{p_{n+1}}{p_n}\,,\ \forall\, n \geq n_0 - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|x_{n+1}|}{p_{n+1}} \leq \frac{|x_n|}{p_n}\,,\ \forall\, n \geq n_0 - 1$$

$$\Longrightarrow \quad |x_{n+1}| \leq p_{n+1}\frac{|x_n|}{p_n} \leq p_{n+1}\frac{|x_{n-1}|}{p_{n-1}} \leq \ldots \leq p_{n+1}\frac{|x_0|}{p_0}\,,\ \forall\, n \geq n_0 - 1.$$

On conclut alors par le 1er critère de comparaison appliqué avec $\tilde{p}_n := \frac{|x_0|}{p_0} p_n$. ♦

3.2.7 Théorème *(3ème critère de comparaison)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *avec* $p_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{p_n} = k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\,.$$

On a alors :

(i) Si $0 < k < \infty$ *, les séries* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ *ont même nature, i.e. elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes.*

(ii) Si $k = 0$ *et si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ *est convergente, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *l'est aussi.*

(iii) Si $k = \infty$ *et si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ *est divergente, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *l'est aussi.*

Démonstration Par définition de la limite,

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que}$$

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{|x_n|}{p_n} - k\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad p_n(k-\varepsilon) < |x_n| < p_n(k+\varepsilon)\,.$$

La proposition (i) découle alors du 1er critère de comparaison, en choisissant ci-dessus $\varepsilon < k$.

Pour la proposition (ii), on remarque qu'avec $k = 0$ dans l'argument ci-dessus on a $|x_n| < \varepsilon p_n$ et il suffit donc d'appliquer à nouveau le 1er critère pour conclure.

Quant à la proposition (iii), si $k = \infty$ on va avoir que

$$\forall\, M > 0\,,\ \exists\, n_1 = n_1(M) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que}$$

$$n \geq n_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|x_n|}{p_n} > M \quad \Longrightarrow \quad |x_n| > M p_n\,.$$

Toujours par le 1er critère, on a donc bien que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est divergente si $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ est divergente. ♦

3.2.8 Critère du quotient *(d'Alembert)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Supposons que

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = l \geq 0\,.$$

On a alors :

(i) $0 \leq l < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est absolument convergente.*

(ii) $l > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est divergente.*

Démonstration En utilisant la définition de la limite, on va avoir que

$$\begin{aligned} \forall\,\varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq n_0 \ \Longrightarrow \ & \left|\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} - l\right| < \varepsilon \\ \Longrightarrow \quad & |x_n|(l-\varepsilon) < |x_{n+1}| < |x_n|(l+\varepsilon)\,, \\ & |x_{n+1}|(l-\varepsilon) < |x_{n+2}| < |x_{n+1}|(l+\varepsilon)\,,\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Ainsi, en itérant les inégalités de gauche, il vient, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$|x_{n_0}|(l-\varepsilon)^p < |x_{n_0+1}|(l-\varepsilon)^{p-1} < |x_{n_0+2}|(l-\varepsilon)^{p-2} < \cdots < |x_{n_0+p}|\,,$$

et celles de droite donnent

$$|x_{n_0+p}| < |x_{n_0+p-1}|(l+\varepsilon) < |x_{n_0+p-2}|(l+\varepsilon)^2 < \cdots < |x_{n_0}|(l+\varepsilon)^p\,.$$

Nous pouvons alors conclure la démonstration en utilisant ces inégalités de la façon suivante.

(i) Supposons que $0 \leq l < 1$ et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $l+\varepsilon =: q < 1$. On a alors que $|x_{n_0+p}| < |x_{n_0}|q^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Mais la série $\sum_{p=0}^{\infty} q^p$ est convergente pour tout $0 < q < 1$. Par le 1er critère, $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est donc bien convergente.

(ii) Soit maintenant $l > 1$. Prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon =: r > 1$. On a alors que $r^p|x_{n_0}| < |x_{n_0+p}|$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est divergente par la proposition 3.1.2. ♦

3.2.9 Critère de la racine *(Cauchy)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Supposons que

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l \geq 0\,.$$

On a alors :

(i) $0 \leq l < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est absolument convergente.*

(ii) $l > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est divergente.*

Démonstration Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce critère en s'inspirant de la démonstration précédente et en utilisant les inégalités

$$(l-\varepsilon)^n < |x_n| < (l+\varepsilon)^n\,,\ \forall\, n \geq n_0\,. \ ♦$$

3.2.10 Remarque

(i) On ne peut rien tirer des deux critères précédents dans le cas $l = 1$.

(ii) On peut montrer que, pour $p_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = l \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = l\,,$$

et donc les critères du quotient et de la racine sont équivalents pour autant que les deux limites ci-dessus existent.

Attention ! Il se peut que la limite du quotient n'existe pas alors que la limite de la racine existe (cf. exercices). En ce sens, le critère de Cauchy est plus puissant que celui de d'Alembert.

3.2.11 Exemple

(i) La série de terme général $x_n = 1/n!$ est convergente.
En effet,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

(ii) Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.
On applique le critère du quotient au terme général $x_n = \dfrac{1}{n^n}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\leq 1} \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)\,.$$

Ou plus simplement par le critère de la racine :

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)\,.$$

La série est donc convergente.
On aurait aussi pu utiliser un critère de comparaison avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$, pour $\alpha > 1$.

3.2.12 Critère de condensation *(Cauchy)*

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ une série à termes strictement positifs et décroissants :

$$p_n > 0\,,\ p_{n+1} \leq p_n\,,\ \forall\, n \geq 1\,,$$

et soit $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}^*$ une suite strictement croissante, divergente, telle que la suite de terme général

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}\,,\ n \geq 2\,,$$

soit bornée.
Alors les séries $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)p_{a_n}$ *ont même nature.*

Démonstration Posons $r_n = p_{a_n+1} + p_{a_n+2} + ... + p_{a_{n+1}}$. Alors, par définition de r_n et puisque $(p_{a_n})_{n\geq 1}$ est décroissante, on a que

$$\underbrace{p_{a_{n+1}} + p_{a_{n+1}} + \cdots + p_{a_{n+1}}}_{a_{n+1}-a_n \text{ termes}} \leq r_n \leq \underbrace{p_{a_n} + p_{a_n} + \cdots + p_{a_n}}_{a_{n+1}-a_n \text{ termes}},$$

d'où

$$(a_{n+1}-a_n)p_{a_{n+1}} \leq r_n \leq (a_{n+1}-a_n)p_{a_n}\,. \tag{3.2}$$

D'autre part, $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}$ est borné et il existe donc $M>0$ tel que

$$0 < \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}} < M\,,\ \forall n \geq 2\,.$$

Alors on va avoir que

$$(a_{n+1}-a_n)p_{a_{n+1}} \quad = \quad \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+2}-a_{n+1}}(a_{n+2}-a_{n+1})p_{a_{n+1}} > \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{M}p_{a_{n+1}}\,,$$

et ainsi, par (3.2),

$$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{M}p_{a_{n+1}} < r_n \leq (a_{n+1}-a_n)p_{a_n}\,.$$

Donc les séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)p_{a_n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ ont même nature. On conclut en remarquant par calcul direct que

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=a_1}^{a_n} p_k = \sum_{k=1}^{a_n} p_k - (p_1 + \cdots + p_{a_1-1})\,.$$

Comme $a_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, ceci montre que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ont même nature, d'où le résultat. ♦

3.2.13 Corollaire

La série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ *est convergente pour* $p>1$ *, divergente sinon.*

Démonstration Si $p \leq 0$, la série est évidemment divergente car $\lim_{n\to\infty} 1/n^p \neq 0$. Pour $p>0$, la suite $(1/n^p)_{n\geq 1}$ est positive décroissante. Posant $a_n = 2^n$, on vérifie aisément que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les hypothèses du critère de condensation. On a alors que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n+1}-2^n)\frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

ont même nature. Mais la série géométrique de terme général $1/(2^{p-1})^n$ converge pour $p>1$, diverge sinon. ♦

3.2.14 Remarque

On s'aperçoit qu'ici les critères du quotient et de la racine ne permettent pas de conclure puisqu'on trouve dans les deux cas une limite égale à 1.

3.2.15 Exemple

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln(n)}$, $a > 0$.
En remarquant que $a^{\ln(n)} = n^{\ln(a)} = 1/n^{\ln(1/a)}$. On conclut donc par le corollaire 3.2.13 que la série converge si et seulement si $\ln(1/a) > 1$, i.e. $a < 1/e$.

Nous donnons encore ici un dernier critère qui permet parfois de déterminer la convergence / divergence d'une série lorsque le critère du quotient ne permet pas de conclure, i.e. dans le cas où $|x_{n+1}/x_n| \to 1$.

3.2.16 Critère de Raabe-Duhamel

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *une suite telle que*

$$\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right| - 1\right) = p \in \mathbb{R}\,.$$

On a alors les résultats suivants :

(i) Si $p < 0$ *, on a* $x_n \not\to 0$ *et la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est divergente.*

(ii) Si $0 \le p < 1$ *, la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *est divergente.*

(iii) Si $p > 1$ *, la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *est convergente.*

Démonstration Nous renvoyons le lecteur à l'article très intéressant

https://arxiv.org/pdf/1801.07584.pdf ♦

3.3 Permutation de l'ordre des termes

Si l'on permute l'ordre de sommation des termes dans un série numérique, la suite des sommes partielles s'en trouve modifiée. Une question naturelle se pose alors : si la série de départ est convergente, la série permutée l'est-elle aussi et converge-t-elle vers la même valeur ?

3.3.1 Théorème

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *une série absolument convergente. Si* σ *est une permutation de* $\mathbb{N}$ *, alors* $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ *est aussi absolument convergente et a la même valeur.*

Démonstration L'idée de la démonstration est de contrôler la queue de la série des valeurs absolues et d'utiliser la majoration ainsi obtenue pour prouver la convergence.

Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Pour $M \in \mathbb{N}$ assez grand, on a que $\{0,...,N\} \subset \{\sigma(0),...,\sigma(M)\}$. Ainsi, si $m,n \geq M$ les termes $x_0, x_1, \ldots, x_N$ s'annulent dans la différence $\sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{m} x_k$ et on a donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{m} x_k\right| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| \leq \varepsilon\,.$$

Laissant $m \to \infty$, il vient

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} x_k\right| \leq \varepsilon\,,\ \forall\, n \geq M\,,$$

ce qui montre que la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ converge vers la même valeur que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

En remplaçant partout x_k et $x_{\sigma(k)}$ respectivement par $|x_k|$ et $|x_{\sigma(k)}|$ dans le raisonnement ci-dessus, on voit qu'on a aussi $\sum_{k=0}^{\infty} |x_{\sigma(k)}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$. ♦

Le lemme précédent est mis en défaut si la série est convergente mais pas absolument convergente. (On parle alors de série *conditionnellement convergente.*) Le résultat suivant dû à Riemann est fort surprenant et nous dit même beaucoup plus.

3.3.2 Théorème *(Riemann)*

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *une série convergente mais pas absolument convergente. Alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *il existe une permutation* σ *de* $\mathbb{N}$ *telle que* $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. *D'autre part, il existe aussi une permutation* τ *telle que* $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\tau(n)}$ *soit divergente.*

Démonstration Cf. exercices. ♦

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

Nous présentons dans ce chapitre de façon précise et rigoureuse les notions de limite et de continuité d'une fonction, notions largement utilisées au gymnase sans pour autant être discutées de manière formelle. Nous introduisons donc ici les définitions les plus générales dans le cadre qui nous intéresse, au risque de rester relativement abstrait, compte tenu que ces concepts seront largement illustrés aux exercices. Nous exposons également certaines propriétés importantes liées à la continuité des fonctions.

La notion de continuité sera essentielle pour la suite du cours, dans la mesure où c'est le premier pas (condition nécessaire) vers la notion de dérivée qui joue un rôle crucial en analyse. On verra également que la continuité est à la clé de la théorie de l'intégrale de Riemann qui sera développée ultérieurement dans ce cours, bien qu'elle perde son importance dans une théorie plus générale de l'intégration telle que celle de Lebesgue qui sera abordée dans des cours plus avancés et qui joue un rôle majeur tant en mathématiques pures qu'en physique théorique.

4.1 Rappels

Nous commençons par rappeler les notions élémentaires suivantes :

(i) La règle de correspondance $f\,:\; D(f) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad x \mapsto y = f(x)$ (on prend généralement $\mathbb{R}$ pour l'ensemble d'arrivée) est appelée *fonction réelle d'une variable réelle* si $D(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in D(f)$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

On rappelle la définition du *graphe* de f :

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x \in D(f)\,,\; y = f(x)\}\,.$$

(ii) Les opérations sur les fonctions (addition, multiplication, etc.) sont définies ponctuellement (point par point), comme vu à la section 1.3.9.

(iii) On note $f \leq g$ si pour tout $x \in D(f) \cap D(g)$ on a $f(x) \leq g(x)$. De même pour l'égalité ou pour l'inégalité stricte.

(iv) On dit que f est *bornée* sur $A \subset D(f)$ s'il existe une constante non-négative M telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in A$.

(v) On définit le *supremum* (ou *borne supérieure*) de f sur $A \subset D(f)$, noté $\sup_{x\in A} f(x)$ comme étant le supremum de $f(A) := \{f(x)\,;\ x \in A\}$. En d'autres termes, $f(x) \le \sup_{x\in A} f(x)$ pour tout $x \in A$ et

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists x_\varepsilon \in A \quad \text{tel que} \quad \sup_{x\in A} f(x) - \varepsilon \le f(x_\varepsilon) \le \sup_{x\in A} f(x)\,.$$

De même pour l'*infimum*.

Les propriétés suivantes découlent des définitions :

- $\inf_{x\in A} (-f(x)) = -\sup_{x\in A} f(x)\,,$
- $\sup_{x\in A} (f(x) + c) = \sup_{x\in A} f(x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,,$
- $\sup_{x\in A} (f(x) + g(x)) = \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)\,,\ A \subset D(f) \cap D(g)\,,$
- $B \subset A \ \Rightarrow\ \sup_{x\in B} f(x) \le \sup_{x\in A} f(x)\,.$

(vi) On dit que f admet un *maximum local* au point $a \in D(f)$ s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D(f) \quad \text{et} \quad |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \le f(a)\,.$$

On dit de même que f admet un *minimum local* au point $a \in D(f)$ s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D(f) \quad \text{et} \quad |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \ge f(a)\,.$$

(vii) On dit que $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) est un *maximum global* (resp. *minimum global*), ou simplement un *maximum* de f, si $M \in Im(f)$ (resp. $m \in Im(f)$) et si $f(x) \le M$ (resp. $f(x) \ge m$) pour tout $x \in D(f)$. On note alors

$$m = \min_{x\in D(f)} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x\in D(f)} f(x)\,.$$

4.2 Limites d'une fonction

4.2.1 Définition

Soit $f :\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$.

(i) On dit que f est *définie au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $(a-\delta, a+\delta) \subset D(f) \cup \{a\}$.

(ii) De façon générale, un *voisinage* de a est un intervalle ouvert contenant le point a. On parle de $\delta-$voisinage pour un intervalle ouvert de la forme $(a-\delta, a+\delta)$.

(iii) On appelle *voisinage pointé* de a tout voisinage de a privé du point a, i.e. un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $I \setminus \{a\}$ où I est un voisinage de a.

(iv) On parle de *voisinage à gauche* de a pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de la forme $(a-\delta, a]$, $\delta > 0$ et on définit naturellement le *voisinage à droite* de façon analogue ainsi que le *voisinage pointé à gauche* (resp. *à droite*).

(v) On dit que f est *définie au voisinage de* $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que $(A, +\infty) \subset D(f)$, avec une définition "symétrique" *au voisinage de* $-\infty$.

4.2.2 Remarque

Une fonction f peut être définie au voisinage de a sans que $a \notin D(f)$. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ n'est pas définie au point $x = 0$ mais elle est définie au voisinage de 0.

4.2.3 Définition

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f a pour *limite* le nombre $l \in \mathbb{R}$ (ou que f *converge* vers l) lorsque x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \quad \text{tel que}$$

$$x \in D(f), \ 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon .$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \to a) .$$

Le théorème suivant permet d'identifier la notion de convergence des fonctions à celle de convergence des suites largement discutée précédemment. Nous y ferons fréquemment recours dans la mesure où il est souvent plus facile de raisonner en termes de suites.

4.2.4 Théorème

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f) \setminus \{a\}$, on a que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l .$$

Démonstration Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$:
Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f) \setminus \{a\}$ une suite telle que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.
Alors, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D(f), \ 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon .$$

D'autre part, puisque $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, il existe un $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n(\delta) \quad \Longrightarrow \quad 0 < |x_n - a| < \delta .$$

Ainsi, pour tout $n \geq n(\delta)$, $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ et donc $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

$\Leftarrow$:
Supposons que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(f)\setminus\{a\}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\,.$$

Par l'absurde, supposons maintenant que f ne converge pas vers l lorsque $x\to a$. Alors, par définition de la limite, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $\delta>0$ il existe y_δ tel que $0<|y_\delta - a|<\delta$ mais $|f(y_\delta)-l|\geq\varepsilon$. Maintenant, pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $\delta_n = 1/n$ et $y_n = y_{\delta_n}$. On obtient ainsi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subset D(f)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)\neq l$. ♦

4.2.5 Corollaire

*Soit $f:\ D(f)\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a\in\mathbb{R}$.
Si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, on a que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad\implies\quad (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{est convergente},$$

alors f admet une limite au point a.

Démonstration Par le théorème 4.2.4, il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
Si ça n'est pas le cas, considérons la suite de terme général

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \text{ est pair,}\\ y_n & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$$

On a alors une suite qui converge vers a telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, d'où contradiction. Ainsi la limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existe et ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée. Le théorème précédent affirme alors l'existence de la limite désirée. ♦

4.2.6 Corollaire

La limite d'une fonction en un point, si elle existe, est unique.

Démonstration Par le théorème 4.2.4, l'unicité est une conséquence directe de l'unicité de la limite d'une suite. ♦

4.2.7 Définition *(limite à gauche, à droite)*

Soit $f:\ D(f)\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage à gauche de $a\in\mathbb{R}$ (i.e. il existe $\gamma>0$ tel que $(a-\gamma, a]\subset D(f)\cup\{a\}$).
On dit que f a pour *limite* le nombre $l\in\mathbb{R}$ lorsque x tend vers a par valeurs inférieures (ou plus simplement que l est la *limite* de f *à gauche* de a) si

$$\forall\,\varepsilon>0\,,\ \exists\,\delta>0 \quad \text{tel que}$$

$$x\in D(f)\,,\ a-\delta<x<a \quad\implies\quad |f(x)-l|<\varepsilon\,.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \to a^-)\,.$$

On donne une définition analogue de la *limite à droite* de a et on écrit alors

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \to a^+)\,.$$

4.2.8 Remarque

On montre sans peine à l'aide des définitions que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x)$ existent et sont égales.

4.2.9 Définition *(limite en $\pm\infty$)*

Soit $f:\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un *voisinage de* $+\infty$.
On dit que f admet pour *limite* le nombre $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ (ou encore que l est la *limite* de f *en* $+\infty$) si

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, M > 0 \quad \text{tel que}$$

$$x \in D(f)\,,\ x > M \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \to +\infty)\,.$$

On peut donner une définition analogue (essayez de la formuler) de la *limite en* $-\infty$ ou la définir simplement comme la limite (si elle existe) de la fonction $f(-x)$ en $+\infty$.
On écrit alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \to -\infty)\,.$$

4.2.10 Définition *(limite infinie)*

Soit $f:\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage I de $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers a (ou au point a) si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \pm\infty$.
On écrit alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow \pm\infty \quad (x \to a)\,.$$

A titre d'exercice, le lecteur pourra donner une définition équivalente sans utiliser les suites, en s'inspirant des définitions précédentes et de la définition de la limite infinie pour les suites.

On définit de manière analogue les limites infinies à gauche et à droite.

4.2.11 Exemple

(i) La fonction $f(x) = 1/x$ a pour domaine (maximal) $D(f) = \mathbb{R}^*$. En particulier, f est définie au voisinage de $x = 0$. On a les limites suivantes en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty.$$

De manière plus compacte, on pourra écrire $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$.

(ii) La fonction $f(x) = \sin(x)/x$ est définie sur $D(f) = \mathbb{R}^*$ et donc au voisinage de $x = 0$. On a que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

4.2.12 Proposition

Soit f et g définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = l_2\,.$$

On a alors les règles de calcul suivantes :

(i) $\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2\,,\ \forall\, \alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_1 l_2$.

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = l_1/l_2$ *s'il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas et si $l_2 \neq 0$.*

Démonstration Appliquer le théorème 4.2.4 de manière à pouvoir travailler avec des suites, puis utiliser la proposition 2.2.1 donnant les règles de calcul pour les limites des suites. ♦

4.2.13 Remarque

(i) Les règles de calculs ci-dessus ne sont plus valables si l'une des deux limites $l_1\,, l_2$ est infinie. Dans le cas de limites infinies, on utilise ce qu'on appelle la *droite réelle achevée* qui est l'extension $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec les règles de calcul supplémentaires :

- $a + \infty = \infty$ et $a + (-\infty) = -\infty\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$,
- $a \cdot \infty = \infty$ et $a \cdot (-\infty) = -\infty\,,\ \forall\, a > 0$,
- $\infty \cdot \infty = \infty\,,\ \infty + \infty = \infty\,,\ -(\infty) = -\infty$,
- $\dfrac{a}{\infty} = 0\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,,\quad \dfrac{\infty}{a} = \infty\,,\ \forall\, a \geq 0\,,$ et

$$a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq a < 1\,, \\ 1 & \text{si } a = 1\,, \\ \infty & \text{si } a > 1\,. \end{cases}$$

En revanche, les opérations suivantes sont illicites :

$$\infty - \infty\,,\ 0 \cdot \infty\,,\ \frac{0}{0}\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,,\ 0^0\,,\ \infty^0\,.$$

On parle de *formes indéterminées* et on doit calculer les limites explicitement dans chaque cas.

On remarquera par exemple que la suite de terme général $n^{1/n}$, qui est du type “ ∞^0 ”, converge vers 1, alors que la suite de terme général $(n^n)^{1/n}$, qui est du même type, diverge.

La suite de terme général $(1/n)^{1/n}$ est un exemple de suite du type “ 0^0 ” qui converge vers 1 alors que la suite de terme général $(1/n^n)^{1/n} = 1/n$ est du même type et converge, elle, vers 0.

(ii) On étend naturellement la définition 4.2.9 à $l \in \bar{\mathbb{R}}$ et la définition 4.2.10 à $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

4.2.14 Proposition

Soit f définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}$ et g définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que $g \not\equiv b$ dans un voisinage pointé de a, et

$$\lim_{x \to a} g(x) = b, \quad \lim_{y \to b} f(y) = l\,.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = l\,.$$

Démonstration La démonstration est laissée en exercice au lecteur. ♦

4.3 Fonctions continues

4.3.1 Définition

Soit $f:\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de $a \in D(f)$.
On dit que f est *continue* en a si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(ii) Pout tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 \le |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

4.3.2 Remarque

Attention ! Dans la définition 4.3.1 (ii), le nombre positif $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ dépend à la fois de ε et du point a considéré.

4.3.3 Définition *(continuité à gauche, à droite)*

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un *voisinage à gauche* de $a \in D(f)$. On dit que f est *continue à gauche* en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

On donne une définition analogue de la *continuité à droite* et on montre aisément que f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

4.3.4 Définition

On dit que $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $(a,b) \subset D(f)$ si f est continue en tout point $x \in (a,b)$.

On dit que f est continue sur $[a,b] \subset D(f)$ si f est continue sur (a,b) et si f est continue à droite en a et à gauche en b.

Finalement, on dit que f est continue si f est continue sur $D(f)$.

Notation Si f est continue sur $I \subset D(f)$, on écrit $f \in C^0(I,\mathbb{R})$. Ainsi $C^0(I,\mathbb{R})$ désigne la *classe* des fonctions continues sur I. On dit que " f est de classe c-zéro".

4.3.5 Exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. On va montrer que f est continue (i.e. f est continue sur $\mathbb{R}$).

- f est continue en 0 :

  Soit $\varepsilon > 0$.
  On a que

  $$|f(x) - f(0)| < \varepsilon \iff |x|^3 < \varepsilon \iff |x| < \sqrt[3]{\varepsilon} \iff |x - 0| < \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

  Il suffit donc de prendre $0 < \delta \leq \sqrt[3]{\varepsilon}$ pour obtenir

  $$|x - 0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \varepsilon,$$

  d'où la continuité de f en 0.

- f est continue en tout point $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

  Soit $a \neq 0$ et $\varepsilon > 0$.
  On a que $|f(x) - f(a)| = |x^3 - a^3| = |x-a||x^2 + ax + a^2|$.
  Alors, en prenant $0 < \delta \leq |a|/2$, on va avoir $|x - a| < \delta \Rightarrow |x| \leq 3|a|/2$ et ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire (remarque 1.1.5 (iv)), il vient

  $$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &< \delta|x^2 + ax + a^2| \leq \delta(|x|^2 + |a||x| + |a|^2) \\ &\leq \delta(\frac{9}{4}|a|^2 + |a|\frac{3}{2}|a| + |a|^2) = \delta\frac{19}{4}|a|^2. \end{aligned}$$

  Par suite, en choisissant $0 < \delta \leq \min\{\frac{|a|}{2}, \frac{4\varepsilon}{19|a|^2}\}$, on aura bien

  $$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \delta\frac{19}{4}|a|^2 \leq \varepsilon.$$

  Ainsi f est aussi continue en tout point $a \neq 0$.

A titre d'exercice, on pourra montrer à l'aide de la définition que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

4.3.6 Proposition *(opérations sur les fonctions continues)*

Soit $f:\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g:\ D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. Alors si* $I \subset D(f)\cap D(g)$ *, on a que :*

(i) $\alpha f + \beta g$ *est continue sur* I *,* $\forall\, \alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ *.*

(ii) fg *est continue sur* I *.*

(iii) f/g *est continue sur* $I \setminus \{x \in D(f)\cap D(g)\,;\ g(x) = 0\}$ *.*

(iv) Si g *est continue en* $a \in D(g)$ *et* f *est continue en* $b = g(a) \in D(f)$ *, alors* $f\circ g$ *est continue en* $a \in D(f\circ g)$ *.*

Démonstration En utilisant la définition 4.3.1 (i) de la continuité, le résultat découle immédiatement des propositions 4.2.12 et 4.2.14. ♦

4.3.7 Nature des points de discontinuité

Au vu de la définition 4.3.1 (i), une fonction $f:\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue en $a \in \mathbb{R}$ si au moins l'une des trois conditions suivantes n'est pas vérifiée :

(i) $a \in D(f)$.

(ii) Les deux limites $\lim_{x\to a^\pm} f(x)$ existent (dans $\mathbb{R}$) et sont égales.

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si l'une des conditions (ii) ou (iii) n'est pas vérifiée, on dit alors que f est *discontinue* en a . Si f est discontinue en a mais que les deux limites sous (ii) existent, on dit que a est un point de *discontinuité de première espèce*. Si au moins l'une des deux limites sous (ii) est infinie ou n'existe pas, on dit que a est un point de *discontinuité de deuxième espèce* (ou *discontinuité essentielle*) de f .

Si $a \notin D(f)$ mais que (ii) est vérifiée (i.e. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et est finie), on parle de *discontinuité apparente* et on fait la définition suivante :

4.3.8 Définition

Soit $f:\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \notin D(f)$.
Alors, si la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, on définit le *prolongement par continuité* de f par

$$\hat{f}:\ D(f)\cup\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\qquad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in D(f)\,,\\ \lim_{x\to a} f(x)\,, & x = a\,.\end{cases}$$

Si un tel prolongement existe, il est unique et, par définition, continu. Dans le cas où le domaine de définition est de la forme $(a,b]$ (resp. $[b,a)$), remplacer la limite dans la définition ci-dessus par une limite à droite (resp. à gauche).

4.3.9 Exemple

La fonction donnée par $f(x) = \sin(x)/x$ est définie et continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et vérifie de plus
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1\,.$$
On peut ainsi définir son prolongement par continuité :
$$\hat{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}\,, & x \in \mathbb{R}^*\,, \\ 1\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

4.4 Fonctions continues sur un intervalle fermé

Les résultats présentés dans cette section sont assez naturels et intuitifs si on garde à l'esprit l'image simpliste suivante de la continuité d'une fonction : on peut tracer sa représentation graphique "sans lever le crayon".

Il faut pourtant remarquer que les deux théorèmes démontrés ci-dessous sont tout à fait non triviaux et font apparaître des propriétés profondes liées à la continuité.

4.4.1 Théorème du min-max *(Weierstrass)*

Soit $-\infty < a < b < \infty$ *et* $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* f *atteint son minimum et son maximum sur* $[a,b]$, *i.e.*
$$\exists\, x_m, x_M \in [a,b] \quad \textit{tel que}$$
$$f(x_m) = m := \min\{f(x)\,;\ x \in [a,b]\} \quad \textit{et} \quad f(x_M) = M := \max\{f(x)\,;\ x \in [a,b]\}.$$

Démonstration

— Etape 1 : Montrons tout d'abord que $f([a,b])$ est borné. Pour cela, il suffit de montrer que la fonction $|f|$ est bornée supérieurement sur $[a,b]$.

Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. On a ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a,b]$ telle que $\lim_{n \to \infty} |f(x_n)| = \infty$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (2.4.4), il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Posons
$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in [a,b]\,.$$
Mais alors, par continuité de $|f|$ sur $[a,b]$, on a que $\lim_{k \to \infty} |f(x_{n_k})| = |f(\tilde{x})| < \infty$, d'où contradiction.

— Etape 2 : Soit $m := \inf f([a,b])$, $M := \sup f([a,b])$.

On vient de voir que $-\infty < m \leq M < \infty$.
Par définition du supremum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in f([a,b])$ tel que
$$M - \frac{1}{n} \leq y_n \leq M\,. \tag{4.1}$$

D'autre part, puisque $y_n \in f([a,b])$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. En utilisant à nouveau Bolzano-Weierstrass, on a une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: x_M$. Par continuité de f, il vient $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_M)$.
Il suffit alors de remarquer que $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour conclure que

$$M = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_M),$$

par l'inégalité (4.1).

La démonstration est tout à fait analogue pour le min. ♦

On déduit du théorème précédent un premier résultat important :

$$f([a,b]) \subset [m,M].$$

On va maintenant renforcer ce résultat.

4.4.2 Théorème de la valeur intermédiaire *(Bolzano)*

Pour $-\infty < a < b < \infty$ *et* $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue, posons*

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad et \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Alors, pour tout $c \in [m,M]$, *il existe* $x_c \in [a,b]$ *tel que* $c = f(x_c)$.

Démonstration Si $c = m$ ou $c = M$, on utilise le théorème précédent. Supposons donc $c \in (m,M)$. Sans perte de généralité, on suppose également que $x_m < x_M$.

Définissons maintenant l'ensemble

$$E_c := \{x \in [x_m, x_M]\,;\ f(x) < c\}.$$

On a alors les propriétés suivantes :

- $E_c \neq \emptyset$ car $x_m \in E_c$;
- $E_c \neq [x_m, x_M]$ car $x_M \notin E_c$.

Posons à présent $\sup E_c = x_c \in [x_m, x_M]$. Nous allons prouver que $f(x_c) = c$.

On observe tout d'abord que $x_c < x_M$. En effet, nous savons déjà par définition de E_c que $x_c \leq x_M$. Supposons par l'absurde que $x_c = x_M$. On a alors $f(x_c) = M > c$. Posons $\varepsilon := f(x_c) - c > 0$. Par continuité de f au point x_c, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, par définition du supremum, il existe $\bar{x} \in E_c$ tel que $x_c - \delta/2 \leq \bar{x} \leq x_c$. Mais alors

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x_c| = x_c - \bar{x} < \delta &\Longrightarrow |f(\bar{x}) - f(x_c)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Longrightarrow f(\bar{x}) > f(x_c) - \frac{\varepsilon}{2} = f(x_c) - \frac{f(x_c) - c}{2} = \frac{f(x_c) + c}{2} > c, \end{aligned}$$

ce qui contredit $\bar{x} \in E_c$. On a donc bien $x_c < x_M$.

Maintenant, par définition du supremum,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \exists\, y_n \in E_c \quad \text{tel que} \quad x_c - \frac{1}{n} \leq y_n \leq x_c\,.$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} y_n = x_c$. Alors, puisque $f(y_n) < c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$f(x_c) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \leq c\,, \tag{4.2}$$

par continuité de f.

On définit encore $z_n := \min\{x_M, x_c + 1/n\}$. Comme $x_c < x_M$, on a $x_c < z_n \leq x_c + 1/n$, ce qui implique d'une part que $z_n \in [x_m, x_M] \setminus E_c$ et d'autre part que $\lim_{n\to\infty} z_n = x_c$. Il vient alors $f(z_n) \geq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, par continuité de f,

$$f(x_c) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \geq c\,. \tag{4.3}$$

On conclut par (4.2) et (4.3) que $f(x_c) = c$. ♦

Les deux théorèmes précédents impliquent le résultat important :

$$f([a,b]) = [m, M]\,.$$

Ainsi, **l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé**.

4.5 Continuité uniforme

Nous introduisons dans cette section la notion de continuité uniforme qui est relativement difficile à appréhender au premier abord mais qui va jouer un rôle important dans l'étude des suites de fonctions ainsi que dans la théorie de l'intégrale de Riemann qui sera présentée plus loin.

4.5.1 Définition

Soit $f:\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x, y \in D(f) \text{ et } |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

4.5.2 Remarque

(i) Dans la définition ci-dessus, δ ne dépend ni de x, ni de y, mais uniquement de ε. C'est donc une propriété plus forte que la continuité (i.e. la continuité uniforme implique la continuité).

(ii) La notion de continuité uniforme n'a de sens que sur tout le domaine de définition de la fonction, alors que la continuité est définie ponctuellement.

4.5.3 Exemple

(i) Montrons que la fonction $f(x) = x$ est uniformément continue sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors on a immédiatement que

$$x, y \in I \text{ et } |x-y| < \delta := \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| = |x-y| < \varepsilon\,,$$

quel que soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ considéré.

(ii) Considérons à présent la fonction $f(x) = \sin(x)$. On va montrer qu'elle est aussi uniformément continue sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par la trigonométrie élémentaire, on va avoir

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(y)| &= 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\frac{1}{2}|x-y| = |x-y|\,. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre n'importe quel $\delta \in (0, \varepsilon]$ pour avoir

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y| < \delta \leq \varepsilon\,,\ x, y \in I\,,$$

quel que soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ considéré.

(iii) Nous allons montrer maintenant que $f:\ D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, où $D(f) = (0, \infty)$, n'est pas uniformément continue bien que la fonction soit continue sur son domaine de définition.
Choisissons, pour $n \geq 1$, $x = n$, $y = n + 1/2n \in D(f) \ \Rightarrow |x-y| < 1/n$.
On a alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| &= |x-y||x+y| \\ &= \left|n - n - \frac{1}{2n}\right|\left|n + n + \frac{1}{2n}\right| \\ &= \frac{1}{2n}\frac{4n^2+1}{2n} \\ &= \frac{4n^2+1}{4n^2} = 1 + \frac{1}{4n^2} > 1\,. \end{aligned}$$

Ainsi, pour un tel choix de x et y, on peut rendre la distance $|x-y|$ aussi petite que l'on veut, on aura toujours $|f(x) - f(y)| > 1$.

4.5.4 Théorème de la continuité uniforme

Toute fonction continue f sur un intervalle fermé $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Nous donnons une démonstration de ce théorème basée sur le lemme suivant :

4.5.5 Lemme *(Heine-Borel-Lebesgue)*

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé et $\mathcal{F}$ une famille de d'intervalles ouverts tels que

$$[a,b] \subset \bigcup_{I\in\mathcal{F}} I\,.$$

Alors il existe une famille finie $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ telle que

$$[a,b] \subset \bigcup_{I\in\widetilde{\mathcal{F}}} I\,.$$

Démonstration Soit E l'ensemble des nombres $x \in [a,b]$ pour lesquels il existe une famille finie $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{F}$ telle que

$$[a,x] \subset \bigcup_{I\in\mathcal{F}(x)} I\,.$$

L'ensemble E n'est pas vide puisqu'il contient a. De plus, si $x \in E$, on a $y \in E$ pour tout $a \le y \le x$. En effet, il suffit de prendre $\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x)$. En d'autres termes, $x \in E \Rightarrow [a,x] \subset E$. On voit donc que E est un intervalle de la forme $[a,M)$ ou $[a,M]$, où $M := \sup E \le b$. Il suffit donc de montrer que $M = b$ et $M \in E$.

Premièrement, supposons par l'absurde que $M < b$. Puisque $M \in [a,b]$, il existe un intervalle ouvert $I_0 \in \mathcal{F}$ tel que $M \in I_0$. Notons-le (α,β) et posons $\gamma = \min\{b,\beta\}$. Puisque $(M+\alpha)/2 \in E$, on a une famille finie $\mathcal{F}((M+\alpha)/2) \subset \mathcal{F}$ telle que

$$[a,(M+\alpha)/2] \subset \bigcup_{I\in\mathcal{F}((M+\alpha)/2)} I.$$

Par construction, $(M+\gamma)/2 \in (M,b)$. En posant $\mathcal{F}((M+\gamma)/2) := \mathcal{F}((M+\alpha)/2) \cup I_0$, on a que

$$[a,(M+\gamma)/2] \subset \bigcup_{I\in\mathcal{F}((M+\gamma)/2)} I.$$

Ainsi, $(M+\gamma)/2 \in E$, ce qui contredit le fait que $(M+\gamma)/2 > M$. Donc $M = b$.

En réutilisant l'argument ci-dessus, on a maintenant $b \in I_0 = (\alpha,\beta)$. Mais alors $\mathcal{F}(b) := \mathcal{F}((b+\alpha)/2) \cup I_0 \subset \mathcal{F}$ est une famille finie telle que

$$[a,b] \subset \bigcup_{I\in\mathcal{F}(b)} I,$$

d'où $b \in E$. ♦

4.5.6 Remarque

(i) L'hypothèse du lemme que l'intervalle soit fermé aux deux extrémités est essentielle. On a par exemple

$$[0,1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{n}\right),$$

mais on ne peut pas trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$[0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} \left(-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{n}\right)$$

car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe toujours un x entre $1-1/n$ et 1.

(ii) Le lemme s'applique même aux situations où la famille $\mathcal{F}$ est *non dénombrable*, comme on le verra dans la démonstration du théorème de la continuité uniforme ci-dessous et dans celle du théorème de Dini (6.2.2).

4.5.7 Remarque

(i) On dit que $\mathcal{F}$ est un *recouvrement* de $[a,b]$ et que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un *sous-recouvrement*.

(ii) La propriété des intervalles fermés donnée par le lemme, i.e. la possibilité d'extraire de **tout** recouvrement un sous-recouvrement fini, est appelée *propriété de Heine-Borel* dans le cadre des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Dans la théorie des espaces topologiques, cette propriété est la définition générale d'un *espace compact*. La notion d'ensemble compact dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ sera introduite au cours d'Analyse II, dans le cadre de l'étude des fonctions de plusieurs variables.

(iii) On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est *fermé* ssi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $x_n \to x$ impliquent $x \in E$. Vous vous convaincrez aisément qu'un intervalle fermé est un ensemble fermé.

(iv) On peut démontrer que $E \subset \mathbb{R}$ vérifie la propriété de Heine-Borel ssi E est fermé et borné. En d'autres termes, **les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ sont précisément les sous-ensembles fermés et bornés**.

Démonstration du théorème de la continuité uniforme

Notons $B(x,\delta(x))$ l'intervalle ouvert $(x-\delta(x), x+\delta(x))$, $0<\delta(x)<\infty$, et soit $\varepsilon>0$ fixé. Puisque f est continue sur $[a,b]$, pour chaque élément $x\in[a,b]$, il existe un réel $\delta(x)>0$ tel que

$$y \in [a,b]\cap B(x,\delta(x)) \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, la famille $\{B(x,\frac{1}{2}\delta(x))\,;\ x\in[a,b]\}$ constitue clairement un recouvrement de $[a,b]$. Par le lemme précédent, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $\{B(x_i,\frac{1}{2}\delta(x_i))\,;\ i\in\{1,...,n\}\}$. Posons alors $\delta=\min\{\frac{1}{2}\delta(x_i)\,;\ i\in\{1,...,n\}\}$.

Prenons maintenant $y,z\in[a,b]$ tels que $|y-z|<\delta$. Il existe $k\in\{1,...,n\}$ tel que $y\in B(x_k,\frac{1}{2}\delta(x_k))$ et donc, puisque

$$|z-x_k| = |(z-y)+(y-x_k)| \le |z-y|+|y-x_k| < \delta(x_k)$$

par définition de δ, on a que $z\in B(x_k,\delta(x_k))$. Par suite, il vient donc

$$|f(y)-f(z)| \le |f(y)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

d'où la continuité uniforme de f. ♦

4.5.8 Remarque

(i) De manière générale, on appelle *boule ouverte de centre a et rayon r* l'intervalle ouvert $B(a,r) = (a-r, a+r)$. Cette terminologie prendra toute sa saveur dans l'espace à plusieurs dimensions au cours d'Analyse II.

(ii) Notez ici l'importance dans la démonstration de la finitude du sous-recouvrement extrait par le lemme de Heine-Borel-Lebesgue. En effet, en prenant le minimum d'un ensemble fini de nombres positifs, on est assuré que δ soit positif, ce qui ne serait pas forcément le cas pour un ensemble infini, même dénombrable. Ce minimum pourrait être nul.

4.5.9 Exemple

Pour se convaincre de la nécessité d'avoir un intervalle fermé borné dans les hypothèses du théorème de la continuité uniforme, considérons la fonction $f(x) = 1/x$. Nous allons montrer (i) qu'elle est uniformément continue sur $(1, \infty)$ mais (ii) qu'elle ne l'est pas sur $(0, \infty)$, bien qu'elle soit continue sur ces deux intervalles. (On "sent" bien venir le problème au voisinage de zéro...)

(i) Pour tout $x, y \in (1, \infty)$, on va avoir que

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x-y}{xy} \right| < |x-y| \,.$$

Il suffit donc de prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définiton de la continuité uniforme pour conclure.

(ii) En revanche, sur $(0, \infty)$, un tel raisonnement n'est plus possible.
Choisissons, pour $n \geq 1$, $x = 1/n, y = 1/2n \;\Rightarrow\; |x-y| < 1/n$. Alors on a que

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x-y}{xy} \right| = \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n^2}} = n \geq 1 \,,$$

et la continuité n'est donc pas uniforme.

On pourra montrer, à titre d'exercice, que toute fonction continue périodique est uniformément continue. (Remarquer que la fonction est continue sur tout intervalle de périodicité et appliquer le théorème 4.5.4)

Chapitre 5

Calcul différentiel

Ce chapitre est consacré à l'introduction de la notion de dérivée et à la démonstration des principaux résultats du calcul différentiel à une variable.

Nous commençons par définir précisément la dérivée d'une fonction, donnons les règles de calcul des dérivées, puis nous développons les outils nécessaires à l'étude des fonctions continues (croissance, convexité, recherche des extrema, etc.).

5.1 Définitions et règles de calcul

5.1.1 Définition

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D(f)$ un *point intérieur* à $D(f)$, i.e. il existe dans $D(f)$ un voisinage de a.
On définit alors la *dérivée* de f au point a, notée $f'(a)$, comme étant le nombre

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pour autant que la limite existe.

On parle souvent de *rapport de Newton* ou encore de *rapport des accroissements* concernant la fraction qui figure dans la limite ci-dessus. On appelle aussi $f'(a) \in \mathbb{R}$ le *nombre dérivé* de f au point a.

5.1.2 Remarque

(i) Noter que, tout comme la continuité en un point, la définition ci-dessus est ponctuelle. L'existence de la dérivée est donc une *propriété locale* de f.

(ii) **Définitions alternatives** En utilisant les propriétés des limites, on a immédiatement les deux définitions alternatives suivantes :

- Posant dans la définition ci-dessus $x = a + h$, on a que la dérivée $f'(a)$ est donnée par

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pour autant que la limite existe.

- La seconde définition alternative est très importante dans la mesure ou c'est celle-ci qui se prête le mieux à la généralisation de la notion de dérivée à celle de *différentielle* dans des espaces arbitraires de dimension supérieure. Elle est également fort utile en pratique, notamment pour le calcul de certaines limites. En écrivant

$$f(a+h) = f(a) + ch + r(a,h)\,, \tag{5.1}$$

où $r(a,\cdot)$ est une fonction de h dépendant du point a, on va avoir que la limite $f'(a)$ existe si

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(a,h)}{h} = 0\,. \tag{5.2}$$

Dans ce cas, on obtient

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ch + r(a,h)}{h} = c\,.$$

On parle d'*approximation linéaire* de f au point a pour une expression du type (5.1) et on appelle *reste* la fonction $r(a,\cdot)$. On la note parfois $r(a,h) = h\rho(a,h)$, avec $\lim_{h\to 0} \rho(a,h) = 0$. On écrit aussi $r(a,h) = o(h)$ et on dit que "r est un petit o de h" ou encore que "r est négligeable devant h" pour exprimer le fait que la fonction $r(a,\cdot)$ vérifie (5.2).

(iii) **Notation** Ecrivant $y(x) = f(x)$, on a pour la dérivée de f au point a les notations équivalentes :

$$f'(a) \equiv \frac{df}{dx}(a) \equiv y'(a) \equiv Df(a) \equiv \dot{f}(a)\,.$$

La notation $\dot{f}(a)$ est traditionnellement utilisée par les physiciens pour désigner la dérivée d'une fonction dépendant du temps.

(iv) **Interprétation géométrique** Dans l'expression (5.1), on distingue le reste $r(a,h)$ et la *linéarisation* de f en a

$$f_{\text{lin}}(x) = f(a) + f'(a)h\,,\ \ h = x-a\,,$$

qui définit la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ par son équation cartésienne

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)\,.$$

Il est clair que la dérivée $f'(a)$ est la pente de cette tangente puisque c'est par définition la limite du rapport de l'accroissement en y par l'accroissement en x sur la courbe $y = f(x)$ au voisinage du point $(a, f(a))$.

(v) On remarque que si f est différentiable en $a \in D(f)$, alors elle est nécessairement continue en a. En effet, si ça n'était pas le cas, on aurait que la limite du rapport de Newton ne serait pas une forme indéterminée du type "$0/0$", le numérateur ne tendant pas vers 0 lorsque $x \to a$, et ainsi elle ne saurait exister. La réciproque est fausse comme le montre par exemple la fonction $f(x) = |x|$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas dérivable en 0.

5.1.3 Définition

(i) On dit que f est *dérivable* en $a \in D(f)$, ou encore que f est *différentiable* en $a \in D(f)$ si la dérivée de f au point a existe.

(ii) On introduit de façon naturelle la *dérivée à gauche* (resp. *à droite*) en prenant la limite à gauche (resp. à droite) dans la définition 5.1.1, et on a évidemment que la dérivée existe si et seulement si les dérivées à gauche et à droite existent et sont égales.

(iii) Définissons à partir de f une nouvelle fonction, appelée *fonction dérivée* et notée f', par

$$f' : D(f) \supset D(f') \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x).$$

On définit alors successivement la *dérivée seconde* $f'' \equiv (f')'$, la *dérivée troisième* $f''' \equiv (f'')'$, etc. On a alors les notations équivalentes :

$$f''(x) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \equiv y''(x) \equiv \ddot{f}(x),$$
$$f'''(x) \equiv \frac{d^3 f}{dx^3}(x) \equiv y'''(x) \equiv \dddot{f}(x).$$

De façon générale, on notera

$$f^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n}, \; n \in \mathbb{N},$$

pour la n-ième dérivée de f, avec la convention que $f^{(0)} = f$.

(iv) Comme pour la continuité, on étend la définiton ponctuelle que nous avons donné de la dérivée en disant que f est dérivable sur $(a, b) \subset D(f)$ si f est dérivable en tout point de (a, b), de même pour les intervalles fermés $[a, b] \subset D(f)$ si f est de plus dérivable à droite en a et à gauche en b.

Si la n-ième dérivée de f est continue sur un intervalle $I \subset D(f)$, on écrit $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ et on dit que “ f est de classe c-n sur I ”. Si c'est le cas pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$.

On va bientôt s'apercevoir que les classes de fonctions $C^n(I, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, sont des espaces vectoriels.

5.1.4 Exemple

(i) Considérons la fonction puissance $f : D(f) = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, on a que,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1, \; \forall\, x, a \in \mathbb{R},$$

d'où $f' \equiv 1$ sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, posant $x = a + h$, $a \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{1}{h}[(a+h)^n - a^n] \\ &= \frac{1}{h}\left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} h + ... + h^n - a^n\right] \\ &= \left[n a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} h + ... + h^{n-1}\right], \end{aligned}$$

et ainsi

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\left[na^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2}h + ... + h^{n-1}\right] = na^{n-1}\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Un calcul analogue montre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -nx^{-(n+1)}\,,\ \forall\, x \neq 0\,,\ n \geq 1\,.$$

(iii) Calculons maintenant la dérivée de la fonction $f:\ D(f) = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = \sin(x)$. Le rapport de Newton de la fonction au point $x \in \mathbb{R}$ est donné par

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] &= \frac{1}{h}[\sin(x+h) - \sin(x)] \\ &= \frac{1}{h} 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \longrightarrow \cos(x) \quad (h \to 0)\,. \end{aligned}$$

Donc $\sin'(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On montre de façon analogue que $\cos'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5.1.5 Proposition *(Règles de calcul)*

Soit f et g deux fonctions différentiables en $a \in \mathbb{R}$.
On a alors les règles de calcul suivantes :

(i) $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(linéarité).*

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ *(formule de Leibniz).*

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ *si* $g(a) \neq 0$.

(iv) Supposons maintenant que g est différentiable en a et que f est différentiable en $b = g(a)$. La dérivée de la fonction composée $f \circ g$ est alors donnée par

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a) \quad \textit{(règle de la chaîne).}$$

Démonstration

(i) Appliquer les règles de calculs pour les limites.

(ii) Pour $h \in \mathbb{R}$ tel que f et g soient définies entre a et $a + h$ on va avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)] &= \frac{1}{h}[f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) \\ +f(a)g(a+h) - f(a)g(a)] &= \frac{[f(a+h) - f(a)]g(a+h)}{h} \\ +\frac{f(a)[g(a+h) - g(a)]}{h} &\longrightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (h \to 0)\,. \end{aligned}$$

(iii) Avec les mêmes hypothèses pour h on a que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left[\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right] &= \frac{1}{h}\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{g(a+h)g(a)} \\ +\frac{1}{h}\frac{f(a)g(a)-f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)} &\longrightarrow \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2} \quad (h\to 0)\,.\end{aligned}$$

(iv) Avec $b=g(a)$,

$$g(a+h)=g(a)+g'(a)h+o(h)=b+k(h)\,,\ k(h):=g'(a)h+o(h)\,,$$

et

$$f(b+k)=f(b)+f'(b)k+o(k)\,.$$

En d'autres termes, il existe une fonction $r(k)$, définie au voisinage de $k=0$ et satisfaisant $r(k)\to 0$ quand $k\to 0$, telle que

$$f(b+k)=f(b)+f'(b)k+kr(k)\,.$$

De plus, on remarque que $k(h)/h\to g'(a)$ quand $h\to 0$, d'où en particulier $k(h)\to 0$ quand $h\to 0$. Notez que dans le cas où $g'(a)=0$, on peut avoir $k(h)=0$ au voisinage de $h=0$. Néanmoins, en prolongeant si nécessaire r par continuité en $k=0$, on obtient que

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(g(a+h))-f(b)] \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f'(b)k(h)+k(h)r(k(h))] \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f'(b)g'(a)h+f'(b)o(h)+k(h)r(k(h))] \\ &=f'(b)g'(a)+f'(b)\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}+\lim_{h\to 0}r(k(h))\frac{k(h)}{h}=f'(b)g'(a)\,.\ \blacklozenge\end{aligned}$$

5.1.6 Remarque

On montre aisément en utilisant le point (i) de la proposition précédente que les classes de fonctions $C^n(I,\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, sont des espaces vectoriels. Ils font partie des exemples les plus élémentaires d'espaces fonctionnels.

5.1.7 Exemple

(i) Considérons une fonction polynomiale

$$P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n\,,\ a_n\neq 0\,,\ D(P)=\mathbb{R}\,.$$

Clairement $P'(x)=a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}$ et $P\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(ii) Pour la fonction rationnelle

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,,\ D(R) = \{x \in \mathbb{R}\,;\ Q(x) \neq 0\}\,,$$

on trouve

$$R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}\,,\ D(R') = D(R)\,.$$

(iii) En appliquant à nouveau la règle de dérivation d'un quotient, on trouve pour la fonction

$$\begin{aligned} \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,,\ D(\tan) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ \cos(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}\}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2\,,\ D(\tan') = D(\tan)\,. \end{aligned}$$

(iv) Considérons maintenant la fonction $h(x) = \sin(1/x)\,,\ x \neq 0$. On remarque que $h = f \circ g$, avec $g(x) = 1/x\,,\ f(y) = \sin(y)$. Donc

$$h'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,,\ \forall\, x \neq 0\,.$$

(v) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x)\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Puisque pour $x \neq 0$,

$$|f(x) - f(0)| = |x^2\sin(1/x)| \leq |x^2| \longrightarrow 0 \quad (x \to 0)\,,$$

on a que f est continue en 0 et donc est f est clairement continue sur $\mathbb{R}$. Pour la dérivée, on obtient en tout point $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2h'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\,,\ x \neq 0 \quad \text{(par (iv))}.$$

Pour $x = 0$, on calcule

$$\begin{aligned} f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

La fonction f est donc différentiable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 car

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)) \\ &= 2\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 0 - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{qui n'existe pas,}\end{aligned}$$

ce qui montre que f' n'est pas continue en 0.

5.1.8 Dérivée de la fonction inverse

Soit $f : D(f) = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective, telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(f')$. Pour tout $x \in D(f)$, on a la relation $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. En dérivant les deux membres de cette égalité et en appliquant la règle de la chaîne, il vient

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,,\ \forall\, x \in D(f')\,. \tag{5.3}$$

5.1.9 Exemple

(i) Soit $f(x) = x^n$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction inverse est donnée par $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$, pour tout $y > 0$. En appliquant la relation (5.3), on obtient alors que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{x}{nx^n} = \frac{y^{1/n}}{ny} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}\,.$$

(ii) Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. En utilisant le résultat précédant, on va avoir pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}(x^{p/q})' &= [(x^{1/q})^p]' = p(x^{1/q})^{p-1}(x^{1/q})' \\ &= p(x^{1/q})^{p-1}\frac{1}{q}x^{1/q-1} = \frac{p}{q}x^{p/q-1/q+1/q-1} \\ &= \frac{p}{q}x^{p/q-1}\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que $(x^r)' = rx^{r-1}$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $x > 0$.

(iii) La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ est bijective. Sa fonction inverse s'appelle arcsinus et est notée $\arcsin : (-1,1) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Il est très utile d'apprendre par cœur la phrase suivante :

arcsin(y) est le nombre appartenant à $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dont le sinus vaut y.

Notant $y = \sin(x)$, la relation (5.3) donne alors

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \overset{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Ainsi

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ |x| < 1\,.$$

(iv) La fonction $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour inverse la fonction arctangente et notée $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\arctan(y)$ est le nombre appartenant à $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dont la tangente vaut y.

Pour $y = \tan(x)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, on va avoir

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan(x)^2} = \frac{1}{1+y^2},$$

d'où

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.2 Théorèmes des accroissements finis

Nous présentons dans cette section les théorèmes de Rolle et des accroissements finis qui s'avéreront déterminants dans l'étude des fonctions à l'aide de la notion de dérivée.

5.2.1 Théorème de Rolle

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $\tilde{x} \in (a, b)$ tel que $f'(\tilde{x}) = 0$.

Démonstration Le théorème 4.4.1 (min-max) nous assure l'existence de deux points $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M, \ \forall x \in [a, b].$$

En particulier on a $m \leq f(a) = f(b) \leq M$.

Si $m = M$, f est constante sur $[a, b]$ et sa dérivée est nulle en tout point de $[a, b]$. Supposons donc $m \neq M$. Alors au moins l'un des deux nombres n'est pas égal à $f(a) = f(b)$. Supposons sans perte de généralité que $M \neq f(a)$. Alors $a < x_M < b$ et on a que $f(x) - f(x_M) \leq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Ainsi, pour $x \neq x_M$,

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad x < x_M, \\ \leq 0 & \text{si} \quad x > x_M. \end{cases}$$

Puisque f est dérivable sur (a, b), on obtient que

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_M^-) \geq 0 \\ f'(x_M^+) \leq 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f'(x_M) = 0. \ \blacklozenge$$

5.2.2 Remarque

(i) On peut démontrer de même que $f'(x_m) = 0$ si le min est atteint en un point intérieur à $[a, b]$. La démonstration est constructive et montre donc que si le min et/ou le max sont atteints en des points intérieurs à $[a, b]$, la dérivée s'annule en ces points.

(ii) Pour que le théorème s'applique, il est nécessaire que f soit dérivable sur tout l'intervalle (a,b). Par exemple, la fonction $f\,:\,[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ satisfait toutes les hypothèses du théorème sauf qu'elle n'est pas dérivable en 0 et elle n'admet aucun point $\tilde{x} \in (-1,1)$ tel que $f'(\tilde{x}) = 0$.

(iii) On appelle **point critique** de f un point $\tilde{x}$ tel que $f'(\tilde{x}) = 0$.

5.2.3 Théorème des accroissements finis généralisé

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *et soit* f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a,b]$, *et dérivables sur* (a,b). *Alors il existe un point* $\tilde{x} \in (a,b)$ *tel que*

$$[f(b) - f(a)]g'(\tilde{x}) = [g(b) - g(a)]f'(\tilde{x})\,.$$

Démonstration Si on pose

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)\,,$$

alors h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur (a,b) et

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)\,.$$

La fonction h satisfait donc les hypothèses du théorème de Rolle et ainsi il existe $\tilde{x} \in (a,b)$ tel que

$$h'(\tilde{x}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [f(b) - f(a)]g'(\tilde{x}) = [g(b) - g(a)]f'(\tilde{x})\,. \ \blacklozenge$$

5.2.4 Corollaire *(Théorème des accroissements finis)*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *et soit* f *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* (a,b). *Alors il existe un point* $\tilde{x} \in (a,b)$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\tilde{x})\,.$$

Démonstration Appliquer le théorème précédent à la fonction $g(x) = x$. ♦

On se référera souvent à ce résultat par l'acronyme "TAF".

5.2.5 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *et soit* f *une fonction dérivable sur* (a,b).

(i) f *est croissante ssi* $f'(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in (a,b)$.

(ii) f *est décroissante ssi* $f'(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in (a,b)$.

(iii) f *est constante ssi* $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in (a,b)$.

Démonstration Ces résultats se démontrent aisément en utilisant le TAC : pour tout couple de nombres $x_1, x_2 \in (a,b)$, il existe $\tilde{x}$ entre x_1 et x_2 tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\tilde{x}). \quad \blacklozenge$$

5.2.6 Définition

Soit $f: D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$. S'il existe une constante positive L telle que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|\,,\ \forall\, x_1, x_2 \in D(f)\,,$$

on dit alors que f est *lipschitzienne* (ou *L-lipschitzienne*) et on écrit $f \in Lip(D(f), \mathbb{R})$.

5.2.7 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$. Alors f est lipschitzienne.

Démonstration Pour $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, le théorème des accroissements finis nous assure l'existence d'un point $\tilde{x} \in (x_1, x_2)$ tel que

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\tilde{x})\,.$$

Posant $L = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, il vient

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|\,,\ \forall\, x_1, x_2 \in [a,b]\,,$$

et donc $f \in Lip([a,b], \mathbb{R})$. ♦

On se convainc aisément que la réciproque est fausse (considérer par exemple une fonction affine par morceaux).

5.2.8 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si $\tilde{x} \in (a,b)$ est un point d'extremum local pour f et que f est dérivable en ce point, alors $f'(\tilde{x}) = 0$.

Démonstration En restreignant f à un petit intervalle dans lequel $\tilde{x}$ est un point de maximum (ou de minimum) global, on peut alors simplement répéter le preuve du théorème de Rolle. ♦

Attention ! La réciproque est fausse. Considérer par exemple la fonction $f(x) = x^3$ définie sur $[-1, 1]$. On a $f'(0) = 0$ bien que 0 ne soit évidemment pas un point d'extremum local.

Nous donnons les conclusions de ce qui précède dans la proposition suivante qui décrit la nature des points d'extremum sur un intervalle fermé borné.

5.2.9 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors les points où f atteint ses extrema sont dans l'un des sous-ensembles de $[a,b]$ suivants :

- *les bornes a, b,*
- *les points x* critiques *: $f'(x) = 0$,*
- *les points où la fonction n'est pas dérivable.*

5.2.10 Exemple

(i) Pour la fonction $f(x) = |x|$ définie sur $[-1, 1]$, on a que

$$\min_{-1\leq x\leq 1} f(x) = 0 = f(0) \quad \text{(point où } f \text{ n'est pas dérivable)},$$

et

$$\max_{-1\leq x\leq 1} f(x) = 1 = f(-1) = f(1) \quad \text{(bornes du domaine)}.$$

(ii) En revanche, pour $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ sur l'intervalle $[-1, 2]$, on résoud

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{\pm 1\}.$$

Les points de min/max (local ou global) sont donc à chercher dans l'ensemble $\{-1, 1, 2\} \subset [-1, 2]$. On trouve que

$$\min_{-1\leq x\leq 2} f(x) = -\frac{2}{3} = f(1) \quad (x = 1 \text{ point critique})$$

et

$$\max_{-1\leq x\leq 2} f(x) = \frac{2}{3} = f(-1) = f(2)$$

($x = -1$ point critique et borne du domaine, $x = 2$ borne du domaine).

5.3 Fonctions convexes

5.3.1 Définition

Soit $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$ et $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est *convexe* ssi pour tout couple de nombres $x_1, x_2 \in (a, b)$, on a :

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \ \forall \lambda \in [0, 1]. \tag{5.4}$$

On dit que f est *concave* si $-f$ est convexe.

5.3.2 Remarque

En représentation graphique, la condition (5.4) signifie que pour $x_1 \leq t \leq x_2$, le point $(t, f(t))$ est situé au-dessous de ou sur la droite joignant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$. En effet, tout point $t \in (x_1, x_2)$ s'écrit $t = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ pour un unique $\lambda \in (0, 1)$, et la représentation paramétrique associée de la droite par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5.3.3 Lemme

$f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tout $a < x_1 < x_2 < b$, on a

$$\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(t)}{x_2-t}\,, \quad \forall\, x_1 < t < x_2\,. \tag{5.5}$$

Démonstration On utilise la paramétrisation $t = t(\lambda) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ et on procéde en deux temps. Premièrement, pour montrer que (5.4) $\Rightarrow$ (5.5) , on montre que

$$\frac{f(t(\lambda))-f(x_1)}{t(\lambda)-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(t(\lambda))}{x_2-t(\lambda)}\,. \tag{5.6}$$

Réciproquement, (5.5) $\Rightarrow$ (5.4) s'obtient directement en posant $t = t(\lambda)$ dans (5.5). ♦

5.3.4 Théorème

Soit $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. On a alors les propriétés suivantes :

(i) Si f est convexe, alors elle est continue en tout point $x_0 \in (a,b)$.

(ii) Si f est dérivable sur (a,b), alors elle est convexe si et seulement si la fonction dérivée f' est croissante sur (a,b).

(iii) Si f est deux fois dérivable sur (a,b), alors elle est convexe si et seulement si la dérivée seconde f'' est positive sur (a,b).

Démonstration

(i) Nous donnons tout d'abord l'interprétation géométrique de la preuve. Nous encourageons le lecteur à la représenter graphiquement. Soit $x_0 \in (a,b)$ et s,t tels que $a < s < x_0 < t < b$. Au voisinage du point x_0, le graphe de f est compris dans la région du plan limitée par les droites d_s passant par $(s, f(s))$ et $(x_0, f(x_0))$, et d_t passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(t, f(t))$, d'équations cartésiennes

$$d_s : y = f(x_0) + m_s(x-x_0) \quad \text{et} \quad d_t : y = f(x_0) + m_t(x-x_0),$$

respectivement données par les pentes

$$m_s := \frac{f(x_0)-f(s)}{x_0-s} \quad \text{et} \quad m_t := \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\,.$$

On a en effet, pour $s < x < x_0$,

$$f(x_0) + m_t(x-x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m_s(x-x_0).$$

La première inégalité découle de (5.5) (en remplaçant respectivement x_1, t, x_2 par x, x_0, t) et la seconde de (5.4) (cf. remarque 5.3.2). On en déduit que $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ par le théorème des deux gendarmes.
De façon analogue, pour $x_0 < x < t$,

$$f(x_0) + m_s(x-x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m_t(x-x_0),$$

d'où $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. Ainsi, f est bien continue en x_0.

(ii) Soit $a < x_1 < t < x_2 < b$. Supposons que f est convexe. En laissant $\lambda \to 0$, respectivement $\lambda \to 1$, dans les inégalités (5.6), on obtient

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

donc f' est bien croissante. Réciproquement, supposons que f' est croissante. Par le TAC, il existe $\tilde{x}_1 \in (x_1, t)$ et $\tilde{x}_2 \in (x_2, t)$ tels que

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} = f'(x_1) \leq f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t},$$

d'où la convexité de f.

(iii) Si f est deux fois dérivable, on a que

$$f'' \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f' \text{ croissante} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ convexe},$$

par le point (ii) et la proposition 5.2.5 (i). ♦

5.3.5 Exemple

Le lecteur montrera aisément que les fonctions x^2 et e^x sont convexes sur $\mathbb{R}$, et que x^3 est convexe sur $(0, \infty)$ et concave sur $(-\infty, 0)$.

Les deux prochaines sections sont consacrées au développement d'outils pour le calcul de limites et l'étude locale des fonctions différentiables.

5.4 La règle de Bernoulli-l'Hospital

5.4.1 Théorème

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soient f, g deux fonctions dérivables sur (a, b) telles que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$ et

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow l \in \bar{\mathbb{R}} \quad (x \to a). \tag{5.7}$$

Alors si

$$f(x) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad g(x) \longrightarrow 0 \quad (x \to a), \tag{5.8}$$

ou si

$$g(x) \longrightarrow \infty \quad (x \to a), \tag{5.9}$$

on a que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow l \quad (x \to a). \tag{5.10}$$

Démonstration Supposons pour commencer que $-\infty \leq l < \infty$. Choisissons d'abord un réel r tel que $l < r$ puis s tel que $l < s < r$. De (5.7), on déduit que l'on peut trouver un point $c \in (a, b)$ tel que $a < x < c$ implique

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < s\,.$$

De plus, si $a < x < y < c$, le théorème des accroissements finis montre qu'il existe un point $t \in (x, y)$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < s\,. \tag{5.11}$$

Supposons que (5.8) soit vérifié. Faisant $x \to a$ dans (5.11), on voit que

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq s < r \quad (a < y < c)\,. \tag{5.12}$$

Supposons maintenant que c'est (5.9) qui est vrai. En fixant y dans (5.11), on peut choisir un point $c_1 \in (a, y)$ tel que $g(x) > g(y)$ et $g(x) > 0$ si $a < x < c_1$. En multipliant les deux membres de (5.11) par $[g(x) - g(y)]/g(x)$, on obtient

$$\frac{f(x)}{g(x)} < s - s\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}\,. \tag{5.13}$$

Si l'on fait tendre x vers a dans (5.13), on voit d'après (5.9) que l'on peut trouver $c_2 \in (a, c_1)$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r \quad (a < x < c_2)\,. \tag{5.14}$$

En résumé, (5.12) et (5.14) montrent que pour tout réel r tel que $l < r$, il existe un point c_2 tel que $f(x)/g(x) < r$ si $a < x < c_2$.

De la même manière, si $-\infty < l \leq \infty$, et r' étant cette fois choisi tel que $r' < l$, on peut trouver un point c_3 tel que $r' < f(x)/g(x)$ si $a < x < c_3$, et (5.10) découle de ces deux relations. ♦

5.4.2 Remarque

(i) On obtient bien sûr la même conclusion pour $x \to b$ ou si l'on suppose dans (5.9) que $g(x)$ tend vers $-\infty$.

(ii) La règle de Bernoulli-l'Hospital est un outil puissant pour lever des indéterminations du type "0/0" ou "∞/∞".

On voit souvent la règle de Bernoulli-l'Hospital énoncée dans ses différentes variantes sous la forme des deux corollaires suivants.

5.4.3 Corollaire

Soit f, g *deux fonctions dérivables dans un voisinage de* $x_0 \in \mathbb{R}$ *, qui satisfont* $g'(x) \neq 0$ *pour tout* x *dans ce voisinage et :*
soit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0\,,$$

soit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty\,.$$

Alors si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}\,,$$

on a que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l\,.$$

Démonstration On applique simplement le théorème 5.4 pour calculer les limites à gauche et à droite de x_0 . ♦

5.4.4 Corollaire

Soit f, g *deux fonctions dérivables dans un voisinage de* $+\infty$ *, telles que* $g'(x) \neq 0$ *pour tout* x *dans ce voisinage et :*
soit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0\,,$$

soit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty\,.$$

Alors si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}\,,$$

on a que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l\,.$$

On a bien sûr un résultat analogue pour les limites en $-\infty$ *.*

Démonstration On remarque que les fonctions

$$\tilde{f}(x) := f(1/x) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(x) := g(1/x)$$

sont définies dans un voisinage à droite de $x = 0$ et satisfont :
soit

$$\lim_{x \to 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0^+} \tilde{g}(x) = 0 \,,$$

soit

$$\lim_{x \to 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0^+} \tilde{g}(x) = \pm\infty \,.$$

De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l \,.$$

Le résultat découle donc du théorème 5.4 . ♦

5.5 Développements limités

Nous étendons dans cette section la notion d'approximation linéaire au voisinage d'un point présentée plus haut à des polynômes de degré fini supérieur à un. C'est-à-dire que l'on peut, sous certaines conditions, approximer localement une fonction par un polynôme, l'approximation étant d'autant plus fidèle que le degré du polynôme est élevé. On comprend bien que pour avoir une bonne approximation polynomiale au voisinage d'un point, la fonction doit être suffisamment "lisse" autour de ce point, i.e. suffisamment dérivable en ce point. Nous présentons les formules de Taylor et MacLaurin qui donnent explicitement la construction des coefficients dans la plupart des cas.

5.5.1 Définition

Soit f une fonction définie dans un voisinage I de $a \in D(f)$.
Pour tout $x \in I$, on définit le *développement limité* d'ordre n de f autour de a :

$$f(x) = f(a+h) = P_n(h) + o(h^n) \,, \tag{5.15}$$

où

$$P_n(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n \tag{5.16}$$

est un polynôme de degré $\leq n$ appelé *partie principale* du développement limité, et $o(h^n)$ vérifiant

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0 \tag{5.17}$$

est le *reste* du développement limité.

5.5.2 Proposition

Le développement limité d'ordre n de f autour de a est unique.

Démonstration En effet, supposons qu'il existe deux polynômes de degré $\leq n$,

$$P_n(x) = P_n(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n, \quad Q_n = b_0 + b_1 h + ... + b_n h^n\,,$$

satisfaisant (5.15) et (5.17). On a donc que $P_n(h) - Q_n(h) = o(h^n)$, où $o(h^n)$ satisfait également (5.17), ce qui implique que

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h^n)}{h^k} = 0\,,\ 0 \leq k \leq n\,. \tag{5.18}$$

Considérons alors l'expression

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + ... + (a_n - b_n)h^n = o(h^n)\,. \tag{5.19}$$

Pour $h = 0$, on obtient $a_0 = b_0$. Supposant maintenant $h \neq 0$, on divise successivement les deux membres de (5.19) par h^k, $k = 1, 2, ..., n$, ce qui montre, en faisant à chaque étape $h \to 0$ et en utilisant (5.18), que $a_k = b_k$ pour tout $k = 1, 2, ..., n$, d'où l'unicité. ♦

5.5.3 Exemple

(i) Tout polynôme de degré n est son propre développement limité d'ordre n.

(ii) Pour $n = 0$, on a $P_0(h) = f(a)$, alors qu'au premier ordre $(n = 1)$ on obtient, si f est dérivable en a, l'approximation linéaire (5.1), $P_1(h) = f(a) + f'(a)h$.

(iii) Considérons la fonction $f(x) = \sin(x)$. On peut toujours écrire que $\sin(x) = x + (\sin(x) - x)$, avec
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = 0\,,$$
ce qui montre que le développement limité d'ordre 1 de f autour de 0 est $f(x) = x + o(x)$.

(iv) Pour la fonction $\cos(x)$, la règle de l'Hospital donne
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{1} = 0\,,$$
et ainsi $\cos(x) = 1 + o(x)$ autour de 0.

Nous allons maintenant donner une méthode systématique pour construire les développements limités d'ordre n autour de a pour les fonctions qui sont au moins $n+1$ fois continûment dérivables dans un voisinage de a.

5.5.4 Théorème *(formule de Taylor)*

Soit f une fonction de classe C^p dans un voisinage I de $a \in D(f)$. Alors pour $x \in I$ et pour tout entier $n < p$, le développement limité d'ordre n de f autour de a est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{5.20}$$

où $\tilde{x}$ est un réel compris entre x et a, i.e. $\tilde{x} = a + \eta(x-a)$ pour un $\eta \in (0,1)$.

Démonstration Pour $x \in I$, posons

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{5.21}$$

et soit $M = M(x)$ le nombre défini par

$$f(x) = P(x) + M(x-a)^{n+1}. \tag{5.22}$$

Nous devons prouver qu'il existe un point $\tilde{x}$ compris entre x et a tel que $(n+1)!M \equiv f^{(n+1)}(\tilde{x})$.

Considérons pour ça la fonction auxiliaire

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t-a)^{n+1}, \; t \in I. \tag{5.23}$$

C'est une fonction de classe C^p qui, d'après (5.21), vérifie

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!M, \; t \in I, \; n < p.$$

La preuve sera établie si on peut montrer que $g^{(n+1)}(\tilde{x}) = 0$ pour un réel $\tilde{x}$ compris entre x et a.

Puisque $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $k = 0, 1, ..., n$, on a

$$g(a) = g'(a) = ... = g^{(n)}(a) = 0.$$

D'autre part, (5.22) et (5.23) impliquent que $g(x) = 0$ et donc g' s'annule pour un nombre x_1 compris entre a et x (théorème de Rolle). Puisque $g'(a) = 0$, on conclut de même qu'il existe un réel x_2 compris entre a et x_1 tel que $g''(x_2) = 0$. En itérant ce procédé $n+1$ fois, on obtient $\tilde{x}$ compris entre a et x_n tel que $g^{(n+1)}(\tilde{x}) = 0$. ♦

5.5.5 Remarque

(i) Constatez la puissance du théorème qui assure, d'une part, l'existence du développement limité et qui donne, d'autre part, la construction des coefficients.

(ii) Le reste donné sous cette forme est appelé *reste de Lagrange*. On remarque qu'il n'est pas explicite et que le paramètre η dépend de x. On verra plus tard une forme intégrale pour le reste.

(iii) Pour $a = 0$, la formule est dite *de MacLaurin*.

5.5.6 Exemple

(i) Calculons le développement limité d'ordre $n \geq 1$ de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ autour de $x = 0$. On va appliquer la formule de Taylor en remarquant que $f \in C^\infty((-1,\infty),\mathbb{R})$ avec

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}, \quad \dots$$

$$\dots \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^n}\,, \ \forall\, k \geq 1\,,$$

$$\Longrightarrow \quad f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,, \ \forall\, k \geq 1\,.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(|x|^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(|x|^n)\,.$$

(ii) Calculons maintenant le développement limité à l'ordre 4 autour de $x = 0$ de la fonction $h(x) = \ln(\cos(x))$. On utilise une astuce fort utile pour calculer le développement limité d'une fonction composée. On remarque que $\cos(0) = 1$ et on écrit (posant $y = \cos(x) - 1$ et utilisant le point (i)) :

$$h(x) = \ln(1 + \cos(x) - 1) = \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$$
$$= [\cos(x)-1] - \frac{[\cos(x)-1]^2}{2} + \frac{[\cos(x)-1]^3}{3} - \frac{[\cos(x)-1]^4}{4} + o([\cos(x)-1]^4)\,.$$

D'autre part, en procédant comme au point (i) par la formule de Taylor, on établit aisément que $g(x) = \cos(x) - 1$ admet pour développement limité à l'ordre 4 autour de $x = 0$

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Alors la fonction composée $h(x) = f \circ g(x)$ s'obtient par composition des développements limités ci-dessus :

$$h(x) = \Big[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big] - \frac{1}{2}\Big[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big]^2 + \frac{1}{3}\Big[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big]^3$$
$$- \frac{1}{4}\Big[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big]^4 + o\Big(\Big[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big]^4\Big). \quad (5.24)$$

Il s'agit maintenant de développer tous les produits en manipulant habilement la notation $o(\cdot)$. Par exemple, le terme croisé $-x^2 o(x^4)$ dans le développement du second crochet de (5.24) est lui-même un $o(x^4)$ (revenez à la définition pour vous en convaincre). Ou encore, $o(x^4)^l = o(x^4)$ pour tout entier $l \geq 0$. Ainsi, le deuxième crochet de (5.24) s'écrit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Big[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big]^2 & \\ &= -\frac{1}{2}\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{x^{16}}{576}+o(x^4)^2-2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24}-2\frac{x^2}{2}o(x^4)+2\frac{x^4}{24}o(x^4)\Big] \\ &= -\frac{x^4}{8}+o(x^4)\,. \end{aligned}$$

On observe en outre que, dès le troisième crochet de (5.24), toutes les puissances de x sont ≥ 6 et sont donc "absorbées" dans le reste $o(x^4)$. On obtient ainsi

$$h(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\,.$$

5.5.7 Théorème *(dérivée d'un développement limité)*

Soit f une fonction de classe C^p dans un voisinage I de $a \in D(f)$. Alors pour $x \in I$ et pour tout entier $n < p$, le développement limité d'ordre $n-1$ de f' autour de a est donné par

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{n!}(x-a)^n\,,$$

où $\tilde{x}$ est un réel compris entre x et a, i.e. $\tilde{x} = a + \eta(x-a)$ pour un $\eta \in (0,1)$.

Démonstration Prendre la dérivée des deux membres de (5.20). ♦

5.5.8 Exemple

Le théorème précédent est très utile en pratique pour déduire certains développements limités d'autres déjà connus. Par exemple, connaissant le développement limité d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ autour de $x = 0$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\,,$$

on en déduit que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\,,$$

ce qu'on aurait aussi pu obtenir en utilisant la formule de la série géométrique.

5.6 Comportement local d'une fonction

Nous démontrons dans cette section quelques résultats bien connus concernant le comportement d'une fonction dérivable au voisinage de ses points critiques (points de minimum ou de maximum local, points d'inflexion).

5.6.1 Proposition

Soit $f \in C^3(I, \mathbb{R})$, *avec* I *un voisinage de* $a \in D(f)$ *tel que* $f'(a) = 0$ *et* $f''(a) \neq 0$. *Alors* a *est un point de minimum local de* f *si* $f''(a) > 0$, *de maximum local si* $f''(a) < 0$.

Démonstration Pour tout $x \in I$, la formule de Taylor nous assure l'existence d'un point $\tilde{x}$ compris entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\tilde{x})}{3!}(x-a)^3,$$

soit, en posant $h = x - a$ et $\tilde{x} = a + \eta h$, pour un $\eta \in (0,1)$,

$$f(x) - f(a) = h^2 \left[\frac{f''(a)}{2} + \frac{f'''(a+\eta h)}{6} h \right].$$

Puisque $f \in C^3(I, \mathbb{R})$, la fonction f''' est continue et donc bornée au voisinage de a. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $|h| < \delta \implies$

$$\left| \frac{f'''(a+\eta h)}{6} h \right| < \frac{|f''(a)|}{4} \implies \frac{f''(a)}{4} < \frac{f''(a)}{2} + \frac{f'''(a+\eta h)}{6} h < \frac{3f''(a)}{4}.$$

Ainsi, pour $0 < |x-a| < \delta$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[f(x) - f(a)] &= \operatorname{sgn} \left[\frac{f''(a)}{2} + \frac{f'''(a+\eta h)}{6} h \right] \\ &= \operatorname{sgn}[f''(a)], \end{aligned}$$

d'où le résultat. ♦

5.6.2 Remarque

(i) Notez que le signe de la dérivée seconde nous informe sur la convexité de f au voisinage du point a, ce qui détermine la nature du point critique.

(ii) La proposition 5.6.1 se généralise aisément et on obtient que si $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, et que $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x-a| < \delta \implies \operatorname{sgn}[f(x) - f(a)] = \operatorname{sgn}\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right] \operatorname{sgn}[(x-a)^n].$$

On remarque ainsi que a est un point d'extremum local si et seulement si n est pair. Dans ce cas, l'extremum est un min local si $f^{(n)}(a) > 0$, un max local si $f^{(n)}(a) < 0$.

(iii) Si n est impair, le point critique est un point à tangente horizontale mais pas un point d'extremum local. (Comparez par exemple les fonctions $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^3$.) Un tel point est ce qu'on appelle un point d'inflexion de la fonction, cf. définition 5.6.4.

5.6.3 Proposition

Si f est une fonction convexe de classe C^2, alors la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ en chaque point se trouve en dessous de cette courbe.

Démonstration L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a \in D(f)$ est donnée par $y_t - f(a) = f'(a)(x-a)$ et le développement limité au premier ordre de f autour de a donne

$$y_f = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x-a)^2,$$

pour un point $\tilde{x}$ entre a et x. On a alors, pour tout $x \in D(f)$,

$$y_f - y_t = \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x-a)^2 \geq 0\,. \ \blacklozenge$$

5.6.4 Définition

Soit f une fonction dérivable en $a \in D(f)$.
On dit que $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* de f s'il existe $\delta > 0$ et $c \neq 0$ tels que

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad c(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a))(x-a) > 0\,. \tag{5.25}$$

En d'autres termes, $(a, f(a))$ est un point d'inflexion si l'expression

$$(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a))(x-a)$$

a un signe constant sur $(a-\delta, a+\delta)$.

5.6.5 Proposition

Soit $f \in C^2(I, \mathbb{R})$, avec I un voisinage de $a \in D(f)$.
S'il existe $\delta > 0$ et $c \neq 0$ tels que $cf''(x)(x-a) > 0$ pour $x \in I$ tel que $0 < |x-a| < \delta$, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f.

Démonstration Soit $x \in I$ tel que $0 < |x-a| < \delta$. Par la formule de Taylor, il existe $\eta \in (0,1)$ tel que

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f''(a + \eta(x-a))\frac{(x-a)^2}{2!}. \tag{5.26}$$

On remarque alors que le point $y := a + \eta(x-a)$ satisfait $0 < |y-a| < |x-a| < \delta$.
Donc, par hypothèse,

$$\begin{aligned}
\eta(x-a)(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)) &= \frac{1}{c}\frac{(x-a)^2}{2!}cf''(a+\eta(x-a))\eta(x-a) \\
&= \frac{1}{c}\frac{(x-a)^2}{2!}\underbrace{cf''(y)(y-a)}_{>0} > 0\,,
\end{aligned}$$

et $(a, f(a))$ est bien un point d'inflexion de f. $\blacklozenge$

5.6.6 Corollaire

Soit $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ *, avec* I *un voisinage de* $a \in D(f)$ *.*
S'il existe $\delta > 0$ *tel que* $f''(x) > 0$ *pour* $x \in I$ *tel que* $|x - a| < \delta$ *, alors* $(a, f(a))$ *n'est pas un point d'inflexion de* f *.*

Démonstration Par hypothèse, l'identité (5.26) montre que l'expression

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

ne change pas de signe sur $(a - \delta, a + \delta)$. Mais alors $(x - a)(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a))$ change de signe sur cet intervalle, ce qui montre que $(a, f(a))$ n'est pas un point d'inflexion. ♦

5.6.7 Proposition

Soit $n \geq 3$ *impair et soit* $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ *, avec* I *un voisinage de* $a \in D(f)$ *.*
Si $f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ *,* $f^{(n)}(a) \neq 0$ *, alors* $(a, f(a))$ *est un point d'inflexion.*

Démonstration Par la formule de Taylor, on a que

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = f^{(n)}(a + \eta(x - a))\frac{(x - a)^n}{n!}$$

pour un certain $\eta \in (0, 1)$. Supposons sans perte de généralité que $f^{(n)}(a) > 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $f^{(n)}(x) > 0$ pour $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta$. Ainsi

$$(x - a)(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)) = f^{(n)}(a + \eta(x - a))\frac{(x - a)^{n+1}}{n!} > 0$$

puisque n est impair, d'où (5.25). ♦

Chapitre 6

Suites de fonctions

Nous présentons maintenant la notion de suite de fonctions réelles et les notions de convergence y relatives. L'étude des suites de fonctions nous permettra de définir les séries entières qui constituent une classe particulière de suites de fonctions et qui fournissent une généralisation du développement limité.

Le lecteur intéressé par des concepts d'analyse plus généraux notera, en lien avec la remarque 2.5.3, que la notion de convergence uniforme développée dans ce qui suit n'est rien d'autre que la convergence définie sur un espace métrique de fonctions M avec la métrique $d(f,g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$ pour $f, g \in M$ des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ (cf. remarque 6.1.12). A ce sujet, on pourra consulter l'ouvrage de Rudin.

6.1 Convergence, continuité

6.1.1 Définition

On appelle *suite de fonctions* une collection infinie, dénombrable et ordonnée de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toutes définies sur un même domaine $E \subset \mathbb{R}$.

6.1.2 Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

(i) On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *ponctuellement* (ou *simplement*) vers la fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et on note $f_n \longrightarrow f \quad (n \to \infty)$, si

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)\,, \ \forall x \in E\,.$$

(ii) On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *uniformément* vers la fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et on note $f_n \stackrel{U}{\longrightarrow} f \quad (n \to \infty)$, si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,,\ \forall x \in E\,.$$

(iii) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *uniformément de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m \geq N(\varepsilon) \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,,\ \forall x \in E\,.$$

6.1.3 Remarque

(i) Noter que la convergence uniforme implique la convergence ponctuelle.

(ii) Dire que la convergence est uniforme revient à dire que la “vitesse” à laquelle $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ ne dépend pas du point x considéré.

(iii) Les définitions 6.1.2 (ii) et (iii) sont respectivement équivalentes à

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

et

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| = 0\,.$$

Nous invitons le lecteur à écrire la démonstration de ces équivalences en détail.

6.1.4 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy si et seulement si il existe une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{U} f$ lorsque $n \to \infty$.

Démonstration Cf. exercices. ♦

6.1.5 Exemple

Considérons la suite de fonctions donnée par

$$f_n:\ (0,1/2) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f_n(x) = \frac{1+x^n}{x}\,,\ n\in\mathbb{N}\,.$$

On a clairement

$$f_n \longrightarrow f:\ (0,1/2) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

De plus, la convergence est uniforme. En effet, pour $n \geq 0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1+x^n}{x} - \frac{1}{x}\right| = |x^{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)\,.$$

On pouvait aussi remarquer que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| = \left|\frac{1+x^n}{x} - \frac{1+x^m}{x}\right| &= \left|\frac{x^n - x^m}{x}\right| = |x^{n-1} - x^{m-1}| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} \longrightarrow 0 \quad (n,m\to\infty)\,. \end{aligned}$$

6.1.6 Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $f_n \xrightarrow{U} f$ et $g_n \xrightarrow{U} g \quad (n\to\infty)$ et soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Alors $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{U} \alpha f + \beta g \quad (n\to\infty)$.

Démonstration Trivial. ♦

6.1.7 Remarque

Si les deux limites f et g sont bornées, alors on a que $f_n g_n \xrightarrow{U} fg$. Pour se convaincre que ce n'est pas le cas en général, considérer $f_n(x) = x + 1/n$ pour $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $f_n(x) \xrightarrow{U} f(x) = x$ mais en revanche $f_n(x)^2 \longrightarrow f(x)^2$ ponctuellement mais pas uniformément. En effet,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)^2 - f(x)^2| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|2x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right| = \infty\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

6.1.8 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$, qui converge uniformément vers une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, et un point $a \in \mathbb{R}$ satisfaisant : $\exists\,(x_n) \subset E$ tel que $x_n \to a$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite

$$\alpha_n := \lim_{x\to a} f_n(x)$$

existe. Alors la suite (α_n) converge et

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n\,. \tag{6.1}$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $f_n \xrightarrow{U} f \quad (n \to \infty)$, il existe d'après la remarque 6.1.3 (iv) un entier $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,,\ \forall n \geq N\,,\ \forall x \in E\,.$$

On en déduit que la suite (α_n) est de Cauchy, donc convergente. On note α sa limite et on écrit

$$|f(x) - \alpha| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha|. \tag{6.2}$$

Choisissons maintenant $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.3}$$

pour tout $x \in E$ (convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f), et tel que

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{6.4}$$

Cet entier n étant fixé, il existe alors un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$x \in E,\ 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{6.5}$$

Combinant (6.2), (6.3), (6.4) et (6.5), on obtient

$$x \in E,\ 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon\,,$$

ce qui prouve (6.1). ♦

6.1.9 Remarque

L'astuce utilisée pour conclure la démonstration ci-dessus est couramment utilisée en analyse et on l'appelle souvent "truc du $\varepsilon/3$".

6.1.10 Remarque (permutation des limites)

(i) On peut écrire l'égalité (6.1) explicitement comme

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)\,,$$

et l'on remarque donc que **la convergence uniforme permet de permuter l'ordre des limites**.

(ii) Remarquons encore que le résultat n'est plus valable si la convergence n'est pas uniforme. En effet, considérons par exemple la suite de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1/(1+x^2)^n$. On a clairement que

$$f_n \longrightarrow f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} 0\,, & x\neq 0\,,\\ 1\,, & x = 0\,.\end{cases}$$

Par le théorème 6.1.11 (ci-dessous), la convergence n'est pas uniforme puisque f n'est pas continue. Un simple calcul montre alors que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x)\,.$$

(iii) Un exemple plus élémentaire de situation où l'on ne peut pas permuter les limites (problème fréquent en analyse !) est donné par la suite double

$$x_{m,n} = \frac{m}{m+n},\quad m,n\in\mathbb{N}^*.$$

On remarque en effet que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, $x_{m,n}\longrightarrow 1\quad (m\to\infty)$, et donc

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} = 1\,.$$

En revanche, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ fixé, $x_{m,n}\longrightarrow 0\quad (n\to\infty)$, d'où

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} = 0\,.$$

Nous énonçons maintenant un résultat fondamental, qui est un corollaire immédiat du théorème 6.1.8.

6.1.11 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C^0([a,b],\mathbb{R})$ *une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. *Alors* $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration Nous laissons au lecteur le soin de rédiger la preuve en utilisant le théorème 6.1.8. ♦

6.1.12 Remarque

Une conséquence importante des théorèmes 6.1.4 et 6.1.11 est que $C^0([a,b],\mathbb{R})$, muni de la distance

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|\,,$$

est un espace métrique complet (cf. remarque 2.5.3).

6.1.13 Exemple

(i) Soit $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$, $n \in \mathbb{N}$ pour $x \in [0,\infty)$. On a que $f_n \longrightarrow f$ où f est la fonction définie par

$$f:\ [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} 0\,, & x\in[0,1)\,,\\ 1/2\,, & x=1\,,\\ 1\,, & x\in(1,\infty)\,. \end{cases}$$

Puisque f n'est pas continue, on peut conclure que la convergence n'est pas uniforme.

(ii) Donnons maintenant un exemple qui montre qu'une suite de fonctions continues peut converger ponctuellement vers une fonction continue, sans que la convergence soit uniforme. Considérons pour cela la suite de fonctions donnée par

$$f_n:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f_n(x) = \begin{cases} (n+1)^2x\,, & x\in\left[0,\frac{1}{n+1}\right)\,,\\ -(n+1)^2x+2(n+1)\,, & x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{2}{n+1}\right]\,,\\ 0\,, & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

(Il peut être utile d'esquisser le graphe d'une telle fonction.) On a manifestement que $f_n \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'autre part, la suite converge ponctuellement vers la fonction identiquement nulle $f\equiv 0$. En effet, pour $x\in[0,1]$, on remarque que $f_n(x)=0$ dès que $2/(n+1)<x$.
En revanche, la convergence n'est pas uniforme : $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| = n+1$.

(iii) Signalons encore qu'une fonction continue peut être la limite uniforme d'une suite de fonctions discontinues. Par exemple, la suite de fonction de terme général

$$f_n:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x\neq 0\,,\\ \frac{1}{n+1}\,, & x=0\,, \end{cases}$$

converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

6.2 Fonctions monotones

6.2.1 Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E\subset\mathbb{R}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N},\ x\in E$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si $f_n(x)\ge f_{n+1}(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N},\ x\in E$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est *monotone*.

6.2.2 Théorème *(Dini)*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([a,b],\mathbb{R})$ *une suite de fonctions monotone convergeant simplement vers* $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. *Alors la convergence est uniforme.*

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. On va de nouveau utiliser le truc du $\varepsilon/3$.
Puisque $f_n \longrightarrow f \quad (n \to \infty)$ simplement, pour tout $x \in [a,b]$ il existe $n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{n(\varepsilon,x)}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \,. \tag{6.6}$$

D'autre part, puisque f_n et f sont continues sur $[a,b]$, il existe $\delta(x) > 0$ tel que pour $|x - y| < \delta(x)$, on ait

$$|f_{n(\varepsilon,x)}(x) - f_{n(\varepsilon,x)}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \,, \tag{6.7}$$

et

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \,. \tag{6.8}$$

On a alors un recouvrement ouvert

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} B(x, \delta(x)) \,.$$

Par le lemme 4.5.5 (Heine-Borel-Lebesgue), on peut donc trouver un $N \in \mathbb{N}$ et une suite finie $s = (x_0, ..., x_N)$ tels que

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=0}^{N} B(x_k, \delta(x_k)) \,.$$

Posons maintenant $n_0(\varepsilon) = \max\{n(\varepsilon, x_k)\,;\ 0 \le k \le N\}$ et soit $x \in [a,b]$. Alors il existe $i \in \{0, ..., N\}$ tel que $|x - x_i| < \delta(x_i)$ et ainsi, pour tout $n \ge n_0(\varepsilon)$, la monotonie de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les relations (6.6), (6.7) et (6.8) impliquent

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\le |f_{n(\varepsilon,x_i)}(x) - f(x)| \\ &\le |f_{n(\varepsilon,x_i)}(x) - f_{n(\varepsilon,x_i)}(x_i)| + |f_{n(\varepsilon,x_i)}(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &< \varepsilon \,, \end{aligned}$$

uniformément en $x \in [a,b]$ car n_0 ne dépend que de ε . ♦

6.2.3 Exemple

Pour $x \in [0,1]$ soit $P_0(x) = 0$, $P_n(x)$ un polynôme de degré $n \ge 1$ et considérons la suite de fonctions définie par la relation de récurrence

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2) \,,\ n \ge 1 \,. \tag{6.9}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2) &(6.10)\\ &= (\sqrt{x} - P_n(x))\left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right]. &(6.11)\end{aligned}$$

Puisque $P_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, on déduit facilement par induction de (6.6) et (6.8) que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Ceci entraîne que

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\underbrace{(x - P_n(x)^2)}_{\geq 0} \geq P_n(x)\,, \; x \in [0,1]\,,$$

et donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions. D'autre part, puisque pour chaque $x \in [0,1]$, la suite numérique $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée, elle converge vers un nombre réel $P(x)$ satisfaisant

$$P(x) = P(x) + \frac{1}{2}(x - P(x)^2) \quad \Longrightarrow \quad P(x) = \sqrt{x}\,,$$

car $P(x) \geq 0$. Ainsi $P_n(x) \longrightarrow \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$ et par le théorème précédent, la convergence est uniforme. ♦

6.3 Fonctions dérivables

6.3.1 Théorème *(différentiation des suites de fonctions)*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe au moins un point $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f dérivable telle que

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)\,, \; \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{6.12}$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n, m \geq N \implies$

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.13}$$

et

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \; \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{6.14}$$

Nous appliquons maintenant le TAC (corollaire 5.2.4) à la fonction $f_n - f_m$. Pour $n, m \geq N$, on obtient par (6.14) que

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) + f_m(y)| < \frac{\varepsilon|x-y|}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,, \; \forall\, x, y \in [a,b]\,. \tag{6.15}$$

Il suit alors de (6.13) et (6.15) que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon\,,$$

pour tout $n, m \geq N$ et tout $x \in [a,b]$. Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $[a,b]$ et donc, par le théorème 6.1.4, converge uniformément sur cet intervalle. Soit f sa limite.

Pour $x \in [a,b]$ fixé, on définit alors, pour tout $y \in [a,b] \setminus \{x\}$:

$$\phi_n(y) = \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\,, \quad \phi(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,. \tag{6.16}$$

On remarque tout d'abord que

$$\lim_{y\to x} \phi_n(y) = f_n'(x)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{6.17}$$

D'autre part, la première inégalité de (6.15) entraîne, pour $n, m \geq N$:

$$|\phi_n(y) - \phi_m(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ \forall y \in [a,b] \setminus \{x\}\,.$$

Par conséquent, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]\setminus\{x\}$. Comme $f_n(y) \to f(y)$ uniformément pour tout $y \in [a,b] \setminus \{x\}$, on déduit de (6.16) que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(y) = \phi(y)\,, \tag{6.18}$$

uniformément pour $y \in [a,b] \setminus \{x\}$. On conclut maintenant grâce à (6.17) et (6.18) en appliquant le théorème 6.1.8 à la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{y\to x} \phi(y) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,. \ \blacklozenge$$

6.3.2 Remarque

On peut avoir des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dérivables avec $f_n \xrightarrow{U} f$ sans avoir pour autant que $f_n' \longrightarrow f'$ $(n \to \infty)$, même ponctuellement. En effet, considérons par exemple la suite de fonctions donnée par $f_n(x) = \sin(nx)/n$, $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $|f_n(x)| \leq 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $f_n \xrightarrow{U} f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. Pourtant on a que $f_n'(0) = 1 \neq 0 = f'(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

6.4 Théorème de Stone-Weierstrass

Dans l'exemple 6.2.3, nous avons construit une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Il s'avère que toute fonction continue sur un intervalle fermé peut y être approximée uniformément par des polynômes.

6.4.1 Théorème (Stone-Weierstrass)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *et soient* $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. *Alors il existe une suite de polynômes* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$.

Démonstration La démonstration fait appel au calcul intégral, elle sera étudiée aux exercices en temps voulu. ♦

6.4.2 Remarque

Le résultat reste vrai pour des fonctions à valeurs complexes, qui sont alors approximées par des polynômes à coefficients complexes.

Chapitre 7

Séries entières, fonctions analytiques

Nous commençons ce chapitre par quelques éléments de topologie qui nous seront utiles dans l'étude des séries entières, ou séries de puissances, étude qui nous conduira à une généralisation de la notion de développement limité. On verra que certaines "bonnes" fonctions, dites analytiques, peuvent être représentées en tout point de leur domaine de définition par une série entière appelée série de Taylor.

7.1 Considérations topologiques

7.1.1 Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$. L'*adhérence* de A est l'ensemble $\operatorname{adh} A \subset \mathbb{R}$ défini par

$$\operatorname{adh} A = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \,;\ \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \ \text{ t.q. } \ x_n \longrightarrow x\}.$$

Noter qu'ici $x_n \longrightarrow x$ peut signifier soit que $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, soit que $x = \pm\infty$ et que $x_n \longrightarrow x$ au sens des limites infinies.

7.1.2 Exemple

(i) L'adhérence de l'intervalle $(0,1)$ est $[0,1]$.

(ii) L'ensemble A est fermé ssi $\operatorname{adh} A = A$.

(iii) $\operatorname{adh}\{1/n\,;\ n \in \mathbb{N}\} = \{0\} \cup \{1/n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$.

7.1.3 Définition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit l'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme l'adhérence de l'ensemble image de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.

$$\operatorname{adh}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \operatorname{adh}\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

On définit alors la *limite inférieure* et la *limite supérieure* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement par

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf \operatorname{adh}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup \operatorname{adh}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$

Puisque $\liminf_{n\to\infty} x_n$ et $\limsup_{n\to\infty} x_n$ existent toujours dans $\bar{\mathbb{R}}$, il est souvent utile de les utiliser dans certains raisonnement concernant des suites dont on ne sait pas si elles convergent.

Les résultats suivants sont des conséquences directes des définitions ci-dessus.

7.1.4 Proposition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(i) On a toujours

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

De plus, si (x_n) *est bornée inférieurement (resp. bornée supérieurement), alors* $\liminf x_n > -\infty$ *(resp.* $\limsup x_n < \infty$ *).*

(ii) (x_n) *converge ssi* $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$ *, auquel cas*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n\,.$$

(iii) Si $x_n \le y_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} y_n \quad \textit{et} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} y_n\,.$$

Démonstration Exercice. ♦

7.2 Séries entières

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On considère une fonction $f \in C^n(I,\mathbb{R})$ et on rappelle la formule de Taylor de f au point a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(|x-a|^n)\,.$$

Si $f \in C^\infty(I,\mathbb{R})$, on se demande maintenant s'il est possible d'écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,. \tag{7.1}$$

Pour chaque valeur de $x \in I$, on doit donc tout d'abord étudier la convergence de la série dans le membre de droite de (7.1) et, au cas où elle converge, comparer la valeur de la limite avec $f(x)$.

Si l'on regarde la série comme la suite de ses sommes partielles, et que $x \in I$ est variable, on voit qu'on a à faire à une suite de fonctions. L'étude qui suit fera donc appel à la fois aux résultats sur les séries numériques et à ceux concernant les suites de fonctions.

Par commodité, nous commencerons par étudier les séries autour du point $a = 0$, puis nous expliquerons (cf. remarque 7.2.11) comment les résultats se généralisent au cas $a \neq 0$.

7.2.1 Définition

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle *série entière* ou encore *série de puissances* une **expression formelle** du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On parle d'expression formelle dans le sens où, pour un $x \in \mathbb{R}$ arbitraire, on ne sait encore rien sur la convergence de la série. On définit alors une fonction $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,, \tag{7.2}$$

où $D(f) := \{x \in \mathbb{R}\,;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$.

Nous allons bientôt voir que le domaine de définition d'une série entière autour de $a = 0$ est toujours un intervalle symétrique par rapport à l'origine.

7.2.2 Définition

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la quantité R définie comme

$$R = \sup\, E, \quad E := \Big\{|x|\,;\ x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\Big\}. \tag{7.3}$$

Remarquons tout d'abord que $R \in [0, \infty]$ car $E \neq \emptyset$. En effet, $0 \in E$.

7.2.3 Théorème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et E, R définis par (7.3). Posons $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

(i) Si $|x| > R$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge.

(ii) Supposons $R > 0$. Pour tout $\rho \in (0, R)$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument uniformément sur $[-\rho, \rho]$, i.e. la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur cet intervalle et, pour chaque $x \in [-\rho, \rho]$, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est absolument convergente.

Démonstration (i) découle immédiatement de la définition (7.3).

(ii) Soit $\rho \in (0, R)$. Par définition de R, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\rho < |x_0| < R$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge. En particulier, $|a_n||x_0|^n \to 0$ donc il existe $M \geq 0$ tel que

$|a_n||x_0|^n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $\xi = \rho/|x_0|$, $\rho = \xi|x_0|$. Comme $\xi \in (0,1)$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n < \infty \, .$$

Maintenant, soit $m, n \in \mathbb{N}$ et supposons s.p.d.g. que $m > n$. La convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n$ et la remarque 3.1.4 (i) entraînent

$$|f_m(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k||x|^k \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|\rho^k \longrightarrow 0 \quad (m, n \to \infty) \, ,$$

uniformément pour $x \in [-\rho, \rho]$. Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy et donc uniformément convergente sur $[-\rho, \rho]$. D'autre part, pour chaque $x \in [-\rho, \rho]$ fixé, on a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n < \infty \, ,$$

ce qui termine la preuve. ♦

On conclut du théorème précédant que le domaine de définition de la série entière est l'un des sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivants :

$$[-R, R] \quad (-R, R) \quad [-R, R) \quad (-R, R] \, .$$

Pour $|x| = R$, le théorème ne donne pas d'information quant à la convergence de la série. En fait, les quatre scénarios ci-dessus sont possibles et il faut étudier “à la main” les séries correspondant à $x = \pm R$.

7.2.4 Exemple

(i) Pour $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \neq 1$, on peut écrire, formellement,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, . \tag{7.4}$$

On a alors clairement $R = 1$ et $D(f) = (-1, 1)$. L'identité (7.4) a donc un sens pour tout $x \in (-1, 1)$.

(ii) Considérons la suite donnée par $a_0 = 1$ et $a_n = 1/n$, $n \geq 1$, et posons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \, .$$

Pour $x = 1$, on a la série harmonique qui est divergente, alors que pour $x = -1$, c'est la série harmonique alternée, qui est convergente. On trouve ainsi que $R = 1$ et $D(f) = [-1, 1)$.

La définition étant peu commode en pratique, nous nous intéressons maintenant à établir une méthode générale permettant de calculer le rayon de convergence. Nous commençons par généraliser le critère de la racine pour les séries numériques.

7.2.5 Proposition

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Posons* $l = \limsup \sqrt[n]{|b_n|}$ *. Alors la série numérique* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge absolument si* $l < 1$ *, diverge si* $l > 1$ *.*

Démonstration La preuve est similaire à celle du critère 3.2.9, nous la laissons en exercice. ♦

Le résultat le plus général pour calculer le rayon de convergence est le suivant.

7.2.6 Théorème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est donné par*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Démonstration Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons

$$l = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Par la proposition 7.2.5, on a bien que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge si $|x| < \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, diverge si $|x| > \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. ♦

Dans de nombreux cas, le résultat suivant est aussi utile.

7.2.7 Théorème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle telle que*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in [0, \infty] .$$

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est donné par* $R = 1/L$ *.*

Démonstration Fixons $x \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| ,$$

le critère du quotient pour les séries numériques donne en effet que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge si $|x| < 1/L$, diverge si $|x| > 1/L$. ♦

7.2.8 Exemple

(i) Pour $a_0 = 1$, $a_n = n^n$, $n \geq 1$, on va avoir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\longrightarrow e} (n+1) \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty) ,$$

d'où $R = 0$.

(ii) La fonction exponentielle est définie par

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Montrons qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)\,,$$

et donc $R=\infty$.

(iii) Considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,.$$

On a ici que $a_{2n}=0$ alors que $|a_{2n+1}| = 1/(2n+1)!$, $n\in\mathbb{N}$. On ne peut donc pas appliquer le critère du quotient. En revanche le critère de la racine donne

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1/\sqrt[n]{n!}\,, & n \text{ impair}\,,\\ 0\,, & n \text{ pair}\,,\end{cases}$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ et donc $R=\infty$. On verra à la section 7.3.11 que cette série entière est la série de Taylor de la fonction $\sin(x)$ autour de $x=0$.

(iv) De même pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ (série de Taylor de $\cos(x)$).

Nous établissons maintenant un résultat très fort sur la dérivabilité d'une fonction définie par une série entière.

7.2.9 Théorème

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *avec rayon de convergence* $R>0$. *On a alors que* $f\in C^\infty((-R,R),\mathbb{R})$ *avec les formules*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,,\quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\,,\ \dots$$

Démonstration Posons $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Par hypothèse, $f_n\to f$ ponctuellement sur $(-R,R)$ (et uniformément sur $[-\rho,\rho]$, pour tout $\rho\in(0,R)$). Par ailleurs, $(f_n)\subset C^\infty((-R,R),\mathbb{R})$ car chaque f_n est un polynôme. On a

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Considérons donc la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Son rayon de convergence est donné par

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}\,\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R\,.$$

Soit alors $\rho \in (0, R)$. Par le théorème 7.2.3, la suite de fonctions (f'_n) est uniformément convergente sur $[-\rho, \rho]$. Alors, par le théorème 6.3.1 (différentiation des suites de fonctions), f est dérivable et

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall\, x \in [-\rho, \rho].$$

On peut ensuite répéter l'argument ci-dessus avec f' à la place de f. On obtient que la série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ a le même rayon de convergence R. Donc, pour tout $\rho \in (0, R)$, la suite de fonctions (f''_n) est uniformément convergente sur $[-\rho, \rho]$. Par le théorème 6.3.1, f' est dérivable et

$$f''(x) = \lim_{n\to\infty} f''_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad \forall\, x \in [-\rho, \rho].$$

En itérant le procédé, on obtient que $f \in C^{\infty}((-R, R), \mathbb{R})$ et que l'on peut calculer les dérivées successives en dérivant la série “terme à terme”. ♦

7.2.10 Corollaire

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *avec rayon de convergence* $R > 0$. *Les coefficients de la série, appelés* coefficients de Taylor sont alors donnés par

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{7.5}$$

Démonstration En considérant les dérivées successives de f, on obtient

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & a_0 \\ f'(x) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = a_1 \\ \dots & = & \dots \quad \Longrightarrow \quad \dots \\ f^{(k)}(x) & = & \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad \Longrightarrow \quad f^{(k)}(0) = k! a_k . \ ♦ \end{array}$$

7.2.11 Remarque

(i) Tous les résultats de la section 7.2 restent valables avec des modifications évidentes pour les séries entières de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, appelées *séries entières autour de* $x = a$. Par exemple, dans le cas général le domaine de définition d'une série entière autour de a est un intervalle de la forme

$$[a-R, a+R] \quad (a-R, a+R) \quad [a-R, a+R) \quad (a-R, a+R].$$

Dans le cas où une fonction est représentée par une telle série, on parle de série de Taylor autour de $x = a$ et les coefficients de Taylor (7.5) deviennent

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{7.6}$$

Nous invitons le lecteur à parcourir toute la section et à récrire par lui-même tous les détails pour les séries autour d'un point a quelconque.

(ii) Si une fonction est représentée par sa série de Taylor autour de $x = a$, il découle de la formule (7.6) que cette représentation est unique.

Nous avons vu ci-dessus que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est bien définie pour tout $x \in (-R, R)$, $R > 0$, alors $f \in C^{\infty}((-R, R), \mathbb{R})$. On est ainsi amené à se poser la question reciproque, i.e. si pour $R > 0$ donné et pour une fonction $f \in C^{\infty}((-R, R), \mathbb{R})$, on peut toujours écrire $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. La réponse est non en général, comme le montre l'exemple suivant.

7.2.12 Exemple

Soit $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

On peut prouver que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ pour tout $x \in (-R, R)$, quel que soit $R > 0$. Si l'on pouvait représenter f par une série entière, le corollaire 7.2.10 impliquerait alors que $f \equiv 0$, ce qui n'est pas le cas.

La question soulevée ici nous conduit à introduire la définition suivante.

7.2.13 Définition

Soit $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle ouvert. Si pour tout $a \in I$, il existe $R_a \in (0, \infty]$ tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \ \forall x \in (a - R_a, a + R_a),$$

alors on dit que f est une *fonction analytique.*

7.3 Fonctions élémentaires

Nous avons supposé jusqu'ici que le lecteur est familier avec les fonctions les plus courantes : les fonctions puissances, trigonométriques, exponentielles et logarithmiques (qui sont toutes analytiques sur un domaine de définition approprié). Nous nous sommes permis de les utiliser dans plusieurs exemples. Nous possédons à présent tous les outils nécessaires pour les définir et les étudier rigoureusement.

Nous commençons naturellement par la fonction la plus importante en mathématiques : la fonction exponentielle.

7.3.1 Définition

La *fonction exponentielle* est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \tag{7.7}$$

et on a vu que la série est bien absolument uniformément convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous allons maintenant justifier l'écriture usuelle

$$\exp(x) = e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Le nombre e a été défini au chapitre 2 comme

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,. \tag{7.8}$$

Ainsi, la fonction $r \mapsto e^r$ est bien définie sur $\mathbb{Q}$: si $r = p/q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose simplement $e^r := (e^p)^{1/q}$. En revanche, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, **on ne peut pas donner une définition de** e^x **par les opérations algébriques élémentaires**.

Nous montrons maintenant que e^r coïncide avec la fonction $\exp(r)$ sur $\mathbb{Q}$.

7.3.2 Proposition

Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $e^r = \exp(r)$.

Démonstration La démonstration se déroule en trois étapes.

— Etape 1 : En écrivant $\exp(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots$, on a immédiatement que

$$\exp(0) = 1\,.$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrons que

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)\,. \tag{7.9}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\right) \\
&= 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) \\
&\quad + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + \ldots \\
&= 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \ldots \\
&= \exp(x+y)\,.
\end{aligned}$$

(Notez que la permutation des termes de la série est justifiée par le lemme 3.3.1.) Ce résultat se généralise sans peine à un nombre fini de nombres réels. On en déduit en particulier que

$$\exp(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

et

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \tag{7.10}$$

car $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous avons alors que

$$\exp(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

car il est clair que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. D'autre part, en dérivant la série terme à terme, on a clairement que

$$\exp'(x) = \exp(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

— Etape 2 : Nous montrons maintenant que

$$\exp(1) = e\,, \tag{7.11}$$

ce qui nous permettra de conclure à l'étape 3.

On a déjà vu à l'exemple 2.1.11 (ii) que $e \leq \exp(1)$. Il reste à montrer que $\exp(1) \leq e$. Pour cela, fixons $m \in \mathbb{N}$ et considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n \quad = \quad & 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ & + ... + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)...\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\,. \end{aligned}$$

C'est une suite croissante qui converge manifestement vers $1 + 1/1! + ... + 1/m!$ lorsque $n \to \infty$.
D'autre part, on sait de l'exemple 2.1.12 (ii) que $a_n \leq (1 + 1/n)^n \leq e$. En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on a donc que

$$1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{m!} \leq e\,,\ m \geq 1\,.$$

Le résultat s'obtient en faisant $m \to \infty$ dans cette inégalité.

— Etape 3 : En utilisant (7.9) et (7.11), un raisonnement par récurrence montre que $e^n = \exp(n)$, $n \in \mathbb{N}$.
On remarque également que

$$\underbrace{e^{1/n}...e^{1/n}}_{\text{n fois}} = e = \exp(1) = \underbrace{\exp(1/n)...\exp(1/n)}_{\text{n fois}}\,,$$

d'où $(e^{1/n})^n = (\exp(1/n))^n$ et donc $e^{1/n} = \exp(1/n)$, $n \geq 1$.
Finalement,

$$e^{m/n} = \underbrace{e^{1/n}...e^{1/n}}_{\text{m fois}} = \underbrace{\exp(1/n)...\exp(1/n)}_{\text{m fois}} = \exp(m/n),$$

et pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, $e^{-r} = 1/e^r = 1/\exp(r) = \exp(-r)$, par (7.10). On a donc bien $e^r = \exp(r)$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$. ♦

On utilise maintenant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. On peut alors **définir**, grâce à la continuité de $\exp$,

$$e^x := \lim_{n\to\infty} e^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \exp(r_n) = \exp(x).$$

Ceci étant établi, nous pourrons désormais utiliser de manière équivalente les notation e^x et $\exp(x)$.

Le résultat suivant clôt la discussion amorcée par la définition (7.8) et peut être fort utile dans certains calculs de limite.

7.3.3 Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{7.12}$$

Démonstration Nous commençons par prouver (7.12) pour $x = r \in \mathbb{Q}$. Si $r = 0$, le résultat est trivial. Supposons donc que $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et soit $s_n = n/r \in \mathbb{Q}$. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{s_n\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{s_n}\right)^{s_n r} = \lim_{s_n\to\pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{s_n}\right)^{s_n}\right]^r,$$

où $\pm$ est le signe de r. Par continuité de la fonction $t \mapsto t^r$ au point $t = e$, il suffit donc pour conclure de montrer que

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni s\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = e. \tag{7.13}$$

Commençons par le cas $s \to +\infty$. Il existe alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ un entier m tel que $m \leq s < m + 1$, d'où l'on déduit aisément que

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Par conséquent, comme $m \to +\infty$ lorsque $s \to +\infty$, et que

$$\lim_{m\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m = \lim_{m\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = e,$$

on a bien
$$\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s = e.$$

Pour traiter le cas $s \to -\infty$, on pose $s=-(t+1)$, $\mathbb{Q}\ni t\to+\infty$, et il vient
$$\begin{aligned}\lim_{s\to-\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s &= \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e\,.\end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé (7.12) pour $x\in\mathbb{Q}$.

Supposons maintenant que $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et soit $\varepsilon>0$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité de e^x, il existe $r_1, r_2\in\mathbb{Q}$ tels que
$$r_1<x<r_2 \quad \text{et} \quad e^{r_2}-e^{r_1}<\varepsilon\,.$$

Le premier couple d'inégalité ci-dessus entraîne
$$\left(1+\frac{r_1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{r_2}{n}\right)^n \tag{7.14}$$
pour tout $n\in\mathbb{N}$ si $x>0$, pour tout n assez grand si $x<0$ (il suffit d'avoir $n>|r_1|$ pour que les trois parenthèses ci-dessus soient >0). Par conséquent,
$$e^{r_1}\le \liminf_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le e^{r_2}\,,$$
d'où
$$0\le \limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \liminf_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \varepsilon\,.$$
Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on conclut que
$$\limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \liminf_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\,.$$
Ainsi, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ existe et l'on déduit de (7.14) que
$$e^{r_1}\le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le e^{r_2}$$
pour tout couple de rationnels r_1, r_2 tels que $r_1<x<r_2$. Il suffit alors d'invoquer à nouveau la continuité de e^x pour conclure la démonstration. ♦

7.3.4 Etude de la fonction exponentielle

Domaine de définition $\mathbb{R}$

Limites aux bornes du domaine Montrons que
$$\lim_{x\to\infty} e^x/x^\alpha = \infty\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\,.$$

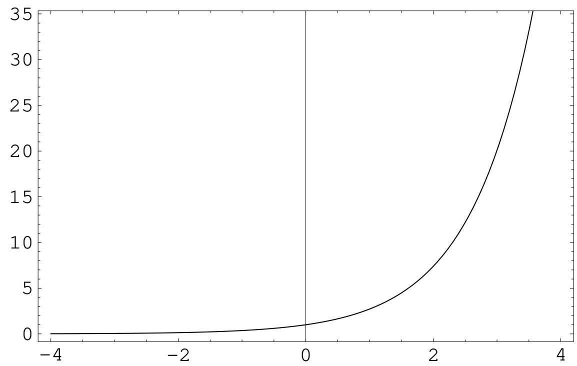

FIGURE 7.1 – Représentation graphique de la fonction exponentielle e^x .

— Si $\alpha > 0$, posons $n = [\alpha] + 1$. Alors pour $x > 0$ on a en utilisant (7.7) :

$$\frac{e^x}{x^\alpha} > \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \longrightarrow \infty \quad (x \to \infty)\,.$$

— Si $\alpha = 0$, $e^x > x \longrightarrow \infty \quad (x \to \infty)$, d'où

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,. \tag{7.15}$$

D'autre part, on a aussi

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,. \tag{7.16}$$

— Si $\alpha < 0$, il est évident que $\lim\limits_{x\to\infty} e^x/x^\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} e^x x^{-\alpha} = \infty$.

On exprime souvent cette propriété importante en disant que "l'exponentielle domine le polynôme".

Dérivées première et seconde Puisque

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \tag{7.17}$$

on a immédiatement que la fonction exponentielle est strictement croissante et strictement convexe. Notez que l'étude de la dérivée seconde n'est ici pas nécessaire dans la mesure où la croissance et les limites (7.15) et (7.16) suffisent à déterminer l'allure de la représentation graphique (Fig. 7.1).

7.3.5 Définition *(fonction logarithme naturel)*

La fonction exponentielle étant une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $(0, \infty)$, elle admet une fonction inverse continue notée

$$\begin{aligned} \ln :\ (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ x &\longmapsto \ln(x)\,, \end{aligned}$$

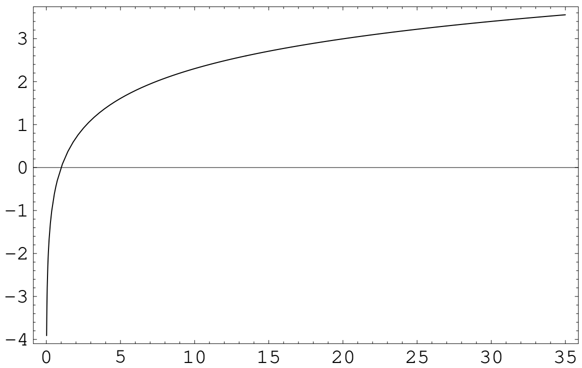

FIGURE 7.2 – Représentation graphique du logarithme naturel $\ln(x)$.

et appelée *logarithme naturel* (ou *népérien*).

En utilisant les identités

$$e^{\ln(x)} = x\,,\ \forall\, x \in (0,\infty)\,,$$

et

$$\ln(e^x) = x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

on obtient par des calculs simples les propriétés suivantes.

7.3.6 Proposition

(i) $\ln(1) = 0$ *et* $\ln(e) = 1$,

(ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *et* $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$, *pour tous* $x, y \in (0,\infty)$,

(iii) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$,

(iv) $\ln'(x) = 1/x$, *pour tout* $x \in (0,\infty)$.

Démonstration Laissée en exercice au lecteur. ♦

On déduit aisément des propriétés (iii) et (iv) la représentation graphique du logarithme (Fig. 7.2) que l'on pouvait aussi trouver directement en effectuant une symétrie d'axe $y = x$ à partir de celle de la fonction exponentielle.

Nous avons déjà utilisé plusieurs fois des fonctions puissance dans ce cours ; il est maintenant temps de les définir rigoureusement.

7.3.7 Définition *(fonction puissance)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la *fonction puissance* par

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}\,,\ \forall\, x \in (0,\infty)\,.$$

On a alors les propriétés suivantes.

7.3.8 Proposition

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *. Pour tous* $x, y > 0$ *, on a*

(i) $x^\alpha > 0$,

(ii) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$,

(iii) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$,

(iv) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$,

(v) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$,

(vi) $(x/y)^\alpha = x^\alpha / y^\alpha$,

(vii) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

(viii) Si $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ *, alors* x^α *est convexe.*

(ix) Si $\alpha \in (0, 1)$ *, alors* x^α *est concave.*

(x) Si $\alpha < 0$ *, alors* $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \infty$ *et* $\lim_{x \to \infty} x^\alpha = 0$ *.*

(xi) Si $\alpha > 0$ *, alors* $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ *et* $\lim_{x \to \infty} x^\alpha = \infty$ *.*

(xii) $\lim_{x \to \infty} \ln(x)/x^\alpha = 0$ *, pour tout* $\alpha > 0$,

(xiii) $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ *, pour tout* $\alpha > 0$ *.*

Démonstration Les propriétés (i)-(vii) se déduisent facilement des définitions.

(viii) Un simple calcul montre que si $f(x) = x^\alpha$, alors $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. Alors si $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, on va avoir que $\alpha(\alpha - 1) \geq 0 \;\Rightarrow\; f''(x) \geq 0$, d'où la convexité de f .

(ix) En revanche, si $\alpha \in (0, 1)$, on a que $f''(x) < 0$, ce qui montre que f est concave.

(x)-(xi) On a pour les limites en 0^+ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x^\alpha &= \lim_{x \to 0^+} e^{\alpha \ln(x)} \\ &= \lim_{y \to -\infty} e^{\alpha y} = \begin{cases} \infty, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

et pour les limites en ∞ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} x^\alpha &= \lim_{x \to \infty} e^{\alpha \ln(x)} \\ &= \lim_{y \to \infty} e^{\alpha y} = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ \infty, & \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(xii) En appliquant la règle de l'Hospital, on obtient, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{e^{\alpha \ln(x)}} = \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \to \infty} \frac{1}{e^{\alpha y}} = 0 .$$

(xiii) Finalement, la limite en 0^+ donne

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{y \to \infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\lim_{y \to \infty} \frac{\ln(y)}{y^\alpha} = 0 ,$$

ce qui achève la démonstration. ♦

7.3.9 Définition *(fonction exponentielle de base a)*

Soit $a > 0$. On définit la *fonction exponentielle de base* a par

$$a^x := (e^x)^{\ln(a)} = e^{x\ln(a)}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

La proposition suivante établit ses propriétés les plus importantes.

7.3.10 Proposition

Soit $a, b > 0$ *. Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *, on a*

(i) $a^x > 0$,

(ii) $a^0 = 1$,

(iii) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$,

(v) $\ln(a^x) = x\ln(a)$,

(vi) $(a^x)' = \ln(a)a^x$.

(vii) Si $0 < a < 1$ *, la fonction* a^x *est décroissante, convexe, et on a*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = 0\,.$$

De plus, pour $\alpha > 0$ *,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = 0\,.$$

(viii) Si $a > 1$ *, la fonction* a^x *est croissante, convexe, et on a*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty\,.$$

De plus, pour $\alpha > 0$ *,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty\,.$$

Démonstration Le lecteur montrera facilement cette proposition en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle de base e . ♦

Nous donnons à la figure 7.3 la représentation graphique de la fonction a^x pour différentes valeurs de a .

La fonction a^x étant soit strictement monotone décroissante, soit strictement monotone croissante, c'est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $(0, \infty)$. Il existe donc une fonction inverse continue notée

$$\begin{aligned} \log_a :\ (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ x &\longmapsto \log_a(x)\,, \end{aligned}$$

et appelée *logarithme de base* a .

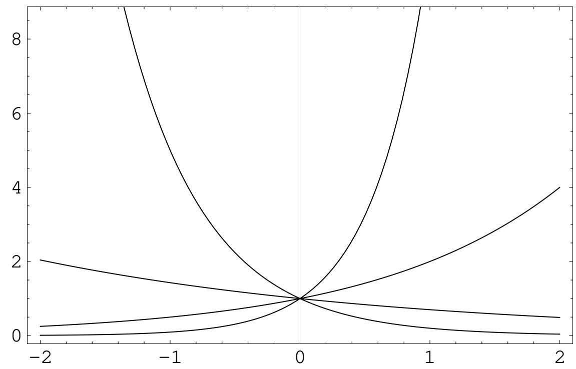

FIGURE 7.3 – Représentation graphique de la fonction a^x pour différentes valeurs de a (décroissante pour $a < 1$).

Pour $x > 0$, on a immédiatement que

$$y = \log_a(x) \iff x = a^y = e^{y\ln(a)} \iff \ln(x) = y\ln(a),$$

d'où

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \; x > 0. \tag{7.18}$$

A nouveau, la représentation graphique de la fonction $\log_a(x)$ se déduit de celle de a^x par une symétrie d'axe $y = x$.

7.3.11 Fonctions trigonométriques

En analyse complexe, on définit également la fonction exponentielle par

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \; \forall z \in \mathbb{C} \; (z = x + iy, \; i^2 = -1, \; x, y \in \mathbb{R}),$$

où la série converge absolument uniformément (au sens complexe, i.e. en remplaçant la valeur absolue par le module). Si l'on pose $z = ix$, pour $x \in \mathbb{R}$, on va avoir

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

où la permutation des termes est à nouveau justifiée par le lemme 3.3.1, ou plutôt par sa forme généralisée à l'analyse complexe.

Remarquant que $i^{2n} = (-1)^n$, et que $i^{2n+1} = (-1)^n i$, il vient

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{7.19}$$

On constate alors que les deux séries figurant dans le membre de droite de cette expression ne sont autres que les séries de Taylor des fonctions *cosinus* et *sinus*. Explicitement :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\,, \tag{7.20}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,, \tag{7.21}$$

résultat que l'on déduit aisément des considérations de la section 7.2 et de notre connaissance a priori des fonctions trigonométriques. (Notez qu'en vertu du Théorème 7.2.3 et de l'exemple 7.2.8 (iii) et (iv), les deux séries sont absolument uniformément convergentes, sur tout intervalle fermé.)

L'identité (7.19) s'écrit alors

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,. \tag{7.22}$$

Nous avons supposé jusqu'ici que le lecteur est familier avec la définition des fonctions trigonométriques “sur le cercle trigonométrique”, définition permettant d'obtenir les identités (7.20) et (7.21). Il est pourtant préférable, notamment en vue de généraliser à l'analyse complexe, de prendre pour définition les égalités (7.20) et (7.21), ou encore, ce qui est équivalent,

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\,, \\ \sin(x) &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\,,\ x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Notez que ces définitions, introduites par Euler, permettent de s'affranchir de toute considération géométrique.

Nous laissons au lecteur, s'il le souhaite, le soin de faire une étude détaillée des fonctions cosinus et sinus, dont nous donnons les représentations graphiques (Fig. 7.4-5), ainsi que celle de la fonction *tangente* (Fig. 7.6) définie par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{(k+1)\pi}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

7.3.12 Fonctions hyperboliques

Nous définissons les fonctions hyperboliques *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* par

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\,, \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\,,\ x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

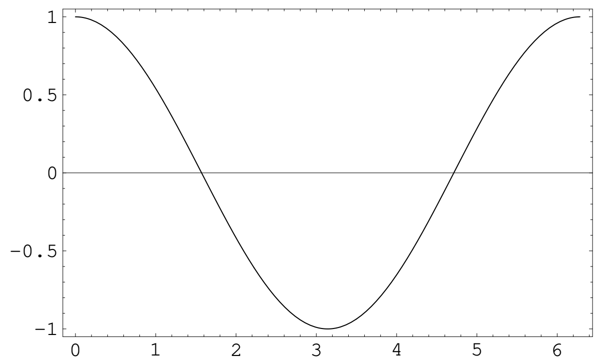

FIGURE 7.4 – Représentation graphique de la fonction $\cos(x)$.

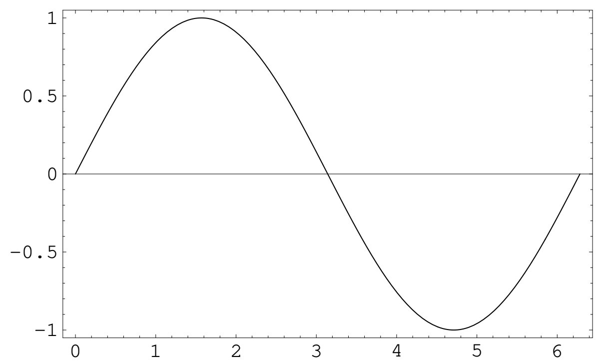

FIGURE 7.5 – Représentation graphique de la fonction $\sin(x)$.

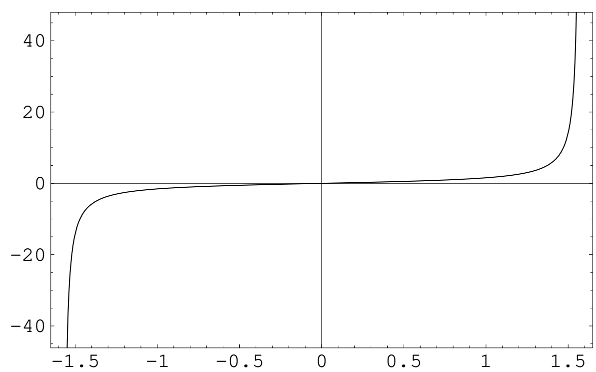

FIGURE 7.6 – Représentation graphique de la fonction $\tan(x)$.

La *tangente hyperbolique* est alors définie par $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous avons les analogies suivantes avec les fonctions trigonométriques :

$\cos'(x) = -\sin(x)$	$\cosh'(x) = \sinh(x)$
$\sin'(x) = \cos(x)$	$\sinh'(x) = \cosh(x)$
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$(a\cos(t), b\sin(t))$ "ellipse"	$(a\cosh(t), b\sinh(t))$ "hyperbole"

7.3.13 Etude de la fonction $\sinh(x)$

Domaine de définition $\mathbb{R}$

Parité La fonction est impaire. On l'étudie donc sur $[0, \infty)$.

Limites aux bornes du domaine

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \infty$$

Dérivées première et seconde On a que $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui montre que $\sinh(x)$ est strictement croissante.

D'autre part, $\sinh''(x) = (\sinh'(x))' = (\cosh(x))' = \sinh(x)$, et on a donc un unique point d'inflexion en $\sinh(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. En remarquant que

$$\sinh(1) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\frac{e^2 - 1}{e} > 0\,,$$

on en déduit que $\sinh(x) > 0$, pour tout $x > 0$. Ainsi $\sinh(x)$ est convexe sur $(0, \infty)$.

Remarquons encore que $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$, ce qui montre que la tangente à l'origine est d'équation $y = x$.

Ces considérations permettent d'établir la représentation graphique donnée à la figure 7.7.

Puisque $\sinh(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une fonction inverse notée

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ x &\longmapsto \operatorname{argsinh}(x)\,, \end{aligned}$$

et caractérisée par

$$y = \operatorname{argsinh}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \sinh(y) = x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

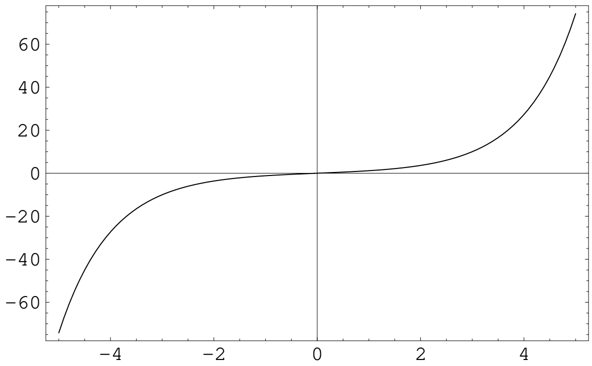

FIGURE 7.7 – Représentation graphique de la fonction $\sinh(x)$.

De la formule (5.3) donnant la dérivée de la fonction inverse, on obtient

$$\operatorname{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \ x \in \mathbb{R}\,,$$

qui est analogue à $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ (exemple 5.1.9 (iii)).

7.3.14 Etude de la fonction $\cosh(x)$

Domaine de définition $\mathbb{R}$

Parité La fonction est paire. On l'étudie donc sur $[0, \infty)$.

Limites aux bornes du domaine

$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \infty$$

Dérivées première et seconde De $\cosh'(x) = \sinh(x)$ et $\cosh''(x) = \cosh(x)$, on déduit que $\cosh(x)$ et strictement convexe et strictement croissante sur $[0, \infty)$.

Notant encore que $\cosh(0) = 1$ est le minimum de la fonction, on donne sa représentation graphique à la figure 7.8.

La fonction $\cosh\ :\ [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ étant bijective, elle admet une fonction inverse, notée

$$\begin{aligned} \operatorname{argcosh} :\ [1, \infty) &\longrightarrow [0, \infty)\,, \\ x &\longmapsto \operatorname{argcosh}(x)\,, \end{aligned}$$

et définie par

$$y = \operatorname{argcosh}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \cosh(y) = x\,,\ \forall\, x \in [1, \infty)\,.$$

On trouve pour la dérivée

$$\operatorname{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\ x \in [1, \infty)\,.$$

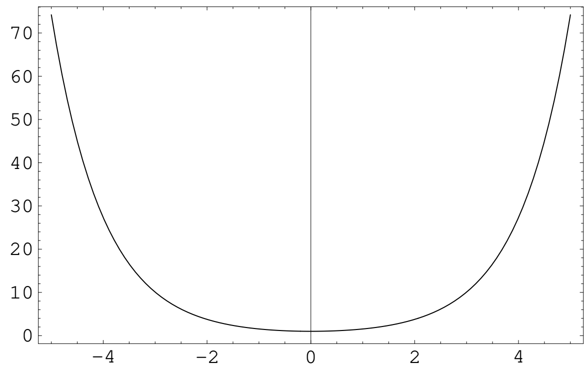

FIGURE 7.8 – Représentation graphique de la fonction $\cosh(x)$.

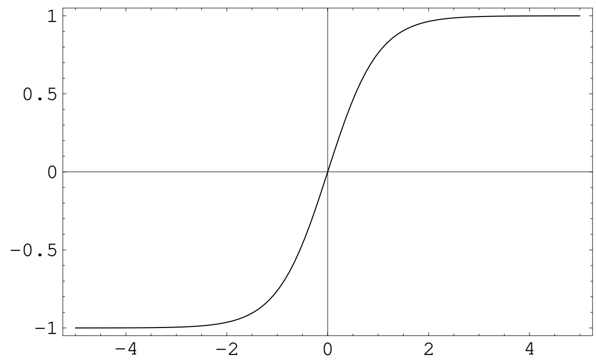

FIGURE 7.9 – Représentation graphique de la fonction $\tanh(x)$.

7.3.15 Etude de la fonction $\tanh(x)$

Domaine de définition $\mathbb{R}$

Parité La fonction est impaire. On l'étudie donc sur $[0, \infty)$.

Limites aux bornes du domaine

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

Dérivées première et seconde Puisque

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = 1/\cosh^2(x) > 0\,,\ \forall\, x \in [0, \infty)\,,$$

on a que $\tanh(x)$ est strictement croissante sur ce domaine. (Notez que l'existence d'une asymptote horizontale nous dispense ici de l'étude de la dérivée seconde.) D'autre part, on une tangente à l'origine d'équation $y = x$.

On obtient immédiatement la représentation graphique de $\tanh(x)$ (Fig. 7.9).

Puisque $\tanh(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$, il existe une fonction inverse notée

$$\begin{aligned} \operatorname{argtanh} : [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ x &\longmapsto \operatorname{argtanh}(x)\,, \end{aligned}$$

et définie par

$$y = \operatorname{argtanh}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \tanh(y) = x\,,\ \forall\, x \in [-1,1]\,.$$

Sa dérivée est donnée par

$$\operatorname{argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,,\ x \in [1,\infty)\,. \tag{7.23}$$

On peut exprimer les fonctions hyperboliques inverses en fonction du logarithme naturel.

7.3.16 Proposition

(i) $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,,$

(ii) $\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})\,,$

(iii) $\operatorname{argtanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

Démonstration Nous donnons la démonstration de (i), les autres formules s'établissant de manière analogue. Pour $y \in \mathbb{R}$, posons $y = \operatorname{argsinh}(x) \Leftrightarrow x = \sinh(y)$ et $u = e^y$, d'où $x = (u - 1/u)/2$. Résolvant par rapport à u, il vient

$$\begin{aligned} & x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \\ \Longleftrightarrow\ & u^2 - 2xu - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (u-x)^2 = 1 + x^2 \\ \Longleftrightarrow\ & u = x \pm \sqrt{1+x^2}\,. \end{aligned}$$

Mais comme $u = e^y > 0$, on choisit la solution positive, d'où

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,.$$

Ainsi, $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. ♦

Chapitre 8

Intégration

La nécessité d'une théorie rigoureuse de l'intégration est apparue suite à un certain nombre de problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique. Il était notamment question de développer une théorie indépendante de la notion de dérivée. Nous présentons ici la théorie dite de l'intégrale de Riemann, dont les idées essentielles ont été introduites dans la première moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle par Cauchy et Riemann.

Par la suite (début XX$^{\text{ème}}$), une théorie plus générale a été développée par Lebesgue, dont le but initial était de résoudre le problème que la théorie de Cauchy-Riemann avait soulevé : celui de la dérivation de l'intégrale, considérée comme fonction de la borne supérieure d'intégration. Lebesgue donne un nom, celui d'ensemble de mesure nulle, au phénomène que Riemann avait rencontré : une fonction est intégrable au sens de Riemann si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure (de Lebesgue) nulle. Le concept d'ensemble de mesure nulle est au coeur de la théorie de Lebesgue, théorie majoritairement utilisée en mathématique et en physique mathématique. Ce sujet d'étude, lié à la théorie de la mesure, sort du cadre de ce cours. Néanmoins, nous mentionnerons çà et là dans le texte l'importance de ces idées en comparaison avec la théorie développée ici. Dans la pratique, lorsqu'il s'agit de calculer des intégrales, c'est souvent la théorie de Riemann qui s'avère utile, mais du point de vue conceptuel, la théorie de Lebesgue est plus profonde car fortement liée à la théorie de la classification des fonctions et des ensembles, principalement développée par Baire et Borel fin XIX$^{\text{ème}}$ - début XX$^{\text{ème}}$. Ces sujets pourront être étudiés dans des cours d'analyse plus avancés. Le présent chapitre, qui se focalise sur l'intégrale de Riemann, vous propose une première théorie rigoureuse de l'intégration.

8.1 Intégrale définie

La notion d'intégrale définie est un outil puissant permettant notamment de calculer des longueurs d'arcs, des aires et des volumes. Elle intervient essentiellement dans toute théorie physique et permet, pour ne citer que quelques exemples élémentaires, de calculer le travail d'une force connaissant la dynamique du système, le flux d'un champ magnétique à travers une surface ou encore l'expression du champ électrique en tout point connaissant la distribution de charges. Elle a également une importance fondamentale en théorie des probabilités et dans nombre de domaines des mathématiques pures.

8.1.1 Définition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle *subdivision* de $[a,b]$ une collection ordonnée finie de réels $(x_0, x_1, ..., x_n)$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\,.$$

On notera

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,, \quad i = 1, ..., n\,.$$

Soit maintenant $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On associe à chaque subdivision σ de $[a,b]$ les nombres

$$m_i = \inf\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,,$$

$$M_i = \sup\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,,$$

$$\underline{S}(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \qquad \overline{S}(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i\,.$$

$\underline{S}(f,\sigma)$ et $\overline{S}(f,\sigma)$ sont respectivement appelés *sommes de Darboux inférieure et supérieure* associées à la partition σ. On définit alors

$$\underline{S} = \sup \underline{S}(f,\sigma) \qquad \overline{S} = \inf \overline{S}(f,\sigma)\,,$$

le supremum et l'infimum étant pris sur toutes les subdivisions σ de $[a,b]$.

Dans le cas où ces deux nombres sont égaux, on dit que f est *intégrable au sens de Riemann* ou *Riemann-intégrable* sur $[a,b]$, et on note

$$\int_a^b f\,, \tag{8.1}$$

ou encore

$$\int_a^b f(x)dx\,, \tag{8.2}$$

la valeur commune de $\underline{S} = \overline{S}$. Ce nombre est alors appelé l'*intégrale de Riemann* de f sur $[a,b]$.

Avant de poursuivre, il convient de fournir quelques précisions sur les notations. Notre préférence va à (8.1) plutôt qu'à (8.2), la lettre x apparaissant dans (8.2) comme argument de la fonction n'amenant rien de plus à la signification de (8.1). Il s'agit d'une variable "muette" utilisée pour représenter ce qu'on appelle la "variable d'intégration". Par exemple (8.2) est identique à

$$\int_a^b f(y)dy\,.$$

On écrit aussi parfois $\int_a^b f dx$ au lieu de $\int_a^b f(x)dx$. L'intégrale dépend de f, a et b mais pas de la variable d'intégration, qui peut donc aussi bien n'être précisée que dans le dx représentant un "petit élément de longueur" Δx.

Le rôle joué par cette variable d'intégration est analogue à celui que tient l'indice de sommation. Les deux écritures

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k$$

signifient la même chose, chacune représentant la somme $a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Notons que puisque f est bornée, il existe deux réels m et M tels que

$$m \leq f(x) \leq M\,,\ \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Ainsi, pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f,\sigma) \leq \overline{S}(f,\sigma) \leq M(b-a)\,,$$

ce qui montre que les quantités $\underline{S}$ et $\overline{S}$ sont finies. En revanche, la question de savoir si elles coïncident est beaucoup plus délicate. Nous allons démontrer une condition suffisante d'intégrabilité de f sur $[a,b]$, pour toute fonction bornée f, à savoir : f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si elle est continue. On peut montrer de façon plus générale que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité. Le problème de trouver une condition nécessaire et suffisante est résolu dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Lebesgue et on a que les fonctions Riemann-intégrables sont exactement les fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité est de mesure (de Lebesgue) nulle. On dit dans ce cas que f est continue *presque partout*. Les exemples les plus triviaux d'ensembles de mesure nulle sont les ensembles *au plus dénombrables*, i.e. finis ou dénombrables. Cependant, il existe des ensembles de mesure nulle non-dénombrables et, dans ce contexte, la théorie de Lebesgue s'impose naturellement.

Pour ce qui nous concerne, nous garderons à l'esprit que, pour l'intégrale de Riemann, "un nombre fini de points n'importe pas". D'autre part, dans ce qui suit, nous dirons simplement intégrable pour Riemann-intégrable.

8.1.2 Définition

Etant donné deux subdivisions σ et τ d'un même segment $[a,b]$, on dit que τ est *plus fine* que σ si $\tau \supset \sigma$, autrement dit, si tout point de σ est un point de τ. Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions, leur réunion est notée $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

8.1.3 Lemme

Si τ est plus fine que σ, alors

$$\underline{S}(f,\sigma) \leq \underline{S}(f,\tau) \tag{8.3}$$

et

$$\overline{S}(f,\tau) \leq \overline{S}(f,\sigma)\,. \tag{8.4}$$

Démonstration Pour établir (8.3), supposons d'abord que τ contienne seulement un point de plus que σ. Notons ce point supplémentaire $\tilde{x}$ et supposons le strictement compris entre deux points consécutifs x_{i-1} et x_i de σ. On pose alors

$$w_1 = \inf\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1}, \tilde{x}]\}\,,$$

$$w_2 = \inf\{f(x)\,;\ x \in [\tilde{x}, x_i]\}\,.$$

On a clairement $w_1 \geq m_i$ et $w_2 \geq m_i$, où m_i est défini comme ci-dessus. On obtient donc dans la différence $\underline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\sigma)$ seulement trois termes non nuls :

$$w_1(\tilde{x} - x_{i-1}) + w_2(x_i - \tilde{x}) - m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= (w_1 - m_i)(\tilde{x} - x_{i-1}) + (w_2 - m_i)(x_i - \tilde{x}) \geq 0\,.$$

Si τ contient k points de plus que σ, on répète k fois ce raisonnement pour aboutir à (8.3). On démontre (8.4) de façon analogue. ♦

8.1.4 Proposition

$$\underline{S} \leq \overline{S}$$

Démonstration Notons σ la réunion de deux subdivisions σ_1 et σ_2. Le théorème précédent montre que

$$\underline{S}(f,\sigma_1) \leq \underline{S}(f,\sigma) \leq \overline{S}(f,\sigma) \leq \overline{S}(f,\sigma_2)\,,$$

d'où

$$\underline{S}(f,\sigma_1) \leq \overline{S}(f,\sigma_2)\,. \tag{8.5}$$

Pour σ_2 fixé, prenant dans (8.5) le sup sur tous les σ_1, il vient

$$\underline{S} \leq \overline{S}(f,\sigma_2)\,. \tag{8.6}$$

On conclut en prenant dans (8.6) l'inf sur tout les σ_2. ♦

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section.

8.1.5 Théorème

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $\eta > 0$ tel que

$$(b-a)\eta < \varepsilon\,.$$

Le théorème de la continuité uniforme (4.5.4) nous dit que f est uniformément continue sur $[a,b]$ et il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$x, y \in [a,b] \text{ et } |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \eta\,. \tag{8.7}$$

Si σ est une subdivision de $[a,b]$ telle que $\Delta x_i < \delta$ pour tout i, alors (8.7) implique que

$$M_i - m_i \leq \eta\,, \quad i = 1, ..., n\,,$$

et donc

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \leq \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \eta(b-a) < \varepsilon\,.$$

Alors les inégalités

$$\underline{S}(f,\sigma) \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}(f,\sigma)$$

impliquent que

$$\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon\,.$$

Le nombre ε pouvant être choisi arbitrairement petit, ceci achève la démonstration. ♦

8.1.6 Théorème

(i) Si f, f_1 et f_2 sont Riemann-intégrables, alors $f_1 + f_2$ et cf le sont aussi, pour toute constante c. De plus,

$$\int_a^b (f_1 + f_2)dx = \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx\,,$$

et

$$\int_a^b cf dx = c\int_a^b f dx\,.$$

(ii) Si $f_1 \leq f_2$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f_1 dx \leq \int_a^b f_2 dx\,.$$

(iii) Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $a < c < b$, alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx\,.$$

(iv) Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $|f(x)| \leq M$,alors

$$\left|\int_a^b f dx\right| \leq M(b-a)\,.$$

Démonstration Il découle des définitions que si $f = f_1 + f_2$ et si σ est une subdivision de $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned} \underline{S}(f_1,\sigma) + \underline{S}(f_2,\sigma) \ \leq \ \underline{S}(f,\sigma) \ &\leq \ \overline{S}(f,\sigma) \\ &\leq \ \overline{S}(f_1,\sigma) + \overline{S}(f_2,\sigma)\,. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Si f_1 et f_2 sont intégrables, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe deux subdivisions σ_1 et σ_2 telles que

$$\overline{S}(f_j, \sigma_j) - \underline{S}(f_j, \sigma_j) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, 2\,.$$

Ces inégalités sont encore satisfaites si on remplace σ_1 et σ_2 par leur réunion σ. Alors les inégalités (8.8) impliquent

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) < \varepsilon\,,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de f.

Considérant la même subdivision σ, on va avoir

$$\overline{S}(f_j, \sigma) < \int f_j dx + \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, 2\,,$$

et (8.8) implique

$$\int f dx \leq \overline{S}(f, \sigma) < \int f_1 dx + \int f_2 dx + \varepsilon\,.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant quelconque, on conclut que

$$\int f dx \leq \int f_1 dx + \int f_2 dx\,.$$

On démontre l'inégalité inverse en remplaçant f_1 et f_2 par $-f_1$ et $-f_2$, ce qui achève de prouver la première partie du point (i).

Les autres assertions du théorème se démontrant de façon analogue, elles sont laissées au soin du lecteur. Pour démontrer (iii), il suffit de ne considérer que des subdivisions contenant le point c. ♦

8.1.7 Remarque

(i) On montre aisément, à l'aide de la partie (i) du théorème 8.1.6, que les fonctions intégrables forment un espace vectoriel réel. En particulier, la classe des fonctions continues en sont un sous-espace vectoriel.

(ii) La partie (iii) du théorème 8.1.6 suggère de définir $\int_b^a f dx$, même si $a < b$, de la façon suivante :

$$\int_a^b f dx + \int_b^a f dx = \int_a^a f dx = 0\,,$$

d'où

$$\int_b^a f dx = -\int_a^b f dx\,,$$

l'idée sous-jacente étant que l'on parcourt l'intervalle $[a, b]$ "en sens inverse", d'où le changement de signe. La notion de sens de parcours prend toute son importance en analyse vectorielle, dans la théorie des intégrales curvilignes.

(iii) Notons que pour une fonction f positive et intégrable sur un segment $[a, b]$, on peut interpréter géométriquement $\int_a^b f dx$ comme étant l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe $y = f(x)$, l'axe $y = 0$ et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Dans cet ordre d'idée, il apparaît clairement que pour toute fonction f impaire,

$$\int_{-a}^{a} f dx = 0\,,$$

et, pour toute fonction g paire,

$$\int_{-a}^{a} g dx = 2 \int_{0}^{a} g dx\,.$$

Ces résultats sont une conséquence immédiate du théorème du changement de variable qui sera présenté ultérieurement.

8.1.8 Théorème

(i) Si f est intégrable, alors $|f|$ l'est aussi et

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx\,, \tag{8.9}$$

(ii) Si f est continue sur $[a, b]$ et telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et si $\int_a^b f dx = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $[a, b]$.

(iii) Si f et g sont continues, alors f^2, g^2 et fg sont intégrables, et

$$\left(\int_a^b f g dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx\,. \tag{8.10}$$

De plus, on a égalité dans (8.10) si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f = \mu g$.

Démonstration Les seules assertions non triviales sont le point (ii) et les inégalités (8.9) et (8.10). Pour démontrer (8.9), choisissons $c = \pm 1$ de sorte que

$$c \int f dx \geq 0\,.$$

Alors

$$\left| \int f dx \right| = c \int f dx = \int c f dx \leq \int |f| dx\,,$$

puisque $cf \leq |f|$.

Nous prouvons (ii) par contraposition. Supposons que f est continue et qu'il existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tel que $f(\tilde{x}) > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, la continuité de f implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in [a, b] \text{ et } |x - \tilde{x}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon\,.$$

On obtient alors que

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{\tilde{x}-\delta}^{\tilde{x}+\delta} f(x)dx \geq 2\delta(f(\tilde{x}) - \varepsilon)\,. \tag{8.11}$$

Le nombre ε pouvant être choisi arbitrairement petit, (8.11) implique

$$\int_a^b f(x)dx > 0\,.$$

Si $a = b$ ou si l'une des deux fonctions f, g est identiquement nulle, (8.10) est évident. Supposons donc, sans perte de généralité, que $a < b$ et que $f, g \not\equiv 0$. Posons alors

$$A = \int g^2 dx\,, \quad B = 2\int fg dx\,, \quad C = \int f^2 dx\,,$$

et considérons le polynôme dans la variable $\lambda \in \mathbb{R}$ défini par

$$P(\lambda) = \int (f + \lambda g)^2 dx = A\lambda^2 + B\lambda + C\,.$$

Clairement, $P(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc le discriminant $\Delta = B^2 - 4AC \leq 0$, ce qui est précisément l'inégalité (8.10). De plus, si l'on a égalité dans (8.10), alors $\Delta = 0$ et $P(-B/2A) = 0$, ce qui s'écrit

$$\int_a^b \left(f - \frac{B}{2A}g\right)^2 dx = 0\,.$$

Par le point (ii), ceci implique alors que $f - (\frac{B}{2A})g$ sur $[a, b]$. ♦

8.1.9 Remarque

Le théorème 8.1.8 (iii) est connu sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz et montre que l'on peut définir un *produit scalaire* sur l'espace vectoriel $C^0([a, b], \mathbb{R})$ de la façon suivante. A chaque couple de fonctions continues (f, g), associons le nombre réel

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b fg dx\,.$$

On définit ainsi une application de $C^0([a, b], \mathbb{R}) \times C^0([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ dont on vérifie aisément qu'elle est bilinéaire (linéaire dans les deux arguments), symétrique ($\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$) et positive définie, i.e. $\langle f, f\rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si $f = 0$.

Notez que nous écrivons ici $f = 0$ au lieu de $f \equiv 0$ pour indiquer l'élément neutre de l'espace vectoriel, qui est la fonction identiquement nulle.

Notre prochain résultat est la version calcul intégral du théorème des accroissements finis (corollaire 5.2.4).

8.1.10 Théorème de la moyenne

Si f *est continue sur* $[a,b]$, $a<b$, *alors il existe* $\tilde{x}\in[a,b]$ *tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx = f(\tilde{x})\,. \tag{8.12}$$

Démonstration Posons

$$m=\min\{f(x)\,;\ x\in[a,b]\}$$

et

$$M=\max\{f(x)\,;\ x\in[a,b]\}\,.$$

Il suffit alors de constater que

$$\begin{aligned} & m\le f(x)\le M \quad \forall\, x\in[a,b] \\ \Longrightarrow\quad & m(b-a)\le \int_a^b f\,dx\le M(b-a) \\ \Longrightarrow\quad & m\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx\le M \end{aligned}$$

et d'utiliser le théorème de la valeur intermédiaire (4.4.2) pour conclure. ♦

8.1.11 Remarque

Le membre de gauche de (8.12) s'appelle la *moyenne de* f *sur* $[a,b]$.

8.2 Intégrale indéfinie, théorème fondamental

Nous allons à présent établir le lien entre les notions d'intégrale définie et de dérivée. On dit souvent que l'intégration est l' "opération inverse" de la dérivation, en un sens qui sera précisé dans cette section. Le théorème majeur qui décrit la relation entre les deux concepts est connu sous le nom de *théorème fondamental de l'analyse*. Nous verrons que le concept de primitive, "antiderivative", comme disent explicitement les anglophones, permet dans la pratique de calculer la valeur de certaines intégrales définies.

8.2.1 Motivation

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, définissons une nouvelle fonction F par

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\,,\ x\in[a,b]\,. \tag{8.13}$$

Notez qu'il est commode ici d'introduire explicitement la variable d'intégration t pour éviter toute confusion avec la variable x.

Nous avons alors que

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt\,.$$

Ainsi, par le théorème de la moyenne, il existe un point $\tilde{x}$ entre x et $x+h$ tel que

$$F(x+h) - F(x) = hf(\tilde{x})\,.$$

Posant $\tilde{x} = x + \theta h$, $\theta \in [0,1]$, on obtient que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x+\theta h) = f(x)\,,$$

par continuité de f. Ceci montre que la fonction F satisfait la relation fondamentale

$$F'(x) = f(x)\,.$$

8.2.2 Définition

Soit f une fonction définie sur $D(f) \subset \mathbb{R}$. On dit que la fonction F est une *primitive* de f si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in D(f)$. On appelle *intégrale indéfinie* de f et on note

$$\int f dx$$

l'ensemble de toutes les primitives de f sur le domaine $D(f)$.

8.2.3 Proposition

Soit f une fonction définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

(i) Si F est une primitive de f sur E, alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est aussi une primitive de f sur E.

(ii) Supposons maintenant f continue et que E est un intervalle. Si F et G sont deux primitives de f sur E, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F = G + c$.

Démonstration (i) est trivial. Pour prouver (ii), observons que $F' = G'$ sur E ssi $(F-G)' = 0$ sur E. Comme E est un intervalle, il existe une unique constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F - G = c$. ♦

8.2.4 Remarque

Le point (ii) de la proposition 8.2.3 est mis en défaut si E n'est pas un intervalle. On peut le voir en considérant l'exemple suivant : $E = [0,1] \cup [2,3]$ et $f \equiv 0$ sur E. Alors, les fonctions F et G définies sur E par

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1]\,, \\ 1\,, & x \in [2,3]\,, \end{cases}$$

et $G \equiv 0$ satisfont $F' \equiv G' \equiv 0$ sur E, mais elles diffèrent d'une constante différente sur les intervalles $[0,1]$ et $[2,3]$. (Ceci vient du fait que le domaine E n'est pas *connexe*...)

8.2.5 Théorème fondamental

Si f est continue sur $[a,b]$ et que F est une primitive de f sur cet intervalle, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

Démonstration Nous avons vu au paragraphe 8.2.1 que la fonction G définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt\,,\ x \in [a,b]\,,$$

est une primitive de f sur le domaine $[a,b]$. Ainsi, pour toute primitive F de f sur $[a,b]$, il existe une constante c telle que $F = G + c$. Alors,

$$F(b) - F(a) = G(b) + c - G(a) - c = G(b) - G(a)$$

$$= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx\,. \ \blacklozenge$$

8.2.6 Remarque

(i) Le théorème est, dans la pratique, un outil puissant permettant de calculer de nombreuses intégrales définies.

(ii) Il est important d'être au clair sur la différence entre intégrale définie et intégrale indéfinie : l'intégrale définie $\int_a^b f dx$ est un nombre qui dépend de f et des bornes d'intégration a, b, alors que l'intégrale indéfinie $\int f dx$ est une famille de primitives de f, i.e. une famille de fonctions définies sur $D(f)$.

(iii) Notez que, quel que soit le nombre $\tilde{a} \in [a,b]$, la fonction $\tilde{G}(x) = \int_{\tilde{a}}^x f(t)dt$ est une primitive de f. En effet, $\int_{\tilde{a}}^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{\tilde{a}} f(t)dt$ ce qui montre que les deux fonctions G et $\tilde{G}$ ne diffèrent que d'une constante.

(iv) Bien que toute fonction continue admette une intégrale indéfinie dont un représentant est donné par (8.13), il n'est pas toujours possible d'exprimer cette primitive au moyen des fonctions élémentaires, même si c'est le cas pour la fonction considérée. Ainsi la fonction $f(x) = \exp(-x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de primitive pouvant être écrite en termes d'exponentielles, logarithmes ou de fonctions trigonométriques ou polynomiales. C'est aussi le cas, par exemple, de la fonction g définie par $g(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$, qui, comme nous l'avons vu, est bien continue sur $\mathbb{R}$. Néanmoins, il existe d'autres méthodes permettant de calculer des intégrales faisant intervenir ces fonctions.

8.3 Techniques d'intégration

Pour utiliser en pratique le théorème fondamental, il est nécessaire de pouvoir rechercher efficacement les primitives des fonctions concernées. L'exercice revient à faire l'opération inverse de la dérivation : chercher une fonction dont la dérivée est une fonction donnée. Pour dériver, nous avons une série de règles à appliquer directement. En revanche, la démarche dite d'intégration demande de l'imagination, de l'habileté technique, beaucoup d'entraînement et surtout, une connaissance approfondie des fonctions élémentaires et de leurs dérivées, de sorte à pouvoir identifier les "dérivées évidentes". On n'arrive pas toujours, en pratique, à identifier au premier coup d'oeil la fonction figurant sous le signe intégrale comme étant la dérivée d'une fonction connue. Heureusement, des techniques existent pour nous aider à nous frayer un chemin dans la recherche de primitive.

8.3.1 Proposition *(intégration par partie)*

Soit u et v deux fonctions continûment dérivables sur un domaine commun E. Nous avons alors la relation suivante entre la primitive de $u'v$ et celle de uv' :

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx\,. \tag{8.14}$$

D'autre part, si $[a,b] \subset E$, on a

$$\int_a^b uv'dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'vdx\,. \tag{8.15}$$

Démonstration En supposant que u' et v' sont continues, il suffit pour obtenir (8.14) d'intégrer les deux membres de la formule donnant la dérivée d'un produit de fonctions. Puis (8.15) découle de (8.14) par le théorème fondamental. ♦

8.3.2 Exemple

(i) Cherchons la primitive de $f(x) = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. On applique (8.14) avec

$$u(x) = \arctan(x)\,, \quad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad v'(x) = 1\,, \quad v(x) = x\,.$$

(Noter que $v'(x) = 1$ entraîne $v(x) = x + c$ mais que nous avons posé $c = 0$ ci-dessus. Pouvez-vous justifier qu'on ne perd ainsi pas de généralité ?)
Il vient alors

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,,$$

où la dernière égalité se trouve par identification d'une dérivée évidente sous le signe intégral du membre de gauche.

(ii) Pour donner un autre exemple d'application de la proposition 8.3.1, nous allons établir la formule de Taylor ainsi qu'une expression pour le reste du développement limité, appelée *forme intégrale* du reste. Supposons que f soit une fonction au moins $n+1$ fois continûment différentiable sur un certain voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Pour tout x dans ce voisinage, nous pouvons écrire

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt\,.$$

En appliquant la formule (8.15) aux fonctions

$$\begin{aligned} u(t) = f'(t) \quad &\Longrightarrow \quad u'(t) = f''(t)\,, \\ v'(t) \equiv 1 \quad &\Longrightarrow \quad v(t) = t\,, \end{aligned}$$

nous trouvons que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \\ &= f(a) + tf'(t)\Big|_a^x - \int_a^x tf''(t)dt \\ &= f(a) + xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + x\underbrace{\left(f'(x) - f'(a)\right)}_{=\int_a^x f''(t)dt} - \int_a^x tf''(t)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt\,. \end{aligned}$$

Afin d'évaluer cette nouvelle intégrale, appliquons à présent la proposition 8.2.9 aux fonctions

$$\begin{aligned} u(t) = f''(t) \quad &\Longrightarrow \quad u'(t) = f'''(t)\,, \\ v'(t) = x - t \quad &\Longrightarrow \quad v(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2\,. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_a^x - \int_a^x (-1/2)(x-t)^2 f'''(t)dt\right] \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)dt\,. \end{aligned}$$

En procédant par induction, on obtient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\,. \end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a-\delta, a+\delta]$. Donc il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta]$,

$$\left|\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| \leq \max_{t\in[a-\delta,a+\delta]} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \left|\int_a^x (x-t)^n dt\right| \leq C|x-a|^{n+1}\,,$$

d'où $\displaystyle\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = o(|x-a|^n)\,.$

La deuxième méthode d'intégration que nous présentons ici est celle du changement de variable. Commençons par motiver la démarche au travers d'un exemple. Si l'on considère la fonction

$$f(x) = \ln(\ln(x))\,,\ x > 1\,, \tag{8.16}$$

un calcule simple montre que

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}\,,\ x > 1\,. \tag{8.17}$$

En revanche, étant donné la fonction f' définie par (8.17), il n'est pas du tout évident au premier abord de remarquer que c'est la dérivée de la fonction (8.16). Une technique très puissante consiste à changer la variable d'intégration, de sorte à faire apparaître une expression plus maniable. Posons, pour $x > 1$,

$$t = \ln(x)\,, \quad \text{d'où} \quad x = e^t \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = e^t \quad \Longrightarrow \quad dx = e^t dt\,.$$

L'intégrale indéfinie de la fonction f' est donnée par

$$\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x\ln(x)}dx\,,$$

et elle s'écrit, en termes de la nouvelle variable t,

$$\int \frac{1}{te^t}e^t dt = \int \frac{dt}{t} = \ln(t) + c\,,$$

où la lettre c désigne une *constante d'intégration* arbitraire. Nous avons donc trouvé simplement une *primitive auxiliaire*, fonction de notre nouvelle variable d'intégration. Pour donner l'intégrale indéfinie de la fonction initiale, il suffit de revenir à la variable x en utilisant la relation $t = \ln(x)$, et l'on trouve donc

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \ln(\ln(x)) + c\,,\ x > 1\,.$$

Nous allons maintenant présenter le théorème du changement de variable qui établit rigoureusement comment mettre en pratique ces idées de façon générale, et les appliquer au calcul d'intégrales définies. Après quoi nous donnerons quelques exemples typiques permettant au lecteur de se familiariser avec l'exercice. Il est important de réaliser que seul un entraînement conséquent permet d'être à l'aise avec les différentes techniques d'intégration ; nous entendons par là qu'il faut avoir calculé plusieurs centaines d'intégrales indéfinies faisant intervenir des intégrations par parties et autres changements de variable avant d'avoir le sentiment de maîtriser cet exercice.

Dans ce qui suit, nous considérons I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, ainsi que deux points $A, B \in J$, $A < B$.

8.3.3 Définition

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle *difféomorphisme de classe* C^k (ou C^k*-difféomorphisme*) de J dans I toute application $\varphi: J \longrightarrow I$ bijective, de classe C^k, telle que φ^{-1} est également de classe C^k. On dira simplement que φ est un difféomorphisme s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que φ est un C^k-difféomorphisme.

8.3.4 Proposition

Soit $\varphi: J \longrightarrow I$ *un difféomorphisme. Alors* $\varphi'(t) \neq 0$ *pour tout* $t \in J$.

Démonstration Puisque φ^{-1} et φ sont toutes deux dérivables, l'identité

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(t))\varphi'(t) = 1, \quad t \in J,$$

donne immédiatement le résultat. ♦

La proposition précédente donne un avant-goût du théorème de la fonction inverse (ou plutôt d'une réciproque) qui sera vu en analyse 2 au semestre prochain.

8.3.5 Théorème *(changement de variable)*

Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ *un* C^1*-difféomorphisme et* f *une fonction continue sur l'intervalle* $\varphi([A, B])$. *Posant* $a = \varphi(A)$ *et* $b = \varphi(B)$, *on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

On se référera parfois à ce résultat par l'acronyme "TCV".

8.3.6 Remarque

(i) Remarquons que φ est une bijection de l'intervalle $[A, B]$ sur l'intervalle $[\varphi(A), \varphi(B)]$ si $\varphi' > 0$, sur $[\varphi(B), \varphi(A)]$ si $\varphi' < 0$. Dans le premier cas on dit que φ préserve l'orientation, dans le second que φ change l'orientation.

(ii) L'hypothèse que φ est un C^1-difféomorphisme peut être affaiblie. On verra dans la démonstration qu'il suffit en effet de supposer que $\varphi \in C^1([A, B])$. L'intérêt des considérations ci-dessus concernant les difféomorphismes est de vous donner une première introduction aux notions qui permettront la généralisation du TCV aux fonctions sur $\mathbb{R}^n$ en analyse 2, et plus tard en géométrie différentielle.

Avant de prouver le théorème, nous établissons une formule très utile donnant la dérivée d'une intégrale, considérée comme fonction de ses bornes d'intégration.

8.3.7 Proposition

Soit ψ *et* φ *deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert* I *et à valeurs dans* $[a, b]$. *Si* f *est continue sur* $[a, b]$, *alors on a, pour tout* $t \in I$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} f(y)dy = f(\varphi(t))\varphi'(t) - f(\psi(t))\psi'(t).$$

Démonstration Il suffit de montrer que

$$\frac{d}{dt}\int_a^{\varphi(t)} f(y)dy = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,, \quad \forall\, t \in I\,. \tag{8.18}$$

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Nous avons alors que

$$\frac{d}{dt}\int_a^{\varphi(t)} f(y)dy = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,. \ \blacklozenge$$

Démonstration du théorème 8.3.5 On pose

$$g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in [A,B]$$

et

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \quad x \in [a,b]\,.$$

Par (8.18), la fonction G définie par

$$G(t) = F(\varphi(t)) = \int_a^{\varphi(t)} f(y)dy\,, \quad t \in [A,B]\,,$$

est une primitive de g sur $[A,B]$. Alors, par le théorème fondamental, on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(B)) - F(\varphi(A)) = G(B) - G(A) = \int_A^B g(t)dt\,. \ \blacklozenge$$

Le théorème du changement de variable est énoncé ci-dessus pour les intégrales définies. Il exprime comment la valeur d'une intégrale est obtenue de deux manières différentes lorsque l'on applique un difféomorphisme au domaine d'intégration.

En pratique, la méthode du changement de variable permet de simplifier la recherche de primitive. C'est le cas lorsque

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad \text{est plus facile à trouver que} \quad \int f(x)dx\,.$$

Dans la recherche de primitive, on peut se permettre d'utiliser des changements de variable sans vérifier soigneusement qu'on a affaire à des difféomorphismes, **pour autant que l'on vérifie le résultat obtenu a posteriori**.

8.3.8 Exemple

(i) On cherche à calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{Ax+B}dx\,,$$

pour $A, B \in \mathbb{R}$, $A > 0$. On fait le changement de variable $t = \sqrt{Ax+B}$, i.e.

$$\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (-B/A,\infty), \quad t \mapsto x = \varphi(t) = \frac{t^2 - B}{A} \qquad \varphi'(t) = \frac{2}{A}t\,.$$

Donc φ est bien un difféomorphisme, avec $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in (0,\infty)$. La primitive auxiliaire est donnée par

$$\int t\frac{2}{A}tdt = \frac{2}{A}\int t^2 dt = \frac{2}{3A}t^3 + c, \quad t \in (0,\infty)\,,$$

d'où

$$\int \sqrt{Ax+B}dx = \frac{2}{3A}(Ax+B)^{3/2} + c\,, \quad x \in (-B/A,\infty)\,.$$

(ii) Avec le même changement de variable nous pouvons calculer, pour $x > -B/A$, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{Ax+B}}.$$

La primitive auxiliaire est donnée par

$$\int \frac{1}{t}\frac{t^2-B}{A}\frac{2}{A}tdt = \frac{2}{A^2}\int (t^2 - B)dt = \frac{2}{A^2}\left(\frac{t^3}{3} - Bt\right) + c\,, \quad t \in (0,\infty)\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{Ax+B}} &= \frac{2}{A^2}\left(\frac{(\sqrt{Ax+B})^3}{3} - B\sqrt{Ax+B}\right) + c \\ &= \frac{2}{A^2}\sqrt{Ax+B}\left(\frac{Ax-2B}{3}\right) + c\,, \quad x \in (-B/A,\infty)\,.\end{aligned}$$

(iii) Pour calculer l'intégrale

$$\int \sqrt{1-x^2}dx\,, \quad x \in [-1,1]\,,$$

utilisons le changement de variable

$$\varphi : (-\pi/2,\pi/2) \longrightarrow (-1,1)\,, \quad t \mapsto x = \varphi(t) = \sin(t) \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(t) = \cos(t)\,.$$

Nous avons alors l'intégrale auxiliaire

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt &= \int \cos^2(t)dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int \cos(2t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + c \\ &= \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) + c\,, \quad t \in (-\pi/2,\pi/2)\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + c\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

On obtient alors

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + c\,, \quad x \in [-1,1]$$

en prolongeant par continuité.

(iv) Considérons maintenant l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,, \quad x \in [1,\infty)\,.$$

Nous effectuons le changement de variable

$$\varphi:\ (0,\infty) \longrightarrow (1,\infty)\,, \quad t \mapsto x = \varphi(t) = \cosh(t) \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(t) = \sinh(t)\,,$$

et nous obtenons la primitive auxiliaire

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\cosh^2(t)-1}\,\sinh(t)dt &= \int \sinh^2(t)dt \\
&= \frac{1}{4}\int (e^{2t}+e^{-2t}-2)dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right) + c = \frac{1}{4}(\sinh(2t)-2t) + c \\
&= \frac{1}{2}\sinh(t)\cosh(t) - \frac{1}{2}t + c\,, \quad t \in (0,\infty)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, en prolongeant par continuité,

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c\,, \quad x \in [1,\infty)\,.$$

(v) Nous donnons à présent une application géométrique simple de l'intégrale définie : le calcul de l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\,,\ a > b > 0\,.$$

Un quart du domaine se trouve dans le premier quadrant, délimité par les axes de coordonnées et la courbe d'équation $y = b\sqrt{1-x^2/a^2}$, $0 \le x \le a$. Nous avons alors que l'aire totale est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 4\int_0^a b\sqrt{1-x^2/a^2} = 4b\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}a\cos(t)dt \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))dt \\
&= 4ab\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab\,.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le changement de variable $x = a\sin(t)$.

8.4 Théorèmes de convergence

Nous terminons ce chapitre par deux théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour passer à la limite dans l'intégrale d'une suite de fonctions.

8.4.1 Théorème *(convergence uniforme)*

Soit $a < b$ et considérons une suite de fonctions f_n continues sur $[a, b]$ telles que $f_n \xrightarrow{U} f \quad (n \to \infty)$. Alors f est intégrable et on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{8.19}$$

L'existence de la limite fait partie du théorème.

Démonstration La fonction f est continue comme limite uniforme de fonctions continues ; elle est donc intégrable. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\,,$$

pour tout $n \geq N$. Ainsi,

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\,,$$

pour tout $n \geq N$. Le nombre $\varepsilon > 0$ étant quelconque, nous avons prouvé le théorème de la convergence uniforme. ♦

8.4.2 Remarque

La théorie de Lebesgue propose une version beaucoup plus souple de ce théorème qui ne nécessite pas la convergence uniforme. C'est en effet une propriété très forte qui s'avère difficile à vérifier en pratique. Le théorème proposé par Lebesgue est appelée *théorème de la convergence dominée.* Il dit essentiellement que l'on peut “passer la limite sous le signe intégrale” si toutes les fonctions f_n sont majorées par une même fonction g intégrable, i.e. si $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout point x dans le domaine d'intégration. C'est ce théorème qui est le plus souvent utilisé en pratique.

8.4.3 Théorème *(convergence monotone)*

Soit $a < b$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante) de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant ponctuellement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Démonstration Utiliser le théorème de Dini (6.2.2) et le théorème précédent. ♦

Ouvrages de référence

Il existe des centaines de livres traitant de la matière couverte dans le cours, plus ou moins bons, avec divers points de vue (certains plus calculatoires, d'autres plus géométriques, plus abstraits ou plus généraux). J'indique ci-dessous quelques ouvrages assez différents les uns des autres, et qui peuvent compléter le présent texte dans plusieurs directions :

— Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral. Tome 1*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2016.

— Roger Godement, *Analyse mathématique I*, Springer, 2001.

— Nikolaï Piskounov, *Calcul différentiel et intégral. Tome 1*, Ellipses, 1993.

— Walter Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Dunod, 2006.